М. И. ИСРОИЛОВ

ҲИСОБЛАШ МЕТОДЛАРИ

I ҚИСМ

ЎзССР Олий ва ўрта махсус таълим министрлиги университетлар ва олий техника ўқув юртларининг студентлари учун ўқув қўлланмаси сифатида тасдиқлаган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1988

Тақризчилар: физика-математика фанлари доктори Н. Муҳиддинов
физика-математика фанлари кандидатлари, доцентлар
М. М. Суяршоев, Х. Т. Тўраев.

Махсус муҳаррир; физика-математика фанлари кандидати, доцент
З. Ж. Жамолов.

Ушбу қўлланма университетлар, педагогика институтлари ва олий техника ўқув юртларининг «Ҳисоблаш методлари» курси материалини ўз ичига олади. Китобда ҳозирги замон ҳисоблаш математикасининг ютуқлари ўз аксини топган.

Китоб университет, педагогика институтлари ва олий техника ўқув юртлари студентларига мўлжалланган.

И $\frac{1702070000-108}{353(04)88}$ инф. п.—88

ISBN 5—645—00237—7

СЎЗ БОШИ

Ҳисоблаш методлари курсига бағишланган китоблар рус ва чет тилларда кўплаб чоп этилган бўлишига қарамай, бундай китоблар ўзбек тилида шу дамгача яратилмаган. Шуиинг учун ҳозирги замон фан ва техникасининг тараққиётини акс эттирувчи ўзбек тилидаги ҳисоблаш методлари курсига доир дарсликларнинг яратилиши муҳимдир. Чунки республикамиз олий ўқув юртларида ҳозирги замон талабларига тўла жавоб берадиган юқори малакали мутахассислар тайёрлаш, айниқса тайёрланадиган мутахассисларнинг ҳисоблаш математикасидан оладиган билим даражаси тобора юқори ва пухта бўлиши алоҳида аҳамиятга эгадир. Бу эса студентларимизни она тилида ёзилган дарсликлар билан таъминлашга бевосита боғлиқдир.

Мазкур китоб муаллифнинг узоқ йиллар давомида В. И. Ленин номли Тошкент Давлат университетининг математика, амалий математика ва механика факультетларида ҳамда университет қошидаги малака ошириш факультетида «Ҳисоблаш методлари» курси бўйича ўқиган лекциялари асосида ёзилган бўлиб, у университетларнинг «Амалий математика» 01.02.00, «Математика» 01.01.00 ва «Механика» 01.04.00 ихтисослари учун «Ҳисоблаш методлари» курси программаларининг биринчи қисмига мос келади. Қўлланма университетларнинг «математика» ва «амалий математика» ихтисосликлари бўйича ўқувчи студентлар учун мўлжалланган бўлиб, ундан педагогика институтлари, олий техника ўқув юртлари студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Китобни ёзишда машҳур совет ва чет эл олимлари томонидан яратилган адабиётлардан, шу жумладан Н. С. Бахвалов, И. С. Березин ва П. Н. Жидков, В. И. Крилов, В. В. Бобков ва П. Н. Монастирний, Г. И. Марчук, И. П. Мисовских, Г. А. Михайлов, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, Д. Қ. Фадеев ва В. Н. Фаддеева, Ж. Х. Уилкинсон дарсликлари ва монографияларидан фойдаланилди.

Ўзбек тилида бунгача ҳисоблаш методлари бўйича дарслик ҳамда мисол ва масалаларга доир қўлланмалар бўлмаганлигини ҳисобга олиб, асосий ғоя янада тушунарли бўлиши учун, китобда баён этилган деярли барча методлар учун содда бўлса-да, мисоллар келтирилган ва ҳар бир бобнинг охирида машқлар берилган.

Бу китобнинг махсус муҳаррири физика-математика фанлари кандидати, доцент З. Жамолов, тақризчилари физика-математика фанлари доктори Н. Муҳиддинов ва физика-математика фанлари кандидатлари, доцентлар Ҳ. Т. Тўраев, М. М. Суяршоевлар китоб қўлёзмасини синчиклаб ўқиб чиқиб, ўз фикр-мулоҳазаларини билдиришди. Шунингдек, Р. Жўрақулов, А. Соатмуродов ва Б. Эшдавлатовлар китобни нашрга тайёрлашда ўз ҳиссаларини қўшишди. Фурсатдан фойдаланиб, номлари зикр қилинган ўртоқларга миннатдорчилик билдиришни ўз бурчим деб биламан.

«Ҳисоблаш методлари» китоби бу соҳада ўзбек тилида илк тажрибадир, табиийки, у камчиликлардан холи бўлмаса керак. Шунинг учун ҳам, китоб ҳақидаги барча фикр ва мулоҳазаларни зўр мамнуният билан қабул қиламан.

Муаллиф.

ҚИРИШ

1-§. ҲИСОБЛАШ МАТЕМАТИКАСИНИНГ ПРЕДМЕТИ ВА МЕТОДИ

Математика турмуш масалаларини ечишга бўлган эҳтиёж (юзлар ва ҳажмларни ўлчаш, кема ҳаракатини бошқариш, юлдузлар ҳаракатини кузатиш ва бошқалар) туфайли вужудга келганлиги учун ҳам у сонли математика, яъни ҳисоблаш математикаси бўлиб, унинг мақсади эса масала ечимини сон шаклида топишдан иборат эди. Бу фикрга ишонч ҳосил қилиш учун математика тарихига назар ташлаш кифоядир.

Вавилон олимларининг асосий фаолияти математик жадваллар тузишдан иборат бўлган. Шу жадваллардан бизгача етиб келганларидан бири милоддан 2000 йил аввал тузилган бўлиб, унда 1 дан 60 гача бўлган сонларнинг квадратлари келтирилган. Милоддан аввалги 747-йилда тузилган бошқа бир жадвалда Ой ва Қуёшнинг тутилиш вақтлари келтирилган. Қадимий мисрликлар ҳам фаол ҳисобчилар бўлганлар. Улар мураккаб (аликвота ёки Миср касрлари деб аталувчи) касрларни сурати бирга тенг бўлган оддий касрлар йиғиндиси (масалан: $\frac{3}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{66}$) шаклида ифодаловчи жадваллар тузишган ва чизиқли бўлмаган алгебраик тенгламаларни ечиш учун ватарлар усулини яратишган. Грек математикларига келсак, милоддан аввал 220- йиллар атрофида Архимед π сони учун $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ тенгсизликни кўрсатди. Героннинг милоддан аввалги 100-йиллар атрофида ушбу $\sqrt{a} \approx \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ итерацион методдан фойдаланганлиги маълум. Диофант III асрда аниқмас тенгламаларни ечишдан ташқари квадрат тенгламаларни сонли ечиш усулини яратган.

IX асрда яшаган буюк ўзбек математиги Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмий ҳисоблаш методларини яратишга катта ҳисса қўшган. Ал-Хоразмий $\pi \approx 3{,}1416$ қийматни аниқлади, математик жадвалларни тузишда фаол қатнашди. Абулвафо ал-Бузжоний 960-йилда синуслар жадвалини ҳисоблаш методини ишлаб чиқди ва $\sin\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ нинг қийматини тўққизта ишончли рақами билан берди. Бундан ташқари, у „tg“ функциясидан фойдаланди ва унинг қийматлари жадвалини тузди. XVII асрда инглиз математиги Ж. Непер (1614, 1619), швециялик Й. Бюрги (1620), инглиз Бригс (1617), голландиялик А. Влакк (1628) ва бошқалар томонидан яратилган логарифмик жадваллар Лаплас сўзи билан айтганда: „... ҳисоблашларни қисқартириб, астрономларнинг умрини узайтирди“.

Ниҳоят, 1845 йилда Адамс ва 1846 йилда Леверьеларнинг ҳисоблашлари натижасида Нептун сайёрасининг мавжудлиги ва унинг фазодаги ўрнини олдиндан айтишлари ҳисоблаш математикасининг буюк ғалабаси эди. Татбиқий масалаларни сонли ечиш математиклар эътиборини доим ўзига тортар эди. Шунинг учун ҳам ўтган замоннинг буюк математиклари ўз тадқиқотларида табиий жараёнларни ўрганиш, уларнинг моделларини тузиш ва моделларни тадқиқ этиш ишларини бирга қўшиб олиб боришган. Улар бу моделларни текшириш учун махсус ҳисоблаш методларини яратишган. Бу методларнинг айримлари Ньютон, Эйлер, Лобачевский, Гаусс, Чебишев, Эрмит номлари билан боғлиқдир. Бу шундан далолат берадики, ҳисоблаш методларини яратишда ўз замонасининг буюк математиклари шуғулланишган.

Шуни ҳам айтиш керакки, лимитлар назарияси яратилгандан сўнг математикларнинг асосий диққат-эътибори математик методларга қатъий мантиқий замин тайёрлашга, бу методлар қўлланиладиган объектлар сонини орттиришга, математик объектларни сифат жиҳатдан ўрганишга қаратилган эди. Натижада математиканинг жуда муҳим ва айни пайтда кўпинча қийинчилик туғдирадиган соҳаси: математик тадқиқотларни сўнгги сонли натижаларгача етказиш, яъни ҳисоблаш методлари яратишга кам эътибор берилар эди, бу соҳа эса математиканинг татбиқлари учун жуда зарурдир.

Математиканинг ҳозирги замон фан ва техникасининг хилма-хил соҳаларидаги татбиқларида, одатда, шундай типик математик масалаларга дуч келинадики, уларни классик методлар билан ечиш мумкин эмас ёки ечиш мумкин бўлган тақдирда ҳам ечим шундай мураккаб кўринишда бўладики, ундан самарали фойдаланишнинг иложи бўлмайди. Бундай типик математик масалаларга алгебра (одатда тартиби жуда катта бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш, матрицаларнинг тескарисини топиш, матрицаларнинг хос сонларини топиш, алгебраик ва трансцендент тенгламалар ҳамда бундай тенгламалар системасини ечиш), математик анализ (сонли интеграллаш ва дифференциаллаш, функцияни яқинлаштириш масалалари) ҳамда оддий ва хусусий ҳосилавий дифференциал тенгламаларни ечиш масалалари ва бошқалар киради.

Фан ва техниканинг жадал равишда ривожланиши, атом ядросидан фойдаланиш, учувчи аппаратлар (самолёт, ракета) ни лойиҳалаш, космик учиш динамикаси, бошқариладиган термоядро синтези муаммоси муносабати билан плазма физикасини ўрганиш ва шунга ўхшаш кўп масалаларни текшириш ва ечишни тақозо қилмоқда. Бундай масалалар ўз навбатида математиклар олдига янгидан-янги ҳисоблаш методларини яратиш вазифасини қўяди. Иккинчи томондан фан ва техника ютуқлари математиклар ихтиёрига кучли ҳисоблаш воситаларини бермоқда. Бунинг натижасида эса мавжуд методларни янги машиналарда қўллаш учун қайтадан кўриб чиқиш эҳтиёжи туғилмоқда.

Математикада типик математик масалаларнинг ечимларини етарлича аниқликда ҳисоблаш имконини берувчи методлар яратишга ва шу мақсадда ҳозирги замон ҳисоблаш воситаларидан фойдаланиш йўлларини ишлаб чиқишга бағишланган соҳа *ҳисоблаш математикаси* дейилади.

Ҳозирги замон ҳисоблаш математикаси жадал ривожланиб бормоқда. Ҳисоблаш математикаси қамраган масалалар тури жуда кўп. Табиийки, бу масалаларни ечиш методлари ҳам хилма-хилдир, шунга қарамай бу методларнинг умумий ғояси ҳақида сўз юритиш мумкин. Бунинг учун аввал функционал анализга тегишли бўлган айрим тушунчаларни келтирамиз. Агар бирор тўпламда у ёки бу йўл билан лимит тушунчаси киритилган бўлса, у ҳолда бу тўплам абстракт фазо дейилади.

Элементлари кетма-кетликлардан ёки функциялардан иборат бўлган фазо функционал фазо дейилади. Бирор R_1 функционал фазони иккинчи бир R_2 функционал фазога акслантирадиган A амал *оператор* дейилади. Агар операторнинг қийматлари ташкил этган R_2 фазо сонли фазо бўлса, у ҳолда бундай оператор *функционал* дейилади.

Ҳисоблаш математикасида учрайдиган кўп масалаларни

$$y = Ax \qquad (1)$$

шаклида ёзиш мумкин, бу ерда x ва y берилган R_1 ва R_2 функционал фазоларнинг элементлари бўлиб, A — оператор ёки хусусий ҳолда функционалдир. Агар A оператор ва x элемент ҳақида маълумот берилган бўлиб, y ни топиш лозим бўлса, бундай масала *тўғри масала* дейилади. Аксинча, A ва y ҳақида маълумот берилган бўлиб, x ни топиш керак бўлса, бундай масала *тескари масала* дейилади. Одатда, тескари масалани ечиш анча мураккабдир. Бу масалалар ҳар доим ҳам аниқ ечилавермайди. Бундай ҳолларда ҳисоблаш математикасига мурожаат қилинади.

Баъзан масалани аниқ ечиш ҳам мумкин, лекин классик математика методлари билан керакли сонли қиймат олиш учун жуда кўп ҳисоблашлар талаб қилинади. Шунинг учун ҳам ҳисоблаш математикаси зиммасига конкрет масалаларни ечиш учун оқилона ва тежамкор методлар ишлаб чиқиш юкланади (масалан, чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишда Крамер формулаларига нисбатан Гаусс методи анча тежамкор методдир).

Ҳисоблаш математикасида юқоридаги масалаларни ҳал қилишнинг асосий моҳияти R_1, R_2 фазоларни ва A операторни ҳисоблаш учун қулай бўлган, мос равишда бошқа $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ фазолар ва $\overline{A}$ оператор билан алмаштиришдан иборатдир. Баъзан фақат R_1 ва

R_2 фазолар ёки фақатгина улардан бирортасини, баъзан эса фақат A операторни алмаштириш кифоядир. Бу алмаштиришлар шундай бажарилиши кераккки, натижада ҳосил бўлган янги

$$\bar{y}=\bar{A}\bar{x} \quad (\bar{x}\in \bar{R}_1, \ y\in \overline{R}_2)$$

масаланинг ечими бирор маънода берилган (1) масаланинг ечимига яқин бўлсин ва бу ечимни нисбатан кўп меҳнат сарфламасдан топиш мумкин бўлсин.

Бунга мисол сифатида шуни кўрсатиш мумкинки, одатда математик физика тенгламалари у ёки бу структурага эга бўлган алгебраик тенгламалар системасига келтирилиб ечилади.

Демак, ҳисоблаш математикаси олдидаги асосий масала функционал фазоларда тўпламларни ва уларда аниқланган операторлар (функционаллар)ни яқинлаштириш ҳамда ҳозирги замон ҳисоблаш машиналари қўлланиладиган шароитда масалаларни ечиш учун оқилона ва тежамкор алгоритм ва методлар ишлаб чиқишдан иборатдир.

2-§. ҲОЗИРГИ ЗАМОН ҲИСОБЛАШ МАШИНАЛАРИ ВА СОНЛИ МЕТОДЛАР НАЗАРИЯСИ, УЛАРНИНГ ЎЗАРО АЛОҚАСИ ВА ТАЪСИРИ

Конкрет математик масалани у ёки бу ҳисоблаш методи билан ечиш учун ҳисобловчи ихтиёрида бўлган ҳисоблаш машиналарининг имкониятлари эътиборга олиниши керак. Ҳозирги замон ҳисоблаш машиналари информацияни тасвирлаш усулига кўра икки синфга бўлинади:

Аналогли ёки моделловчи ҳисоблаш машиналари. Бу машиналарда информация узлуксиз равишда ўзгарадиган физик миқдорлар (чизиқнинг узунлиги, валнинг айланиш бурчаги, электр токининг қуввати, кучланиши ва ҳ. к.) ёрдамида тасвирланади. Буларда, одатда бирон физик жараён ёрдамида у ёки бу математик масалани моделлайди. Бундай машинага ҳозиргача кенг тарқалган логарифмик линейка мисол бўла олади.

Иттифоқимизда аналогли машиналардан планиметрлар, интеграфлар, гармоник ва дифференциал анализаторлар, электро- ва гидро-анализаторлар ишлатилади. Аналогли машиналарнинг аниқлиги одатда катта бўлмайди ва улар тор синфдаги махсус масалаларни ечиш учун мўлжалланади.

Рақамли ҳисоблаш машиналари. Буларда информация бирор физик миқдорнинг дискрет қийматлари ёрдамида тасвирланади ва бу машиналар бирор саноқ системаси (иккилик, учлик, ўнлик ва ҳ. к.) да тасвирланган сонлар устида амаллар бажаради; ҳисоб натижаси яна бирор саноқ системасида ёзилади. Ҳисобнинг аниқлиги машина сўзи разрядларининг миқдорига боғлиқ. Тарихда биринчи рақамли ҳисоблаш воситаси оддий чўтдир.

Энг содда рақамли ҳисоблаш машиналарига ҳисоблаш жараёни қўл билан бошқариладиган машиналар — арифмометр, клавишли ярим автомат ва автомат машиналар киради. Бу машиналар дастлаб электромеханик элементларда қурилган бўлса, сўнгги вақтда улар электрон элементларда қурилмоқда. Бу машиналарда арифметик амаллар нисбатан тез бажарилишига қарамасдан, ҳисоблаш жараёни механик принципга асосланганлиги сабабли ҳисоблаш тезлиги унча катта бўлмайди. Шунингдек, турли хил статистик, бухгалтерлик ва молия-банк ҳисоблашлари учун *ҳисоб-аналитик машиналари* ишлатилади. Бундай машиналар ўзида доимий жойлаштирилган маълумотлар орқали ҳисоблашларни автоматик равишда бажаради.

Ҳозирги вақтда кенг қўлланиладиган рақамли ҳисоблаш машиналари — бу универсал электрон-ҳисоблаш машиналари (қисқача ЭҲМ)дир. Бу машиналарда ҳисоблаш жараёни бошқариш программаси ёрдамида автоматик равишда олиб борилади. ЭҲМ лар инсоннинг илмий фаолиятидаги катта меҳнат талаб қиладиган жараёнларни автоматлаштиришнинг энг мукаммал намунасидир. ЭҲМ турли арифметик ва мантиқий амалларни катта тезликда ва катта аниқликда бажаради. Программалаштириш ва автоматлаштириш учун бу машиналарда катта имкониятлар мавжуд бўлиб, дастлабки маълумотларни, программаларни, оралиқ ва охирги натижаларни сақлаш учун катта ҳажмдаги хотира қурилмалари мавжуддир.

ЭҲМ ларнинг ривожланиши электрон техникасининг муваффақиятлари билан чамбарчас боғлиқдир. Биринчи ЭҲМ лар электрон лампалар ёрдамида қурилган бўлиб, улар биринчи авлод ҳисоблаш машиналари дейилади.

Радиоэлектрониканинг ривожланиши туфайли асосан ярим ўтказгичли элементлар (транзисторлар)дан қурилган иккинчи авлод ҳисоблаш машиналари бунёдга келиб, улар биринчи авлод машиналаридан ҳар томонлама устундир. Учинчи авлод машиналари эса интеграл схемаларда қурилган бўлиб, бундай машиналарнинг ҳар бир модули ўнлаб транзисторлардан иборатдир. Уларнинг қурилиш технологияси аввалгиларидан катта фарқ қилади.

Бу ЭҲМ лар программадан программага ўтиш жараёнини операцион система ёрдамида, инсоннинг иштирокисиз, узлуксиз равишда бажара оладилар.

Тўртинчи авлод ЭҲМ лари катта интеграл схемаларни қўлланишига асосланган, бу схемалар битта массивда ярим ўтказгичли материалдан қурилган ўнлаб электр занжирлар бирлашмаси кўринишида бўлган ва ички боғланишлар билан бирлаштирилган ягона функционал блокдир. Уларнинг ҳисоблаш тезлиги бир секундда бир неча ўн миллион амаллар бажарилишига мўлжалланган.

Бешинчи авлод келажак ЭҲМ лари оптик-электрон элементларга асосланган бўлиб, уларнинг ҳисоблаш тезлиги бир секундда бир миллиардгача амаллар бажарилишига мўлжалланади.

Юқорида таъкидланганидек, математиклар ихтиёридаги бундай ҳисоблаш машиналари ечилиши керак бўлган масалалар синфини ва уларни ечиш учун ҳисоблаш методларини танлашни тақозо этади. Маълумки, рақамли ҳисоблаш машиналари арифметик ва мантиқий амалларни бажаради. Демак, ҳар бир математик масалани ечиш учун шундай метод танлашимиз керакки, у берилган масалани биз эга бўлган машина бажара оладиган амаллар кетма-кетлигига келтирсин. Бундан ташқари, машинанинг тезлиги ва хотирасининг сиғимига қараб, амалда бажарилиши мумкин бўлган ҳисоблашлар ҳажмини ҳам аниқлаш мумкин. Ҳисоблаш машинаси қанчалик мукаммал бўлса, у шунчалик мураккаб масалани ечишга имкон беради. Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, ЭҲМ ларнинг тараққиёти билан ҳисоблаш математикаси жуда тез ривожланмоқда. Унинг янги бўлимлари, масалан, ўйинлар назарияси, оммавий хизмат назарияси, комбинаторика, мантиқий функцияларни минималлаштиришга доир ҳисоблаш методлари вужудга келмоқда. Булар эса ўз навбатида янада мукаммалроқ ҳисоблаш машиналарини лойиҳалаш учун хизмат қилади.

Масалани ЭҲМ ларда ечишнинг ўзига хос томонлари бор. Шунинг учун уларга бир оз тўхталиб ўтамиз. Ҳар бир ҳисоблаш иши пухта планлаштиришни талаб қилади, яъни ҳисоблаш жараёнининг шундай схемасини тузиш керакки, у оралиқдаги ва охирги натижаларни назорат қилиш учун имкон берсин. Акс ҳолда турли хатоларга йўл қўйилиши мумкин, ҳозирги ЭҲМ лар соатига ўн миллиардлаб амал бажаради ва бу ҳисоблашлар автоматик равишда, ҳисобловчининг иштирокисиз бажарилади.

Шунинг учун ҳам ҳисобловчи ҳисоблаш машинасининг барча ишини шундай планлаштириши керакки, масалани ечиш жараёнида учрайдиган ҳар бир махсус ҳолларга машина эътибор берадиган бўлсин. У керакли алгоритмнинг бажарилишини таъминлаши керак, яъни масалани ечишнинг программасини тузиши керак. Ҳатто элементар амалларни қайси тартибда бажарилиши катта аҳамиятга эга. Бунга изоҳ бериб ўтамиз. Ҳисоблаш жараёнида, одатда, яхлитлаш амали бажарилади, бунинг натижасида ҳисоблаш хатоси вужудга келади. Рақамли ҳисоблаш машиналарида, умуман айтганда, кўпайтириш ва бўлиш амаллари фақат олинган натижанинг яхлитланиши билан бирга ўринли бўлади. Шунинг учун ҳам, аслидаги $x \cdot y$ кўпайтириш ва x/y бўлиш амаллари «псевдокўпайтириш» $x * y$ ва «псевдобўлиш» $x : y$ амали билан алмаштирилади. Бундай «псевдоамаллар» учун ассоциативлик ва дистрибутивлик қонунлари бажарилмайди.

Масалан, вергулдан кейин уч хона аниқликда ҳисоблайдиган бўлсак, $(0{,}642+0{,}439) * 0{,}275=0{,}297$ бўлиб, шу билан бирга $0{,}642 * 0{,}275+0{,}439 * 0{,}275=0{,}298$ бўлади, яъни ҳар хил натижага эга бўламиз.

ЭҲМ ларнинг мураккаб масалаларни ечишга қўлланилиши алгоритмларнинг турғунлигини талаб қилади. Бунинг маъноси шундан иборатки, одатда бирор натижани олиш учун кўрсатилган метод билан кетма-кет ҳисоблашларни бажариш керак, агар аниқликни орттирсак, бу ҳисоблашлар кетма-кетлиги янада катталашади. Ҳисоблашнинг бирор қадамида йўл қўйилган хато кейинги қадамларда ҳам ўз таъсирини кўрсатади. Бу таъсир турли алгоритм учун турличадир.

Агар ҳисоблашнинг дастлабки қадамларида йўл қўйилган хато, кейинги қадамларда ҳисоблаш аниқ бажарилганда ортмаса ёки ҳеч бўлмаганда бир хил тартибда бўлса, у ҳолда ҳисоблаш алгоритми *дастлабки хатога нисбатан турғун* дейилади. Агарда қадамдан қадамга ўтганда хато ортиб борса, у вақтда *алгоритм нотурғун* дейилади. Масалан, ҳисоблаш қуйидаги

$$y_{n+1} = -10y_n + 2y_{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{2}$$

рекуррент формула ёрдамида олиб борилсин. Фараз қилайлик, y_{n-1} ҳисобланаётганда ε хатога йўл қўйилган бўлиб (бу яхлитлаш ҳисобидан бўлиши мумкин), y_n аниқ топилган бўлсин. Кейинги ҳисоблашлар аниқ олиб борилган деб фараз қилсак, ε хатонинг таъсири натижасида y_{n+1} 2ε хато билан, y_{n+2} — 20ε хато билан, y_{n+3} эса 204ε хато билан аниқланади ва бундан кейинги қадамларда хато тез ўсиб боради. Демак, (2) формула билан бўладиган ҳисоблаш жараёни нотурғун экан, бундай формула билан ҳисоблаш қатъиян ман қилинади.

Турғун бўлмаган алгоритмга олиб келадиган ҳисоблаш методлари масалани тақрибий ечиш учун яроқсиздир. Ҳозирги вақтда, ҳисоблаш методлари ва алгоритмларининг турли хатоларга, шу жумладан, яхлитлаш хатосига нисбатан турғунлигини текшириш ҳисоблаш математикасининг муҳим йўналишларидан бири бўлиб қолди. Иккинчидан, ЭҲМларда ечиладиган масалаларнинг алгоритмлари шундай бир жинсли ва циклик жараёнларнинг кетма-кетлиги шаклида ёзилиши керакки, унда натижа соддароқ алгоритмни кўп марта қўллаш йўли билан ҳосил бўлсин.

Ҳар бир конкрет машина тилида программа тузиш жуда кўп меҳнат талаб қилади. Шунинг учун ҳам одам билан конкрет машина ўртасида воситачи вазифасини бажарадиган тиллар яратиш катта аҳамият касб этади. Бу тилларда ёзилган программаларни махсус программа-трансляторлар конкрет машина тилига ўтказади. Ҳозирги вақтда кенг тарқалган тиллар алгол, фортран, кобол ҳисобланади. Бу масалалар билан ҳисоблаш математикасининг махсус бўлими — программалаш назарияси шуғулланади.

Ушбу китоб асосан ҳисоблаш математикасининг ҳисоблаш методлари бўлимига оид материалларни ўз ичига олади. Китоб университетлар учун мўлжалланган «Ҳисоблаш методлари» программасига мос келади. Ундан ҳисоблаш математикаси ихтисоси бўйича таълим олаётган бошқа олий ўқув юртларининг студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Китобнинг 1-бобида ҳисоблаш хатосини баҳолаш масаласи қаралади. 2-боб алгебраик ва трансцендент тенгламалар ҳамда уларни ечишга бағишланган. 3- ва 4- бобларда чизиқли алгебра масалалари чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш ва хос сон ҳамда хос векторларни топиш қаралади, 5- бобда интерполяциялаш масаласи, 6- бобда функцияларнинг ҳар хил яқинлашишлари: ўрта квадратик, текис яқинлашиш ва сплайн функциялар билан яқинлашиш масалалари қаралади. Ниҳоят, 7- боб тақрибий интеграллаш масаласига бағишланган. Китобда келтирилган методлар қатъий асосланган ҳолда берилган бўлиб, уларнинг ғоялари содда мисолларда тушунтирилади.

1- БОБ. МАСАЛАЛАРНИ СОНЛИ ЕЧИШДАГИ НАТИЖАНИНГ ХАТОСИ

1- §. ХАТОЛАР МАНБАИ

Кўпинча математик масалаларни сонли ечишда биз доимо аниқ ечимга эга бўла олмасдан, балки ечимни у ёки бу даражадаги аниқликда топамиз. Демак, аниқ ечим билан тақрибий ечим орасидаги хатолик қандай қилиб келиб қолади деган савол туғилиши табиийдир. Бу саволга жавоб бериш учун хатоликларнинг ҳосил бўлиш сабабларини ўрганиш лозим.

1. Математикада табиат ҳодисаларининг миқдорий нисбати у ёки бу функцияларни бир-бирлари билан боғлайдиган тенгламалар ёрдамида тасвирланади ва бу функцияларнинг бир қисми маълум бўлиб *(дастлабки маълумотлар)*, бошқаларини топишга тўғри келади. Табиийки, топилиши керак бўлган миқдорлар (масаланинг ечими) дастлабки маълумотларнинг функцияси бўлади. Керакли ечимни ажратиб олиш учун дастлабки маълумотларга конкрет қийматлар бериш керак. Бу дастлабки маълумотлар, одатда, тажрибадан олинади (масалан, ёруғлик тезлиги, Планк доимийси, Авогадро сони ва ҳ. к.) ёки бошқа бирор масалани ечишдан ҳосил бўлади. Ҳар иккала ҳолда ҳам биз дастлабки маълумотларнинг аниқ қийматига эмас, балки унинг тақрибий қийматига эга бўламиз. Шунинг учун агар дастлабки маълумотларнинг ҳар бир қиймати учун тенгламани аниқ ечганимизда ҳам, бари бир (дастлабки маълумотлардаги қийматлар тақрибий бўлганлиги учун) тақрибий натижага эга бўламиз ва натижанинг аниқлиги дастлабки маълумотларнинг аниқлигига боғлиқ бўлади.

Аниқ ечим билан тақрибий ечим орасидаги фарқ *хато* дейилади. Дастлабки маълумотларнинг ноаниқлиги натижасида ҳосил бўлган хато *йўқотилмас хато* дейилади. Бу хато масалани ечаётган математикка боғлиқ бўлмасдан, унга берилган маълумотларнинг аниқлигига боғлиқдир. Лекин математик дастлабки маълумотлар хатосининг катталигини билиши ва шунга қараб натижанинг йўқотилмас хатосини баҳолаши керак. Агар дастлабки маълумотларнинг аниқлиги катта бўлмаса, аниқлиги жуда катта бўлган методни қўллаш ўринсиздир. Чунки аниқлиги катта бўлган метод кўп меҳнатни (ҳисоблашни) талаб қилади, лекин натижанинг хатоси бари бир йўқотилмас хатодан кам бўлмайди.

2. Баъзи математик ифодалар табиат ҳодисасининг озми-

кўпми идеаллаштирилган моделини тасвирлайди. Шунинг учун табиат ҳодисаларининг аниқ математик ифодасини (формуласини, тенгламасини) бериб бўлмайди, бунинг натижасида хато келиб чиқади. Ёки бирор масала аниқ математик формада ёзилган бўлса ва уни шу кўринишда ечиш мумкин бўлмаса, бундай ҳолда бу масала унга яқинроқ ва ечиш мумкин бўлган масалага алмаштирилиши керак. Бунинг натижасида келиб чиқадиган хато *метод хатоси* дейилади.

3. Биз доимо π, e, $\ln 2$ ва шунга ўхшаш иррационал сонларнинг тақрибий қийматларини оламиз, бундан ташқари, ҳисоблаш жараёнида оралиқ натижаларда кўп хонали сонлар ҳосил бўлади, буларни яхлитлаб олишга тўғри келади. Яъни масалаларни ечишда ҳисоблашни аниқ олиб бормаганлигимиз натижасида ҳам хатога йўл қўямиз, бу хато *ҳисоблаш хатоси* дейилади.

Шундай қилиб, *тўлиқ хато* юқорида айтилган йўқотилмас хато, метод хатоси ва ҳисоблаш хатоларининг йиғиндисидан иборатдир. Равшанки, бирор конкрет масалани ечаётганда юқорида айтилган хатоларнинг айримлари қатнашмаслиги ёки унинг таъсири деярли бўлмаслиги мумкин. Лекин, умуман олганда хато тўлиқ анализ қилиниши учун бу хатоларнинг ҳаммаси ҳисобга олиниши керак.

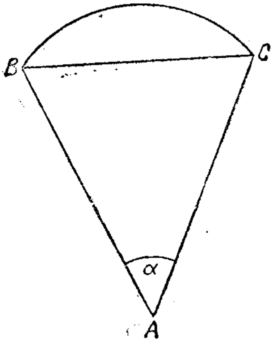
Юқорида келтирилган таърифларни тўлароқ тушунтириш учун қуйидаги мисолни қарайлик.

Мисол. Ён томонлари a га ва улар орасидаги бурчак α га тенг бўлган тенг ёнли ABC учбурчак билан унинг асосини диаметр деб олиб чизилган ярим доирадан ташкил топган фигуранинг юзи S ни ҳисобланг, a ва α ўлчаш натижасида топилган деб олинг.

1-чизмадан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S = \frac{a^2}{2}\left[\sin\alpha + \frac{\pi}{2}(1-\cos\alpha)\right].$$

Агар a^* ва α^* билан мос равишда a ва α ларнинг ўлчаш натижасида топилган қийматларини белгилаб олсак, у ҳолда



1-чизма.

$$S^* = \frac{a^{*2}}{2}\left[\sin\alpha^* + \frac{\pi}{2}(1-\cos\alpha^*)\right]$$

бўлади. Бундан йўқотилмас хато $\rho_1 = S - S^*$ келиб чиқади. Агар қўлимизда тригонометрик функциялар жадвали бўлмаса, биз бу формулани жадвалсиз ҳисоблаш мумкин бўлган бошқа

$$\overline{S} = \frac{a^{*2}}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\alpha^{*2k+1}}{(2k+1)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\alpha^{*2k}}{(2k)!}\right]$$

формула билан алмаштирамиз. Натижада $\rho_2 = S^* - \overline{S}$ метод хатоси келиб чиқади. Агар биз бу ерда $\sin\alpha^*$ ва $\cos\alpha^*$ нинг Тейлор қаторидаги ёйилмасининг **чекли** йиғиндисини эмас, балки узлуксиз касрлардаги ёйилмасининг n-тартибли **мос** касрини олганимизда метод хатоси бошқача бўлар эди.

$\bar{S}$ ни ҳисоблашда π ни тақрибий қиймати билан алмаштириш ва оралиқдаги натижаларни яхлитлашга тўғри келади. Натижада биз $\bar{S}$ ўрнига $\widehat{S}$ га эга бўламиз, шу билан бирга $\rho_3 = \bar{S} - \widetilde{S}$ ҳисоблаш хатоси келиб чиқади. Демак, тўлиқ хато: $\rho = S - \widetilde{S}$ йўқотилмас хато, метод хатоси ва ҳисоблаш хатосининг йиғиндисига тенгдир:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3. \qquad (1.1)$$

Одатда, юқорида келтирилган хатоларнинг ишоралари номаълум, шунинг учун ҳам биз бу хатоларни абсолют қийматлари билан олишимиз керак:

$$\rho_1 = |S - S^*|,\ \rho_2 = |S^* - \widehat{S}|,\ \rho_3 = |\bar{S} - \widehat{S}|,\ \rho = |S - \widetilde{S}|$$

бу ҳолда биз (1. 1) тенглик ўрнида қуйидагига эга бўламиз:

$$\rho \leqslant \rho_1 + \rho_2 + \rho_3.$$

Бу мисолда π ни етарлича катта қилиб олиб, метод хатосини етарлича кичик қилиб олиш мумкин. π сонининг тақрибий қийматини катта аниқлик билан олиб ва ҳисоблашни ҳам катта аниқлик билан бажариб ҳисоблаш хатосини ҳам камайтиришимиз мумкин. Лекин йўқотилмас хатони камайтириш бизнинг ихтиёримизда эмас. Бунинг учун a ва α ларни қайтадан каттароқ аниқлик билан ўлчашга тўғри келади.

Агар бизга a ва α ларни ўлчашдаги хатоларнинг катталиклари берилган бўлса, биз бу хатонинг натижага қанчалик таъсири борлигини кўрсата оламиз.

2-§. ҲИСОБЛАШ ХАТОСИ. ТУРҒУНЛИК ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Масалани қўлда ёки ҳисоблаш машинасида ечаётганда биз барча ҳақиқий сонлар билан иш кўрмасдан, сонларнинг маълум дискрет тўплами билан иш кўрамизки, у ёки бу саноқ системасида маълум миқдордаги хоналар билан олинган сонлар шу тўпламда ётади. Бу тўплам

$$\pm(\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \ldots + \alpha_m q^{n-m+1}) \qquad (2.1)$$

кўринишдаги сонлардан иборат бўлиб, бу ерда натурал сон q — саноқ системасининг асосидир; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — бутун сонлар бўлиб, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant q - 1$ шартни қаноатлантиради; m — бу тўпламдаги сонлар хонасининг миқдори, бутун n сон эса $|n| \leqslant n_0$ шартни қаноатлантиради. Қўлда ҳисоблаётганда, асосан, ўнлик саноқ системаси ($q = 10$) билан иш кўрилади. Кўп ЭҲМ ларда эса иккилик саноқ системаси ($q = 2$) ва айримлари учун учлик саноқ системаси ($q = 3$) ишлатилади.

ЭҲМ ларнинг кўпчилиги шундай тузилганки, уларда $q = 2$, $m = 35$, $n_0 = 63$ ёки $q^{-m} \approx 2^{-35} \approx 3 \cdot 10^{-11}$, $2^{n_0} + 2^{63} \approx 3{,}5 \cdot 10^{19}$ бўлади.

Одатда, арифметик амалларни бажараётганда кўп хонали сонлар ҳосил бўлади (масалан, кўпайтиришда хоналарнинг сони иккиланади, бўлишда эса хоналарнинг сони ниҳоятда катталашиб кетиши ҳам мумкин). Натижада ҳосил бўлган сон қаралаётган тўпламдан чиқиб кетмаслиги учун m-хонасигача яхлитланади, яъни шу тўпламдаги бошқа сон билан алмаштирилади, табиийки яхлитланадиган сон унга энг яқин сон билан алмаштирилиши, яъни яхлитлаш хатоси энг кичик бўлиши керак. Бу қуйидагича бажарилади.

Ҳисоблаш натижасида

$$\pm(\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \ldots + \alpha_m q^{n-m+1} + \alpha_{m+1} q^{n-m}) \qquad (2.2)$$

сон ҳосил бўлсин. У ҳолда, агар $\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} q^{-1} + \ldots < \frac{1}{2} q$ бўлса, (2.2) сонни (2.1)сон билан алмаштирамиз, агарда $\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} \times q^{-1} + \ldots > \frac{1}{2} q$ бўлса, (2.2) сонни

$$\pm [\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \ldots + (\alpha_m + 1) q^{n-m+1}] \qquad (2.3)$$

га алмаштирамиз. Энди шубҳали ҳол

$$\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} q^{-1} + \ldots = \frac{1}{2} q$$

қолди. Бу ҳолда (2.2) сонни биз шундай алмаштирамизки, кейинги амалларни бажариш қулай бўлсин. Айрим ЭҲМ лар шундай қурилганки, шубҳали ҳолда (2.2) сонни (2.3) сонга алмаштиради. Қўлда ҳисоблаётганда кейинги амалларни бажариш қулай бўлиши учун шубҳали ҳолда жуфт рақам қоидаси ишлатилади. Бу қоида қуйидагидан иборатдир. Агар α_m жуфт бўлса, натижа (2.1) га алмаштирилади ва α_m тоқ бўлса, натижа (2.3) га алмаштирилади. Агар биз жуфт рақам қоидасини қўллаб 5,780475 сонини кетма-кет яхлитласак, қуйидаги 5,78048; 5,7805; 5,780; 5,78; 5,8; 6 сонлар келиб чиқади.

Кўпинча бирор натижани олиш учун берилган методда кўрсатилган бир қатор амалларни бажаришга тўғри келади. Агар натижани катта аниқлик билан топиш талаб қилинса, бу қатор янада узайиб кетади.

3-§. ЙЎҚОТИЛМАС ХАТО

Абсолют ва нисбий хатолар. *Ишончли рақамлар ва тақрибий сонларни ёзиш тартиби.* Агар a — бирор миқдорнинг аниқ қиймати бўлиб, a^* унинг маълум тақрибий қиймати бўлса, у вақтда тақрибий a^* соннинг *абсолют хатоси деб* $\Delta a^* = |a - a^*|$ га айтилади. Абсолют хато соннинг аниқлигини тавсифловчи белгиларидан биридир. Абсолют хато фақат назарий аҳамиятга эгадир, чунки биз кўпинча a нинг аниқ қийматини билмаймиз, шунинг учун Δa^* ни ҳам билмаймиз. Лекин биз абсолют хатонинг ўзгариш чегараларини кўрсатишимиз мумкин. Бу чегаралар тақрибий a^* сонни топиш усули билан аниқланади. Масалан, биз ўлчашни оддий чизғич билан бажарсак, абсолют хато 0,5 мм дан ортмайди, агарда штангенциркуль билан бажарган бўлсак, абсолют хато 0,1 мм дан ортмайди. Иррационал сонни рационал сон билан алмаштирилганда ҳам биз абсолют хатони баҳолай олишимиз мумкин. Шунинг учун бизга номаълум бўлган абсолют хато ўрнига янги тушунча киритамиз.

Абсолют хатодан кичик бўлмаган ҳар қандай сонга тақрибий a^* соннинг *лимит абсолют хатоси* $\Delta(a^*)$ деб айтилади. Бу таърифдан $|a-a^*| \leqslant \Delta(a^*)$, бундан эса $a^*-\Delta(a^*) \leqslant a \leqslant a^* + \Delta(a^*)$ келиб чиқади. Бу эса қисқача $a=a^* \pm \Delta(a^*)$ каби ёзилади.

Мисол. π сонини алмаштирадиган тақрибий $\pi^*=3{,}14$ соннинг лимит абсолют хатоси топилсин.

Маълумки, $3{,}14<\pi<3{,}15$, шунинг учун ҳам $|\pi-\pi^*|<0{,}01$. Демак, $\Delta(\pi^*)=0{,}01$ деб олишимиз мумкин. Агар $3{,}14<\pi<3{,}142$ тенгсизликларни назарга олсак, у вақтда биз яхшироқ баҳо $\Delta(\pi^*)=0{,}002$ га эга бўламиз. Лимит абсолют хато $\Delta(a^*)$ сифатида $|a-a^*| \leqslant \Delta(a^*)$ ни қаноатлантирадиган ҳар қандай сонни олиш мумкин. Бундай сонлар чексиз кўп. Шунинг учун ҳам, мантиқан, булар орасидан кичигини танлаб олиш маъқулдир.

Абсолют хато ва лимит абсолют хато ҳисоблаш аниқлигини баҳолаш учун етарли эмас. Масалан, иккита узунлик ўлчанганда $l_1=500{,}2$ см$\pm 0{,}1$ см ва $l_2=10{,}8$ см$\pm 0{,}1$ см натижалар ҳосил бўлсин, бу ерда ҳар иккаласида лимит абсолют хатолар бир хил бўлишидан қатъи назар биринчи ўлчаш иккинчисига нисбатан анча аниқдир. Шунинг учун ҳам аниқликни яхшироқ баҳолайдиган янги тушунча — нисбий хато тушунчасини киритамиз.

Абсолют хатонинг тақрибий миқдорнинг абсолют қийматига нисбати тақрибий соннинг *нисбий хатоси* δa^* деб айтилади:

$$\delta a^* = \frac{\Delta a^*}{|a^*|}.$$

Худди шунга ўхшаш *лимит нисбий хато* $\delta(a^*)$ тушунчаси киритилади:

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|}.$$

Бу ердан $\Delta(a^*) = |a^*|\delta(a)$ келиб чиқади.

Лимит нисбий хато ёрдамида аниқ a сон қуйидагича ёзилади:

$$a = a^*(1 \pm \delta(a^*)).$$

Бундан кейин биз лимит абсолют хато ва лимит нисбий хатони қисқача абсолют ва нисбий хато деймиз. Абсолют хато исмли миқдор бўлиб, нисбий хато исмсиз миқдордир. Нисбий хато одатда процент (%) ва промилля (%) ларда ёзилади. (Бир промилля процентнинг ўндан бир қисмига тенг.)

Соннинг ёзилишидаги, чап томондан биринчи нолдан фарқли рақамидан бошлаб, ҳамма рақамлари *маъноли рақамлар* дейилади. Масалан, $a^*=0{,}\underline{403}$ соннинг маъноли рақамлари учта, уларнинг остига чизилган. Қаср қисмнинг охирги хоналарига қўшимча ноллар ёзиб ёки ноллардан ташлаб соннинг маъноли рақамларини кўпайтириш ёки камайтириш мумкин. Бу билан берилган сон ўзгармайди. Маъноли рақамларнинг сонидаги ноаниқликдан шундай фойдаланиш мумкинки, унинг охирги маъноли рақамига қараб бу соннинг абсолют хатоси нимага тенглиги кўриниб турсин. Бу қуйидагича бажарилади.

Бирор ω $\left(\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant1\right)$ сонни танлаймиз. Агар $\Delta(a^*)\leqslant\omega q^{n-k+1}$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда тақрибий

$$a^* = \alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \ldots + \alpha_m q^{n-m+1} + \ldots \tag{3.1}$$

сонда α_k рақам *ишончли рақам* дейилади, акс ҳолда α_k *шубҳали* рақам дейилади. Кўриниб турибдики, агар α_k ишончли рақам бўлса, ундан олдинги рақамларнинг барчаси ҳам ишончли бўлади. Демак, ишончли рақамлар орасида ҳар доим охиргиси мавжуд.

Тақрибий сонни ёзиш қоидаси шундан иборатки, унинг охирги маъноли рақами ҳар доим ишончли бўлсин. Бунинг учун шубҳали рақамлар ташланади, керак бўлган ҳолда унинг ўнг томонига кўпайтувчи q^t (t — бутун сон) ёзиб қўйилади.

Масалан, ўнли саноқ системасида $\Delta(a^*)\leqslant\omega\cdot10^{-2}$ бўлганда $a^* = 3{,}14$ ёзув тўғри бўлиб, $a^* = 3{,}140$ ёзув эса нотўғридир; $\Delta(b^*)\leqslant\omega\leqslant1$ бўлганда $b^* = 2500$ ёзув тўғри бўлиб, $\Delta(b^*)\leqslant\omega\cdot10$ бўлганда эса ёзув нотўғридир. Агар $c^* = 302448$ соннинг иккита ишончли рақами бўлса, уни $c^* = 30\cdot10^4$ кўринишда ёзиш керак; $d^* = 0{,}007143$ сонда ишончли рақамларнинг сони учта бўлса, уни $d^* = 7{,}14\cdot10^{-3}$ кўринишда ёзиш керак.

Айрим ҳолларда ҳисоблаш жараёнида тақрибий сонларда битта ёки иккита шубҳали рақамларни сақлаб қолиш мақсадга мувофиқдир (лекин бу рақамларни бирор белги билан ифодалаш керак, масалан, кичикроқ қилиб ёзиш керак). Чунки, одатда, натижанинг хатосини баҳолашда энг ёмон ҳол олинади, аслида эса хато максимал назарий хатодан анча кам бўлиши мумкин. Демак, кўп ҳолларда шубҳали деб қаралган рақамлар ҳақиқатда ишончли ҳам бўлиши мумкин.

Ишончли рақам тушунчаси жиддий равишда ω нинг танланишига боғлиқдир. Эски жадвалларда $\omega = \frac{1}{2}$ деб олинар эди, кейинги вақтларда $\omega > \frac{1}{2}$ бўлган жадваллар ҳам учраб турибди, тажриба асосида тузилган жадвалларда одатда $\omega = 1$ деб олинади. Бу ерда $\omega > \frac{1}{2}$ деб танланиши тақрибий сонларни яхлитлаётганда ишончли рақамларни сақлашга олиб келар экан. Ҳақиқатан ҳам, (3.1) тақрибий сонни яхлитлаш натижасида абсолют хато

$$\Delta(a^*) + \Delta'$$

га тенг бўлиб, бу ерда $\Delta(a^*)$ тақрибий a^* соннинг абсолют хатоси, Δ' эса яхлитлаш пайтида a^* сондаги кичик хоналарни ташлаб юборишдан келиб чиққан хатодир. Яхлитлашдан кейин α_m рақам ишончли бўлиши учун

$$\Delta(a^*) + \Delta' \leqslant \omega q^{n-m+1} \tag{3.2}$$

тенгсизлик бажарилиши керак. Лекин шубҳали ҳолда $\Delta' = \frac{1}{2}q^{n-m+1}$ ва $\Delta(a^*) \neq 0$ бўлса, у вақтда (3.2) тенгсизлик $\omega = \frac{1}{2}$ бўлганда бажарилмайди, $\omega > \frac{1}{2}$ бўлганда эса бажарилиши мумкиндир. Масалан, $a^* = 0{,}9445 \pm 0{,}00005$ бўлсин. Бу ерда $\omega = \frac{1}{2}$ бўлганда ҳам, $\omega = 1$ бўлганда ҳам охирги маъноли рақам 5 ишончлидир. Бир марта яхлитлаш натижасида $a^* = 0{,}945 \pm 0{,}00055$ бўлиб, охирги 5 рақами $\omega = \frac{1}{2}$ бўлганда ишончли бўлмайди, $\omega = 1$ да эса ишончли бўлади.

Бундан кейин $\omega = 1$ бўлган ҳолда рақамлар кенг маънода ишончли деймиз.

Функциянинг йўқотилмас хатоси. Энди аргументларнинг тақрибий қийматлари маълум бўлганда функциянинг йўқотилмас хатосини топиш масаласини кўриб чиқайлик. Фараз қилайлик,

$$y = f(x_1, \ldots, x_n)$$

функциянинг қийматини ҳисоблаш керак бўлсин, бунда аргументларнинг аниқ қийматлари маълум бўлмасдан, фақат тақрибий қийматлари x_1^*, x_2^*, ... x_n^* ва уларнинг мос равишдаги абсолют хатолари $\Delta(x_1^*)$, $\Delta(x_2^*)$, ..., $\Delta(x_n^*)$ маълум бўлсин. Қатъий қилиб айтганда, y^* нинг йўқотилмас хатосини топиш аргументларнинг ўзгариш соҳаси $|x_i - x_i^*| \leqslant \Delta(x_i^*)$ $(i = \overline{1, n})$ берилганда функциянинг ўзгариш соҳаси $y^* - \Delta(y^*) \leqslant y \leqslant y^* + \Delta(y^*)$ ни топишдан иборатдир. Бу масала математик анализ масаласи бўлиб, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ озми-кўпми мураккаб бўлганда ниҳоят оғир масаладир. Шунинг учун ҳам қўполроқ бўлса-да, бу масалани элементар ҳал қиладиган усулларга эга бўлиш мақсадга мувофиқдир.

Бу масалани ечиш учун қаралаётган функция ва аргументларнинг хатоларига нисбатан биз қуйидаги шартларни қўямиз:

а) қаралаётган соҳада f узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, хусусий ҳосилалари секин ўзгаради;

б) аргументларнинг нисбий хатолари $\delta(x_1^*)$, $\delta(x_2^*)$, ..., $\delta(x_n^*)$ етарлича кичик.

У ҳолда Лагранж формуласига кўра қуйидаги ўринли:

$$y - y^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\xi)(x_i - x^*_i), \tag{3.3}$$

бу ерда $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ эса $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ нуқталарни бирлаштирувчи кесманинг қандайдир нуқтаси.

Функцияга қўйилган 1) шартга кўра $f'_{x_i}(\xi)$ ни $f'_{x_i}(x^*)$ билан алмаштириш мумкин:

$$y - y^* = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x^*)(x_i - x_i^*),$$

бундан эса,

$$|y - y^*| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f'_{x_i}(x^*)| \Delta(x_i^*).$$

Демак, функциянинг абсолют хатоси учун қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\Delta(y^*) = \sum_{i=1}^{n} |f'_{x_i}(x^*)| \Delta(x_i^*). \tag{3.4}$$

Энди функциянинг нисбий хатосини топиш қийин эмас, у қуйидагига тенг:

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|f(x^*)|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f'_{xi}(x^*)}{f(x^*)} \right| \Delta(x_i^*)$$

ёки

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^{n} |\{\ln f(x^*)\}'_{x_i}| \Delta(x_i^*). \tag{3.5}$$

Агар биз функциянинг нисбий хатосини аргументнинг нисбий хатоси орқали ифодалайдиган бўлсак, (3.5) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^{n} | x_i^* \{\ln f(x^*)\}'_{x_i} | \frac{\Delta(x_i^*)}{|x^*_i|} .$$

Бу ердан эса

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^{n} |x_i^* \{\ln f(x^*)\}'_{x_i}| \delta(x_i^*). \tag{3.6}$$

Шундай қилиб, функциянинг абсолют ва нисбий хатоларини топиш учун биз умумий (3.4), (3.5), (3.6) формулаларга эга бўлдик. Энди шу формулаларнинг айрим татбиқларини кўрайлик.

Арифметик амаллар ва логарифмлашнинг хатоси. n та мусбат тақрибий сонлар йиғиндиси

$$u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

нинг абсолют ва нисбий хатоларини топиш талаб қилинсин. Бу ҳолда $f'_{x_i}(x^*)$ лар бирга тенг бўлиб, $\{\ln f(x^*)\}'_{x_i} = \frac{1}{x_i^*}$. Бу қийматларни (3.4) ва (3.6) формулаларга қўйиб,

$$\Delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \Delta(x_i^*), \tag{3.7}$$

$$\delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{u^*}\, \delta(x_i^*) \tag{3.8}$$

ларни ҳосил қиламиз. Шуни ҳам эслатиб ўтиш керакки, (3.7) тенглик юқорида айтилган шартларга боғлиқ эмас. (3.7) тенгликни қуйидаги теорема шаклида таърифлашимиз мумкин.

1-теорема. Бир хил ишорали қўшилувчилар йиғиндисининг абсолют хатоси қўшилувчилар абсолют хатоларининг йиғиндисига тенг.

$M = \max_i \delta(x_i^*)$ ва $m = \min_i \delta(x_i^*)$ бўлсин, у ҳолда (3.8) тенгликдан қуйидаги

$$\delta(u^*) \leqslant M \frac{x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*}{u^*} = M$$

ва

$$\delta(u^*) \geqslant m \frac{x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*}{u^*} = m$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот бўлди.

2-теорема. Бир хил ишорали тақрибий сонларни қўшиш натижасида ҳосил бўлган йиғиндининг нисбий хатоси қўшилувчиларнинг энг катта ва энг кичик нисбий хатолари орасида ётади.

1-теоремадан кўриниб турибдики, йиғиндининг абсолют хатоси аниқлиги энг кичик бўлган қўшилувчининг абсолют хатосидан кам эмас. Демак, бошқа қўшилувчиларни қандай аниқликда олмайлик, йиғиндининг аниқлигини орттира олмаймиз. Шунинг учун ҳам аниқлиги катта бўлган сонларда ортиқча рақамларни сақлаш маънога эга эмас.

Айтилганлардан қўлда ёки автоматик бўлмаган машиналарда ҳисоблашларда одатда қўлланиладиган қуйидаги қоида келиб чиқади.

Қоида. Ҳар хил аниқликдаги сонларни қўшиш учун:

а) ўнли рақамлари бошқаларидагига нисбатан энг кам бўлгани ажратилиб, уларни ўзгаришсиз қолдириш керак;

б) қолган сонларда эса битта ёки иккита ортиқча рақамлар қолдириб, ажратилган сонларга нисбатан яхлитлаш керак;

в) ҳамма сақланган хоналарни ҳисобга олган ҳолда берилган сонларни қўшиш керак;

г) ҳосил бўлган натижани битта ёки иккита хонага яхлитлаш керак.

Энди айирманинг хатоларини кўриб чиқайлик. Фараз қилайлик, $x_1 > x_2 > 0$ бўлиб, $u = x_1 - x_2$ бўлсин. У ҳолда умумий формуладан

$$\Delta(u^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*), \tag{3.9}$$

$$\delta(u^*) = \frac{x_1^* \delta(x_1^*) + x_2^* \delta(x_2^*)}{u^*} \tag{3.10}$$

келиб чиқади. Бу ерда ҳам айирманинг абсолют хатоси камаювчи билан айрилувчи абсолют хатоларининг йиғиндисига тенг. Лекин натижанинг нисбий хатоси бу нисбий хатоларнинг ҳар биридан катта бўлади.

Агар камаювчи айрилувчидан анча катта бўлса, у вақтда (3.10) нинг махражи x_1^* га яқин бўлиб, касрнинг ўзи эса $\delta(x_1^*)$ га яқин бўлади. Бу ҳол қўшишдагига ўхшайди ва қўшишдагидек иш тутиш керак. Агар камаювчи билан айрилувчи ўзаро яқин бўлса, у ҳолда аҳвол тамоман бошқача бўлади. Бу ерда махраж жуда кичик бўлиб, каср жуда катта бўлиб кетади. Бу ҳолда кўп ишончли рақамлар йўқолади. Шунинг учун имкони борича ўзаро яқин сонларни айирмаслик керак. Айрим ҳолларда формулалар устида турли ўзгартиришлар бажариб, бундан қутулиш мумкин бўлади. Масалан, биздан $x^2 - 138x + 2 = 0$ тенгламанинг кичик илдизини топиш талаб қилинган бўлиб, натижада 4 та маъноли рақам сақлансин. Бу тенгламанинг кичик илдизи

$$x = 69 - \sqrt{4759}$$

га тенг бўлиб, бу ерда $\sqrt{4759} = 68{,}985\ldots$ яхлитлашдан кейин

$$\sqrt{4759} = 68{,}99, \quad x^* = 69 - 68{,}99 = 0{,}0\underline{1}$$

га эга бўламиз. Суратда иррационалликдан қутулиб, x ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x = \frac{2}{69 + \sqrt{4759}}, \quad 69 + 68{,}99 = 137{,}99.$$

Яхлитлашдан кейин эса $69 + 68{,}99 = 138{,}0$. Натижада $x^* = \frac{2}{138{,}\underline{0}} = 0{,}0144927$ ва яна яхлитласак, $x^* = 0{,}0\underline{1}\underline{4}\underline{4}\underline{9}$. Қўшимча хоналар устида амаллар бажариб текшириб кўришимиз мумкинки, ҳар иккала ҳолда ҳам остига чизилган рақамлар ишончли рақамлардир. Лекин иккинчи ҳолда натижанинг аниқлиги анча юқоридир.

Энди тақрибий сонларнинг кўпайтмасини кўриб чиқайлик. Фараз қилайлик, $u = x_1 \cdot x_2 \ldots x_n (x_i > 0)$ бўлсин. У вақтда (3.4) ва (3.6) формулаларга кўра

$$\Delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u^*}{x_i^*} \Delta(x_i^*), \tag{3.11}$$

$$\delta(u^*) = \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i^*). \tag{3.12}$$

Охирги тенгликни қуйидаги теорема сифатида таърифлашимиз мумкин.

3- теорема. Тақрибий сонлар кўпайтмасининг нисбий хатоси кўпаювчилар нисбий хатоларининг йиғиндисига тенгдир.

Бўлинма учун ҳам биз шундай хулосаларга келамиз. Масалан,

$$u = \frac{x_1}{x_2} \quad (x_1,\ x_2 > 0)$$

учун (3.4) ва (3.6) формулаларга кўра

$$\Delta(u^*) = \frac{1}{x_2^{*2}}[x_2^* \Delta(x_1^*) + x_1^* \Delta(x_2^*)],$$

$$\delta(u^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*).$$

Ниҳоят, логарифмлашнинг хатосини кўриб чиқайлик. Бизга натурал логарифм $y = \ln x$ берилган бўлса, (3.4) формулага кўра

$$\Delta(y^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x^*} = \delta(x^*),$$

яъни натурал логарифмнинг абсолют хатоси аргументнинг нисбий хатосига тенгдир. Ўнли логарифм учун

$$\lg x = M \ln x,$$

бу ерда $M = \lg e \cong 0{,}434$ — ўтиш модули,

$$\Delta(\ln x^*) = M\delta(x^*) = 0{,}434\,\delta(x^*).$$

Қўпол қилиб айтганда, ўнли логарифмнинг абсолют хатоси аргумент нисбий хатосининг ярмига тенг.

Ишончли рақамлар сонини ҳисоблаш қоидаси. Биз юқорида тақрибий соннинг абсолют хатоси $\Delta(a^*)$ ва унинг охирги ишончли рақами бир-бирлари орқали ифодаланишини кўрган эдик. Шунга ўхшаган муносабатни тақрибий сон ишончли рақамларининг миқдори билан унинг нисбий хатоси $\delta(a^*)$ орасида ҳам ўрнатиш мумкин. Фараз қилайлик,

$$a^* = \alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \ldots + \alpha_m q^{n-m+1} \quad (\alpha_1 \neq 0)$$

тақрибий сонда ҳамма рақамлари ишончли бўлсин. Демак, $\Delta(a^*) \leqslant \omega q^{n-m+1}$. Бу тенгсизликнинг ҳар иккала томонини a^* га бўлиб,

$$\delta(a^*) \leqslant \frac{\omega q^{n-m+1}}{\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \ldots + \alpha_m q^{n-m+1}} \leqslant \frac{\omega q^{n-m+1}}{\alpha_1 q^n},$$

яъни

$$\delta(a^*) \leqslant \frac{\omega}{\alpha q^{m-1}} \tag{3,13}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда α_1 — биринчи маъноли рақам бўлиб, m — ишончли рақамлар сони.

Агар ишончли рақамлар сони m маълум бўлса, у ҳолда (3.13) тенгсизлик нисбий хатони аниқлайди.

Фараз қилайлик, тақрибий соннинг нисбий хатоси $\delta(a^*)$ берилган бўлсин.

Агар m

$$\delta(a^*) \leqslant \frac{\omega}{(\alpha_1+1)q^{m-1}} \tag{3.14}$$

тенгсизликнинг бутун сондаги ечими бўлса, у ҳолда биринчи ишончли рақами α_1 га тенг бўлган тақрибий a^* сон ҳеч бўлмаганда m та ишончли рақамга эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\Delta(a^*) = a^* \delta(a^*) \leqslant \delta(a^*)(\alpha_1+1)q^n \leqslant \omega q^{n-m+1}.$$

Бу эса α_m рақамнинг ишончли эканлигини кўрсатади.

Энди биз (3.13) — (3.14) тенгсизликларнинг бир татбиқини кўрамиз, бошқа татбиқлари эса машқларда келтирилади.

4-теорема. Ўнли саноқ системасида x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* $(n \leqslant 10)$ тақрибий сонларнинг ҳар бирининг ишончли рақамлари сони k_0 дан кам бўлмасин. У вақтда $u^* = x_1^* \cdot x_2^* \ldots x_n^*$ кўпайтма энг камида $k_0 - 2$ та ишончли рақамга эга бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик, β_1, β_2, ..., β_n мос равишда x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* ларнинг биринчи маъноли рақамлари бўлсин. У вақтда (3.13) тенгсизликка кўра

$$\delta(x_i^*) \leqslant \frac{\omega}{\beta_i 10^{k_0-1}}.$$

3-теоремага кўра

$$\delta(u^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*) + \ldots + \delta(x_n^*) \leqslant \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \ldots + \frac{1}{\beta_n}\right)\frac{\omega}{10^{k_0-1}}.$$

Бундан $n \leqslant 10$ да

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \ldots + \frac{1}{\beta_n} \leqslant 10$$

бўлганлиги учун

$$\delta(u^*) \leqslant \frac{\omega}{10^{k_0-2}}.$$

Шу билан теорема исбот бўлади. Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, бизнинг баҳо ниҳоят даражада қўполдир, амалда кўпайтмада ишончли рақамларнинг сони k_0—1 ёки айрим ҳолда k_0 га тенг бўлиши ҳам мумкин.

Бу теоремадан шундай хулосага келамиз.

Қўлда ёки автомат бўлмаган машинада иккита сонни ўзаро кўпайтириш учун вақтни тежаш ва ёзувни қисқартириш мақсадида аниқроқ сонни шундай яхлитлаш керакки, унинг ишончли рақамлар сони аниқлиги камроқ бўлган сондагига кўра биттага ортсин.

МАШҚЛАР

Қуйидаги мисолларда $\omega = \frac{1}{2}$ деб оламиз.

1. e сонини тўртта ишончли рақам билан ёзинг ва унинг абсолют ҳамда нисбий хатоларини аниқланг.

2. Кесик конус асосларининг радиуслари R ва r, ҳамда ташкил этувчиси l қуйидагича: $R = 33{,}85$ см $\pm$ 0,005 см, $r = 14{,}68$ см $\pm$ 0,001 см, $l = 12{,}34$см$\pm$ $\pm$ 0,003 см аниқланган бўлса, бу конуснинг тўла сиртини аниқлашда йўл қўйиладиган абсолют ва нисбий хатони топинг.

3. Фараз қилайлик, $h = 0{,}02$—аниқ сон бўлиб, $x = 0{,}2638 \pm 0{,}25 \cdot 10^{-4}$, $y = 0{,}4276 \pm 0{,}42 \cdot 10^{-4}$, $z = 0{,}4270 \pm 0{,}4 \cdot 10^{-4}$ бўлсин. Қуйидаги ифодаларнинг абсолют ва нисбий хатоларини топинг:

$$\text{а) } x + y - z, \quad \text{б) } \frac{yz}{x}, \quad \text{в) } (x + h)^3 - x^3.$$

4. Қуйидаги

$$f(x, y, \pi) = \frac{\sqrt{x + \pi} + \sqrt{y + \pi}}{xy + \pi^3}$$

формулада x ва y тақрибий сонлардир: $x = 0{,}2764 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-4}$, $y = 0{,}8322 \pm$ $\pm 0{,}5 \cdot 10^{-4}$. $f(x, y, \pi)$ нинг абсолют хатоси π сонини аниқ деб олинган ҳолдаги хатога нисбатан икки мартадан кўпга ортмаслиги учун π ни қандай аниқлик билан олиш керак?

5. $x^2 - 4x + \pi = 0$ тенгламанинг илдизларини тўртта ишончли рақам билан топиш керак. Бунинг учун тенгламанинг озод ҳадини нечта рақам билан олиш керак?

6. Жисм бўшлиқда 20 м баландликдан тушаётган бўлсин. Агар тезланиш $g \cong 9{,}8094$м/сек^2 бешта ишончли рақам билан берилган бўлиб, баландликни ўлчашдаги аниқлик 1 см га тенг бўлса, тушиш вақтини қандай нисбий хато билан аниқлаш мумкин?

7. Қуйидаги a^x, x^k (k — ҳақиқий сон), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ элементар функцияларнинг абсолют ва нисбий хатоларини топиш учун формулалар чиқаринг.

8. Қуйидаги теоремани исботланг:

Фараз қилайлик, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \leqslant 10$) ларда ишончли рақамлар сони k тадан кам бўлмасин. У ҳолда $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ йиғиндида ишончли рақамлар сони ҳеч бўлмаганда $k - 1$ га тенг.

2-БОБ. СОНЛИ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Алгебраик ва трансцендент тенгламаларни ҳамда бундай тенгламалар системасини ечиш анализнинг муҳим масалаларидан биридир. Физика, механика, техника ва умуман табиатшуносликнинг хилма-хил масалалари алгебраик ва трансцендент тенгламаларни ечишга олиб келади. Масалан, механик система тебраниши частоталарининг квадратлари матрицалар характеристик тенгламаларининг илдизлари бўлади, бундай тенглама эса n-даражали алгебраик тенгламадир.

Иккинчи томондан, математиканинг эҳтиёжлари ҳам бундай тенгламаларни ечишни тақозо этади. Масалан, номаълумларни йўқотиш йўли билан мураккаб алгебраик ва геометрик муносабатлар иккинчи ёки юқори даражали алгебраик тенгламаларга келтирилади.

Маълумки, даражаси тўртдан юқори бўлган алгебраик ҳамда трансцендент тенгламаларни ечиш учун аниқ методлар мавжуд эмас. Шунинг учун ҳам бундай тенгламаларнинг тақрибий ечимларини етарлича аниқлик билан топиш имконини берадиган методлар керак. Биз бу бобда шу методларнинг кенг қўлланадиганларини ва тажрибада синалганларини келтирамиз.

1-§. ИЛДИЗЛАРНИ АЖРАТИШ

Умумий мулоҳазалар. Фараз қилайлик,

$$f(x) = 0 \qquad (1.1)$$

тенгламани ечиш талаб қилинган бўлсин, бу ерда $f(x)$ — алгебраик ёки трансцендент функция бўлиши мумкин. Тенгламаларни тақрибий ечиш учун қўлланиладиган кўп методларда унинг илдизлари ажратилган, яъни шундай етарли кичик атрофчалар топилганки, бу атрофчаларда тенгламанинг биттагина илдизи жойлашади деб фараз қилинади.

Бу атрофнинг бирор нуқтасини дастлабки яқинлашиш сифатида қабул қилиб, мазкур методлар ёрдамида изланаётган ечимни берилган аниқлик билан ҳисоблаш мумкин. Демак, (1.1) тенгламанинг илдизларини тақрибий ҳисоблаш икки қисмдан иборат: 1) *илдизларни ажратиш* ва 2) дастлабки яқинлашиш маълум бўлса, *илдизларни берилган аниқлик билан ҳисоблаш.*

Масаланинг биринчи қисми иккинчисига нисбатан анча мураккабдир. Чунки, умумий ҳолда илдизларни ажратиш учун эффектив методлар мавжуд эмас. Хусусан, бир неча номаълумли

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

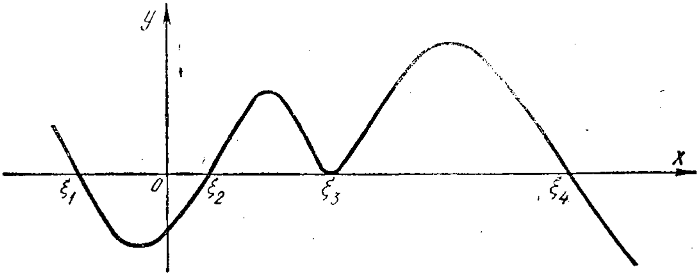
тенгламалар системаси учун илдизларни ажратиш масаласи катта қийинчиликлар билан боғлиқдир.

Математик анализдан маълум бўлган қуйидаги теоремалар (1.1) тенгламанинг илдизлари ётган оралиқларни ажратишга ёрдам қилади.

1-теорема. Агар узлуксиз $f(x)$ функция бирор $[a, b]$ оралиқнинг четки нуқталарида ҳар хил ишорали қийматларни қабул қилса, у вақтда бу оралиқда (1.1) тенгламанинг ҳеч бўлмаганда битта илдизи мавжуддир. Агар, шу билан бирга, биринчи тартибли ҳосила $f'(x)$ мавжуд бўлиб, у ўз ишорасини шу оралиқда сақласа, у вақтда бу оралиқда илдиз ягонадир.

2-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аналитик функция бўлсин. Агар $[a, b]$ оралиқнинг четки нуқталарида $f(x)$ ҳар хил ишорали қийматларни қабул қилса, у вақтда (1.1) тенгламанинг a ва b нуқталар орасида ётадиган илдизларининг сони тоқдир.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг четки нуқталарида



2-чизма.

бир хил ишорали қийматларни қабул қилса, у вақтда (1.1) тенгламанинг илдизлари ё $[a, b]$ ораликда ётмайди ёки уларнинг сони жуфтдир (карралилигини ҳисобга олган ҳолда).

Кўпинча (1.1) тенгламанинг ҳақиқий илдизларини ажратишга график усули катта ёрдам беради. Бунинг учун $y=f(x)$ функциянинг графигини тақрибий равишда чизиб, бу графикнинг Ox ўқи билан кесишган нуқталарининг абсциссалари илдизнинг тақрибий қийматлари деб олинади (2-чизма).

Агар (1.1) тенгламанинг илдизлари бир-бирига яқин жойлашган бўлмаса, у вақтда бу усул билан унинг илдизлари осонгина ажратилади.

Агар $f(x)$ нинг кўриниши мураккаб бўлиб, унинг графигини чизиш қийин бўлса, у вақтда график усулини бошқача тарзда қўллаш керак, яъни (1.1) тенглама унга тенг кучли бўлган тенглама

$$\varphi(x) = \psi(x) \qquad (1.2)$$

кўринишида ёзиб олинади. Энди $y = \varphi(x)$ ва $y = \psi(x)$ функцияларнинг графикларини чизсак, бу графикларнинг кесишиш нуқталарининг абсциссалари тақрибий илдизлардан иборат бўлади.

Мисол. График усули билан

$$(2x - 1)2^x - 1 = 0$$

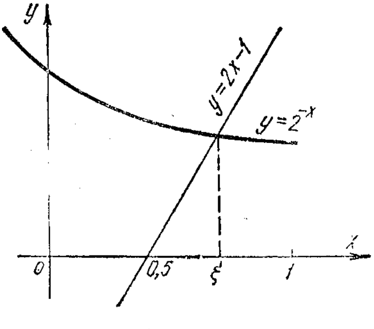
тенгламанинг илдизи тақрибий топилсин.

Ечиш. Бу тенгламани

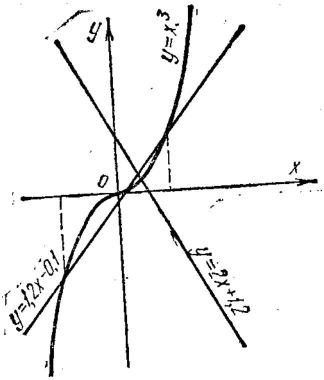
$$2x - 1 = 2^{-x}.$$

кўринишда ёзиб оламиз. $y = 2^{-x}$ эгри чизиқнинг ва $y = 2x - 1$ тўғри чизиқнинг графикларини чизиб 3-чизмадан кўрамизки, уларнинг кесишиш нуқтасининг абсциссаси $\xi \cong 0,7$ экан.

Агар $\psi(x)$ ёки $\psi(x)$ чизиқли функция, масалан $\psi(x) = ax + b$ бўлса, у вақтда (1.2) тенгламанинг илдизларини ажратиш соддалашади. Фақат a ва b



3-чизма.



4-чизма,

коэффициентлари билан фарқ қиладиган бир хил типдаги бир нечта тенгламаларнинг илдизларини ажратиш учун график усули қулайдир. Чунки бу ерда илдизларни ажратиш (илдизларни тақрибий топиш) битта тайин $y=\psi(x)$ функция графиги билан ҳар хил $y=ax+b$ тўғри чизиқлар кесишиш нуқталарининг абсциссаларини топишдан иборатдир. Бу типга $x^n+ax+b=0$ кўринишдаги тенгламалар мисол бўла олади.

Масалан, $x^3+2x-1,2=0$ ва $x^3-1,2x+0,1=0$ тенгламалар илдизларининг тақрибий қийматлари топилсин. Буни ечиш учун $y=x^3$ кубик параболани чизамиз. Сўнгра $y=-2x+1,2$ ва $y=1,2x-0,1$ тўғри чизиқларнинг парабола билан кесишиш нуқталарининг абсциссаларини топамиз.

4-чизмадан кўриниб турибдики, биринчи тенглама фақат битта $\xi\cong0,6$ ҳақиқий илдизга эга бўлиб, иккинчи тенглама эса учта $\xi_1\cong-1,1$, $\xi_2\cong0,1$ ва $\xi_3\cong1$ ҳақиқий илдизларга эгадир. Агар $f(z)=0$ тенгламанинг комплекс илдизларини топиш керак бўлса, $z=x+iy$ деб олиб, бу тенгламани

$$f_1(x,\ y)+if_2(x,\ y)=0$$

кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда $f_1(x,\ y)$ ва $f_2(x,\ y)$ ҳақиқий x ва y ўзгарувчиларнинг ҳақиқий функциялари. Бу тенглама эса қуйидаги иккита

$$f_1(x,\ y)=0,\ f_2(x,\ y)=0$$

тенгламалар системасига тенг кучлидир. Энди $f_1(x,\ y)=0$ ва $f_2(x,\ y)=0$ эгри чизиқларни чизиб, уларнинг кесишган нуқталарини топамиз. Кесишиш нуқталарининг абсцисса ва ординаталари $f(z)=0$ тенглама ечимларининг мос равишда ҳақиқий ва мавҳум қисмларини беради.

Алгебраик тенгламаларнинг ҳақиқий илдизларини ажратиш. Алгебраик

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ .\ .\ .\ +a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1.3)$$

тенгламанинг илдизларини ажратиш масаласи яхши ўрганилган ва анча осондир. Қуйидаги теоремаларнинг биринчиси бошқаларига нисбатан умумийроқдир, чунки у комплекс илдизларнинг ҳам чегараларини беради. Биз ҳар доим (1.3) тенгламада коэффициентлар ҳақиқий ва $a_0\neq0$, $a_n\neq0$ деб оламиз.

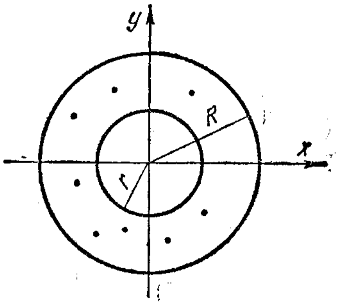
1-теорема. Агар

$$A=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{a_k}{a_0}\right|,\ A_1=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|$$

бўлса, у ҳолда (1.3) тенгламанинг барча илдизлари

$$r=\frac{1}{1+A_1}<|x|<1+A=R$$

ҳалқа ичида ётади (5- чизма).



5-чизма.

Исбот. Фараз қилайлик, $|x|>1$ бўлсин. Модулнинг хоссаларига кўра

$$|f(x)|=\left|a_0x^n\left(1+\frac{a_1}{a_0x}+\ldots+\frac{a_n}{a_0x^n}\right)\right|\geqslant$$

$$\geqslant|a_0x^n|\left[1-A\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x|^2}+\ldots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{|x|^n}\right)\right]>|a_0x^n|\left(1-\frac{A}{|x|-1}\right)=|a_0x^n|\frac{|x|-1-A}{|x|-1}.$$

Агар биз бу ерда $|x|\geqslant 1+A$ деб олсак, у ҳолда $|f(x)|>0$ тенгсизлик келиб чиқади. Бошқача қилиб айтганда, x нинг бу қийматларида $f(x)$ кўпҳад нолга айланмайди, яъни (1.3) тенглама илдизга эга бўлмайди. Шу билан теореманинг ярми исбот бўлди. Теореманинг иккинчи ярмини исботлаш учун $x=\frac{1}{y}$ деб олиб, $f(x)=\frac{1}{y^n}g(y)$ га эга бўламиз, бу ерда $g(y)=a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+$ $+\ldots+a_0$. Теореманинг исбот қилинган қисмига кўра $g(y)$ кўпҳаднинг $y_k=\frac{1}{x_k}$ илдизлари (ноллари)

$$|y_k|=\frac{1}{|x_k|}<1+A_1$$

тенгсизликни қаноатлантиради, бундан эса

$$|x_k|>\frac{1}{1+A_1}$$

келиб чиқади.

Эслатма. Бу теоремадаги r ва R сонлар (1.3) тенглама мусбат илдизларининг қуйи ва юқори чегаралари бўлади. Шунга ўхшаш $-R$ ва $-r$ сонлар манфий илдизларининг мос равишда қуйи ва юқори чегараси бўлади. Илдизларнинг чегаралари учун бу теоремадаги баҳо анча қўполдир. Қуйидаги теоремалар бунга нисбатан анча яхшироқ баҳоларни беради.

2-теорема (Лагранж теоремаси). Агар (1.3) тенгламанинг манфий коэффициентларидан энг биринчиси (чапдан ўнгга томон ҳисоблаганда) a_k бўлиб, B манфий коэффициентларнинг абсолют қийматлари бўйича энг каттаси бўлса, у ҳолда мусбат илдизларнинг юқори чегараси

$$R=1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} \tag{1.4}$$

сон билан ифодаланади.

Исбот. Бу ерда ҳам $x > 1$ деб оламиз. Агар $f(x)$ кўпҳадда манфий бўлмаган барча $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ коэффициентларини ноль билан алмаштириб, қолган барча $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ коэффициентларини эса $-B$ манфий сон билан алмаштирсак, кўпҳаднинг қиймати фақат камайиши мумкин, шунинг учун ҳам

$$f(x) \geqslant a_0x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \ldots + 1) =$$
$$= a_0x^n - B\frac{x^{n-k+1}}{x-1} - 1$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан эса $x > 1$ бўлганда

$$f(x) \geqslant a_0x^n - B\frac{x^{n-k+1}}{x-1} - 1 = \frac{x^{n-k+1}}{x-1}[a_0x^{k-1}(x-1) - B] >$$
$$> \frac{x^{n-k+1}}{x-1}[a_0(x-1)^k - B]$$

келиб чиқади. Демак,

$$x \geqslant 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} = R$$

бўлганда $f(x) > 0$ га эга бўламиз, яъни (1.3) тенгламанинг барча x^+ мусбат илдизлари $x^+ < R$ тенгсизликни қаноатлантирар экан.

3-теорема (Ньютон теоремаси). Агар $x = c > 0$ учун $f(x)$ кўпҳад ва унинг барча $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ ҳосилалари номанфий бўлса: $f^{(k)}(c) \geqslant 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, у ҳолда $R = c$ ни (1.3) тенгламанинг мусбат илдизлари учун юқори чегара деб ҳисоблаш мумкин.

Исбот. Тейлор формуласига кўра

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Теорема шартига кўра $x > c$ бўлганда бу тенгликнинг ўнг томони мусбатдир. Демак, (1.3) тенгламанинг барча x^+ мусбат илдизлари $x^+ \leqslant c$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Бу теоремалар фақат мусбат илдизларнинг юқори чегарасини аниқлайди. Қуйидаги:

$$f_1(x) = (-1)^n f(-x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n,$$
$$f_2(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$
$$f_3(x) = (-x)^n f\left(-\frac{1}{x}\right) = a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_0$$

кўпҳадларга юқоридаги теоремаларни қўллаб, $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ лар мусбат илдизларининг юқори чегаралари R_0, R_1, R_2 ва R_3 ларни мос равишда топган бўлсак, у вақтда (1.3) тенгламанинг ҳамма x^+ мусбат илдизлари $\frac{1}{R_2} \leqslant x^+ \leqslant R$ ва ҳамма x^- манфий илдизлари эса $-R_1 \leqslant x^- \leqslant -\frac{1}{R_3}$ тенгсизликларни қаноатлантирар экан.

Қуйидаги мисолда биз юқорида келтирилган методларни қўллаб уларнинг натижаларини солиштирамиз.

Мисол. Қуйидаги тенглама ҳақиқий илдизларининг чегараси топилсин:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0. \qquad (1.5)$$

2- теоремани қўллаймиз, бу ерда $a_0 = 1$, $A = 8$. Демак, $R = 1 + 8 = 9$, яъни (1.5) тенгламанинг илдизлари (—9; 9) оралиқда ётар экан.

Энди Лагранж теоремасини қўллаймиз: $a_0 = 1$, $k = 2$, $B = 8$. Бу қийматларни (1.4) формулага қўйиб, мусбат илдизларнинг юқори чегараси учун

$$R = 1 + \sqrt{\frac{8}{1}} = 1 + 2\sqrt{2} < 3{,}84$$

ни ҳосил қиламиз. Кейин (1.5) тенгламада x ни $-x$ га алмаштирсак,

$$f_1(x) \equiv x^4 - 5x^2 - 8x - 8 = 0 \qquad (1.6)$$

тенглама келиб чиқади. Бу тенглама мусбат илдизининг юқори чегараси учун ҳам $R < 3{,}84$ тенгсизлик келиб чиқади. Яъни Лагранж теоремасига кўра (1.5) тенгламанинг илдизлари (—3,84; 3,84) оралиқда жойлашган экан.

Ньютон методини қўллайлик. Бу ерда $f(x) = x^4 - 5x^2 - 8x - 8$, $f'(x) = 4x^3 - 10x - 8$, $f''(x) = 12x^2 - 10$, $f'''(x) = 24x$, $f^{IV}(x) = 24$. Кўриниб турибдики, $x > 2$ учун $f^{IV}(x) > 0$, $f'''(x) > 0$, $f''(x) > 0$ ва $f'(x) > 0$. Осонгина пайқаш мумкинки, $x > 2$ бўлса, $f(x)$ ҳам фақат мусбат қиймат қабул қилади, яъни $c = 2$ мусбат илдизларнинг юқори чегараси экан. Худди шунингдек, $f_1(x) = 0$ тенглама мусбат илдизларининг юқори чегараси $c = 3$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, (1.5) тенгламанинг илдизлари (—3; 2) оралиқда ётар экан.

Ҳар учала метод натижаларини солиштирсак, Ньютон методи гарчи кўпроқ меҳнат талаб қилса- да, илдизлар чегаралари учун яхшироқ натижа бериши кўринади.

Энди олий алгебрадан маълум бўлган иккита теоремани исботсиз келтирамиз.

Декарт теоремаси. (1.3) тенглама коэффициентларидан тузилган системада ишора алмаштиришлар сони қанча бўлса (санашда нолга тенг коэффициентларга эътибор қилмаймиз), тенгламанинг шунча мусбат илдизи мавжуд ёки мусбат илдизлар сони ишора алмаштиришлар сонидан жуфт сонга камдир.

Мисол. $f(x)$ нинг коэффициентлари

$$1,\ 0,\ -5,\ 8,\ -8$$

сонлардан тузилган системада ишора алмаштиришлар сони 3 та. Демак, (1.5) тенгламада мусбат илдизларнинг сони 3 та ёки 1 та, $f_1(x)$ нинг коэффициентларидан тузилган системада эса ишора алмаштиришлар сони 1 та. Демак, (1.5) тенглама 1 та манфий илдизга эга экан.

Фараз қилайлик, (1.3) тенглама каррали илдизга эга бўлмасин. Биз $f_1(x)$ орқали $f'(x)$ ҳосилани, $f_2(x)$ орқали $f(x)$ ни $f_1(x)$ га бўлганда ҳосил бўлган қолдиқнинг тескари ишора билан олинганини, $f_3(x)$ орқали $f_1(x)$ ни $f_2(x)$ га бўлганда ҳосил бўлган қолдиқнинг тескари ишора билан олинганини, ва ҳ. к.

белгилаймиз ва бу жараённи қолдиқда ўзгармас сон ҳосил бўлгунча давом эттирамиз. Натижада Штурм қатори деб аталувчи

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_k(x)$$

функциялар кетма-кетлигига эга бўламиз.

Штурм теоремаси. $f(x)$ кўпҳаднинг илдизларидан фарқли a ва $b(a<b)$ сонларни олиб, x ни a дан b гача ўзгартирганда $f(x)$ учун тузилган Штурм қаторида нечта ишора алмашинишлар йўқолса, $f(x)$ нинг (a, b) оралиқда худди шунча ҳақиқий илдизлари мавжуд бўлади.

Штурм теоремаси илдизларни ажратиш масаласини тўла ҳал қилади, лекин Штурм қаторини тузиш билан боғлиқ бўлган ҳисоблашлар кўп вақт талаб қилади.

Штурм теоремасининг қўлланилиши қуйидагичадир. Аввал (1.3) тенгламанинг барча илдизлари ётган оралиқнинг чегаралари аниқланади. Топилган $[a, b]$ оралиқ α_i нуқталар билан кичик оралиқчаларга бўлинади. Штурм теоремаси ёрдамида тенгламанинг $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ оралиқдаги илдизларининг сони аниқланади. Агар бу оралиқда илдизларнинг сони биттадан кўп бўлса, оралиқ иккига бўлинади ва ҳар бир оралиқ учун Штурм теоремаси қўлланилади. Бу жараённи шу пайтгача давом эттирамизки, токи ҳар бир оралиқчалардаги илдизлар сони биттадан ортмасин. Шуни ҳам эслатиб ўтиш керакки, Штурм қаторидаги $f_i(x)$ функцияларни мусбат сонларга кўпайтириш ёки бўлиш мумкин, бундан ишора алмаштиришлар сони ўзгармайди.

Мисол. Штурм методи ёрдамида

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x + 1 = 0$$

тенгламанинг илдизлари ажратилсин. Штурм қаторини тузамиз, $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12$, буни 4 га қисқартириб, $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ га эга бўламиз; $f(x)$ ни $f_1(x)$ га бўламиз:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 4x^3 + 12x + 1 & x^3 - 3x^2 + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 - 3x^3 + 3x} & x - 1 \\
\quad -x^3 + 9x + 1 & \\
\quad \underline{-x^3 + 3x^2 - 3} & \\
\quad -3x^2 + 9x + 4. &
\end{array}$$

Демак, $f_2(x) = 3x^2 - 9x - 4$. Энди $f_1(x)$ ни $f_2(x)$ га бўламиз, бунинг учун $f_1(x)$ ни аввал 3 га кўпайтириб оламиз:

$$\begin{array}{l|l}
3x^3 - 9x^2 + 9 & 3x^2 - 9x - 4 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3 - 9x^2 - 4x} & x \\
\qquad 4x + 9 &
\end{array}$$

бу ердан $f_3(x) = -4x - 9$. Ниҳоят, 16 $f_2(x)$ ни $f_3(x)$ га бўламиз:

$$\begin{array}{l|l}
48x^2 - 144x - 64 & -4x - 9 \\ \cline{2-2}
\underline{48x^2 + 108x} & -12x + 63 \\
\quad -252x - 64 & \\
\quad \underline{-252x - 567} & \\
\qquad +503. &
\end{array}$$

Ҳосил бўлган қолдиқни 503 га бўлиб тескари ишора билан олсак, $f_4(x) = -1$ келиб чиқади.

Шундай қилиб, Штурм қаторининг элементлари қуйидаги функциялардан иборат: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x + 1$, $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, $f_2(x) = 3x^2 - 9x - 4$, $f_3(x) = -4x - 9$, $f_4(x) = -1$. Бу Штурм қаторидаги ишора алмашинишлар 1-жадвалда келтирилган.

1-жадвал

x	$-\infty$	0	-1	-2	$+\infty$
sign $f(x)$	+	+	—	+	+
sign $f_1(x)$	—	+	—	—	+
sign $f_2(x)$	+	—	+	+	+
sign $f_3(x)$	+	—	—	—	—
sign $f_4(x)$	—	—	—	—	—
ишора алмашинишлар сони	3	1	2	3	1

Бу жадвалнинг иккинчи ва охирги устунларини солиштириб кўрсак, берилган тенглама иккита ҳақиқий илдизга эга эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. 2- ва 3-устунлардан эса бу илдизлар манфий эканлиги келиб чиқади. 5-устун билан 4-устун ва 4-устун билан 3-устунни солиштириш натижасида бу илдизларнинг $(-2, -1)$ ва $(-1, 0)$ оралиқларда ётишини кўрамиз.

2-§. КЎПҲАД ВА УНИНГ ҲОСИЛАЛАРИ ҚИЙМАТЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ ҲАМДА КЎПҲАДНИ КВАДРАТИК УЧҲАДГА БЎЛИШ

Алгебраик тенгламаларнинг илдизларини топиш билан боғлиқ масалаларда кўпҳадлар ва уларнинг ҳосилалари қийматларини кўп нуқталарда ҳисоблашга тўғри келади, бундай ҳисоблашларни биз олдинги параграфда ҳам учратган эдик. Айрим методларда эса кўпҳадни кўпҳадга бўлганда ҳосил бўлган бўлинма ва қолдиқнинг қийматини топиш керак бўлади. Биз бу параграфда мана шу амалларнинг эффектив усулларини кўриб чиқамиз.

Горнер схемаси. Фараз қилайлик, коэффициентлари a_0, a_1, . . . , a_n ҳақиқий сонлардан иборат

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

кўпҳаднинг $x = \xi$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаш талаб қилинсин. $P_n(x)$ ни $x - \xi$ га бўламиз, у вақтда

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1})(x - \xi) + b_n \tag{2.1}$$

га эга бўламиз. Бу тенгликда x ўрнига ξ ни қўйсак,

$$b_n = P_n(\xi)$$

келиб чиқади, демак $P_n(\xi)$ ни ҳисоблаш учун b_n ни топиш кифоядир. (2.1) тенгликда x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириб,

$$\begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1 - b_0\xi, \\ a_2 = b_2 - b_1\xi, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n = b_n - b_{n-1}\xi \end{cases}$$

муносабатларга эга бўламиз. Бу тенгликлардан кетма-кет b_0, b_1, $\ldots$, b_n ларни топамиз:

$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_1 + b_0\xi, \\ b_2 = a_2 + b_1\xi, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_n = a_n + b_{n-1}\xi. \end{cases} \tag{2.2}$$

Қўлда ёки клавишли машинада ҳисобланганда (2.2) тенгликларни қуйидаги

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_{n-1} & a_n \\ & b_0\xi & b_1\xi & b_2\xi \ldots & b_{n-2}\xi & b_{n-1}\xi \\ \hline b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \ldots & b_{n-1} & b_n = P_n(\xi) \end{array}$$

схема шаклида жойлаштириш маъқулдир, бу ерда $b_0 = a_0$ бўлиб, охирги қаторда бошқа сонларнинг ҳар бири унинг устида турган иккита соннинг йиғиндисига тенг. Келтирилган схема Горнер схемаси деб аталади, у Горнер томонидан 1819 й. эълон қилинган эди. Агар биз (2.1) тенгликда $x = 1$ деб олсак, ҳисоблашнинг тўғри ёки нотўғрилигини текшириш имконини берадиган

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = b_n + (1 - \xi)(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1})$$

муносабатга эга бўламиз. Агар фақат $b_n = P_n(\xi)$ ни ҳисоблаш талаб қилинса, у ҳолда Горнер схемасини қуйидагича

$$P_n(\xi) = (\ldots((a_0\xi + a_1)\xi + a_2) + \ldots + a_{n-1})\xi + a_n \tag{2.3}$$

ёзиб оламиз. Бу усул кўпҳад қийматини ҳисоблаш учун ҳақиқатан ҳам эффектив усулдир. Чунки (2.3) формула ёрдамида $P_n(\xi)$ ни ҳисоблаётганда биз фақат n марта кўпайтириш амалини бажарамиз. Оддий йўл билан ҳисоблаганда эса ξ^2, ξ^3, $\ldots$ ξ^n даражаларни ҳисоблаш учун $n - 1$ марта кўпайтириш амалини ва $a_0\xi^n$, $a_1\xi^{n-1}$, $\ldots$, $a_{n-1}\xi$ кўпайтмаларни ҳосил қилаётганда яна n та кўпайтириш амалини, ҳаммаси бўлиб $2n - 1$ та кўпайтириш амалини бажаришга тўғри келар эди.

Мисол. Қуйидаги

$$P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x + 1$$

кўпҳаднинг $x = 1{,}5$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -5 & 0 & 3 & 1 & 1{,}5 \\ & 3 & -3 & -4{,}5 & -2{,}25 & \\ \hline 2 & -2 & -3 & -1{,}5 & -1{,}25 & \end{array}$$

Демак, $P_4(1{,}5) = -1{,}25$.

Кўпҳад ҳосилаларининг қийматини ҳисоблаш. Энди $P_n(x)$ кўпҳад ҳосилаларининг $x = \xi$ нуқтадаги қийматларини топиш масаласини кўриб чиқайлик.

Агар $P_n(x)$ ни $(x - \xi)$ га бўлинганда ҳосил бўлган бўлинмани

$$P_{n-1}(x) = b_0{}^{(0)} x^{n-1} + b_1{}^{(0)} x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}^{(0)}$$

орқали белгилаб олсак, у ҳолда

$$P_n(x) = (x - \xi) P_{n-1}(x) + b_n^{(0)} \qquad (2.4)$$

тенглик келиб чиқади. $P_{n-1}(x)$ ни $(x - \xi)$ га бўлинганда ҳосил бўлган бўлинмани

$$P_{n-2}(x) = b_0^{(1)} x^{n-2} + b_1^{(1)} x^{n-3} + \ldots + b_{n-2}^{(1)}$$

десак,

$$P_{n-1}(x) = (x - \xi) P_{n-2}(x) + b_{n-1}^{(1)}$$

тенгликка эга бўламиз ва ҳ. к. $(j+1)$- қадамда $P_{n-j}(x)$ ни $(x - \xi)$ га бўлинганда ҳосил бўлган бўлинмани

$$P_{n-j-1}(x) = b_0^{(j)} x^{n-j-1} + b_1^{(j)} x^{n-j-2} + \ldots + b_{n-j-1}^{(j)}$$

деб белгилаб,

$$P_{n-j}(x) = (x - \xi) P_{n-j-1}(x) + b_{n-j}^{(j)} \qquad (2.5)$$

тенгликни ёзамиз. Натижада

$$P_n(x),\ P_{n-1}(x),\ P_{n-2}(x),\ \ldots,\ P_1(x),\ P_0(x)$$

кўпҳадлар кетма-кетлигини ва кўпҳадларнинг коэффициентларидан тузилган

$$\begin{array}{llllll} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_0^{(0)} & b_1^{(0)} & \ldots & b_{n-2}^{(0)} & b_{n-1}^{(0)} & b_n^{(0)} \\ b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & \ldots & b_{n-2}^{(1)} & b_{n-1}^{(1)} & \\ b_0^{(2)} & b_1^{(2)} & \ldots & b_{n-2}^{(2)} & & \\ b_0^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} & & & & \\ b_0^{(n)} & & & & & \end{array} \qquad (2.6)$$

учбурчак матрицани ҳосил қиламиз. Агар $b_i^{(-1)} = a_i$ $(i = \overline{0, n})$ деб олсак, у ҳолда Горнер схемасини кетма-кет қўллаб, қуйидаги

$$b_0^{(j)} = b_0^{(j-1)}, \quad b_i^{(j)} = b_i^{(j-1)} + b_{i-1}^{(j)} \xi, \qquad (2.7)$$

$$(i = \overline{1, n-j}, \ k = \overline{0, n}),$$

рекуррент формулаларни ҳосил қиламиз. Энди (2.4) айниятни ҳамда (2.5) айниятни $j = 1, 2, \ldots, n-1$ учун ёзиб, кейингиларини олдингиларига олиб бориб қўйиб,

$$P_n(x) = b_n^{(0)} + b_{n-1}^{(1)}(x - \xi) + \ldots + b_0^{(n)}(x - \xi)^n \qquad (2.8)$$

га эга бўламиз. (2.8) тенгликдан ва Тейлор қаторидаги ёйилманинг ягоналигидан

$$P_n(\xi) = b_n^{(0)}, \ \frac{P'_n(\xi)}{1!} = b_{n-1}^{(1)}, \ \ldots, \ \frac{P_n^{(n)}(\xi)}{n!} = b_0^{(n)} \qquad (2.9)$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $P_n(x)$ кўпҳад ҳосилаларининг ξ нуқтадаги қийматларини топиш учун биз (2.7) рекуррент формулалардан фойдаланиб (2.6) учбурчак матрицани тузишимиз керак.

Мисол. Қуйидаги

$$P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x + 1$$

кўпҳад ва унинг ҳосилаларининг $x = 1{,}5$ нуқтадаги қийматини топамиз. Бунинг учун (2.6) матрицани тузамиз:

$$\begin{array}{rrrrr}
2 & -5 & 0 & 3 & 1 \\
2 & -2 & -3 & -1{,}5 & -1{,}25 \\
2 & 1 & -1{,}5 & -3{,}75 & \\
2 & 4 & 4{,}5 & & \\
2 & 7 & & & \\
2 & & & &
\end{array}$$

(2.9) формулалардан эса ҳосилаларнинг қийматларини топамиз:

$P_4(1{,}5) = -1{,}25$; $P'_4(1{,}5) = -3{,}75$; $P''_4(1{,}5) = 2! \cdot 4{,}5 = 9$; $P'''_4(1{,}5) = 3! \cdot 7 = 42$
$P_4^{IV}(1{,}5) = 2 \cdot 4! = 48$.

Кўпҳадни квадратик учҳадга бўлгандаги бўлинма ва қолдиқни топиш. Маълумки, $P_n(x)$ кўпҳадни квадратик $x^2 + px + q$ учҳадга бўлганда ҳосил бўлган қолдиқ чизиқли функция $ax + b$ бўлади, лекин қулайлик учун биз бу чизиқли функцияни махсус $b_{n-1}(x + p) + b_n$ формада ёзамиз:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = (b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \ldots + b_{n-2})(x^2 + px + q) + b_{n-1}(x + p) + b_n. \qquad (2.10)$$

Бу муносабатда x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириб,

$$\begin{cases}
a_0 = b_0, \\
a_1 = b_1 + pb_0, \\
a_2 = b_2 + pb_1 + qb_0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-1} = b_{n-1} + pb_{n-2} + qb_{n-3}, \\
a_n = b_n + pb_{n-1} + qb_{n-2}
\end{cases} \qquad (2{,}11)$$

тенгликларга эга бўламиз. Бу ердан $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ларни топиш учун, қуйидаги рекуррент муносабатлар ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_1 - pb_0, \\ b_2 = a_2 - pb_1 - qb_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-1} = a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3}, \\ b_n = a_n - pb_{n-1} - qb_{n-2}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Ҳисоблашда осон бўлиши учун биз бу муносабатларни қуйидаги схема шаклида ёзишимиз мумкин:

$$\begin{array}{r|llllll} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_{n-1} & a_n \\ -p & & -pb_0 & -pb_1 & -pb_2 \ldots & -pb_{n-2} & -pb_{n-1} \\ -q & & & -qb_0 & -qb_1 \ldots & -pb_{n-3} & -qb_{n-2} \\ \hline & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \ldots & b_{n-1} & b_n \end{array} .$$

Бу схемада охирги сатрдаги сонлар учта олдинги сатрлардаги сонларнинг йиғиндисидан иборатдир. Демак, (2.12) ёрдамида ёки юқоридаги схемадан фойдаланиб, b_i $(i = \overline{1, n})$ ларни топамиз ва натижада бўлинма $Q_{n-2}(x) = b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \ldots + b_{n-2}$ ва қолдиқ $r_1(x) = b_{n-1}(x + p) + b_n$ бўлади.

3-§. ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШДА ИТЕРАЦИЯ МЕТОДИ

Оддий итерация методи. Биз ҳозир оддий итерация (ёки кетма-кет яқинлашиш) методи билан битта сонли тенглама мисолида танишамиз. Бу методнинг умумий назарияси билан кейинги параграфда танишиб чиқамиз. Итерация методини қўллаш учун $f(x) = 0$ тенглама унга тенг кучли бўлган қуйидаги

$$x = \varphi(x) \tag{3.1}$$

каноник шаклга келтирилган ва илдизлари ажратилган бўлиши керак. (3.1) тенгламанинг илдизи ётган атрофнинг бирор x_0 нуқтасини изланаётган илдизнинг нолинчи яқинлашиши деб оламиз. Навбатдаги яқинлашишини топиш учун (3.1) нинг ўнг томонига x_0 ни қўямиз ва ҳосил бўлган $\varphi(x_0)$ қийматини x_1 билан белгилаймиз, яъни

$$x_1 = \varphi(x_0). \tag{3.2}$$

Топилган x_1 сонни (3.1) нинг ўнг томонига қўйиб, янги сон $x_2 = \varphi(x_1)$ ни ҳосил қиламиз. Бу жараённи давом эттириб, n-яқинлашиш x_n ни $(n-1)$-яқинлашиш x_{n-1} ёрдамида топамиз:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.3}$$

Бу формула ёрдамида топилган сонлар кетма-кетлигининг лимити, яъни

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \xi \tag{3.4}$$

мавжуд ва $\varphi(x)$ функция узлуксиз бўлса, (3.3) тенгликнинг ҳар иккала томонида лимитга ўтиб,

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n) = \varphi(\xi),$$

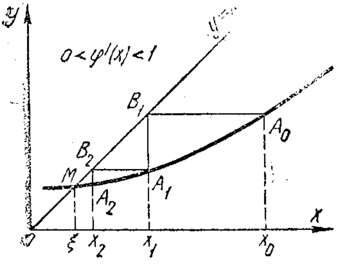
яъни

$$\xi = \varphi(\xi)$$

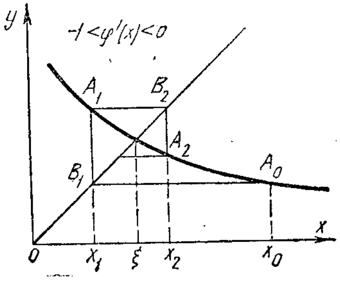
га эга бўламиз. Бу тенгликдан кўринадики, ξ берилган тенгламанинг илдизи экан. Демак, бу илдизни (3.3) формула ёрдамида исталган аниқлик билан ҳисоблаш мумкин. (3.4) лимит мавжуд бўлган ҳолда итерация жараёни *яқинлашувчи* дейилади. Лекин $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин, бундай ҳолда оддий итерация усули мақсадга мувофиқ бўлмайди.

Итерация методи содда геометрик маънога эга. Буни тушуниш учун $y=\varphi(x)$ ва $y=x$ функцияларнинг графикларини чизамиз. Бу графикларнинг кесишган M нуқтасининг абсциссаси (3.1) тенгламанинг $x=\xi$ илдизидир.

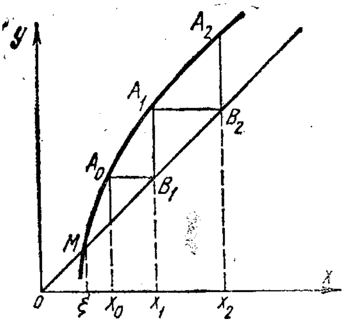
Фараз қилайлик, x_0 нолинчи яқинлашиш бўлсин, у вақтда $A_0(x_0, \varphi(x_0))$ нуқта $y=\varphi(x)$ эгри чизиқда ётади (6- чизма) Бу нуқтадан горизонтал (ox ўқига параллел) чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқ $y=x$ биссектрисани $B_1(\varphi(x_0), \varphi(x_0))$ нуқтада кесади. $\varphi(x_0)$ ни x_1 билан белгилаб олсак, B_1 нуқтанинг координаталари (x_1, x_1) кўринишга эга бўлади. B_1 нуқта орқали oy ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказсак, у $y=\varphi(x)$ эгри чизиқни $A_1(x_1, \varphi(x_1))$ нуқтада кесади. Бу жараённи давом эттириб, $y=x$ биссектрисада ётган $B_2(x_2, x_2)$ (бу ерда $x_2=\varphi(x_1)$), сўнг $y=\varphi(x)$ эгри чизиқ устида $A_2(x_2, \varphi(x_2))$ нуқтага эга бўламиз ва ҳ. к. Агар итерация жараёни яқинлашса, у вақтда $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ нуқталар изланаётган M нуқтага яқинлашади. $A_0, A_1, A_2, \ldots$ нуқталарнинг $x_0, x_1, x_2, \ldots$ абсциссалари ξ га, яъни (3.1) тенгламанинг илдизига яқинлашади. Шундай қилиб, итерация методининг геометрик маъноси қуйидагидан иборат: $y=\varphi(x)$ эгри чизиқ билан координаталар бурчаги биссектрисасининг кесишиш нуқтасига синиқ чизиқ бўйлаб ҳаракат қиламиз, синиқ чизиқнинг учлари навбат би-



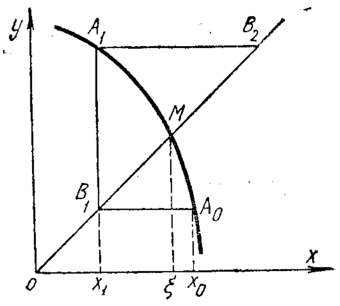
6-чизма.



7-чизма.



8-чизма.



9-чизма.

лан эгри чизиқ ва биссектриса устида ётади, томонлари эса навбат билан горизонтал ва вертикал йўналган бўлади. Агар эгри чизиқ ва биссектриса 6-чизмадагидек жойлашган бўлса, у вақтда синиқ чизиқ зинапояни эслатади. Агар эгри чизиқ ва биссектриса 7-чизмадагидек бўлса, унда синиқ чизиқ спирални эслатади.

Итерацион жараён узоқлашиши ҳам мумкин. Бунинг геометрик маъноси шундан иборатки, зинапоянинг поғоналари (ёки спиралнинг бўғинлари) борган сари катталашади, шунинг учун ҳам A_0, A_1, A_2, ... нуқталар M га яқинлашмайди, балки узоқлашади (8—9-чизмалар).

Модомики, итерация жараёни ҳар доим яқинлашавермас экан, демак, бу жараён яқинлашиши учун қандай шартлар бажарилиши кераклигини аниқлаш катта аҳамиятга эга. Бу шартлар ушбу теоремада кўрсатилади.

1-теорема. Фараз қилайлик, $\varphi(x)$ функция ва дастлабки яқинлашиш x_0 қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $\varphi(x)$ функция

$$|x - x_0| \leqslant \delta \tag{3.5}$$

оралиқда аниқланган бўлиб, бу оралиқдан олинган ихтиёрий иккита x ва y нуқталар учун $\varphi(x)$ Липшиц шартини қаноатлантирсин:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant q\,|x - y| \quad (0 < q < 1); \tag{3.6}$$

2) қуйидаги тенгсизликлар бажарилсин:

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \leqslant \eta, \quad \frac{\eta}{1-q} \leqslant \delta. \tag{3.7}$$

У ҳолда (3.1) тенглама (3.5) оралиқда ягона ξ илдизга эга бўлиб, $\{x_n\}$ кетма-кетлик бу ечимга интилади ва интилиш тезлиги

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{\eta}{1-q}\,q^n \tag{3.8}$$

тенгсизлик билан аниқланади.

Исбот. Аввал индукция методини қўллаб, ихтиёрий n учун x_n ни қуриш мумкинлигини, x_n нинг (3.5) оралиқда ётишлиги ва

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \eta q^n \tag{3.9}$$

тенгсизликнинг бажарилишини кўрсатамиз.

Агар $n=0$ бўлса, $x_1 = \varphi(x_0)$ бўлгани учун (3.9) тенгсизлик (3.7) дан келиб чиқади.

Бундан ташқари, $\eta < \frac{\eta}{1-q} \leqslant \delta$ бўлгани учун $|x_1 - x_0| < \delta$ тенгсизлик бажарилиб, x_1 (3.5) оралиқда ётади. Энди фараз қилайлик, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар қурилган бўлиб, улар (3.5) оралиқда ётсин ва

$$|x_{k+1} - x_k| \leqslant \eta q^k \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

тенгсизликлар бажарилсин. Индукция шартига кўра x_n (3.5) да ётади, $\varphi(x)$ (3.5) да аниқланган, шунинг учун ҳам $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ни қуриш мумкин. Теореманинг 1-шартидан

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \leqslant q|x_n - x_{n-1}|$$

келиб чиқади. Лекин x_{n-1} ва x_n учун индукция шартига кўра $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \eta q^{n-1}$ ўринли, демак, $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \eta q^n$. Бу эса x_{n+1} ва x_n учун (3.9) тенгсизликнинг бажарилишини кўрсатади. Ниҳоят,

$$|x_{n+1} - x_0| \leqslant |x_{n+1} - x_n| + |x_n - x_{n-1}| + \ldots + |x_1 - x_0| \leqslant$$

$$\leqslant \eta q^n + \eta q^{n-1} + \ldots + \eta = \eta \frac{1-q^{n+1}}{1-q} < \frac{\eta}{1-q} \leqslant \delta$$

муносабатлар x_{n+1} нинг (3.5) оралиқда ётишини кўрсатади. Шу билан исбот қилиниши талаб этилган мулоҳаза тасдиқланди.

Энди $\{x_n\}$ нинг фундаментал кетма-кетлик ташкил этишини кўрсатамиз. (3.9) тенгсизликка кўра ихтийрий p натурал сон учун

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |x_{n+p} - x_n| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant$$

$$\leqslant \eta q^{n+p-1} + \ldots + \eta q^n < \frac{\eta}{1-q} q^n$$

ёки

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant \frac{\eta}{1-q} q^n. \tag{3.10}$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томони p га боғлиқ бўлмаганлиги ва $0 < q < 1$ бўлганидан $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг фундаменталлиги ва унинг лимити $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ мавжудлиги келиб чиқади. $\{x_n\}$ кетма-кетлик (3.5) оралиқда ётгани учун ξ ҳам шу оралиқда ётади. (3.6) шартдан $\varphi(x)$ нинг узлуксизлиги келиб чиқади, шунинг учун ҳам $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ тенгликда лимитга ўтиб, ξ (3.1) тенгламанинг илдизи эканини исбот қиламиз.

Энди ξ илдизнинг (3.5) оралиқда ягоналигини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $\tilde{\xi}$ (3.1) тенгламанинг (3.5) оралиқдаги бошқа бирор илдизи бўлсин, $\tilde{\xi} = \xi$ эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, (3.6) га кўра

$$|\tilde{\xi} - \xi| = |\varphi(\tilde{\xi}) - \varphi(\xi)| \leqslant q\,|\tilde{\xi} - \xi|,$$

$0 < q < 1$ бўлгани учун бу муносабат фақат $\tilde{\xi} = \xi$ бўлгандагина бажарилади.

Яқинлашиш тезлигини кўрсатувчи (3.8) тенгсизликни келтириб чиқариш учун (3.10) тенгсизликда $p \to \infty$ лимитга ўтиш кифоядир. Теорема исбот бўлди.

Изоҳ. Одатда, итерация методини қўллаётганда иккита x_{n-1} ва x_n кетма-кет яқинлашишлар берилган аниқлик билан устма-уст тушса, шу аниқлик билан $\xi \cong x_n$ деб олинади. Умуман олганда, бу фикр нотўғридир. Масалан, $x = 0{,}999x$ тенгламани қарайлик. Бу ерда $\varphi(x) = 0{,}999x$, $q = 0{,}999$. Дастлабки яқинлашиш x_0 ни 1 га тенг деб олиб, бу тенгламани итерация методи билан ечамиз. У ҳолда $x_1 = 0{,}999$ ва $x_0 - x_1 = 0{,}001$ бўлади, бу тенгламанинг аниқ илдизи $\xi = 0$ эса x_1 дан 0,999 га фарқ қилади.

Юқорида айтилган фикрни фақат $|\varphi'(x)| \leqslant q$ бўлиб, q бирдан анча кичик бўлгандагина қўллаш мумкин. Бунинг тўғрилигини $q \leqslant \frac{1}{2}$ бўлганда қуйидагича кўрсатиш мумкин. Бунинг учун $f(x) = x - \varphi(x)$ деб оламиз, у ҳолда $f(\xi) = 0$ ва $f'(x) = 1 - \varphi'(x) \geqslant 1 - q$ бўлади. Шунинг учун ҳам

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(\xi)| = |x_n - \xi|\,|f'(\xi_n)| \geqslant (1-q)\,|x_n - \xi|$$
$$(\tilde{x}_n \in (x_n, \xi)),$$

демак

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1-q}$$

ва (3.6) га кўра

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)| \leqslant q\,|x_n - x_{n-1}|.$$

Бу тенгсизликлардан эса

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}|$$

ҳосил бўлади. Агар, хусусий ҳолда, $q \leqslant \frac{1}{2}$ деб олсак,

$$|\xi - x_n| \leqslant |x_n - x_{n-1}|$$

бўлади, яъни бу ҳолда $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ дан $|\xi - x_n| < \varepsilon$ келиб чиқади.

Мисол. Итерация усули билан

$$f(x) = x^3 - 80x + 32 = 0 \tag{3.11}$$

тенгламанинг мусбат илдизлари 5 та ишончли рақам билан топилсин.

Ечиш. Штурм методини қўллаб, бу тенгламанинг мусбат илдизлари ξ_1 ва ξ_2 ларнинг мос равишда (0; 0,5) ва (8,5; 9) оралиқларда ётишини кўрамиз. Итерация методини қўллаш учун (3.11) тенгламани каноник кўринишда ёзиш керак. Буни кўп усуллар билан бажариш мумкин. Лекин ҳар доим ҳам каноник кўринишдаги $\varphi(x)$ функция теорема шартини кафолатлантиравермайди. (3.11) тенгламани унга эквивалент бўлган, масалан, қуйидаги уч хил кўринишда ёзиш мумкин:

$$x = x^3 - 79x + 32 \equiv \varphi_1(x) \tag{3.12}$$

ёки

$$x = \frac{x^3 + 32}{80} \equiv \varphi_2(x) \qquad (3.13)$$

ёки

$$x = \sqrt[3]{80x - 32} \equiv \varphi_3(x). \qquad (3.14)$$

Ҳар иккала илдиз атрофида ҳам $\varphi_i(x)$ лар ҳосилага эга бўлгани учун теоремадаги (3.6) шартни $|\varphi_i'(x)| \leqslant q < 1$ шарт билан алмаштириш мумкин. Энди $\varphi_i(x)$ ларнинг қайси бири теорема шартини қаноатлантиришини кўрайлик, $\varphi_1'(x) = 3x^2 - 79$ бўлгани учун ҳар иккала илдиз атрофида ҳам $|\varphi_1'(x)| > 1$, демак (3.12) тенглама учун итерация жараёни узоқлашади. Энди (3.13) тенгламани текширайлик, $\varphi'_2(x) = \frac{3x^2}{80}$. Бундан (0; 0.5) оралиқда $|\varphi'_2(x)| \leqslant \frac{3}{320} = q < \frac{1}{100}$ эканлигини кўрамиз, яъни ξ_1 ни топиш учун (3.13) тенгламага итерация методини қўллаш мумкин. Дастлабки яқинлашишни $x_0 = 0,5$ деб олиб, кейинги тўртта яқинлашишни ҳисоблаймиз:

$$x_1 = \frac{(0,5)^3 + 32}{80} = 0,4015625;\quad x_2 = 0,4008094;\quad x_3 = 0,40080487;$$

$$x_4 = 0,40080483.$$

Демак, 5 та ишончли рақами билан $\xi_1 = 0,40080$ деб олишимиз мумкин.

Табиийки, (3.13) тенгламада иккинчи илдизни ҳам итерация методи билан топишга ҳаракат қиламиз. Лекин бу мумкин эмас, чунки (8,5; 9) оралиқ учун $|\varphi_2'(x)| \leqslant q < 1$ шарт бажарилмайди. Шунинг учун ҳам (3.14) тенгламани текшириб кўрайлик:

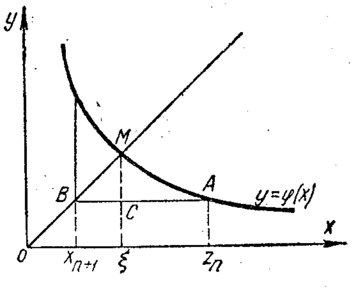
$$\varphi_3'(x) = \frac{80}{3\sqrt[3]{(80x - 32)^2}}.$$

Бундан кўрамизки, (8,5; 9) оралиқда $|\varphi_3'(x)| \leqslant \frac{10}{27} < \frac{1}{2}$, шу сабабли (3.14) тенгламадан ξ_2 ни топишимиз мумкин.

Нолинчи яқинлашишни $x_0 = 9$ деб оламиз, кейинги яқинлашишлар 2-жадвалда келтирилган. Демак, 5 та ишончли рақами билан олинган қиймат $\xi_2 = 8,7371$ га тенг бўлади.

2- жадвал

n	x_n
0	9
1	8,828
2	8,7688
3	8,7483
4	8,7412
5	8,7386
6	8,7376
7	8,7373
8	8,7372
9	8,7371
10	8,7371



10-чизма.

Итерация методи яқинлашишини тезлаштиришнинг бир усули ҳақида. Итерация методининг яқинлашиши ёки узоқлашиши ξ илдизнинг кичик атрофида $\varphi'(x)$ ҳосиланинг қийматига боғлиқ эканлигини юқорида кўрган эдик. Лекин Ж. Х. Вегстейн 1958 йилда итерация методини шундай ўзгартиришни таклиф қилган эдики, буни қўллаганда $\varphi'(x)$ нинг қиймати ҳар қандай бўлганда ҳам итерация жараёни яқинлашади. Мабодо $|\varphi'(x)|<1$ тенгсизлик бажарилса, у вақтда оддий итерация жараёнига нисбатан Вегстейн жараёни тезроқ яқинлашади.

Вегстейн усули

$$x=\varphi(x) \tag{3.15}$$

формуладан топилган x_{n+1} ни

$$z_{n+1}=qz_n+(1-q)x_{n+1} \tag{3.16}$$

формула ёрдамида z_{n+1} билан алмаштиришдан иборат бўлиб, бунда q — керакли равишда танлаб олинган миқдордир. q нинг қийматини аниқлаш учун 10-чизмадан фойдаланамиз.

Фараз қилайлик, x_{n+1} (3.15) формула ёрдамида z_n орқали топилган бўлсин, яъни $x_{n+1}=\varphi(z_n)$. У вақтда A ва B нуқталарнинг координаталари мос равишда $(z_n, \varphi(z_n))$ ва (x_{n+1}, x_{n+1}) бўлади. Бундай ҳолда z_{n+1} учун энг қулай қиймат M нуқтанинг абсциссасидир. Уни топиш учун AB кесма устида C (z_{n+1}, x_{n+1}) нуқтани оламиз. Энди (3.16) нинг ҳар иккала томонига $-qz_n-(1-q)z_{n+1}$ ни қўшиб,

$$q(z_n-z_{n+1})=(1-q)(z_{n+1}-x_{n+1}) \tag{3.17}$$

ни ҳосил қиламиз. Чизмадан фойдаланиб, (3.17) ни

$$qAC=(1-q)BC \tag{3.18}$$

кўринишида ёзишимиз ва

$$BC=MC=-AC\cdot\varphi'(\tilde{x}_n),\ (\varphi'(x_n)<0) \tag{3.19}$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини кўришимиз мумкин, бу ерда $x_{n+1}<\tilde{x}_n<z_n$.

q нинг тақрибий қийматини топиш учун $\varphi'(\tilde{x}_n)$ ни тақрибий равишда қуйидагича алмаштирамиз:

$$\varphi'(\tilde{x}_n)\cong\frac{\varphi(z_n)-\varphi(z_{n-1})}{z_n-z_{n-1}}=\frac{x_{n+1}-x_n}{z_n-z_{n-1}}. \tag{3.20}$$

(3.18) — (3.20) лардан

$$\frac{q}{1-q} = \frac{BC}{AC} = -\varphi'(\tilde{x}_n) \cong -\frac{x_{n+1}-x_n}{z_n - z_{n-1}}$$

ни ҳосил қиламиз ва q нинг тақрибий қийматини топамиз:

$$q \cong \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} - x_n + z_{n-1} - z_n}\,. \qquad (3.21)$$

(3.16) ва (3.21) формулалардан кўрамизки,

$$z_{n+1} = x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - z_n)}{x_{n+1} - z_n + z_{n-1} - x_n}\,. \qquad (3.22)$$

Бу формула x_{n+1} ўрнида ишлатиладиган z_{n+1} нинг қийматини беради. Вегстейн усулини амалда қўллаш учун илдизнинг нолинчи яқинлашиши x_0 га бир марта оддий итерацияни қўллаш керак. Бу биринчи қадамдан сўнг x_{n+1} ни топиш учун эса (3.15) формулани $x_{n+1} = \varphi(z_n)$ кўринишда қўллаймиз. Биз бу ерда бу жараённинг оддий итерация жараёнига нисбатан тезроқ яқинлашишини қатъий равишда асослаб ўтирмасдан мисол келтириш билан чегараланамиз.

Мисол. Ушбу

$$f(x) = x^3 + x - 1000 = 0$$

тенгламанинг энг катта мусбат илдизи 10^{-10} аниқлик билан топилсин. Изланаётган илдизнинг нолинчи яқинлашиши сифатида $x_0 = 10$ ни олишимиз мумкин. Бу тенгламани

$$x = 1000 - x^3 \qquad (3.23)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу ҳолда $\varphi'(x) = -3x^2$ ва $\varphi'(10) = -300$ бўлади. Демак, (3.23) тенгламага оддий итерацияни қўллаб бўлмайди. Бу тенгламанинг ечимини Вегстейн усули билан топилган кетма-кет яқинлашишлари 10^{-10} аниқлик билан 3- жадвалда келтирилган.

3- жадвал

n	$x_{n+1} = \varphi(z_n)$	z_n	$x_{n+1}=\varphi(x_n)$
0	10	*10	10
1	0	*0	0
2	1000	9,9	—1000
3	29,7	10,1	—999000
4	—30,3010	9,9658	-978.10^{15}
5	10,2310	9,966655	
6	9,97016	9,66667791	
7	9,966666	9,966666790	
8	9,9666667906	9,96666679061	
9	9,9666667906	9,96666679061	

Бу жадвалнинг учинчи устунида (3.22) формула ёрдамида топилган z_n лар келтирилган, охирги устун эса оддий итерация усулининг узоқлашишини кўрсатиш учун келтирилган. Юлдузча билан белгиланган қийматлар иккинчи устундаги мос қийматлар билан устма-уст тушади, чунки Вегстейн усулини қўллаш учун $n \geqslant 2$ бўлиши керак.

Ҳисоблаш хатосининг итерацион жараённинг яқинлашишига таъсири. Биз олдинги пунктларда итерацион жараённинг идеал моделини кўриб чиққан эдик. Бу моделда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг барча элементлари абсолют аниқ ҳисобланган деб фараз қилинган эди. Аслида эса қўлда ҳисобланаётганда ҳам, машинада ҳисобланаётганда ҳам, биз амалларни чекли миқдордаги рақамлар устида бажарамиз. Бунинг натижасида, яъни яхлитлаш ҳисобидан, ҳисоблаш хатоси келиб чиқади. Итерациянинг биринчи қадамида $x_1 = \varphi(x_0)$ ўрнига унга яқинроқ бўлган $\tilde{x}_1$ ни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\tilde{x}_1 - x_0 = \gamma_0$ ҳисоблаш хатоси ҳосил бўлади. Иккинчи қадамда эса хато икки сабабга кўра ҳосил бўлади: биринчидан $\varphi(x)$ функцияда x_1 ўрнига $\tilde{x}_1$ қўйилади, иккинчидан $\varphi(\tilde{x}_1)$ яхлитлаш хатоси билан ҳисобланади. Демак, топилган $\tilde{x}_2$ қиймат фақат тақрибий равишда $\varphi(\tilde{x}_1)$ га тенг: $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_1) + \gamma_1$, γ_1—ҳисоблаш хатосидир.

Шундай қилиб, итерация методини қўллаётганда $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $(n = 0, 1, 2. \ldots)$ кетма-кетлик ўрнига

$$\tilde{x}_{n+1} = \varphi(x_n) + \gamma_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

кетма-кетликка эга бўламиз, бу ерда γ_n — ҳисоблаш хатоси.

Юқорида исбот қилинган теореманинг хулосаси $\{x_n\}$ кетма-кетликка тааллуқли бўлгани учун, агар биз қўшимча шарт қўймасак, бу хулоса $\{\tilde{x}_n\}$ кетма-кетлик учун ўринли бўлмайди, ҳатто бу кетма-кетлик ξ илдизга яқинлашмаслиги ҳам мумкин. Шунинг учун қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

2-теорема. Фараз қилайлик, $\varphi(x)$ дастлабки яқинлашиш x_0 ва

$$\tilde{x}_{n+1} = \varphi(\tilde{x}_n) + \gamma_n, \quad \tilde{x}_0 = x_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.24}$$

тенгликлар билан аниқланган $\{\tilde{x}_n\}$ кетма-кетлик қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $\varphi(x)$ функция

$$|x - x_0| \leqslant \delta \tag{3.25}$$

оралиқда аниқланган бўлиб, бу оралиқдан олинган ихтиёрий иккита x ва y нуқталар учун

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant q|x - y| \quad (0 < q < 1) \tag{3.26}$$

тенгсизликни қаноатлантирсин;

2) γ_n сонлар учун

$$|\gamma_n| \leqslant \gamma q_1^n \qquad (0 < q_1 \leqslant 1), \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.27}$$

тенгсизликлар ўринли бўлсин;

3) қуйидаги

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \leqslant \eta, \ \frac{\eta + \gamma}{1 - q} \leqslant \delta \tag{3.28}$$

тенгсизликлар бажарилсин. У ҳолда

1) $x = \varphi(x)$ тенглама (3.25) оралиқда ягона ξ ечимга эга,

2) агар $0 < q_1 < 1$ бўлса, $\{\tilde{x}_n\}$ кетма-кетлик ξ га яқинлашади,

3) агар $q_1 = 1$ бўлса, $\tilde{x}_n$ миқдорлар

$$|\tilde{x}_n - \xi| \leqslant \frac{1}{1 - q}(\gamma + \eta q^n) \tag{3.29}$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

Исбот. Теореманинг биринчи тасдиғи 1- теоремадан келиб чиқади. Қолган тасдиқларни исботлаш учун биз

$$|\tilde{x}_m - x_m| \leqslant \gamma \sum_{i=1}^{m} q^{m-i} q_1^{i-1} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{3.30}$$

тенгсизликларнинг ўринли эканлигини кўрсатамиз.

Аввал шуни таъкидлаб ўтиш керакки, агар x_m (3.30) тенгсизликни қаноатлантирса, у (3.25) оралиқда ётади.

Ҳақиқатан ҳам, (3.30) дан $0 < q_1 \leqslant 1$ ни ҳисобга олиб,

$$|\tilde{x}_m - x_m| \leqslant \gamma \sum_{i=1}^{m} q^{m-i} < \frac{\gamma}{1 - q} \tag{3.31}$$

га эга бўламиз. 1- теоремани исбот қилиш жараёнида

$$|x_m - x_0| < \frac{\eta}{1 - q} \tag{3.32}$$

ни келтириб чиқарган эдик. Кейин бу тенгсизликлардан ва (3.28) дан

$$|\tilde{x}_m - x_0| \leqslant |\tilde{x}_m - x_m| + |x_m - x_0| < \frac{\gamma}{1 - q} + \frac{\eta}{1 - q} \leqslant \delta$$

келиб чиқади.

Энди биз (3.30) тенгсизликни исбот қилишга ўтамиз, бунинг учун математик индукция методини қўллаймиз. (3.24) ва (3.27) дан $n = 0$ бўлганда

$$|\tilde{x}_1 - x_1| = |\gamma_0| \leqslant \gamma$$

келиб чиқади, бу эса (3.30) нинг $m = 1$ бўлганда ўринли эканлигини кўрсатади. Энди фараз қилайлик, (3.30) $m = n$ бўлганда ўринли бўлсин, унинг $m = n + 1$ бўлганда ҳам ўринли бўлишини кўрсатамиз. (3.24) дан $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ни айириб,

$$\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1} = \varphi(\tilde{x}_n) - \varphi(x_n) + \gamma_n$$

ни ҳосил қиламиз. $\tilde{x}_n$ ва x_n лар (3.25) оралиқда ётади, шунинг учун ҳам (3.26), (3.27) ва (3.30) тенгсизликларда $m = n$ деб олиб,

$$|\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}| \leqslant |\varphi(\tilde{x}_n) - \varphi(x_n)| + |\gamma_n| \leqslant q|\tilde{x}_n - x_n| + \gamma q_1^n <$$

$$< \gamma q \sum_{i=1}^{n} q^{n-i}\ q_1^{i-1} + \gamma\, q_1^n = \gamma \sum_{i=1}^{n+1} q^{n+1-i}\ q_1^{i-1}$$

ни ҳосил қиламиз.

Демак, (3.30) $m = n + 1$ учун тўғри экан. Энди теореманинг 2),3)- тасдиқларини исбот қиламиз. (3.8) ва (3.30) тенгсизликларга кўра

$$|\tilde{x}_n - \xi| \leqslant |\tilde{x}_n - x_n| + |x_n - \xi| \leqslant \gamma \sum_{i=1}^{n} q^{n-i}\ q_1^{i-1} + \frac{\eta}{1-q}\, q^n. \quad (3.33)$$

Агар $0 < q_1 < 1$ бўлса, у ҳолда $n \to \infty$ да

$$\sum_{i=1}^{n} q^{n-i}\ q_1^{i-1} \leqslant n\,[\max\,(q,\ q_1)\,]^{n-1} \to 0$$

бўлгани учун, (3.33) дан

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \xi$$

келиб чиқади. Агар $q_1 = 1$ бўлса, (3.33) дан (3.29) келиб чиқади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Изоҳ. 1) γ_n сонларни итерация методининг $(n+1)$-қадамидаги яхлитлаш хатоси деб қараш мумкин.

2- теоремадан γ_n чексиз камаювчи геометрик прогрессиядек нолга интилгандагина $\tilde{x}_n$ нинг ξ илдизга яқинлашиши келиб чиқади. Агар $|\gamma_n| \leqslant \gamma$ бўлса, бу теорема фақат $\tilde{x}_n$ билан ξ орасидаги айирманинг баҳосини беради.

2) $\gamma = 0$ бўлганда биз итерация методининг идеал ҳолига келамиз. Умуман олганда, яқинлашиш ҳақидаги теоремаларни 2- теоремадек таърифлаш керак эди. Лекин шунга қарамасдан бундан кейин биз фақат идеал ҳолни кўриб чиқамиз.

4- §. ҚИСҚАРТИРИБ АКС ЭТТИРИШ ПРИНЦИПИ. ИТЕРАЦИЯ МЕТОДИНИНГ УМУМИЙ НАЗАРИЯСИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Метрик фазо ҳақида тушунча. Фараз қилайлик, X ихтиёрий элементларнинг тўплами бўлсин. Агар X дан олинган ихтиёрий иккита x ва y элементлар учун шундай $\rho(x,\ y)$ функция мавжуд бўлиб, у қуйидаги шартларни (метрик аксиомаларни) қаноатлантирса, у ҳолда X тўплам метрик фазони ташкил этади дейилади:

1) $\rho\ (x,\ y) \geqslant 0$ ва $\rho\ (x,\ y) = 0$ муносабат $x = y$ бўлгандагина бажарилади,

2) $\rho\ (x,\ y) = \rho(y,\ x)$ (симметриклик аксиомаси),

3) $\rho\ (x,\ y) \leqslant \rho(x,\ z) + \rho(z,\ y)$ (учбурчак аксиомаси).

$\rho(x,\ y)$ функцияни эса метрика (ёки x ва y элементлар орасидаги масофа) дейилади. Метрик фазонинг элементлари одатда унинг нуқталари дейилади. X тўпламда масофани ҳар хил усуллар билан киритиш мумкин, у ҳолда X ҳар хил метрик фазоларни ҳосил қилади.

Фараз қилайлик, X n ўлчовли $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторлар тўплами бўлсин. Бу тўпламда биз уч хил масофа киритамиз.

1. **Кубик ёки *m* масофа.** Бу қуйидаги

$$\rho_m(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| \tag{4.1}$$

тенглик билан аниқланади. 1- ва 2- аксиомаларнинг бажарилиши ўз-ўзидан равшан. Учинчи аксиома эса қуйидагича текширилади:

$$\rho_m(x, y) = \max_i |x_i - y_i| = \max_i |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_i (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \leqslant \max_i |x_i - z_i| +$$
$$+ \max_i |z_i - y_i| = \rho_m(x, z) + \rho_m(z, y).$$

2. **Октаэдрик ёки s масофа.** Бу қуйидаги

$$\rho_s(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \tag{4.2}$$

тенглик билан аниқланади. Бу ерда ҳам учинчи аксиоманинг бажарилишини текширамиз:

$$\rho_s(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = \rho_s(x,z) + \rho_s(z,y).$$

3. **Сферик ёки *l* масофа.** Бу масофа қуйидаги

$$\rho_l(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2} \tag{4.3}$$

тенглик билан аниқланади. Бу ерда учинчи аксиомани текширишда Коши-Буняковский тенгсизлиги

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{1/2}$$

дан фойдаланамиз:

$$\rho_l^2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \rho_l^2(x, z) + 2\rho_l(x, z)\,\rho_l(z, y) + \rho_l^2(z, y) = [\rho_l(x, z) + \rho_l(z, y)]^2$$

яъни

$$\rho_l(x, y) \leqslant \rho_l(x, z) + \rho_l(z, y).$$

X тўпламда бу метрикалар ёрдамида киритилган фазолар ўзаро фарқли метрик фазолардир.

m метрика билан аниқланган фазо одатда m_n орқали белгиланади. Учинчи метрика билан аниқланган фазо n ўлчовли Евклид фазосидир.

X метрик фазонинг

$$\rho(x, x_0) \leqslant \delta$$

шартни қаноатлантирадиган нуқталарининг тўплами маркази x_0 да ва радиуси δ га тенг бўлган *ёпиқ шар* дейилади.

Бирор метрик фазодаги шар бошқа фазода тамоман бошқа фигурани ташкил этади. Масалан, m_n фазодаги

$$\rho_m(x, x_0) \leqslant \delta$$

шар n ўлчовли Евклид фазосида маркази $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ нуқтадаги n ўлчовли кубдан иборатдир. Худди шунга ўхшаш

$$\rho_s(x, x_0) \leqslant \delta$$

шар эса маркази x_0 нуқтадаги октаэдрдан иборатдир.

Бизга кейинчалик учбурчак тенгсизлигининг қуйидаги натижаси керак бўлади. Ихтиёрий $x, y, z, u \in X$ нуқталар учун

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u) \qquad (4.4)$$

тенгсизлик ўринли. Ҳақиқатан ҳам, учбурчак тенгсизлигига кўра

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y) \qquad (4.5)$$

тенгсизликларни ёзишимиз мумкин.

Бундан

$$\rho(x, y) - \rho(z, u) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u), \qquad (4.6)$$

бу тенгсизликда x, y лар билан z, u ларнинг мос равишда ўринларини алмаштирсак,

$$\rho(z, u) - \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u) \qquad (4.7)$$

келиб чиқади. Энди (4.4) тенгсизлик (4.6) ва (4.7) дан келиб чиқади. Масофа метрик фазода табиий равишда яқинлашиш тушунчасига олиб келади. X метрик фазода бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар $n \to \infty$ да $\rho(x_n, x) \to 0$ бўлса, у ҳолда бу кетма-кетлик X фазонинг x нуқтасига яқинлашади дейилади ва $x_n \to x$ ёки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ каби ёзилади. $\rho(x, y)$ масофа x ва y элементларнинг узлуксиз функцияси, яъни агар $x_n \to x$ ва $y_n \to y$ бўлса, у ҳолда:

$$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$$

эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, (4.4) тенгсизликда z ва u ни мос равишда x_n ва y_n билан алмаштирсак:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y).$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томони нолга интилади. Демак,

$$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y).$$

Метрик фазода ҳар бир яқинлашувчи кетма-кетлик биргина лимит нуқтага эга бўлиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $x_n \to x$ ва $x_n \to y$, яъни лимит нуқталар иккита x ва y бўлсин. У ҳолда учбурчак тенгсизлигига кўра

$$0 \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y).$$

Бу тенгсизликларнинг ўнг томони $n \to \infty$ да нолга интилганлиги учун $\rho(x, y) = 0$, яъни $x = y$.

X метрик фазодаги ҳар қандай яқинлашувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик Больцано-Коши аломатини қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, агар $x_n \to x$, у ҳолда берилган $\varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 = n_0(\varepsilon)$ мавжудки, ҳар қандай $n > n_0$ учун $\rho(x_n, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бундан $n > n_0$ ва $m > n_0$ учун

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

бўлади.

Тескариси, умуман айтганда, нотўғридир, чунки шундай метрик фазолар мавжудки уларда кетма-кетлик учун Больцано-Коши белгисининг бажарилишидан бу кетма-кетликнинг шу фазода яқинлашувчи эканлиги келиб чиқмайди. Масалан, рационал сонлар тўплами R да масофани $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ формула билан киритсак бу тўплам, равшанки, метрик фазога айланади, аммо бу фазода $\left\{r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ кетма-кетлик рационал сонлар кетма-кетлиги бўлиб, рационал сонга яқинлашмайди, чунки $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ — трансцендент сондир. Шунинг учун ҳам биз қуйидаги таърифни киритамиз.

Агар X метрик фазода Больцано-Коши аломатини қаноатлантирувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда X *метрик фазо тўлиқ* дейилади. Тўлиқ метрик фазолар учун яқинлашиш ҳақидаги теорема ўринлидир: $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун бу кетма-кетлик Больцано-Коши аломатини қаноатлантириши зарур ва етарлидир.

Қисқартириб акс эттириш принципи. Фараз қилайлик, X тўлиқ метрик фазо бўлиб, $\varphi(x)$ эса шу фазода аниқланган оператор бўлсин. Агар шундай бирдан кичик мусбат сон мавжуд бўлиб, ихтиёрий икки $x, y \in X$ элементлар учун

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant q\rho(x, y) \tag{4.8}$$

тенгсизлик бажарилса, яъни φ оператор X фазо элементларини яқинлаштирса, бу оператор X фазони ўзига *қисқартириб акс эттиради* дейилади.

Биз энди

$$x = \varphi(x) \tag{4.9}$$

операторли тенгламани ечиш масаласини кўриб чиқамиз.

1-теорема. Агар $\varphi(x)$ оператор ва дастлабки яқинлашиш x_0 қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

1) $$\rho(x, x_0) \leqslant \delta \tag{4.10}$$

шардан олинган ихтиёрий икки x ва y элемент учун

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant q\rho(x, y) \qquad (0 < q < 1); \tag{4.11}$$

2) қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлса:

$$\rho(\varphi(x_0), x_0) < \eta, \quad \frac{\eta}{1-q} \leqslant \delta, \tag{4.12}$$

у ҳолда (4.9) тенглама (4.10) шарда ягона ξ илдизга эга бўлиб, $\{x_n\}$ кетма-кет яқинлашишлар бу ечимга интилади ва интилиш тезлиги

$$\rho(x_n, \xi) \leqslant \frac{\eta}{1-q} q^n \tag{4.13}$$

билан аниқланади.

Исбот. Аввало $\{x_n\}$ кетма-кетликни қуриш мумкинлигини, унинг элементлари (4.10) шарда ётишини ва

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \eta q^n \tag{4.14}$$

тенгсизлик ўринли эканлигини индукция методи билан кўрсатамиз. Шартга кўра x_0 (4.10) шарда ётади ва унда $\varphi(x)$ аниқланган, шунинг учун $x_1 = \varphi(x_0)$ ни қуриш мумкин. Кейин (4.12) дан $\rho(x_1, x_0) = \rho(\varphi(x_0), x_0) \leqslant \eta$ келиб чиқади. Демак, (4.14) тенгсизлик $n = 0$ да ўринли экан. Бундан ташқари, (4.12) га кўра $\eta \leqslant \frac{\eta}{1-q} \leqslant \delta$, демак, x_1 (4.10) шарда ётади. Энди $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қурилган, (4.10) шарда ётади ва улар учун

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \leqslant \eta\, q^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{4.15}$$

тенгсизликлар ўринли деб фараз қиламиз. Индукция шартига кўра x_n (4.10) шарда ётади, $\varphi(x)$ оператор (4.10) да аниқланган, шунинг учун ҳам $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ни қуриш мумкин. Сўнгра, (4.12) га кўра

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant q\, \rho(x_n, x_{n-1}).$$

Энди (4.15) да $k = n - 1$ деб олиб, бундан

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \eta q^n$$

ни ҳосил қиламиз. Ниҳоят, x_{n+1} нинг (4.10) да ётишини кўрсатиш қолди. Бунинг учун $\rho(x_{n+1}, x_0)$ масофага бир неча марта учбурчак тенгсизлигини қўллаймиз ва (4.15) дан фойдаланамиз:

$$\rho(x_{n+1}, x_0) \leqslant \rho(x_{n+1}, x_n) + \rho(x_n, x_{n-1}) + \ldots + \rho(x_1, x_0) \leqslant$$
$$\leqslant \eta q^n + \eta q^{n-1} + \ldots + \eta q^0 \leqslant \frac{\eta}{1-q} \leqslant \delta.$$

Энди $\{x_n\}$ нинг фундаментал кетма-кетлик ташкил этишлигини кўрсатамиз. Ихтиёрий p натурал сон учун (4.14) га кўра

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \eta q^{n+p-1} + \ldots + \eta q^n = \frac{\eta q^n(1-q^p)}{1-q} \leqslant \frac{\eta}{1-q} \cdot q^n$$

ёки

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant \frac{\eta}{1-q} \cdot q^n. \tag{4.16}$$

Бу тенгсизликнинг ўнг томони $n \to \infty$ да нолга интилади. Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлиб, X фазо ёпиқ бўлгани учун унинг лимити $\xi = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ мавжуд.

Масофанинг узлуксизлигидан фойдаланиб $\rho(x_n, x_0) \leqslant \delta$ тенгсизликда $n \to \infty$ да лимитга ўтсак, $\rho(\xi, x_0) \leqslant \delta$ келиб чиқади, яъни ξ ҳам (4.10) да ётар экан. Кейин, $\rho(\varphi(x_n), \varphi(\xi)) \leqslant q\rho(x_n, \xi)$ тенгсизликнинг ўнг томони нолга интилганлиги сабабли $\varphi(x_n) \to \varphi(\xi)$. Энди $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ тенгликда лимитга ўтсак $\xi = \varphi(\xi)$ келиб чиқади, демак, ξ (4.9) тенгламанинг ечими экан. Энди бу илдизнинг ягоналигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, ξ_1 (4.9) тенгламанинг (4.10) сферадаги бирор ечими бўлсин, $\xi_1 = \xi$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам (4.11) га кўра

$$\rho(\xi_1, \xi) = \rho(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi)) \leqslant q\ \rho(\xi_1\ \xi),$$

$0 < q < 1$ бўлганлиги учун бу муносабатлар фақат $\xi_1 = \xi$ бўлгандагина бажарилади.

Ниҳоят, (4.13) тенгсизликнинг бажарилишини кўрсатиш қолди. Уни кўрсатиш учун (4.16) тенгсизликда $p \to \infty$ да лимитга ўтиш кифоядир.

Чизиқли бўлмаган тенгламалар системасини итерация методи билан ечиш. Биз энди итерация методи билан

$$\begin{cases} f_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

тенгламалар системасини ечиш масаласига ўтамиз. Бунинг учун аввал (4.17) системани бирор усул билан қуйидаги каноник шаклга келтириб оламиз:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{4.18}$$

Фараз қилайлик, $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ дастлабки яқинлашиш топилган бўлсин, у ҳолда кейинги яқинлашишлар қуйидагича топилади:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)}=\varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \\ x_n^{(k+1)}=\varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}). \end{cases} \tag{4.19}$$

Бу итерацион жараён яқинлашишининг етарли шартларини аниқлаш учун қисқартириб акс эттириш принципини қўллаймиз. Шу мақсадда n ўлчовли векторлар фазоси R_n да $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектор ва (4.18) системанинг ўнг томонидаги $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ функцияларнинг қийматларидан тузилган $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ векторни олиб $y=\varphi(x)$ операторни аниқлаймиз. Бу оператор R_n ни R_n га ёки R_n нинг бирор қисмига акслантиради. Бу оператор ёрдамида (4.18) система

$$x=\varphi(x), \tag{4.20}$$

(4.19) итерацион жараён эса

$$x^{(k+1)}=\varphi(x^{(k)}) \quad (k=0, 1, 2, \ldots) \tag{4.21}$$

кўринишида ёзилади. Энди (4.20) тенгламага 1- теоремани қўллаш учун теореманинг (4.11) шартида қатнашадиган q ни $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ лар орқали ифодалаш керак. Бундай ифода масофага боғлиқдир. Биз юқорида R_n фазода уч хил масофа тушунчасини киритган эдик. Ҳар бир масофада q нинг ифодасини топамиз.

1. *m масофада:* $\rho_m(x, x^{(0)}) \leqslant \delta$ шардан ихтиёрий иккита $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ вектор олиб ва $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ функциялар бу шарда узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб фараз қилиб, бу нуқталар тасвирларининг $\varphi_i(x)$ ва $\varphi_i(y)$ координаталарини кўрамиз:

$$|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|=|\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)-\varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)|=$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j}(x_j-y_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(\tilde{x})}{\partial x_j}\right| \max_{1<k<n}|x_k-y_k|=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(\tilde{x})}{\partial x_j}\right|\right)\rho_m(x, y).$$

Бу ерда ҳосиланинг қиймати x ва y нуқталарни бирлаштирадиган тўғри чизиқнинг x нуқтасида ҳисобланган. Бу нуқта x, y ва i га боғлиқдир. Юқоридаги баҳо x, y ва i га боғлиқ бўлмаслиги учун

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(\tilde{x})}{\partial x_j}\right| \text{ ни } \max_{i}\max_{x}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right|$$

га алмаштирамиз, бу ерда x бўйича максимум $\rho_m(x, x^{(0)}) \leqslant \delta$ шардаги энг катта қийматни билдиради.

Натижада биз

$$\rho_m(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant \max_i \max_x \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \rho_m(x, y)$$

га эга бўламиз. Бундан кўринадики, 1- теореманинг (4.11) шартидаги q сифатида

$$q_m = \max_i \max_x \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \tag{4.22}$$

ни олишимиз мумкин.

II. *s масофада.* Юқоридагига ўхшаш ишларни $\rho_s(x, x^{(0)}) \leqslant \delta$ шарда бажариб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \max_j \max_x \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|.$$

Бундан эса

$$\rho_s(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant q_s \rho_s(x, y),$$

$$q_s = \sum_{i=1}^{n} \max_j \max_x \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|$$

келиб чиқади.

III. *l масофада.* Қаралаётган $\rho_l(x, x^{(0)}) \leqslant \delta$ шар Евклид фазосидаги

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{(0)})^2 \right]^{1/2} \leqslant \delta$$

шардан иборатдир. Бу шардан ихтиёрий иккита x ва y нуқталарни олиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)|^2 = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(\tilde{x})}{\partial x_j} (x_j - y_j) \right|^2 \leqslant \max_x \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)^2 \cdot \rho_l^2(x, y);$$

$$\rho_l^2(\varphi(x), \varphi(y)) = \sum_{i=1}^{n} [\varphi_i(x) - \varphi_i(y)]^2 \leqslant q_l^2 \, \rho_l^2 \, (x, y),$$

$$q_l^2 = \sum_{i=1}^{n} \max \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} \right)^2.$$

Шундай қилиб, учала масофада ҳам q нинг ифодасини топдик. Энди 1- теоремадан фойдаланиб, итерация жараёни яқинлашишининг етарли шартини бериш мумкин. Биз буни фақат m масофа учун таърифлаймиз, қолган иккита масофа учун теоремани таърифлашни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

2- теорема. Фараз қилайлик:

1) $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = \overline{1, n})$ функциялар

$$\max_i |x - x^{(0)}| \leqslant \delta \tag{4.23}$$

соҳада аниқланган ва узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин;

2) бу соҳада

$$\max_x \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \leqslant q < 1 \quad (i = \overline{1, n}) \tag{4.24}$$

тенгсизликларни қаноатлантирсин;

3) дастлабки яқинлашиш $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ учун

$$|x_i^{(0)} - \varphi_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})| \leqslant \eta \quad (i = \overline{1, n}), \quad \frac{\eta}{1-q} \leqslant \delta$$

шартлар бажарилсин. У ҳолда (4.18) тенгламалар системаси (4.23) соҳада ягона $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ечимга эга бўлиб, (4.19) тенгликлар билан аниқланадиган кетма-кет яқинлашишлар бу ечимга интилади ва интилиш тезлиги

$$|\xi_i - x_i^{(k)}| \leqslant \frac{\eta}{1-q} q^n \quad (i = \overline{1, n})$$

тенгсизликлар билан баҳоланади.

Энди оддий итерация методи ёрдамида мисол ечишни кўрсатамиз.

Мисол. Қуйидаги

$$f_1(x, y) \equiv 2x^2 - x(y+5) + 1 = 0, \quad f_2(x, y) = x + 3\lg x - y^2 = 0$$

системанинг мусбат илдизлари тўртта маъноли рақам билан топилсин.

Ечиш. $f_1(x, y) = 0$ ва $f_2(x, y) = 0$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (11- чизма). Бизни қизиқтирадиган илдизнинг тақрибий қиймати $x_0 = 3,5$; $y_0 = 2,2$ дир.

Итерация методини қўллаш учун бу системани қуйидаги

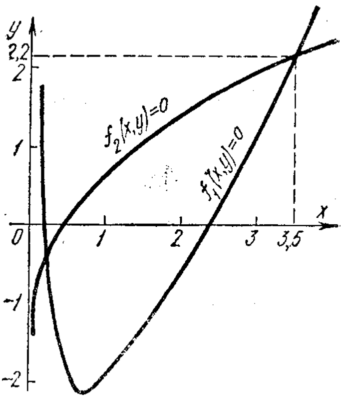
$$x = \sqrt{0,5[x,(y+5) - 1]} \equiv \varphi_1(x, y), \quad y = \\ = \sqrt{x + 3\lg x} \equiv \varphi_2(x, y)$$

каноник шаклга келтирамиз. Энди 2- теорема шартларини текширайлик. Бунинг учун дастлабки яқинлашишнинг

$$|x - 3,5| \leqslant 0,1; \quad |y - 2,2| \leqslant 0,1$$

атрофида (4.22) шартни текшириб кўрамиз:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{y+5}{4\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}},$$



11-чизма.

4- жадвал

k	x_k	y_k
0	3,5	2,2
1	3,479	2,259
2	3,481	2,260
3	3,484	2,261
4	3,486	2,261
5	3,487	2,262
6	3,487	2,262

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{x}{4\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}},$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\frac{1+\frac{3M^2}{x}}{2\sqrt{x+3\lg x}}, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0,$$

бу ерда $M=0{,}43429$ — ўтиш модули. Қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$\max_{x,\ y}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|\leqslant\frac{(2{,}3+5)\sqrt{2}}{4\sqrt{3{,}4(2{,}1+5)}}<0{,}54;$$

$$\max_{x,\ y}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|\leqslant\frac{3{,}6\sqrt{2}}{4\sqrt{3{,}4(2{,}1+5)-1}}<0{,}27;$$

$$\max_{x,\ y}\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|\leqslant\frac{1+\frac{3\cdot0{,}434}{3{,}4}}{2\sqrt{3{,}4+2\lg3{,}4}}<0{,}42; \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0.$$

Бундан

$$\max\left(\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|\right)\leqslant0{,}81; \quad \max\left(\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|\right)\leqslant0{,}42.$$

Демак, $q=0{,}81$ ва итерация жараёни яқинлашади. Кетма-кет яқинлашишларни

$$x_{k+1}=\sqrt{\frac{x_k(y_k+5)-1}{2}}, \quad y_{k+1}=\sqrt{x_k+3\lg x_k}, \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

формулалар ёрдамида олиб борамиз. x_k ва y_k кетма-кет яқинлашишларнинг қийматлари 4- жадвалда келтирилган. Шундай қилиб, тақрибий ечим сифатида

$$\xi_1=3{,}487; \quad \xi_2=2{,}262$$

ни олишимиз мумкин.

5- §. ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШНИНГ ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ИТЕРАЦИОН МЕТОДЛАРИ

Умумий мулоҳазалар. Аввал оддий итерация методи билан танишганимизда кўрган эдикки, x_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ тақрибий қийматлар кетма-кетлиги ξ ечимга яқин бўлса, хато $\varepsilon_n=\xi-x_n$ умуман айтганда,

$$\varepsilon_n=\varphi'(\xi)\,\varepsilon_{n-1}$$

қонун билан ўзгаради, яъни n- қадамдаги хато $(n-1)$- қадамдаги хатога пропорционалдир. Агар $|\varphi'(\xi)|<1$ бўлса, у вақтда ε_n хато махражи $\varphi'(\xi)$ га тенг бўлган геометрик прогрессия қонуни бўйича ўзгаради. Шундай методлар ҳам мавжудки, уларда n- қадамдаги хато $(n-1)$- қадамдаги хатонинг m- даражасига пропорционалдир $(m\geqslant2)$, яъни $\varepsilon_n=\overline{\Phi}(\xi)\,\varepsilon_{n-1}^m$. Масалан, Ньютон методида хатонинг ўзгариш қонуни (6- § га қ.)

$$\varepsilon_n=\frac{1}{2}\,\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\,\varepsilon_{n-1}^2$$

каби бўлади. Бу ерда n- қадамдаги хато $(n-1)$- қадамдаги хатонинг квадратига пропорционалдир, шунинг учун ҳам бу ерда *хато квадратик қонун билан ўзгаради* деб айтилади.

Энди *итерация тартиби* деган тушунчани умумий ҳолда киритамиз. Агар

$$\varphi'(\xi)=\varphi''(\xi)= \ldots =\varphi^{(p-1)}(\xi)=0, \ \varphi^{(p)}(\xi)\neq 0$$

бўлса, у ҳолда

$$x_n=\varphi(x_{n-1})$$

итерацион жараён *р-тартибга эга ёки унинг яқинлашиш тартиби р* га тенг дейилади. Агар ξ илдиз атрофида $\varphi(x)$ функция p- тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда Тейлор формуласига кўра

$$\varphi(x)=\varphi(\xi)+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\varphi^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k+\frac{\varphi^{(p)}(\eta)}{p!}(x-\xi)^p,$$

бу ерда $\eta\in(x, \xi)$.

Бундан итерациянинг тартиби p бўлганда

$$\varphi(x)-\xi=\frac{\varphi^{(p)}(\eta)}{p!}(x-\xi)^p,$$

ўз навбатида

$$x_n-\xi=\frac{\varphi^{(p)}(\eta)}{p!}(x_{n-1}-\xi)^p$$

келиб чиқади.

Бу параграфда $f(x)=0$ тенгламанинг илдизларини топиш учун юқори тартибли итерацион методни қуришнинг иккитасини кўриб ўтамиз.

Чебишев методи. П. Л. Чебишев 1833 йилда берилган $f(x)$ функцияга тескари бўлган $g(y)$ функцияни Тейлор формуласи ёрдамида тасвирлаш йўли билан юқори тартибли итерацияни қуриш методини таклиф этди.

Фараз қилайлик, $f(x)=0$ тенгламанинг $x=\xi$ илдизи $[a, b]$ оралиқда ётсин ва $f(x)$ функция ҳамда унинг етарлича юқори тартибли ҳосилалари узлуксиз бўлсин. Бундан ташқари бу оралиқнинг барча нуқталарида $f'(x)\neq 0$ бўлсин. У ҳолда $f'(x)$ бу оралиқда ўз ишорасини сақлайди ва $f(x)$ монотон функция бўлиб, $x=g(y)$ тескари функцияга эга бўлади. Тескари функция $g(y)$ $f(x)$ нинг ўзгариш соҳаси $[c, d]$ да аниқланган бўлиб, $f(x)$ қанча узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, у ҳам шунча узлуксиз ҳосилаларга эга бўлади. Тескари функциянинг таърифига кўра

$$x\equiv g(f(x)) \ (x\in[a, b]), \ y\equiv f(g(y)) \ \ (y\in(c, d]). \qquad (5.1)$$

Демак,

$$\xi=g(0). \qquad (5.2)$$

Агар $y \in [c, d]$ бўлса, у ҳолда Тейлор формуласидан

$$\xi = g(0) = g(y - y) = g(y) + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \frac{g^{(k)}(y)}{k!} y^{(k)} + \\ + (-1)^p \frac{g^{(p)}(\eta)}{p!} y^p, \qquad (5.3)$$

бу ерда η сони 0 ва y орасида ётади. Ёки y ўрнига $f(x)$ ни қўйиб ва $g(y) = x$ ни назарда тутиб,

$$\xi = x + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \frac{g^{(k)}(f(x))}{k!} f^{(k)}(x) + (-1)^p \frac{g^{(p)}(\eta)}{p!} f^p(x) \qquad (5.4)$$

ни ҳосил қиламиз. Агар

$$\varphi_p(x) = x + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \frac{g^{(k)}(f(x))}{k!} f^k (x)$$

деб белгилаб олсак, у ҳолда

$$x = \varphi_p(x) \qquad (5.5)$$

тенглама учун $x = \xi$ ечим бўлади, чунки

$$\varphi_p(\xi) = \xi + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \frac{g^{(k)}(f(\xi))}{k!} f^{(k)} (\xi) = \xi.$$

Бундан

$$\varphi_p^{(j)} (\xi) = 0, j = \overline{1, p-1},$$

бўлганлиги сабабли

$$x_{n+1} = \varphi_p(x_n) \ (n = 0, 1, 2, \ldots ; x_0 \in [a, b]) \qquad (5.6)$$

итерацион жараён p-тартибли бўлади. Агар x_0 ξ га яқин бўлса, у ҳолда (5.6) билан аниқланган $\{x_n\}$ кетма-кетлик ξ га яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам, $\varphi_p'(\xi) = 0$ бўлганлиги учун ξ нинг шундай атрофи топиладики, у ерда $|\varphi_p'(x)| \leqslant q < 1$ бўлади. Бундан эса x_0 ξ га етарлича яқин бўлса $\{x_n\}$ итерацион кетма-кетликнинг яқинлашиши келиб чиқади.

Энди $\varphi_p(x)$ нинг $f(x)$ ва унинг ҳосилалари орқали ошкор ифодасини топамиз. Бунинг учун (5.1) айниятдан кетма-кет ҳосилалар оламиз:

$$\begin{cases} g'(f(x))f'(x) = 1, \\ g''(f(x))f'^2(x) + g'(f(x))f''(x) = 0, \\ g'''(f(x))f'^3(x) + 3g''(f(x))f'(x)f''(x) + g'(f(x))f'''(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (5.7)$$

Бу ердан биз кетма-кет $g'(f(x))$, $g''(f(x))$, ... , $g^{(p-1)}(f(x))$ ларни ва шу билан бирга $\varphi_p(x)$ ни аниқлаймиз. (5.6) итерация жараёнини p нинг бир нечта конкрет қийматларида ошкор кўринишга келтирамиз. $p=2$ бўлганда

$$\varphi_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ ва } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{5.8}$$

Биз кейинчалик кўрамизки, бу жараён Ньютон жараёни билан устма-уст тушади. $p=3$ бўлганда (5.5) ва (5.7) дан

$$\varphi_3(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)f^2(x)}{2[f'(x)]^3}$$

ва

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{2[f'(x_n)]^3} \tag{5.9}$$

келиб чиқади. р=4 учун

$$\varphi_4(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)f^2(x)}{2[f'(x)]^3} - \frac{f^3(x)}{12} \cdot \frac{3f''^2(x) - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$$

ва (5.10)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{2[f'(x_n)]^3} - \frac{f^3(x_n)}{12} \cdot \frac{3f''^2(x_n) - f'(x_n)f'''(x_n)}{[f'(x_n)]^5}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу итерацион жараёнлар мос равишда 2, 3 ва 4- тартибли итерациялар бўлади.

Энди $\varepsilon_n = \xi - x_n$ хатонинг нолга интилиш тезлигини баҳолаймиз. Бунинг учун (5.4) тенгликда $x = x_n$ деб олиб, (5.6) ни назарда тутиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\xi - x_{n+1} = \frac{(-1)^p g^{(p)}(f(\tilde{x}))}{p!} f^p(x_n), \tag{5.11}$$

бу ерда $\tilde{x}$ ξ билан x_n орасида ётади, $f(\xi) = 0$ бўлганлиги учун

$$f(x_n) = -[f(\xi) - (fx_n)] = -(\xi - x_n) f'(\overline{x}) \tag{5.12}$$

($\overline{x}$ ҳам ξ билан x_n орасида ётади). (5.12) ни (5.11) га қўямиз:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{g^p(f(\tilde{x}))}{p!} [f'(\overline{x})]^p \varepsilon_n^p. \tag{5.13}$$

Қуйидаги

$$q = \max_{\tilde{x},\, \overline{x} \in [a,\, b]} \left| \frac{g^{(p)}(f(\tilde{x}))}{p!} [f'(\overline{x})]^p \right|$$

белгилашни киритиб, (5.13) дан

$$|\varepsilon_{n+1}| \leqslant q\, |\varepsilon_n|^p \tag{5.14}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизликни кетма-кет қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$|\varepsilon_n| \leqslant q^{1+p+\ldots+p^{n-1}} |\varepsilon_0|^{p^n} = (q|\varepsilon_0|)^{\frac{p^n-1}{p-1}} |\varepsilon_0|^{\frac{p^n(p-2)+1}{p-1}}.$$

Агар $|\varepsilon_0| < 1$ ва $q\ |\varepsilon_0| = \omega < 1$ бўлса, у ҳолда

$$|\varepsilon_n| \leqslant \omega^{\frac{p^n-1}{p-1}} \tag{5.15}$$

бўлади, бу эса (5.6) итерациянинг ниҳоятда тез яқинлашишини кўрсатади. Хусусий ҳолда $\omega \lessapprox 10^{-1}$ ва $|\varepsilon_0| < 1$ бўлса, юқоридаги (5.8), (5.9) ва (5.10) итерациялар учун мос равишда қуйидагиларга эга бўламиз: $p = 2$ учун

$$|\varepsilon_1| \leqslant 10^{-1},\ |\varepsilon_2| \leqslant 10^{-3},\ |\varepsilon_3| \leqslant 10^{-7},\ |\varepsilon_4| \leqslant 10^{-15};\ \ldots$$

$p = 3$ учун

$$|\varepsilon_1| \leqslant 10^{-1},\ |\varepsilon_3 \leqslant 10^{-4},\ |\varepsilon_3| \leqslant 10^{-13},\ |\varepsilon_4| \leqslant 10^{-40},\ \ldots$$

$p = 4$ учун

$$|\varepsilon_1| \leqslant 10^{-1},\ |\varepsilon_2| \leqslant 10^{-5},\ |\varepsilon_3| \leqslant 10^{-18},\ |\varepsilon_4| \leqslant 10^{-85},\ \ldots$$

Демак, $\omega \leqslant 0{,}1$ бўлганда учинчи итерациянинг ўзи бизга керакли аниқликни беради.

Эйткен методи. А. Эйткен 1937 йилда хос сон ва хос векторларни топишдаги итерацион жараённи яхшилаш методини таклиф қилган эди. Умуман олганда Эйткен методини ҳар қандай итерацион процессга ҳам қўллаш мумкин. Биз ҳозир ана шу методни кўриб чиқамиз. Фараз қилайлик, бизга $x = \xi$ га яқинлашувчи p-тартибли жараён

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

берилган бўлсин. $\varphi(x)$ функция ёрдамида

$$\Phi(x) = \frac{x \cdot \varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))} \tag{5.16}$$

функцияни тузамиз.

Агар $\varphi'(\xi) \neq 1$ ва $p = 1$ бўлса, у ҳолда

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) \tag{5.17}$$

итерацион жараённинг тартиби 2 дан кичик бўлмайди, $p > 1$ бўлганда эса $2p - 1$ дан кичик бўлмайди. Бу тасдиқларни исбот қиламиз. Умумийликка зарар етказмасдан, $\xi = 0$ деб олишимиз мумкин. Агар $\xi \neq 0$ бўлса, $x = \xi + z$, $\varphi(x) - \xi = \varphi(\xi + z) - \xi = \omega(z)$ белгилашларни киритамиз. У ҳолда $x = \varphi(x)$ тенглама $z = \omega(z)$ тенгламага ўтади, $\omega(z)$ учун қурилган (5.16) функция

$$\Omega(z) = \frac{z\,\omega(\omega(z)) - \omega^2(z)}{z - 2\omega(z) + \omega(\omega(z))} = \frac{(x-\xi)\,\omega(\varphi(x)-\xi) - (\varphi(x)-\xi)^2}{x - \xi - 2(\varphi(x)-\xi) + \omega(\varphi(x)-\xi)} =$$

$$= \frac{(x-\xi)[\varphi(\varphi(x)) - \xi] - (\varphi(x)-\xi)^2}{x - \xi - 2(\varphi(x)-\xi) + \varphi(x)) - \xi} =$$

$$= \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x) - \xi[x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))]}{x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))} = \Phi(x) - \xi$$

га ўтади. Демак, $\xi=0$ деб олишимиз мумкин, $x_n=\varphi(x_{n-1})$ p-тартибли итерация бўлганлиги учун $\varphi(x)$ нинг $x=0$ нуқта атрофидаги ёйилмаси қуйидаги

$$\varphi(x)=\alpha_p x^p+\alpha_{p+1} x^{p+1}+\ldots$$

кўринишга эга бўлади. Бу ёйилмани (5.16) га қўйсак,

$$\Phi(x)=\frac{x\,[\alpha_p(\alpha_p x^p+\alpha_{p+1} x^{p+1}+\ldots)^p+\ldots]-(\alpha_p x^p+\alpha_{p+1} x^{p+1}+\ldots)^2}{x-2(\alpha_p x^p+\alpha_{p+1} x^{p+1}+\ldots)+[\alpha_p(\alpha_p x^p+\alpha_{p+1} x^{p+1}+\ldots)^p+\ldots]}=$$

$$=\frac{x(\alpha_p{}^{p+1} x^{p^2}+\ldots)-(\alpha_p^2 x^{2p}+2\,\alpha_p\,\alpha_{p+1} x^{2p+1}+\ldots)}{x-2\,\alpha_p x^p+\alpha_p^{p+1} x^{p^2}-2\alpha_{p+1} x^{p+1}+\ldots} \qquad (5.18)$$

ҳосил бўлади. Бу ифодани $p=1$ ва $p>1$ ҳоллар учун алоҳида-алоҳида текширамиз. Агар $p=1$ бўлса, у ҳолда $\Phi(x)$ нинг суратида x нинг даражаси учдан кичик эмас (чунки иккинчи даражали ҳадлари ўзаро бир-бирларини йўқотишади), махражида эса x олдидаги коэффициент

$$1-2\alpha_p+\alpha_p^2=1-2\alpha_1+\alpha_1^2=(1-\varphi'(0))^2\neq 0.$$

Демак, махражда x нинг биринчи даражаси мавжуд ва $\Phi(x)$ нинг даражали қатордаги ёйилмаси ҳеч бўлмаганда x^2 дан бошланади. Шунинг учун ҳам $\Phi'(\xi)=0$ ва (5.17) итерациянинг тартиби 2 дан кичик эмас.

Агар $p>1$ бўлса, (5.18) нинг суратида x нинг энг кичик даражаси $2p$ га тенг бўлиб, махражда x нинг 1- даражаси қатнашади. Демак, $\Phi(x)$ нинг даражали қатордаги ёйилмаси ҳеч бўлмаганда x^{2p-1} дан бошланади. Яъни ҳеч бўлмаганда $j=1, 2, \ldots, 2p-2$ лар учун $\Phi(\xi)=0$. Бу эса (5.17) итерациянинг тартиби ҳеч бўлмаганда $2p-1$ га тенг эканлигини кўрсатади.

1- изоҳ. Агар дастлабки яқинлашиш x_0 ξ га ҳар қанча яқин бўлганда ҳам, $\varphi(x)$ билан аниқланган итерация яқинлашмаса(масалан, $|\varphi'(\xi)|>1$ бўлганда) ҳам (5.17) итерация. x_0 ξ га етарлича яқин бўлганда яқинлашади. Чунки $\Phi'(\xi)=0$ бўлганлиги учун $x=\xi$ нинг шундай атрофи топиладики, у ерда $|\Phi''(\xi)|\leqslant q<1$ бўлади. Бу эса, x_0 шу атрофдан олинган бўлса, $x_n=\Phi(x_{n-1})$ итерациянинг яқинлашиши учун етарли шартдир.

2- изоҳ. (5.16) билан аниқланган $\Phi(x)$ нинг ошкор кўриниши маълум бўлмаса ҳам (5.17) формула билан итерацияни қуриш мумкин. Буни қуйидаги усул билан бажариш мумкин. x_0 дан бошлаб аввало

$$x_1=\varphi(x_0) \text{ ва } x_2=\varphi(x_1)$$

қурилади, кейин эса x_3 ни

$$x_3=\frac{x_0 x_2-x_1^2}{x_0-2x_1+x_2}$$

формула ёрдамида аниқлаймиз.

Агар $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\Delta^2 x_i=x_{i+2}-2x_{i+1}+x_i$ деб белгилаб олсак, x_3 ни қуйидагича ёзишимиз ҳам мумкин:

$$x_3=x_0-\frac{(\Delta x_0)^2}{\Delta^2 x_0}.$$

Навбатдаги итерацияларни

$$x_4 = \varphi(x_3),\; x_5 = \varphi(x_4),\; x_6 = x_5 - \frac{(\Delta x_3)^2}{\Delta^2 x_3}$$

формулалар ёрдамида қурамиз ва ҳ. к.

Шундай қилиб, биз қуйидаги итерацион жараёнга эга бўламиз:

$$x_{3i+1} = \varphi(x_{3i}),$$
$$x_{3i+2} = \varphi(x_{3i+1})\; (i = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$x_{3i+3} = x_{3i} - \frac{(\Delta x_{3i})^2}{\Delta^2 x_i}.$$

Охирги формуланинг кўринишига қараб, одатда Эйткен методи *Эйткеннинг* δ^2-*жараёни* дейилади.

6-§. НЬЮТОН МЕТОДИ

Битта сонли тенглама бўлган ҳол. Ньютон методи сонли тенгламаларни ечишнинг жуда ҳам эффектив методидир. Бу методнинг афзаллиги шундан иборатки, ҳисоблаш схемаси мураккаб бўлмаган ҳолда кетма-кет яқинлашишлар илдизга тез яқинлашади. Ньютон методи итерация методи каби универсал методдир. Бу метод ёрдамида сонли тенгламаларнинг ҳақиқий ва комплекс илдизларини топиш ҳамда кенг синфдаги чизиқли бўлмаган функционал тенгламаларни ечиш мумкин. Формал нуқтаи назардан қаралганда Ньютон методи итерация методининг хусусий ҳолидир, аслида эса бу методнинг ғояси итерация методининг ғоясидан тамоман фарқлидир. Бу метод чизиқли бўлмаган тенгламаларни ечиш масаласини чизиқли масалаларнинг кетма-кетлигини ечишга олиб келади. Бунинг учун берилган тенгламадан унинг бош чизиқли қисми ажратиб олинади. Биз аввал битта сонли тенглама учун Ньютон методини кўриб чиқамиз. Фараз қилайлик, бизга

$$f(x) = 0 \tag{6.1}$$

тенглама ва унинг илдизига дастлабки яқинлашиш қиймати x_0 берилган бўлсин. Бу ерда $f(x)$ ни етарлича силлиқ функция деб оламиз. Одатдагидек, (6.1) тенгламанинг аниқ илдизини ξ орқали белгилаймиз. Энди $\xi = x_0 + h$ деб олиб, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқта атрофидаги Тейлор қатори ёйилмасидаги дастлабки иккита ҳадини олиб нолга тенглаштирсак, h га нисбатан қуйидаги

$$0 = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h$$

чизиқли тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани ечиб, h хатонинг тақрибий қийматини топамиз:

$$h_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Бу тузатмани $\xi = x_0 + h$ га келтириб қўйиб, навбатдаги яқинлашиш

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ни топамиз. Худди шунга ўхшаш

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (6.2)$$

кетма-кет яқинлашишларни ҳосил қиламиз. Бу формулалар ёрдамида Ньютон кетма-кетлигини ҳосил қилиш учун x_n лар $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасида ётиши ва улар учун $f'(x_n) \neq 0$ бўлиши керак.

Ньютон методи жуда ҳам содда геометрик маънога эга. Ҳақиқатан ҳам, $y = f(x)$ функцияни

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \qquad (6.3)$$

тўғри чизиқ билан алмаштирамиз, бу тўғри чизиқ эса $M_n(x_n, f(x_n))$ нуқтада $y = f(x)$ эгри чизиққа ўтказилган уринмадир (12- чизма). Бу уринманинг абсцисса ўқи билан кесишган нуқтасини x_{n+1} билан белгиласак, (6.3) дан (6.2) келиб чиқади. Шунинг учун, Ньютон методи *уринмалар методи* деб ҳам юритилади. Ньютон методини итерация методидан келтириб чиқариш ҳам мумкин, бунинг учун (6.1) тенгламанинг $x = \varphi(x)$ каноник кўринишида

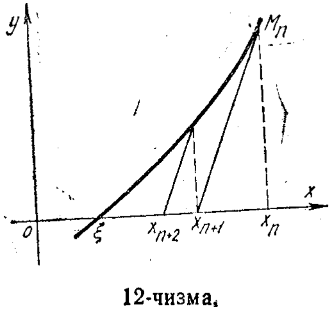
$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

деб олиш кифоядир.

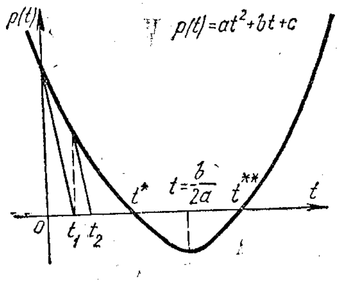
Ньютон методининг яқинлашиши ҳақидаги теоремалар. Биз юқорида айтганимиздек, Ньютон методидан умумий кўринишдаги функционал тенгламаларни ечишда ҳам фойдаланиш мумкин. Бундай тадқиқотлар Л. В. Канторович томонидан олиб борилган. Қуйида келтирилган теоремалар ҳам Л. В. Канторовичга тегишлидир. Бу теоремаларни исботлашда

$$P(t) = at^2 + bt + c = 0 \qquad (6.4)$$

квадрат тенглама учун тузилган $\{t_n\}$ Ньютон кетма-кетлигининг яқинлашиши муҳим аҳамиятга эгадир, бу ерда a, b, c лар ҳақиқий сонлар бўлиб, $b^2 - 4ac \geqslant 0$. Бу тенглама ҳақиқий илдизларга эга. Уларнинг кичигини t^* ва каттасини t^{**} билан белгилаб оламиз (13- чизма). Дастлабки яқинлашиш сифатида ихтиёрий $t_0 \neq -\frac{b}{2a}$ ни оламиз. Чизмадан кўриниб турибдики, $t_0 \in (t^*,\ t^{**})$ да ётса, ҳи-



12-чизма.



13-чизма.

соблашнинг бир қадамидан кейин у бу оралиқдан чиқиб кетади ва t_0 бу оралиқдан ташқарида ётса, Ньютоннинг $\{t_n\}$ кетма-кетлиги t_0 га яқин илдизга монотон яқинлашади.

1- теорема. Агар $f(x)$ ва дастлабки қиймат x_0 қуйидаги шартларни қаноатлантирса;

$$1.\ f'(x_0) \neq 0 \text{ ва } \frac{1}{|f'(x_0)|} \leqslant B; \tag{6.5}$$

$$2.\ \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \leqslant \eta \tag{6.6}$$

тенгсизлик ўринли бўлса;

3. $f(x)$ функция

$$|x - x_0| \leqslant \delta \tag{6.7}$$

оралиқда иккинчи тартибли узлуксиз $f''(x)$ ҳосилага эга ва бу оралиқнинг барча нуқталарида

$$|f''(x)| \leqslant K \tag{6.8}$$

бўлса;

4. B, K, η сонлар учун

$$h = BK\eta \leqslant \frac{1}{2} \tag{6.9}$$

шарт бажарилса;

5. ҳамда

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}\eta \leqslant \delta \tag{6.10}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда:

1) (6.1) тенглама (6.7) оралиқда ξ ечимга эга бўлади;

$$2) \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{6.11}$$

кетма-кет яқинлашишларни қуриш мумкин ва улар ξ га яқинлашади:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi;$$

3) яқинлашиш тезлиги учун

$$|\xi - x_n| \leqslant t^* - t_n \tag{6.12}$$

баҳо ўринли бўлиб, бу ерда t_n эса

$$P(t) = \frac{K}{2}t^2 - \frac{t}{B} + \frac{\eta}{B} = 0 \tag{6.13}$$

квадрат тенгламанинг кичик илдизи t^* учун $t_0 = 0$ дан бошлаб қурилган Ньютон кетма-кетлигининг n- элементидир:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{P(t_n)}{P'(t_n)}.$$

Исбот. (6.9) шартга кўра $0<h\leqslant\frac{1}{2}$ бўлганлиги учун $P(t)$ кўпҳаднинг

$$\frac{1}{B^2}-4\cdot\frac{1}{2}K\cdot\frac{\eta}{B}=\frac{1-2h}{B^2}$$

дискриминанти манфий эмас, шунинг учун ҳам тенгламанинг ҳар иккала илдизи ҳақиқий ва осонлик билан кўриш мумкинки, улар мусбатдир. Дастлабки яқинлашиш t_0 (6.13) тенгламанинг кичик илдизи

$$t^*=\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta$$

га яқин турганлиги учун t_n ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) кетма-кетлиги t^* га яқинлашади ва шу билан бирга $t_0<t_1<t_2<\ldots$ бўлади.

Индукция методини қўллаб, $\{x_n\}$ кетма-кетликни қуриш мумкинлигини, унинг барча элементларининг (6.7) оралиқда ётишини ва

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant t_{n+1}-t_n$$

баҳо ўринли эканлигини кўрсатамиз. Аввал $n=0$ ҳолни кўрайлик, x_0 (6.7) оралиқда ётганлиги ва $f'(x_0)\neq0$ бўлганлиги учун $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ни топамиз. $0<h\leqslant\frac{1}{2}$ бўлганда

$$\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}=\frac{2}{1+\sqrt{1-2h}}$$

касрнинг $(1,2]$ да ётиши кўриниб турибди. Демак, (6.10) га кўра

$$|x_1-x_0|=\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|\leqslant\eta<\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta\leqslant\delta,$$

яъни x_1 (6.7) оралиқда ётади. Шартга кўра $t_0=0$,

$$t_1=t_0-\frac{P(t_0)}{P'(t_0)}=\frac{\frac{\eta}{B}}{\frac{1}{B}}=\eta,\quad t_1-t_0=\eta$$

ва $|x_1-x_0|\leqslant\eta$ бўлганлиги учун, (6.12) тенгсизлик $n=0$ учун ўринлидир.

Фараз қилайлик, $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ лар қурилган бўлиб, (6.7) оралиқда ётсин ва улар учун

$$|x_{k+1}-x_k|\leqslant t_{k+1}-t_k\quad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)\qquad(6.15)$$

тенгсизликлар бажарилсин.

Фаразга кўра, x_n (6.7) да ётади ва $f(x_n)$, $f'(x_n)$ маънога эга. Фақат $f'(x_n)\neq0$ эканлигини кўрсатиш керак. 13- чизмадан кўриниб турибдики, $-P'(t_n)>0$. Буни назарда тутиб қуйидаги

$$|f'(x_n)|=|f'(x_0)+\int_{x_0}^{x_n}f''(t)\,dt|\geqslant\frac{1}{B}-K|x_n-x_0|=$$

$$= \frac{1}{B} - K|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_1 - x_0)| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{B} - K[(t_n - t_{n-1}) + (t_{n-1} - t_{n-2}) + \ldots + (t_n - t_0)] =$$
$$= \frac{1}{B} - K(t_n - t_0) = \frac{1}{B} - K t_n = - P'(t_n)$$

муносабатлардан $|f'(x_n)| \geqslant - P'(t_n) > 0$ ни ҳосил қиламиз.

Энди $f(x_n)$ ни баҳолаймиз. Бунинг учун $f(x_n)$ нинг x_{n-1} атрофидаги Тейлор қатори ёйилмасидан фойдаланамиз:

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1}) f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(c)(x_n - x_{n-1})^2$$
$$(c \in [x_{n-1},\ x_n]).$$

Бундан эса, (6.11) га кўра

$$f(x_n) = \frac{1}{2} f''(c)\ (x_n - x_{n-1})^2.$$

Энди (6.8) ва индукция шарти (6.15) дан

$$|f(x_n)| \leqslant \frac{K}{2} (x_n - x_{n-1})^2 \leqslant \frac{K}{2} (t_n - t_{n-1})^2 \qquad (6.16)$$

келиб чиқади.

Шунга ўхшаш ҳисоблашларни $P(t_n)$ учун бажарсак:

$$P(t_n) = \frac{1}{2} P''(c)(t_n - t_{n-1})^2 = \frac{K}{2} (t_n - t_{n-1})^2 \qquad (6.17)$$

ҳосил бўлади.

(6.16) — (6.17) лардан

$$|f(x_n)| \leqslant P(t_n)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак,

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \leqslant - \frac{P(t_n)}{P'(t_n)} = t_{n+1} - t_n,$$

яъни (6.15) баҳо $k = n + 1$ учун ўринли эканлигини кўрамиз. Энди фақат x_{n+1} нинг (6.7) оралиқда ётишлигини кўрсатсак кифоя. Бу эса қуйидаги тенгсизликлардан келиб чиқади:

$$|x_{n+1} - x_n| = |(x_{n+1} - x_n) + \ldots + (x_1 - x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant (t_{n+1} - t_n) + \ldots + (t_1 - t_0) = t_{n+1} - t_0 = t_{n+1} <$$
$$< t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \leqslant \delta.$$

$\{t_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлганлиги учун у фундаментал кетма-кетликни ташкил этади. $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг фундаментallиги қуйидаги

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant (t_{n+p} - t_{n+p-1}) + \ldots + (t_{n+1} - t_n) = t_{n+p} - t_n$$

тенгсизликдан келиб чиқади. Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд, бу лимитни ξ орқали белгилаймиз: $\xi = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Агар

$|x_{n+p} - x_n| \leqslant t_{n+p} - t_n$ тенгсизликда $p \to \infty$ лимитга ўтсак, x_n нинг га интилиш тезлиги учун (6.12) баҳога эга бўламиз.

Ниҳоят, (6.11) тенгликда $n \to \infty$ да лимитга ўтиб, $\xi = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ ни ҳосил қиламиз, бундан эса $f'(\xi)$ нинг чегараланганлигини ҳисобга олсак, $f'(\xi) = 0$ келиб чиқади. Шундай қилиб, теорема тўла исбот бўлди.

Изоҳ. Теоремадаги (6.12) баҳо аниқ баҳодир, чунки у (6.13) квадрат тенглама $P(t) = 0$ учун аниқ тенгликка айланади.

Юқоридаги (6.12) баҳодан фойдаланиш учун $P(t) = 0$ тенгламанинг ечимини топиш ва бу тенглама учун $\{t_n\}$ Ньютон кетма-кетлигини қуриш керак. Кулайлик учун квадрат тенгламада $t = \eta\tau$ деб олиб, янги τ ўзгарувчини киритамиз. Натижада

$$P(\eta\tau) = \frac{\eta}{B}\left(\frac{1}{2}h\tau^2 - \tau + 1\right)$$

бўлади. Энди

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2}h\tau^2 - \tau + 1 = 0 \qquad (6.18)$$

квадрат тенглама учун Ньютон кетма-кетлигини тузамиз: $\tau_0 = 0$,

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{\varphi(\tau_n)}{\varphi'(\tau_n)} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (6.19)$$

Бу тенгламанинг кичик илдизи $\tau^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}$ бўлиб, $\{\tau_n\}$ кетма-кетлик унга яқинлашади. Осонгина кўриш мумкинки $t_n = \eta\tau_n$.

2- теорема. Агар 1- теореманинг шартлари бажарилса, $\xi - x_n$ айирма учун

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^{n-1}}\eta$$

баҳо ўринлидир.

Исбот. τ_n нинг таърифидан келиб чиқадиган

$$\varphi(\tau_{n-1}) + (\tau_n - \tau_{n-1})\varphi'(\tau_{n-1}) = 0$$

тенгликни назарда тутиб, Тейлор формуласидан

$$\varphi(\tau_n) = \varphi(\tau_{n-1}) + (\tau_n - \tau_{n-1})\varphi'(\tau_{n-1}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\varphi''(\tau)(\tau_n - \tau_{n-1})^2 = \frac{h}{2}(\tau_n - \tau_{n-1})^2 \qquad (6.20)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан ташқари

$$\varphi'(\tau_n) = h\tau_n - 1,\ \tau_{n+1} - \tau_n = -\frac{\varphi(\tau_n)}{\varphi'(\tau_n)} = \frac{1}{2}\frac{h}{1 - h\tau_n}(\tau_n - \tau_{n-1})^2 \qquad (6.21)$$

тенгликларга эга бўламиз. Энди $n = 1, 2, \ldots$ лар учун

$$\tau_n \leqslant 2(1 - 2^{-n}) \text{ ва } \tau_n - \tau_{n-1} \leqslant 2^{1-n} \qquad (6.22)$$

эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун индукция методидан фойдаланамиз. $\tau_0 = 0$ ва $\tau_1 = 1$ бўлганлиги сабабли $n = 1$ учун (6.22) ўринлидир. Энди фараз қилайлик, $k = 1, 2, \ldots, n$ учун

$$\tau_k \leqslant 2(1 - 2^{-k}),\ \tau_k - \tau_{k-1} \leqslant 2^{1-k}$$

бажарилсин. У ҳолда $0<h\leqslant\frac{1}{2}$ эканлигини назарда тутиб, (6.21) дан

$$\tau_{n+1}-\tau_n=\frac{1}{2}\frac{h}{1-h\tau_n}(\tau_n-\tau_{n-1})^2\leqslant\frac{1}{2}\frac{h\cdot 2^{2-2n}}{1-2h(1-2^{1-n})}\leqslant 2^{-n}$$

ва

$$\tau_{n+1}=\tau_n+(\tau_{n+1}-\tau_n)\leqslant 2(1-2^{-n})+2^{-n}=2(1-2^{-n-1})$$

ларни ҳосил қиламиз. Сўнгра (6.19) ва $\varphi(\tau^*)=0$ дан

$$\tau^*-\tau_n=\tau^*-\tau_{n-1}+\frac{\varphi(\tau_{n-1})}{\varphi'(\tau_{n-1})}=$$

$$=-\frac{1}{\varphi'(\tau_{n-1})}[\varphi(\tau^*)-\varphi(\tau_{n-1})-(\tau^*-\tau_{n-1})\varphi'(\tau_{n-1})]$$

келиб чиқади. Тейлор формуласидан эса

$$\varphi(\tau^*)-\varphi(\tau_{n-1})-(\tau^*-\tau_{n-1})\varphi'(\tau_{n-1})=$$

$$=\frac{1}{2}\varphi''(\tilde{\tau})(\tau^*-\tau_{n-1})^2=\frac{1}{2}h(\tau^*-\tau_{n-1})^2,$$

$$\varphi'(\tau_{n-1})=h\tau_{n-1}-1$$

ларга эга бўламиз. Демак,

$$\tau^*-\tau_n=\frac{h}{2}\frac{(\tau^*-\tau_{n-1})^2}{1-h\tau_{n-1}}$$

(6.22) тенгсизликка кўра

$$1-h\tau_{n-1}\geqslant 1-\frac{1}{2}\cdot 2(1-2^{1-n})=2^{1-n}.$$

Шунинг учун ҳам

$$\tau^*-\tau_n\leqslant 2^{n-2}h(\tau^*-\tau_{n-1})^2. \qquad (6.23)$$

Бу тенгсизликни $n=1,\ 2,\ \ldots$ лар учун кетма-кет қўллаймиз. Юқорида $\tau^*=\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\leqslant 2$ эканлигини айтиб ўтган эдик, шунинг учун ҳам (6.23) дан $n=1$ бўлганда

$$\tau^*-\tau_1\leqslant 2^{-1}h(\tau^*-\tau_0)^2\leqslant 2h$$

келиб чиқади, $n=2$ бўлганда эса

$$\tau^*-\tau_2\leqslant h(\tau^*-\tau_1)^2\leqslant h(2h)^2=\frac{1}{2}(2h)^3.$$

Бу баҳолашларни давом эттириб, n-қадамда

$$\tau^*-\tau_n\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n-1}$$

га эга бўламиз. Шу билан теорема исбот бўлди, чунки

$$|x^*-x_n|\leqslant t^*-t_n=\eta(t^*-\tau_n)\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n-1}\eta.$$

Изоҳ. Бу теоремадан кўрамизки, $2h<1$ бўлганда $\tau^*-\tau_n$ жуда тез нолга интилади, қўпол қилиб айтганда n дан $n+1$ га ўтганда хато ўзининг квадратига ўзгаради, яъни яқинлашиш квадратик қонунга бўйсунади.

Амалда қўллашга қулай бўлсин учун $\tau^* - \tau_n$ нинг n ва h га боғлиқ бўлган жадвалини тузиш мумкин. Бундай жадвал қуйида (5- жадвал) $0 \leqslant h < \frac{1}{2}$ ва $n = \overline{1,5}$ лар учун келтирилган.

5- жадвал

$h \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0,05	1,026	$2,63 \cdot 10^{-2}$	$1,83 \cdot 10^{-5}$	$8,77 \cdot 10^{-12}$	$2,03 \cdot 10^{-24}$	
0,10	1,056	$5,57 \cdot 10^{-2}$	$1,73 \cdot 10^{-4}$	$1,66 \cdot 10^{-9}$	$1,55 \cdot 10^{-19}$	
0,15	1,089	$8,89 \cdot 10^{-2}$	$6,98 \cdot 10^{-4}$	$4,36 \cdot 10^{-8}$	$1,77 \cdot 10^{-16}$	
0,20	1,127	$1,27 \cdot 10^{-1}$	$2,02 \cdot 10^{-3}$	$5,25 \cdot 10^{-7}$	$3,56 \cdot 10^{-14}$	
0,25	1,172	$7,20 \cdot 10^{-1}$	$4,91 \cdot 10^{-3}$	$4,25 \cdot 10^{-6}$	$3,19 \cdot 10^{-12}$	$1,80 \cdot 10^{-24}$
0,30	1,225	$2,25 \cdot 10^{-1}$	$1,09 \cdot 10^{-2}$	$2,78 \cdot 10^{-5}$	$1,84 \cdot 10^{-10}$	$8,02 \cdot 10^{-21}$
0,35	1,292	$2,92 \cdot 10^{-1}$	$2,30 \cdot 10^{-2}$	$1,66 \cdot 10^{-4}$	$8,85 \cdot 10^{-9}$	$2,50 \cdot 10^{-17}$
0,40	1,382	$3,82 \cdot 10^{-1}$	$4,96 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-3}$	$4,59 \cdot 10^{-7}$	$9,42 \cdot 10^{-14}$
0,45	1,519	$5,19 \cdot 10^{-1}$	$1,10 \cdot 10^{-1}$	$7,49 \cdot 10^{-3}$	$3,95 \cdot 10^{-5}$	$1,11 \cdot 10^{-9}$
0,50	2	1	$5,00 \cdot 10^{-1}$	$2,50 \cdot 10^{-1}$	$1,25 \cdot 10^{-1}$	$6,25 \cdot 10^{-2}$

3- теорема (илдизнинг ягоналиги ҳақида). Фараз қилайлик, $f(x)$ функция учун 1- теореманинг шартлари бажарилсин. Агар $h \leqslant \frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда $f(x) = 0$ тенглама

$$|x - x_0| \leqslant \delta < t^{**} = \frac{1 + \sqrt{1-2h}}{h} \eta. \qquad (6.24)$$

оралиқда ягона ξ ечимга эга бўлади. Агар $h = \frac{1}{2}$ бўлса, ξ ечим

$$|x - x_0| \leqslant \delta = t^{**} = 2\eta \qquad (6.25)$$

оралиқда ягона бўлади.

Исбот. 1- теореманинг шартлари бажарилганлиги учун $f(x)=0$ тенглама (6.24) оралиқда ξ ечимга эга (чунки (6.24) оралиқ (6.7) оралиқнинг қисмидир). Биз бу ерда $f(x) = 0$ тенгламанинг ҳар қандай бошқа $\tilde{\xi}$ ечими ξ билан устма-уст тушишини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $h < \frac{1}{2}$ бўлсин. Бу ҳолда (6.13) квадрат тенглама иккита ҳар хил t^* ва t^{**} илдизларга эга. Энди ξ (6.1) тенгламанинг (6.7) оралиқдаги бирор илдизи $\tilde{\xi}$ бўлсин. (6.24) тенгсизликка кўра

$$|\tilde{\xi} - x_0| = \theta t^{**} \quad (0 \leqslant \theta < 1) \qquad (6.26)$$

бўлади. $f(\tilde{\xi}) = 0$ бўлганлиги учун

$$x_1 - \tilde{\xi} = \frac{1}{f'(x_0)} [f(\tilde{\xi}) - f(x_0) - f'(x_0)(\tilde{\xi} - x_0)].$$

Тейлор формуласига кўра

$$x_1 - \tilde{\xi} = \frac{1}{f'(x_0)} \frac{f''(c)}{2} (\tilde{\xi} - x_0)^2 \quad (c \in (\tilde{\xi},\ x_0)).$$

1- теоремани исбот қилиш жараёнида ҳосил бўлган $|f'(x_n) \geqslant$ $\geqslant P'(t_n)|$ тенгсизликни назарда тутиб, (6.8) ва (6.25) дан қуйидагига эга бўламиз:

$$|x_1 - \overline{\xi}| \leqslant \frac{1}{|f'(x_0)|} \cdot \frac{1}{2} K |\overline{\xi} - x_0|^2 \leqslant \frac{K}{2|P'(t_0)|} \theta^2 t^{**2}.$$

Осонлик билан кўриш мумкинки,

$$P(t) = \frac{1}{2} Kt^2 + P'(t_0)(t - t_0) + P(t_0).$$

Бундан эса,

$$\frac{1}{2P'(t_0)} Kt^{**2} = \frac{1}{P'(t_0)} [P(t^{**}) - P(t_0) - (t^{**} - t_0) P'(t_0)] = -t^{**} +$$
$$+ t_0 - \frac{P(t_0)}{P'(t_0)} = t_1 - t^{**}.$$

Буни олдинги тенгсизликка қўйиб, кеpакли баҳони чиқарамиз:

$$|\overline{\xi} - x_1| \leqslant \theta^2 (t^{**} - t_1).$$

Бу мулоҳазаларни n марта қўллаб

$$|\overline{\xi} - x_n| \leqslant \theta^{2^n} (t^{**} - t_n) < \theta^{2^n} t^{**} \qquad (6.27)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан $\theta < 1$ миқдор n га боғлиқ бўлмаганлиги сабабли $x_n \to \overline{\xi}$. Энди $|\overline{\xi} - \xi| \leqslant |\overline{\xi} - x_n| + |x_n - \xi| \underset{n \to \infty}{\to} 0$ муносабатдан $\overline{\xi} = \xi$ келиб чиқади.

Агар $h = \frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда (6.25) тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $\theta = 1$, $P(t)$ нинг ҳар иккала илдизи устма-уст тушади: $t^{**} =$ $= t^*$ ва $t_n \to t^*$. Шунинг учун ҳам, (6.27) тенгсизликдан биз яна $|\overline{\xi} - x_n| \to 0$ га эга бўламиз. Шу билан теорема исбот бўлди.

Мисол. $f(x) \equiv x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x - 15 = 0$ тенгламанинг мусбат илдизи 10^{-8} аниқлик билмн топилсин.

Ечиш. $f(1{,}5) = -0{,}9375$ ва $f(2) = 1$ бўлганлиги учун дастлабки яқинлашиш x_0 сифатида шу оралиқнинг ўртасини оламиз: $x_0 = 1{,}75$. Бу нуқтада

$$f(1{,}75) = 0{,}10859375;\ f'(1{,}75) = 3{,}68725;\ \frac{f(1{,}75)}{f'(1{,}75)} = 0{,}02939629;$$

$$\frac{1}{f'(1{,}75)} < 0{,}272.$$

Демак, $\eta = 0{,}0294$ ва $B = 0{,}272$ деб олишимиз мумкин, $0 < h < \frac{1}{2}$ бўлганда, $1 \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \leqslant 2$ бўлади, шунинг учун $\delta = 2\eta$ деб олиб $f''(x)$ ни $|x -$ $- 1{,}75| \leqslant 2\eta$ оралиқда баҳолаймиз. Осонлик билан кўриш мумкинки, $1{,}6912 \leqslant$ $\leqslant x \leqslant 1{,}8088$ оралиқда $f''(x) = 12x^2 - 24x + 4$ монотон ўсувчи функция, шунинг учун ҳам $f''(x)$ ни $x = 1{,}81$ нуқтада ҳисоблаймиз: $f''(1{,}81) = -0{,}1468$. Демак, $K = 0{,}147$ деб олишимиз мумкин, $h = BK\eta = 0{,}00118 \leqslant 0{,}05$. Бундан кўрамизки, 3- теореманинг ҳамма шартлари бажарилади, яъни қаралаётган оралиқда ягона ечим мавжуд ва x_n кетма-кетлик бу ечимга яқинлашади. Хатони баҳолаш учун 5- жадвалдан фойдаланамиз, $h = 0{,}05$ бўлганда $\tau^* - \tau_3 =$ $= 0{,}877 \cdot 10^{-11}$ бўлгани учун

$$|x_3 - \xi| < 0{,}0294 \cdot 0{,}877 \cdot 10^{-11} < 0{,}3 \cdot 10^{-12}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, учинчи қадамда илдизни ҳатто 12 хона аниқлик билан топган бўламиз. Бизга 8 хона аниқлик етарли эди, бу аниқликка эришиш учун $n = 3$ деб олиш кифоядир. $h = 0{,}0012$ учун 5- жадвалда $\tau^* - \tau_2$ нинг қиймати кўрсатилмаган, шунинг учун ҳам биз 2- теоремадан фойдаланамиз:

$$|x_2 - \xi| \leqslant \frac{1}{2^{2-1}}(2 \cdot 0{,}0012)^{2^2-1} \cdot 0{,}0294 < 2{,}1 \cdot 10^{-10}.$$

Ҳисоблаш натижасида қуйидаги қийматларга эга бўламиз:

$$x = 1{,}75;\ x_1 = 1{,}75 - \frac{f(1{,}75)}{f'(1{,}75)} = 1{,}75 - 0{,}02939629 = 1{,}72060371;$$

$$x_2 = 1{,}72060371 - \frac{f(1{,}72060371)}{f'(1{,}72060371)} = 1{,}732020918;\quad x_3 = 1{,}732050807;$$

$$x_4 = 1{,}732050807.$$

Каррали илдизлар учун Ньютон методи. Ньютон методи тенгламаларни ечиш методлари орасида энг дастлабкиларидан биридир. Шунинг учун ҳам яқинлашиш тезлигини орттириш ёки ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида бу методни ўзгартириш йўлида жуда кўп уринишлар бўлган. Шуларнинг айримларига тўхталиб ўтамиз.

Шу вақтгача x_n кетма-кет яқинлашишлар ётган оралиқда $f'(x) \neq$ $\neq 0$ деб фараз қилинган эди, бундан ташқари $f'(\xi) \neq 0$, яъни ξ туб илдиз бўлган ҳол қаралган эди. 1870 й. Э. Шредер ξ илдиз p - каррали бўлган ҳолни текшириб чиқди. Биз ҳозир ана шу ҳолни кўриб чиқамиз. Биз аввал $p > 1$ бўлганда Ньютон кетма-кетлиги яқинлашишининг секинлашишини, сўнгра бу кетма-кетликни керакли равишда ўзгартирилганда унинг тез яқинлашишини кўрсатамиз. ξ $f(x)$ нинг p - каррали илдизи бўлгани учун, ξ ечим атрофидаги $f(x)$ нинг Тейлор қаторидаги ёйилмаси қуйидагича бўлади:

$$f(x) = c_p(x - \xi)^p + c_{p+1}(x - \xi)^{p+1} + \ldots + c_m(x - \xi)^m + R_m(x),$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \quad (k = p,\ p + 1,\ \ldots,\ m). \tag{6.28}$$

Фараз қилайлик, x_n лар ξ га яқин бўлсин, у ҳолда $\varepsilon_n = \xi - x_n$ кичик миқдор бўлади. Ньютон қоидасидан ε_n билан ε_{n+1} орасидаги муносабатни чиқарамиз:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(\xi - \varepsilon_n)}{f'(\xi - \varepsilon_n)}. \tag{6.29}$$

(6.28) ёйилмада фақат иккита бош ҳадларини сақлаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$f(\xi - \varepsilon_n) = (-1)^p\,[c_p\,\varepsilon_n^p - c_{p+1}\,\varepsilon_n^{p+1} + \ldots],$$

$$f'(\xi - \varepsilon_n) = (-1)^{p-1}\,[p\,c_p\,\varepsilon_n^{p-1} - (p + 1)\,c_{p+1}\,\varepsilon_n^p + \ldots],$$

$$\frac{1}{f'(\xi - \varepsilon_n)} = \frac{(-1)^{p-1}}{pc_p\,\varepsilon_n^{p-1}}\left[1 - \frac{(p + 1)}{pc_p}\,c_{p+1}\,\varepsilon_n + \ldots\right],$$

$$\frac{f(\xi - \varepsilon_n)}{f'(\xi - \varepsilon_n)} = -\frac{\varepsilon_n}{p}\left[1 + \frac{c_{p+1}}{c_p}\,\varepsilon_n + \ldots\right].$$

Охирги тенгликни (6.29) га олиб бориб қўямиз:

$$\varepsilon_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\varepsilon_n - \frac{c_{p+1}}{p^2 c_p}\varepsilon_n^2 + \dots$$

Бунда фақат битта бош ҳадни қолдириб, қуйидаги тақрибий тенгликка эга бўламиз:

$$\varepsilon_{n+1} \approx \left(1 - \frac{1}{p}\right)\varepsilon_n.$$

Бу тенглик шуни кўрсатадики, ε_n тақрибан махражи $q = 1 - \frac{1}{p}$ га тенг бўлган геометрик прогрессия қонуни бўйича камаяди. Буни $f'(\xi) \neq 0$ бўлган ҳол билан солиштириб кўрсак, $p > 1$ бўлганда яқинлашиш тезлигининг сустлашишини кўрамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$0 = f(\xi) = f(\xi - \varepsilon_n) + \varepsilon_n f'(\xi - \varepsilon_n) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(\xi - \theta\varepsilon_n) \quad (0 < \theta < 1)$$

тенгликдан ва (6.29) дан

$$\varepsilon_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi - \theta\varepsilon_n)}{f'(\xi - \varepsilon_n)}\varepsilon_n^2 \tag{6.30}$$

ни ҳосил қиламиз, бунда ε_n ни етарлича кичик деб олиб, ε_{n+1} билан ε_n орасидаги

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\varepsilon_n^2 \tag{6.31}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу ерда ε_n квадратик қонун билан камаяди. $p > 1$ бўлганда яқинлашиш тезлигини орттириш учун Ньютон қоидасини

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{6.32}$$

га алмаштирамиз. У ҳолда (6.30) дан ε_{n+1} билан ε_n орасидаги қуйидаги муносабатга эга бўламиз:

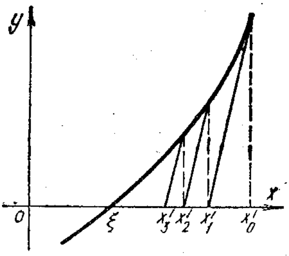
$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{c_{p+1}}{p\,c_p}\varepsilon_n^2 = -\frac{f^{(p+1)}(\xi)}{p(p+1)f^{(p)}(\xi)}\varepsilon_n^2. \tag{6.33}$$

Бундан кўрамизки, ξ илдиз p каррали бўлганда (6.33) қоида учун яқинлашиш тақрибан Ньютон қоидасининг яқинлашишига тенг.

Модификацияланган Ньютон методи. Агар $f(x)$ нинг ҳосиласи жуда мураккаб функция бўлиб, $f'(x_n)$ ни ҳисоблаш катта қийинчиликлар туғдирса, у вақтда Ньютон методининг қуйидаги модификацияси ишлатилади:

$$x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x_0)}, \quad x_0 = x'_0, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots). \tag{6.34}$$

Бу қоида бўйича ҳисоблаш анча қулай, чунки $f'(x)$ фақат бир марта ҳисобланади. Лекин модификацияланган метод Ньютоннинг асосий методига нисбатан секин яқинлашади. Модификацияланган методнинг геометрик маъноси қуйидагидан иборат: x'_{n+1} тақрибий яқинлашиш бу $(x'_n,\ f(x'_n))$ нуқтадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти $f'(x_0)$ га тенг бўлган тўғри чизиқнинг OX ўқи билан кесишган нуқтасидир. Бу тўғри чизиқ фақат биринчи қадамдагина $y=f(x)$ эгри чизиққа ўтказилган уринма билан устма-уст тушади (14- чизма). Бу ерда ҳам (1- теоремага ўхшаш) яқинлашиш ҳақидаги теоремани исбот қилиш мумкин.



14-чизма.

4- теорема. Агар $f(x)$ функция ва дастлабки яқинлашиш x_0 1- теорема шартларини қаноатлантирса, у ҳолда

$$x'_{n+1}=x'_n-\frac{f(x'_n)}{f'(x'_0)},\ x'_0=x_0\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

кетма-кет яқинлашишлар (6.1) тенгламанинг ξ илдизига яқинлашади, шу билан бирга хато учун қуйидаги баҳо ўринли бўлади:

$$|x'_n-\xi|\leqslant t^*-t'_n, \tag{6.35}$$

бу ерда t'_n (6.13) квадрат тенглама учун қурилган Ньютоннинг модификацияланган кетма-кетлиги, $t'_0=0$, t^* эса (6.13) тенгламанинг кичик мусбат илдизи.

Бу теореманинг исботини [5] ва [10] дан қараш мумкин. Бу ердаги (6.35) баҳо юзаки қараганда 1- теоремадаги (6.12) баҳога ўхшаш, лекин унинг нолга интилиш тезлиги анча секиндир. Биз ҳозир ана шу баҳони келтирамиз. Фараз қилайлик, $h<\frac{1}{2}$ бўлсин. (6.13) тенгламадан кўринадики, аниқ ечим

$$t^*=\eta+\frac{1}{2}BKt^{*2}$$

бўлиб, $\{t'_{n+1}\}$ ва $\{t'_n\}$ кетма-кет яқинлашишлар

$$t'_{n+1}=t'_n-\frac{P(t'_n)}{P'(0)}=\eta+\frac{1}{2}BKt'^2_n$$

тенглик билан боғланган. Бу тенгликлардан

$$t'_{n+1}-t^*=\frac{1}{2}BK\ (t'^2_n-t^{*2})=\frac{1}{2}BK(t'_n-t^*)\ (t'_n+t^*)$$

ни топамиз, $t'_n<t^*=\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta$ бўлганлиги сабабли

$$t^*-t'_{n+1}<BKt^*(t^*-t'_n)=(1-\sqrt{1-2h})\ (t^*-t'_n).$$

Бу тенгсизликни кетма-кет қўллаб, $t^*-t'_n<q^n(t^*-t')$ га эга бўламиз, бу ерда $q=1-\sqrt{1-2h}<1$. Охирги баҳо шуни кўрсатадики, $\{t_n'\}$ кетма-кетлик t^* га чексиз камаювчи геометрик прогрессия тезлигида интилар экан.

Ватарлар методи. Энди Ньютон методидаги ҳисоблашларни соддалаштиришнинг яна бир усулини кўрамиз. Ньютон методида меҳнатнинг асосий қисми $f(x_n)$ ва $f'(x_n)$ ларни ҳисоблаш учун сарфланади. Шуларнинг бирортаси, масалан, $f'(x_n)$ ни ҳисоблашдан қутулиш мумкин эмасмикин деган савол туғилади. Бу бизни *ватарлар усулига* олиб келади, яъни агар $f'(x_n)$ ни тақрибий равишда алмаштирсак:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

у ҳолда навбатдаги яқинлашишни топиш қоидаси қуйидагича бўлади:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{6.36}$$

Бу қоиданинг геометрик маъноси қуйидагидан иборат: $y = f(x)$ функциянинг графигида иккита $M_{n-1}[x_{n-1}, f(x_{n-1})]$ ва $M_n[x_n, f(x_n)]$ нуқталардан ватар ўтказамиз. Ватар тенгламаси эса қуйидагича:

$$\frac{x - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y - f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Агар бу ватарнинг OX ўқи билан кесишган нуқтасини x_{n+1} деб олсак, (6.36) қоида келиб чиқади.

Ватарлар методи икки қадамли метод бўлиб x_{n+1} ни топиш учун x_{n-1} ва x_n ни билишимиз керак. (6.36) қоидани қўллаш учун:

1) барча x_n лар $f(x)$ нинг аниқланиш соҳасида ётиши ва

2) $f(x_n) - f(x_{n-1}) \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ шартлар бажарилиши керак.

Аввал $f(x_n) - f(x_{n-1}) = 0$ бўлган ҳолни кўриб чиқайлик, бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: а) $x_n \neq x_{n-1}$ ва б) $x_n = x_{n-1}$. Агар $x_n \neq x_{n-1}$ бўлса,

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} \tag{6.37}$$

тенгликдан $f(x_{n-1}) \neq 0$ лигини кўрамиз. Шунинг учун ҳам $f(x_n) \neq 0$ ва навбатдаги

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

яқинлашишни қуриш мумкин бўлмайди. Процесс шу ерда узилади ва ечимга олиб келмайди.

Агар $x_n = x_{n-1}$ бўлса, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ ларни қуриш мумкин, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ лар ўзаро фарқли ва $f(x_k) - f(x_{k-1}) \neq 0$ $(k = \overline{1, n-1})$ деб ҳисоблаймиз. (6.37) тенгликдан кўрамизки, $f(x_{n-1}) = 0$ ва x_{n-1} берилган тенгламанинг ечими эканлиги келиб чиқади. Бу ҳолда кетма-кет яқинлашишларни x_n гача бажариш мумкин, шу билан бирга иккита устма-уст тушадиган x_{n-1} ва x_n қийматлар берилган тенгламанинг ечими бўлади. Илдиз рационал сон бўлганда, шундай ҳол бўлиши мумкин.

Энди биз юқоридаги 1), 2) шартлар бажарилган деб фараз қилиб, ватарлар методининг яқинлашишига тўхтаб ўтамиз. Хато $\varepsilon_n = \xi - x_n$ учун (6.36) дан

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) f(\xi - \varepsilon_n)}{f(\xi - \varepsilon_n) - f(\xi - \varepsilon_{n-1})}$$

муносабатни чиқарамиз. Агар биз бу ерда $f(\xi - \varepsilon_n)$ ва $f(\xi - \varepsilon_{n-1})$ ларнинг хатолар даражаларига нисбатан ёйилмалари

$$f(\xi - \varepsilon_n) = -f'(\xi)\varepsilon_n + \frac{1}{2} f''(\xi)\varepsilon_n^2 + \dots ,$$

$$f(\xi - \varepsilon_{n-1}) = -f'(\xi)\varepsilon_{n-1} + \frac{1}{2} f''(\xi)\varepsilon_{n-1}^2 + \dots$$

ни қўйиб, тегишли амалларни бажарсак, қуйидаги тақрибий

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \qquad (6.38.)$$

тенгликка эга бўламиз. Агар бу тенгликни Ньютон методи учун чиқарилган (6.31) тенглик билан солиштирсак, ватарлар методида хатонинг ўзгариш қонуни Ньютон қоидасидаги қонунга яқинлигини кўрамиз.

Ньютон методининг яқинлашиши ҳақидаги 1- теоремага ўхшаш қуйидаги теорема ҳам ўринлидир.

5- теорема. Агар $f(x)$ функция ва дастлабки яқинлашиш x_0 1- теорема шартларини қаноатлантирса ва бундан ташқари x_1 учун

$$|x_1 - x_0| < \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta = t^* \text{ ва } |f(x_1)| \leqslant P(|x_1 - x_0|) = P(t_1)$$

тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда:

1) (6.36) қоида билан аниқланган x_n яқинлашишлар чекли қадамдан кейин ечимга олиб келади, ёки x_n ларни барча n лар учун қуриш мумкин бўлиб, улар яқинлашувчи кетма-кетликни ташкил этади

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi;$$

2) лимитдаги қиймат ξ $f(x) = 0$ тенгламанинг ечими бўлади;

3) яқинлашиш тезлиги $|\xi - x_n| \leqslant t^* - t_n$ тенгсизлик билан баҳоланади, бу ерда t_n (6.13) тенгламанинг кичик илдизи учун $t_0 = 0$ ва $t_1 = |x_1 - x_0|$ дан бошлаб ватарлар усули билан қурилган кетма-кет яқинлашишлардир.

Бу теореманинг исботини [8] дан қараш мумкин. Энди бу методни мисол ечишга татбиқ қиламиз.

Мисол.

$$f(x) \equiv x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x - 15 = 0$$

тенгламанинг мусбат илдизи 10^{-6} аниқлик билан топилсин.

Ечиш. Биз юқорида кўрган эдикки, изланаётган илдиз (1,5; 1,75) оралиқда ётади ва $x_0 = 1{,}75$ нуқтанинг яқин атрофида 5- теореманинг барча шартлари бажарилади. Бу ерда $x_1 = 1{,}72$ деб оламиз. У вақтда $|x_1 - x_0| = 0{,}03 < 2\eta = 0{,}588$ ва $f(1{,}72) \leqslant P(0{,}03)$ эканлигини кўрсатиш мумкин.

Шундай қилиб, 5- теореманинг ҳамма шартлари бажарилади. Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик ξ илдизга интилади. (6.36) қоидага асосан x_2 ни топамиз:

$$x_2 = 1{,}75 - \frac{f(1{,}72)(1{,}72 - 1{,}75)}{f(1{,}72) - f(1{,}75)} = 1{,}7288829.$$

Яна учта яқинлашишлари қуйидагидан иборат:

$$x_3 = 1{,}7320622;\ x_4 = 1{,}7320508;\ x_5 = 1{,}7320508.$$

Тенгламалар системаси учун Ньютон методи. Бу ерда n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумли n та

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{6.39}$$

тенгламалар системасини ечиш учун Ньютон методини кўриб чиқамиз. Ёзувни қисқароқ қилиш мақсадида x орқали $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ векторни ва $f(x)$ орқали

$$f(x) = f_1((x_1, x_2 \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

вектор-функцияни белгилаймиз. У ҳолда, (6.39) системани битта

$$f(x) = 0$$

вектор-тенглама шаклида ёзиш мумкин. (6.39) системани ечиш учун Ньютон методи, табиийки битта сонли тенглама учун юқорида кўриб ўтилган методнинг умумлашганидир. Юқоридагидек бу ерда ҳам методнинг асосий ғояси чизиқли бўлмаган (6.39) системани кетма-кет чизиқли системага келтиришдан иборатдир. Агар аниқ ечим билан тақрибий ечим орасидаги хато етарлича кичик бўлса, ажратиб олинган чизиқли қисм тенгламалар системасининг бош қисми бўлади.

Фараз қилайлик, бизга (6.39) системанинг тақрибий ечими $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ маълум бўлсин, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_n)$ орқали $\xi - x^{(0)} = (\xi_1 - x_1^{(0)}, \xi_2 - x_2^{(0)} \ldots, \xi_n - x_n^{(0)})$ вектор-хатони белгилаймиз. (6.39) системада x ўрнига $x^{(0)} + \varepsilon$ ни қўйиб, ҳосил бўлган системанинг чап томонини $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ларнинг даражаларига нисбатан Тейлор қаторига ёйиб, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ га нисбатан чизиқли қисмини сақлаб, қуйидаги тақрибий системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_n}\varepsilon_n \approx -f_1(x^{(0)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_n}\varepsilon_n \approx -f_n(x^{(0)}). \end{cases} \tag{6.40}$$

Бу системани ечиб, хатонинг тақрибий қиймати $\varepsilon^{(0)} = (\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_1^{(0)}, \ldots, \varepsilon_n^{(0)})$ ни топамиз. $\varepsilon^{(0)}$ ни $x^{(0)}$ га қўшиб, навбатдаги яқинлашиш векторини ҳосил қиламиз:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \varepsilon^{(0)} = (x_1^{(0)} + \varepsilon_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} + \varepsilon_n^{(0)}).$$

Ўз навбатида $x^{(1)}$ ни яхшилашимиз мумкин, бунинг учун $x^{(0)}$ ўрнига $x^{(1)}$ ни қўйиб, (6.40) кўринишдаги системани тузиш керак. Шундай қилиб, агар (6.40) кўринишдаги системалар ечимга эга бўлса, биз кетма-кет яқинлашишлар векторларини топамиз.

Қулайлик учун Якоби матрицасини киритамиз:

$$f_x(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}. \qquad (6.41)$$

Бу матрица ёрдамида (6.40) системани қуйидаги битта вектор-система шаклида ёзишимиз мумкин:

$$f_x(x^{(0)})\,\varepsilon^{(0)}=-f(x^{(0)}).$$

Фараз қилайлик, $x=\xi$ нуқтада $f_x(\xi)$ махсусмас матрица бўлсин. Детерминант ўз элементларининг узлуксиз функциялари бўлганлиги учун $x=\xi$ нуқтанинг бирор G атрофида (6.40) махсусмас матрица бўлиб, унинг тескариси $f_x^{-1}(x)$ мавжуд бўлади.

Фараз қилайлик, $x^{(0)}\in G$, у вақтда (6.41) нинг ҳар иккала томонини $f_x^{-1}(x^{(0)})$ га кўпайтириб,

$$\varepsilon^{(0)}=-f_x^{-1}(x^{(0)})f(x^{(0)})$$

ёки

$$x^{(1)}-x^{(0)}=-f_x^{-1}(x^{(0)})f(x^{(0)})$$

ни ҳосил қиламиз. Агар $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ лар G атрофида ётса, у ҳолда $x^{(k+1)}$ ни

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-f_x^{-1}(x^{(k)})f(x^{(k)}) \qquad (6.42)$$

тенгликдан топамиз. Бу $x^{(k)}$ кетма-кет яқинлашишларни топиш учун Ньютон қоидасидир. Бу қоиданинг амалга ошиши учун $x^{(k)}$ $(k=0, 1, 2,\dots)$ лар $f(x)$ нинг аниқланиш соҳасида ётиши ва $f_x(x^{(k)})$ матрицалар махсусмас бўлиши керак.

Биз ҳозир Л. В. Канторовичнинг (6.42) Ньютон жараёнининг яқинлашиши ҳақидаги теоремасини исботсиз келтирамиз.

6-теорема. Агар $f(x)$ вектор-функция ва дастлабки яқинлашиш вектори $x^{(0)}$ қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

1) $x^{(0)}$ нуқтада $f_x(x^{(0)})$ Якоби матрицасининг детерминанти $\Delta=\Delta(f_x(x^{(0)}))$ нолдан фарқли ва $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ элементнинг алгебраик тўлдирувчиси Δ_{jk} бўлиб ва

$$\frac{1}{|\Delta|}\sum_{j=1}^{n}|\Delta_{jk}|\leqslant B\quad (k=\overline{1, n})$$

баҳо ўринли бўлса;

2) $|f_i(x^{(0)})| \leqslant \eta \quad (i=\overline{1, n})$;

3) $x^{(0)}$ нинг

$$|x_i - x_i^{(0)}| \leqslant 2B\eta \quad (i=\overline{1, n})$$

атрофидаги барча нуқталар учун

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leqslant L \ (i=\overline{1, n})$$

тенгсизликлар бажарилса;

4) B, η, L миқдорлар

$$h = B^2 \eta L \leqslant \frac{1}{2}$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда $x^{(0)}$ нуқтанинг

$$|x_i - x_i^{(0)}| \leqslant \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} B\eta \qquad (i=\overline{1, n})$$

атрофида (6.39) система ягона $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ечимга эга бўлиб, (6.42) билан аниқланган $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ Ньютон кетма-кетлиги яқинлашади ва шу билан бирга, яқинлашиш тезлиги

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i^{(k)} - \xi_i| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} (2h)^{2^k-1} B\eta$$

тенгсизлик билан баҳоланади.

Шунга ўхшаш теоремани Ньютоннинг модификацияланган методи учун таърифлаш ва исбот қилиш мумкин.

Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, (6.40) системада тенгламалар сони иккита бўлганда бу системани детерминантлар ёрдамида ечиш керак. Тенгламаларнинг сони иккитадан кўп бўлса, бундай системаларни кейинги бобда келтириладиган методларнинг бирортаси билан ечиш маъқулдир. Агар бизга иккита

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси берилган бўлса, у ҳолда (6.42) қоида қуйидагича ёзилади:

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{g_y f - f_y g}{f_x g_y - f_y g_x} \right) \begin{matrix} x = x_k, \\ y = y_k \end{matrix}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$y_{k+1} = y_k - \left(\frac{f_x g - g_x f}{f_x g_y - f_y g_x} \right) \begin{matrix} x = x_k, \\ y = y_k. \end{matrix}$$

Мисол. Қуйидаги

$$\begin{cases} f(x, x) = x^3 + 2y^2 - 1 = 0, \\ g(x, y) = 5y^3 + x^2 - 2xy - 4 = 0 \end{cases}$$

системанинг илдизи 10^{-5} аниқлик билан топилсин. Бу функцияларнинг графикларини чизиб кўрсатиш мумкинки, ξ ва η мос равишда (— 0,7; — 0,6) ва

(0,7; 0,8) оралиқларда ётади. Шунинг учун ҳам $x^{(0)} = -0,6$ ва $y^{(0)} = 0,8$ деб олишимиз мумкин. Берилган функцияларнинг ҳосилалари қуйидагилардан иборат:

$$f_x = 3x^2, \quad f_y = 4y, \quad g_x = 2x - 2y, \quad g_y = 15y^2 - 2x.$$

Ҳисоблашлар натижасини келтирамиз:

$$x^{(0)} = -0,6; \; y^{(0)} = 0,8; \; f^{(0)} = 0,064; \; g^{(0)} = -0,12; \; f_x^{(0)} = 1,08;$$

$$f_y^{(0)} = 3,2; \; g_x^{(0)} = -2,8; \; g_y^{(0)} = 10,8; \; x^{(1)} = -0,65213; \; y^{(1)} = 0,79760;$$

$$f^{(1)} = -0,00502; \; g^{(1)} = 0,00254, \; f_x^{(1)} = 1,27583; \; f_y^{(1)} = 3,19038; \; g_x^{(1)} = -2,89546;$$

$$g_y^{(1)} = 10,84663; \; x^{(2)} = -0,64942; \; y^{(2)} = 0,79809; \; f^{(2)} = -0,00001;$$

$$g^{(2)} = -0,00001; \; f_x^{(2)} = 1,26525; \; f_y^{(2)} = 3,19234; \; g_x^{(2)} = -2,89502;$$

$$g_y^{(2)} = 10,85296; \; x^{(3)} = -0,64942; \; y^{(3)} = 0,79809.$$

Демак, $\xi = -0,64942$ ва $\eta = 0,79809$.

Машқлар

1. $P(x)$ кўпҳадни $(x - \alpha)$ $(\alpha > 0)$ га бўлганда Горнер схемасидаги b_i лар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$b_0 = a_0 > 0, \; b_i \geqslant 0 \; (i = \overline{1, n}).$$

У ҳолда $P(x)$ нинг барча илдизлари α дан кичик эканлигини кўрсатинг.

2. Фараз қилайлик, ρ — ихтиёрий мусбат сон бўлсин, у ҳолда

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

кўпҳаднинг барча илдизлари модуллари бўйича

$$\rho + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \frac{a_k}{a_0 \rho^{n-1}} \right|$$

дан ортмаслигини кўрсатинг.

3. Коэффициентлари ҳақиқий бўлган $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ $(a_0 > 0)$ кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари

$$\rho + \sqrt[k]{\max_j \left| \frac{a_j}{a_0 \rho^{j-1}} \right|}$$

дан ортмаслигини кўрсатинг, бу ерда ρ — ихтиёрий мусбат сон, k — биринчи манфий коэффициентнинг номери, a_j — манфий коэффициентлар.

4. Фараз қилайлик, $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ нинг барча коэффициентлари мусбат бўлсин.

Қуйидагиларни кўрсатинг:

а) агар $a_0 > a_1 > \ldots > a_n$ шарт бажарилса, у ҳолда $P(x)$ нинг барча илдизлари бирлик доира $|x| > 1$ дан ташқарида ётади;

б) агар $a_0 < a_1 \ldots < a_n$ шарт бажарилса, у ҳолда $P(x)$ нинг барча илдизлари $|x| < 1$ бирлик доира ичида ётади.

5. Агар $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ кўпҳаднинг барча коэффициентлари мусбат ва

$$m = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{a_k}{a_{k-1}}, \quad M = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{a_k}{a_{k-1}}$$

бўлса, у ҳолда $P(x)$ нинг барча илдизлари $m < |x| < M$ тенгсизликларни қаноатлантиришини кўрсатинг.

6. Фараз қилайлик, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ва $x_{n+1} = \psi(x_n)$ лар мос равишда r ва p- тартибли итерация бўлсин. У ҳолда

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = \frac{x_n(\varphi[\psi(x_n)] - \varphi(x_n)\psi(x_n))}{x_n - \varphi(x_n) - \psi(x_n) + \varphi[\psi(x_n)]}$$

итерациянинг тартиби $r + p - 1$ дан кам эмаслигини кўрсатинг.

7. Чебишев методидан фойдаланиб, $\sqrt{N}$ ва $\sqrt[3]{N}$ ларни ҳисоблаш учун иккинчи ва учинчи тартибли итерацион жараён тузинг.

8. Қуйидаги

$$\begin{cases} \operatorname{Sin}(x+y) - y = 0, \\ \operatorname{Cos}(x-y) - y = 0 \end{cases}$$

системанинг ечимини беш хона аниқликда Ньютон методи билан топинг.

3-БОБ. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЧИШ

1-§. ДАСТЛАБКИ МАЪЛУМОТЛАР

Назарий ва татбиқий математиканинг кўпгина масалалари чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишга олиб келади. Масалан, функцияни унинг $n+1$ та нуқтада берилган қийматлари ёрдамида n-тартибли кўпҳад билан интерполяциялаш ёки функцияни ўрта квадратлар методи ёрдамида яқинлаштириш масалалари чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишга келтирилади.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қилишнинг асосий манбаи узлуксиз функционал тенгламаларни чекли-айирмали тенгламалар билан яқинлаштиришдир. Масалан, Лаплас дифференциал оператори учун Дирихле масаласини тартиби юқори бўлган оддий чекли-айирмали тенгламалар системаси билан алмаштириш мумкин. ЭҲМлар яратилиши билан бундай масалалар яна ҳам кўпайиб бормоқда.

Бир жинсли бўлмаган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш масаласи билан матрицаларнинг тескарисини топиш ва детерминантларни ҳисоблаш масалалари узвий равишда боғлангандир. Бу масалалар назарий жиҳатдан осонгина ечилади. Лекин матрицаларнинг тартиби ортган сари бу масалаларни амалда ечиш жуда катта ҳисоблашларни талаб қилади. Ҳозирги вақтда бу масалаларни ечиш учун жуда кўп методлар яратилган ва уларни такомиллаштириш устида жадал ишлар олиб борилмоқда.

Чизиқли алгебраик тенгламаларни ечиш асосан икки — *аниқ* ва *итерацион методларга* бўлинади.

Аниқ метод деганда шундай метод тушуниладики, унинг ёрдамида чекли миқдордаги арифметик амалларни аниқ бажариш натижасида масаланинг аниқ ечимини топиш мумкин. Ҳаммага маълум бўлган Крамер қоидаси аниқ методга мисол бўла олади. Лекин Крамер қоидаси одатда, амалда ишлатилмайди, чунки бу метод билан n-тартибли чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш учун $n!\,n^2$ тартибдаги арифметик амалларни бажариш керак. Бу ниҳоятда катта сон бўлиб, бу қоида билан ҳатто $n=30$ тартибли системани ечиш учун ҳам ҳозирда мавжуд бўлган ЭҲМлар ҳам ожизлик қилади.

Биз бу бобда ҳисоблаш учун тежамли бўлган бир нечта аниқ методларни кўриб чиқамиз. Буларнинг кўпчилиги номаълумларни кетма-кет йўқотиш ғоясига асосланган.

Итерацион методлар шу билан характерланадики, чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечими кетма-кет яқинлашишларнинг лимитидек топилади.

Итерацион методларни қўллаётганда фақат уларнинг яқинлашишларигина эмас, балки яқинлашишларнинг тезлиги ҳам катта аҳамиятга эгадир.

Бу маънода ҳар бир итерацион метод универсал бўлавермайди.

Бу методлар айрим системалар учун жуда тез яқинлашиб, бошқа системалар учун секин яқинлашиши ёки умуман яқинлашмаслиги ҳам мумкин. Шунинг учун ҳам итерацион методларни қўллаётганда системани аввал тайёрлаб олиш керак. Бунинг маъноси шундан иборатки берилган системани унга тенг кучли бўлган шундай системага алмаштириш кераккки, ҳосил бўлган система учун танланган метод тез яқинлашсин.

Ҳозирги замон ЭҲМлари ёрдамида аниқ методлар билан тартиби 10^3 дан катта бўлмаган, итерацион методлар билан эса тартиби 10^6 дан ортмайдиган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш мумкин. Аввал аниқ методларнинг умумий ғоясини кўриб чиқайлик. Бу методлар асосан уч синфга бўлинади: 1) номаълумларни кетма-кет йўқотиш методлари; 2) матрицаларни ажратишга асосланган методлар; 3) бирор метрикада ортогонал бўлган ёрдамчи векторлар системасини тузишга асосланган методлар.

Системадаги тенгламалардан номаълумларни кетма-кет йўқотиш методи қадимий методлардандир. Бу методни икки йўл билан амалга ошириш мумкин:

а) тенгламаларнинг керакли комбинацияларини тузиш;

б) алмаштиришнинг ҳар бир қадамида система матрицасининг бирор элементини ёки бир устундаги диагонал элементи остидаги барча элементларини нолга айлантириш мақсадида бу матрицани махсус равишда, танлаб олинган матрицага кўпайтиришдан иборатдир. Ҳар иккала ҳолда ҳам диққат-эътибор шунга йўналтириладики, алмаштиришлар натижасида берилган система унга тенг кучли бўлган системага ўтиши ва сўнгги система содда кўринишга эга бўлиши керак.

Матрицаларни ажратишга асосланган методлар ғоявий жиҳатдан номаълумларни кетма-кет йўқотиш методларига жуда яқин туради. Бу ерда системанинг матрицаси асосан учбурчак, диагонал ёки акслантириш матрицаларининг кўпайтмаларига ажратилади.

Учинчи синфга кирадиган методлар ҳозирги вақтда кенг тарқалган методлардир. Бу методларда изланаётган ечим махсус равишда қурилган ёрдамчи векторлар системасидаги охирги вектордан иборат. Бу группадаги методларнинг энг биринчиси ортогоналлаштириш методидир.

Юқорида айтилган барча методларнинг умумий моҳиятини қуйидаги схемада баён қилиш мумкин. Фараз қилайлик, қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$A\overline{x}=\overline{b}.$$

Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини чапдан, кетма-кет шундай L_1, L_2, . . . , L_k матрицаларга кўпайтирамизки, натижада ҳосил бўлган янги

$$L_k L_{k-1} \ldots L_1 A\overline{x}=L_k L_{k-1} \ldots L_1 \overline{b}$$

система аввалгисига эквивалент бўлиб, соддароқ ечилсин. Бунинг учун $B=L_k L_{k-1} \ldots L_1 A$ матрицанинг учбурчак, диагонал ёки ортогонал (агар $BB'=B'B=E$ бўлса, *B матрица ортогонал* дейилади) бўлиши кифоядир. Агар шу билан бирга L_i матрицалар махсусмас бўлса, тескари матрица A^{-1} ва детерминант $\det A$ ни топиш учун қуйидаги формулаларга эга бўламиз:

$$A^{-1}=B^{-1}L_k\; L_{k-1}\;\ldots\; L_1,$$

$$\det A=\frac{\det B}{\prod\limits_{i=1}^{n}\det L_i}.$$

2- §. НОМАЪЛУМЛАРНИ ЙЎҚОТИШ

Биз бу параграфда Гаусс методи ва оптимал йўқотиш методини кўриб чиқамиз. Оптимал йўқотиш методи ўз структураси жиҳатидан Гаусс методига яқин бўлишига қарамасдан у машина хотирасидан эффектив равишда фойдаланишга имкон беради ва шунинг учун ҳам бу метод ёрдамида тартиби икки марта катта бўлган системани ечиш мумкин.

Гаусс методи. Бу метод бир неча ҳисоблаш схемаларига эга. Шулардан бири — Гausсснинг компакт схемасини кўриб чиқамиз. Ушбу система берилган бўлсин:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\;\ldots\;+a_{1n}x_n=a_{1,\,n+1},\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\;\ldots\;+a_{2n}x_n=a_{2,\,n+1},\\ .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\;\ldots\;+a_{nn}x_n=a_{n,\,n+1}. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Фараз қилайлик, $a_{11}\neq 0$ (етакчи элемент) бўлсин, акс ҳолда тенгламаларнинг ўринларини алмаштириб, x_1 олдидаги коэффициенти нолдан фарқли бўлган тенгламани биринчи ўринга кўчирамиз. Системадаги биринчи тенгламанинг барча коэффициентларини a_{11} га бўлиб,

$$x_1+b_{12}^{(1)}x_2+\;\ldots\;+b_{1n}^{(1)}x_n=b_{1,\,n+1}^{(1)} \tag{2.2}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$b_{1j}^{(1)}=\frac{a_{1j}}{a_{11}}\;(j\geqslant 2).$$

(2.2) тенгламадан фойдаланиб, (2.1) системанинг қолган тенгламаларида x_1 ни йўқотиш мумкин. Бунинг учун (2.2) тенгламани кетма-кет $a_{21}, a_{31}, \dots$ ларга кўпайтириб, мос равишда системанинг иккинчи, учинчи ва ҳ. к. тенгламаларидан айирамиз. Натижада, қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{2,n+1}^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)} x_n = a_{n,n+1}^{(1)}, \end{cases} \qquad (2.3)$$

бу ерда $a_{ij}^{(1)}$ коэффициентлар

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} b_{1j}^{(1)} \quad (i,\ j \geqslant 2)$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Энди (2.3) система устида ҳам шунга ўхшаш алмаштиришлар бажарамиз.

Бунинг учун (2.3) системадаги биринчи тенгламанинг барча коэффициентларини етакчи элемент $a_{22}^{(1)}$ га бўлиб,

$$x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \dots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,n+1}^{(2)} \qquad (2.4)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$b_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \qquad (j \geqslant 3).$$

(2.4) тенглама ёрдамида (2.3) системанинг кейинги тенгламаларида юқоридагидек x_2 ни йўқотиб,

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n = a_{3,n+1}^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n3}^{(2)} x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n = a_{n,n+1}^{(2)} \end{cases}$$

системага келамиз, бу ерда

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} b_{2j}^{(2)}, \quad (i, j \geqslant 3).$$

Номаълумларни йўқотиш жараёнини давом эттириб ва бу жараённи m -қадамгача бажариш мумкин деб фараз қилиб, m- қадамда қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \dots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(m)}, \\ a_{m+1,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \dots + a_{m+1,n}^{(m)} x_n = a_{m,n+1}^{(m)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \dots + a_{nn}^{(m)} x_n = a_{n,n+1}^{(m)}, \end{cases} \qquad (2.5)$$

бу ерда

$$b_{mj}^{(m)} = \frac{a_{mj}^{(m)}}{a_{mm}^{(m)}}, \quad a_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m-1)} - a_{im}^{(m-1)} b_{mj}^{(m)} \quad (i,\ j \geqslant m+1).$$

Фараз қилайлик, m мумкин бўлган охирги қадамнинг номери бўлсин. Икки ҳол бўлиши мумкин: $m = n$ ёки $m < n$. Агар $m = n$

бўлса, у вақтда биз учбурчак матрицали ва (2.1) системага эквивалент бўлган қуйидаги

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \dots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \qquad x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \dots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,n+1}^{(2)}, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_{n,n+1}^{(n)} \end{cases} \tag{2.6}$$

системага эга бўламиз. Охирги системадан кетма-кет x_n, x_{n-1}, $\dots$, x_1 ларни топиш мумкин:

$$\begin{cases} x_n = b_{n,n+1}^{(n)}, \\ x_{n-1} = b_{n-1,n+1}^{(n-1)} - b_{n-1,n}^{(n-1)} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 = b_{1,n+1}^{(1)} - b_{12}^{(1)} x_2 - \dots - b_{1n}^{(1)} x_n . \end{cases} \tag{2.7}$$

2.6) учбурчак системанинг коэффициентларини топиш Гаусс методининг *тўғри юриши*, (2.7) системадан ечимни топиш жараёни *тескари юриши* дейилади.

Фараз қилайлик, $m < n$ бўлсин ва системанинг m-ва ундан кейинги тенгламалари (2.5) кўринишга келтирилган бўлсин. Биз m- қадамни бажарилиши мумкин бўлган қадам деб ҳисоблаган эдик, бу шуни билдирадики (2.5) системанинг иккинчи тенгламасидан бошлаб етакчи элементни ажратиш мумкин эмас, барча $a_{ij}^{(m)}$ $(i, j = m+1, \dots, n)$ лар нолга тенг ва (2.5) система қуйидаги кўринишга эга

$$\begin{cases} x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \dots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(m)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = a_{m+1,n+1}^{(m)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = a_{n,n+1}^{(m)} . \end{cases}$$

Агар бунда барча озод ҳадлар $a_{i,n+1}^{(m)}$ $(i = m+1, \dots, n)$ нолга тенг бўлса, у ҳолда биз фақат ягона биринчи тенгламага эга бўламиз.

Барча қадамдаги биринчи тенгламаларни бирлаштириб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \dots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \qquad x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \dots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,n+1}^{(2)}, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \dots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(m)} . \end{cases}$$

Бу системадан биз x_1, x_2, $\dots$, x_m номаълумларни x_{m+1}, $\dots$, x_n номаълумлар ва озод ҳадлар ёрдамида ифодалаб олишимиз мумкин. Бу ҳолда (2.1) система чексиз кўп ечимга эга бўлади. Агар $m < n$ бўлиб, ҳеч бўлмаганда бирорта $a_{i,m+1}^{(m)} \neq 0$ $(m+1 \leqslant i \leqslant n)$ бўлса, у ҳолда (2.1) система ечимга эга бўлмайди.

Қўлда ҳисоблаётганда хатога йўл қўймаслик учун, ҳисоблаш жараёнини контрол қилиш маъқулдир. Бунинг учун биз (2.1) матрица сатрларидаги элементлар ва озод ҳаднинг йиғиндисидан тузилган контрол

$$a_{i,\,n+2}=\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \qquad (i=\overline{1,\,n}) \tag{2.8}$$

йиғиндидан фойдаланамиз.

Агар $a_{i,\,n+2}$ ларни (2.1) системанинг озод ҳадлари деб қабул қилсак, у ҳолда алмаштирилган

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j=a_{i,\,n+2} \quad (i=\overline{1,\,n}) \tag{2.9}$$

системанинг ечими $\overline{x}_j$ (2.1) системанинг ечими x_j орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\overline{x}_j=x_j+1 \quad (j=\overline{1,\,n}). \tag{2.10}$$

Ҳақиқатан ҳам, (2.10) ни (2.9) системага қўйсак, (2.1) система ва (2.8) формулага кўра

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}=a_{i,\,n+2} \qquad (i=\overline{1,\,n})$$

айниятга эга бўламиз.

Агар сатр элементлар устида бажарилган амалларни ҳар бир сатрдаги контрол йиғинди устида ҳам бажарсак ва ҳисоблашлар хатосиз бажарилган бўлса, у ҳолда контрол йиғиндилардан тузилган устуннинг ҳар бир элементи мос равишда алмаштирилган сатрлар элементларининг йиғиндисига тенг бўлади. Бу ҳол эса тўғри юришни контрол қилиш учун хизмат қилади. Тескари юришда эса, контрол $\overline{x}_j$ ларни топиш билан бажарилади.

Тенгламалар системаси қўлда ечилганда ҳисоблашларни 9- жадвалда кўрсатилган Гауссниг компакт схемаси бўйича олиб бориш маъқулдир. Соддалик учун жадвалда тўртта номаълумли тўртта тенгламалар системасини ечиш схемаси келтирилган.

Гаусс методи билан n та номаълумли чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш учун бажариладиган арифметик амалларнинг миқдори қуйидагидан иборат: $\frac{1}{3}(n^3+3n^2-n)$ та кўпайтириш ва бўлиш, $\frac{1}{6}(2n^3+3n^2-5n)$ та қўшиш.

Мисол. Гаусс методи билан қуйидаги система ечилсин:

$$\begin{cases} 2x_1+4{,}2\,x_2+1{,}6\,x_3-3x_4=3{,}2 \\ -0{,}4\,x_1+3x_2-2{,}4\,x_3=-1{,}6 \\ 1{,}6\,x_1-0{,}8\,x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2-x_3+1{,}5\,x_4=0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Системани ечиш жараёни 10- жадвалда келтирилган.

9-жадвал

x_1	x_2	x_3	x_4	озод ҳадлар	Σ	схема қисмлари
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	A
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
1	$b_{12}^{(1)}$	$b_{13}^{(1)}$	$b_{14}^{(1)}$	$b_{15}^{(1)}$	$b_{16}^{(1)}$	
	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$	A_1
	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$	
	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$	
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
	1	$b_{23}^{(2)}$	$b_{24}^{(2)}$	$b_{25}^{(2)}$	$b_{26}^{(2)}$	
		$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$	A_2
		$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$	
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
		1	$b_{34}^{(3)}$	$b_{35}^{(3)}$	$b_{36}^{(3)}$	
			$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$	A_3
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
			1	$b_{45}^{(4)}$	$b_{46}^{(4)}$	
			1	x_4	$\bar{x}_4$	B
		1		x_3	$\bar{x}_3$	
	1			x_2	$\bar{x}_2$	
1				x_1	$\bar{x}_1$	

10- жадвал

x_1	x_2	x_3	x_4	озод ҳадлар	Σ	схема қисмлари
2	4,2	1,6	—3	3,2	8	A
—0,4	3	—2,4	0	—1,6	—1,4	
1,6	—0,8	1	—1	—1	—0,2	
1	—2	—1	1,5	0	—0,5	
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
1	2,1	0,8	—1,5	1,6	4	

давоми

	3,84	— 2,08	— 0,60	—0,96	0,2	A_1
	4,16	0,28	— 1,40	3,56	6,6	
	4,1	1,8	— 3	1,6	4,5	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	
	1	—0,54166	—0,15625	— 0,25	0,05208	
		—2,53331	0,75	— 4,6	—6,38331	A_2
		—4,02081	2,35937	— 2,62500	—4,28644	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	
		1	—0,29606	1,81581	2,51198	
			1,16897	4,67603	5,84500	A_3
			1	4,00013	5,00013	B
		1		3,00009	4,00009	
	1			2,00005	3,00005	
1				1,00002	2,00002	

Шундай қилиб, қуйидаги $x_1 = 1{,}00002$; $x_2 = 2{,}00005$; $x_3 = 3{,}00009$; $x_4 = 4{,}00013$ тақрибий ечимга эга бўлдик.

Системанинг аниқ ечими $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ эканлигига бевосита ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Бош элементлар методи. Гаусс методида етакчи элементлар доим нолдан фарқли бўлавермайди. Ёки улар нолга яқин сонлар бўлиши мумкин: бундай сонларга бўлганда катта абсолют хатога эга бўлган сонлар ҳосил бўлади. Бунинг натижасида тақрибий ечим аниқ ечимдан сезиларли даражада четлашиб кетади.

Ҳисоблаш хатосининг бундай ҳалокатли таъсиридан қутулиш учун Гаусс методи бош элементни танлаш йўли билан қўлланилади. Бунинг Гаусс методининг компакт схемасидан фарқи қуйидагидан иборат. Фараз қилайлик, номаълумларни йўқотиш жараёнида қуйидаги системага эга бўлган бўлайлик:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + b_{12}^{(1)}x_2 + b_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \qquad x_m + b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(2)}, \\ \qquad\quad a_{m+1,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{m+1,n}^{(m)}x_n = a_{m+1,n+1}^{(m)}, \\ \qquad\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \qquad\quad a_{n,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{n,n}^{(m)}x_n = a_{n,n+1}^{(m)}. \end{array}\right.$$

Энди $|a_{m+1,k}^{(m)}| = \max\limits_{j} |a_{m+1,j}^{(m)}|$ тенгликни қаноатлантирадиган k номерни топиб, ўзгарувчиларни қайта белгилаймиз: $x_{m+1} = x_k$ ва $x_k = x_{m+1}$ сўнгра $(m + 2)$ тенгламадан бошлаб, барчасидан x_{m+1} номаълумни йўқотамиз. Бундай қайта белгилашлар йўқотиш тартибини ўзгартиришга олиб келади ва кўп ҳолларда ҳисоблаш хатосини камайтиришга хизмат қилади.

Оптимал йўқотиш методи. Бу методнинг дастлабки қадамлари Гаусс методига ўхшашдир. Етакчи элемент $a_{11} \neq 0$ деб фараз қилиб, (2.1) системанинг биринчи тенгламасини

$$x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)} \tag{2.2}$$

кўринишга келтирамиз. Сўнгра (2.1) системанинг фақат иккинчи тенгламасидан x_1 ни йўқотамиз:

$$a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{2,n+1}^{(1)}.$$

Энди $a_{22}^{(1)} \neq 0$ деб фараз қилиб, бу тенгламани (2.4) кўринишга келтирамиз:

$$x_2 + b_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + b_{2n}^{(2)} x_n = b_{2,n+1}^{(2)}.$$

Бу тенглама ёрдамида (2.2) тенгламадан x_2 ни йўқотамиз. Натижада

$$x_1 + c_{13}^{(2)} x_3 + \ldots + c_{1n}^{(2)} x_n = c_{1,n+1}^{(2)},$$
$$x_2 + c_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + c_{2n}^{(2)} x_n = c_{2,n+1}^{(2)}$$

ҳосил бўлади. Бу ерда

$$c_{1j}^{(2)} = b_{1j}^{(1)} - b_{12}^{(1)} b_{2j}^{(2)}, \quad c_{2j}^{(2)} = b_{2j}^{(2)} \quad (j \geqslant 3).$$

Фараз қилайлик, аввалги k та тенгламалар устида алмаштиришлар бажариш натижасида (2.1) система қуйидаги тенг кучли системага келтирилган бўлсин:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + c_{1,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \ldots + c_{1n}^{(k)} x_n = c_{1,n+1}^{(k)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k + c_{k,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \ldots + c_{k,n}^{(k)} x_n = c_{k,k+1}^{(k)}, \\ a_{k+1,1} x_1 + \ldots + a_{k+1,k+1} x_{k+1} + \ldots + a_{k+1,n} x_n = a_{k+1,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + \ldots + a_{n,k+1} x_{k+1} + \ldots + a_{nn} x_n = a_{n,n+1}. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

Бу системанинг аввалги k та тенгламасини мос равишда $a_{k+1,k}$, $a_{k+1,2}, \ldots, a_{k+1,k}$ ларга кўпайтириб, натижаларни $(k+1)$-тенгламадан айирамиз ва ҳосил бўлган тенгламани x_{k+1} номаълум олдидаги коэффициентга бўламиз. Натижада $(k+1)$- тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x_{k+1} + c_{k+1,k+2}^{(k)} x_{k+2} + \ldots + c_{k+1,n}^{(k)} x_n = c_{k+1,n+1}^{(k)} .$$

Энди бу тенглама ёрдамида (2.12) системанинг аввалги k та тенгламасидан x_{k+1} ни йўқотсак, у ҳолда яна (2.12) кўринишдаги системага, фақат k нинг $(k+1)$ га алмашган ҳолига, эга бўламиз.

Шу билан бирга, агар

$$a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^{k} c_{r,k+1}^{(k)} a_{k+1,r} \neq 0$$

бўлса, қуйидаги формулаларга эга бўламиз:

$$c^{(k+1)}_{k+1,p} = \frac{a_{k+1,p} - \sum\limits_{r=1}^{k} a_{k+1,r} c^{(k)}_{r,p}}{a_{k+1,k+1} - \sum\limits_{r=1}^{k} a_{k+1,r} c^{(k)}_{r,k+1}},$$

$$c^{(k+1)}_{ip} = c^{(k)}_{ip} - c^{(k)}_{i,k+1} c^{(k+1)}_{k+1,p}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k;\ p = k+2,\ k+3,\ \ldots,\ n+1).$$

Алмаштиришларнинг n- қадами ҳам бажирилгандан сўнг (2.1) системанинг ечими учун қуйидаги формулалар ҳосил бўлади:

$$x_i = c^{(n)}_{i,n+1} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Бу ерда ҳам ҳисоблаш жараёнини контрол қилиш Гаусс методидагига ўхшашдир. Оптимал йўқотиш методида ҳам барча етакчи элементлар нолдан фарқли бўлиши зарурдир. Агар бу факт олдиндан маълум бўлмаса, у ҳолда ҳисоблаш схемасини ўзгартириб, бош элементларни сатр бўйича танлаш йўли билан номаълумларни йўқотиш мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун, агар $(k+1)$-тенгламада $x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_k$ номаълумларни йўқотгандан кейин,

$$a_{k+1,k+1} - \sum_{s=1}^{k} a_{k+1,s} c^{(k+1)}_{sp} \quad (p > k+1)$$

модули бўйича энг катта элемент бўлса, у ҳолда ўзгарувчиларни қайтадан белгилаб: $x_{k+1} = x_p$ ва $x_p = x_{k+1}$, сўнгра оптимал йўқотиш қоидасига кўра номаълумларни йўқотишни давом эттириш керак.

Оптимал йўқотиш методининг устунлиги шундан иборатки n-тартибли системани ечиш учун зарур бўлган арифметик амалларнинг сони Гаусс методидагидек бўлса ҳам, бу метод ЭҲМ лар хотирасидан эффектив равишда фойдаланишга имкон беради, яъни системанинг тартибини икки марта орттириш мумкин.

(2.12) системадан кўриниб турибдики, оптимал йўқотишнинг k-қадами бажарилгач, берилган системанинг охирги $(n-k)$ та тенгламаси ўзгаришсиз қолади. Буни ҳисобга олган ҳолда хотирага матрицанинг барча элементларини тўла киритмасдан, ҳар бир қадамдан олдин биттадан сатрни киритамиз. У ҳолда $(k+1)$-қадамни амалга ошириш учун хотиранинг

$$f(k) = k(n-k+1) + n + 1$$

та ячейкаси етарли бўлади, булар

$$\begin{bmatrix} c^{(k)}_{1,k+1} & \cdots\cdots & c^{(k)}_{1,n+1} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ c^{(k)}_{k,k+1} & \cdots\cdots & c^{(k)}_{k,n+1} \end{bmatrix}$$

матрицани ва (2.12) системадаги $(k+1)$-тенглама коэффициентларини жойлаштириш учун хизмат қилади. Энди $f(k)$ нинг максимумини топиб, n-тартибли системани ечиш учун $\frac{(n+1)\ (n+5)}{4}$ та ячейкага эга бўлган майдон етарли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Масалан, оператив хотираси 4095 ячейкадан иборат бўлган ЭҲМ да ташқи қурилмалардан фойдаланмасдан 122-тартибли тенгламалар системасини ечиш ёки шу тартибли ихтиёрий матрицанинг детерминантини ҳисоблаш мумкин.

Мисол тариқасида

$$\begin{cases} 2x_1 + 4{,}2x_2 + 1{,}6x_3 - 3x_4 = 3{,}2, \\ -0{,}4x_1 + 3x_2 - 2{,}4x_3 = -1{,}6, \\ 1{,}6x_1 - 0{,}8x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 1{,}5x_4 = 0 \end{cases}$$

системани оптимал йўқотиш методи билан ечайлик. Биринчи тенгламадан

$$x_1 + 2{,}1x_2 + 0{,}8x_3 - 1{,}5x_4 = 1{,}6 \tag{2.13}$$

ни ҳосил қиламиз ва буни —0,4 га кўпайтириб, системанинг иккинчи тенгламасидан айирамиз:

$$3{,}84x_2 - 2{,}08x_3 - 0{,}60x_4 = -0{,}96.$$

Буни 3,84 га бўлиб, керакли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x_2 - 0{,}54167\,x_3 - 0{,}15625\,x_4 = -0{,}2500. \tag{2.14}$$

Энди (2.13) дан x_2 ни йўқотсак,

$$x_1 + 1{,}93750x_2 - 1{,}17182x_4 = 2{,}12501. \tag{2.15}$$

(2.15) ни 1,6 га ва (2.14) ни —0,8 га кўпайтириб, системанинг учинчи тенгламасидан айирамиз ва ҳосил бўлган тенгламани x_3 олдидаги коэффциентга бўлсак,

$$x_3 - 0{,}29611\,x_4 = 1{,}81556 \tag{2.16}$$

келиб чиқади.

Бу тенглама ёрдамида (2.14) ва (2.15) дан x_3 ни йўқотсак,

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}59811\,x_4 = -1{,}39322 \\ x_2 - 0{,}31664\,x_4 = 0{,}73343 \end{cases} \tag{2.17}$$

ҳосил бўлади.

Энди (2.16) — (2.17) тенгламалар ёрдамида системанинг тўртинчи тенгламасидан x_1, x_2, x_3 ни йўқотамиз: $1{,}11872x_4 = 1{,}67564$. Бундан ва (2.13) — (2.17) дан номаълумларни кетма-кет топамиз:

$x_4 = 4{,}00065$; $x_3 = 3{,}00019$; $x_2 = 1{,}99999$; $x_1 = 0{,}99922$.

Детерминантни ҳисоблаш. Гаусс методини ҳам, оптимал йўқотиш методини ҳам детерминантни ҳисоблаш учун қўллаш мумкин. Қуйидаги

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрицанинг детерминантини топиш талаб қилинсин. Бунинг учун, бир жинсли, чизиқли

$$A\overline{x} = \overline{0} \tag{2.18}$$

системани ечишга Гаусс методини қўллаймиз. Натижада A матрица

$$B=\begin{bmatrix}1 & b_{12}^{(1)} & b_{13}^{(1)} & \dots & b_{1n}^{(1)}\\ 0 & 1 & b_{23}^{(2)} & \dots & b_{2n}^{(2)}\\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ 0 & 0 & 0\ .\ . & & .\ .\ .\ 1\end{bmatrix}$$

учбурчак матрицага алмаштирилади, (2.18) система эса унга эквивалент бўлган

$$B\overline{x}=\overline{0}$$

системага ўтади.

Агар диққат қилинса, B матрицанинг элементлари A матрица ва кейинги ёрдамчи A_1, A_2, . . . , A_{n-1} матрицалардан қуйидаги иккита элементар алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлган:

1) нолдан фарқли деб фараз қилинган a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, . . . , $a_{nn}^{(n-1)}$ етакчи элементларга бўлиш;

2) A матрица ва ёрдамчи A_1, A_2, . . . , A_{n-1} ларнинг сатрларидан мос равишдаги етакчи сатрларга пропорционал бўлган сатрларни айириш.

Биринчи алмаштириш натижасида матрицанинг детерминанти ҳам мос равишдаги етакчи элементга бўлинади, иккинчи алмаштириш эса детерминантни ўзгаришсиз қолдиради. Шунинг учун ҳам

$$1=\det B=\frac{\det A}{a_{11}\,a_{22}^{(1)}\ .\ .\ .\ a_{nn}^{(n-1)}},$$

бу ердан эса

$$\det A=a_{11}a_{22}^{(1)}\ .\ .\ .\ a_{nn}^{(n-1)}. \qquad (2.19)$$

Демак, детерминант Гаусснинг компакт схемасидаги етакчи элементларнинг кўпайтмасига тенг экан.

Матрица детерминантини оптимал йўқотиш методи ёрдамида ҳам ҳисоблаш мумкин. Бу ерда ҳам детерминант барча етакчи

$$\alpha_k=a_{k+1,\ k+1}-\sum_{r=1}^{k}a_{k+1,r}c_{r,k+1}^{(k)}$$

элементларнинг кўпайтмасига тенг:

$$\det A=\prod_{k=1}^{n}\alpha_k. \qquad (2.20)$$

Агар етакчи элементларнинг бирортаси нолга тенг бўлса, у ҳолда сатр бўйича бош элементни танлаш схемасидан фойдаланиш керак. Лекин бу ҳолда детерминантнинг ишорасини сақлаш учун α_k элементларни $(-1)^{l_k+1}$ га кўпайтириш керак бўлади. Бу ерда l_k сони, агар аввалги k қадамда йўқотилмаган барча номаълумлар чапдан ўнгга қараб кетма-кет 1, 2, . . . , $n-k$ лар билан номерланган бўлса, $k+1$-қадамда йўқотилган номаълумларнинг номерини билдиради. Лекин ҳисоблаш одатдагича (2.19) ёки (2.20) формулалар билан бажарилганда $\det A$ айтарли кичик (катта) бўлмаса-да бирор $i<n$ учун аввалги i та кўпаювчиларнинг кўпайтмаси машина нолига тенг бўлиши ёки тўлиб ортиб кетиши мумкин.

Бундай нуқсондан қутулиш учун (2.19) формула бўйича $\det A$ ни қуйидагича ҳисоблаш керак:

$$\det A=\left(q\prod_{j}(-1)^{l_j+1}\alpha_j\right)\left(r\prod_{k}(-1)^{l_k+1}\alpha_k\right).$$

Бу ерда q ЭҲМ даги мумкин бўлган энг катта сонга яқин бўлиб, r энг кичик сонга яқин ва шу билан бирга $q\cdot r=1$; α_j етакчи элементлар орасидаги модули бўйича бирдан кичик бўлганлари, α_k эса қолган етакчи элементлар.

Матрицаларнинг тескарисини топиш. Агар бир хил матрицага эга бўлиб, фақат озод ҳадлари билан фарқ қиладиган бир қанча системани ечишга тўғри келса, у ҳолда матрицанинг тескарисини топиш мақсадга мувофиқдир. Иккинчи томондан статистик ҳисоблашларда айрим статистик параметрларни баҳолаш учун тескари матрицалар катта аҳамиятга эга.

Фараз қилайлик, бизга махсусмас матрица $A=[a_{ij}]$ $(i,j=\overline{1,n})$ берилган бўлсин. Унга тескари бўлган $A^{-1}=[x_{ij}]$ матрицани топиш учун асосий $AA^{-1}=E$ муносабатдан фойдаланамиз, бу ерда E бирлик матрица, A ва A^{-1} матрицаларни ўзаро кўпайтирсак, n^2 та x_{ij} номаълумларга нисбатан асосий матрицаси бир хил ва фақат озод ҳадлари билангина фарқ қиладиган n та тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=1 & 0\ \ldots\ 0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 & 1\ \ldots\ 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0 & 0\ \ldots\ 1.\end{cases}$$

Бундай системани Гаусс методи билан бирданига ечиш мумкин. Мисол учун (2.11) система

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4{,}2 & 1{,}6 & -3\\ 0{,}4 & 3 & -2 & 0\\ 1{,}6 & -0{,}8 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1 & 1.5\end{bmatrix}$$

матрицасининг тескарисини топайлик.

Ечиш. Гаусс компакт схемасини қўллаймиз. Бу ҳолда тўртта озод ҳадлар устунига эга бўламиз (11-жадвал). Шуни ҳам эслатиб ўтамизки, тескари матрицанинг сатр элементлари тескари тартибда ҳосил бўлади.

11-жадвал натижасидан қуйидагига эга бўламиз:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}28239 & -0{,}06801 & -0{,}06915 & 0{,}51865\\ 0{,}38037 & -0{,}19364 & -1{,}70539 & 0{,}29046\\ 0{,}51408 & -0{,}77686 & -1{,}04425 & 0{,}33195\\ 0{,}66162 & -0{,}73076 & -1{,}59058 & 0{,}92945\end{bmatrix}$$

11- жадвал

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ
2	4,2	1,6	—3	1	0	0	0	5,8
—0,4	3	—2	0	0	1	0	0	1,6
1,6	—0,8	1	—1	0	0	1	0	1,8
1	—2	—1	1,5	0	0	0	1	2,5
1	—2,1	—0,8	—1,5	0,5	0	0	0	2,9
	3,84	—1,68	—0,6	0,2	1	0	0	2,76
	—4,16	—0,28	1,4	—0,8	0	1	0	—2,84
	—4,1	—1,8	3	—0,5	0	0	1	—2,4
	1	—0,43750	—0,15625	0,05208	0,26042	0	0	0,71875
		—2,10000	0,75000	—0,58335	1,08334	1	0	0,14999
		—3,59375	2,35937	—0,28647	1,06772	0	1	—3,52085
		1	—0,35714	0,27779	—0,51588	—0,47619	0	0,07142
			1,07590	0,71184	—0,78622	—1,71131	1	0,29022
				0,66162	—0,73076	—1,59058	0,92945	—0,73027
				0,51408	—0,77686	—1,04425	0,33195	—0,97508
				0,38037	—0,19364	—0,70539	0,29046	—0,22820
				0,28239	—0,06801	—0,06915	0,51865	0,66388

Текшириш учун AA^{-1} кўпайтмани тузайлик:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4,2 & 1,6 & -3 \\ -0,4 & 3 & -2 & 0 \\ 1,6 & -0,8 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,28239 & -0,06801 & -0,06915 & 0,51865 \\ 0,38037 & -0,19364 & -0,70539 & 0,29046 \\ 0,51408 & -0,77686 & -1,04425 & 0,33195 \\ 0,66162 & -0,73076 & -1,59058 & 0,92945 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1,00000 & -0,00001 & 0,00001 & 0,00001 \\ 0,00001 & 1,0000 & -0,00001 & -0,00002 \\ -0,00003 & -0,00001 & 1,00000 & -0,00003 \\ 0,00000 & -0,00001 & 0,00001 & 0,99996 \end{bmatrix} =$$

$$= E + 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Бу ердан кўринадики, AA^{-1} кўпайтма матрица элементлари E бирлик матрицанинг мос элементларидан фақатгина вергулдан кейинги бешинчи хона рақамлари билангина фарқ қилади, демак аниқлик қониқарлидир

3- §. КВАДРАТ ИЛДИЗЛАР МЕТОДИ

Ушбу ва кейинги параграфлардаги методларда махсус хоссаларга эга бўлган матрицалардан фойдаланишга тўғри келади, шунинг учун аввало шу матрицаларни таърифлаб ўтамиз.

Агар барча i ва j лар учун $a_{ij}^* = \overline{a}_{ji}$ бўлса (бу ерда a_{ji} устидаги чизиқ қўшма комплекс сонни билдиради) элементлари a_{ij}^* дан иборат бўлган A^* матрица берилган $A = [a_{ij}]$ матрицага нисбатан *қўшма* матрица дейилади.

Агар A квадрат матрица ўзининг қўшмаси A^* билан устма-уст тушса, яъни $A^* = A$ бўлса, у *Эрмит матрицаси ёки ўз-ўзига қўшма матрица* дейилади. Элементлари ҳақиқий сондан иборат бўлган Эрмит матрицаси *симметрик матрица* дейилади. Бу матрица $A' = A$ тенглик билан аниқланади.

Агар

$$AA^* = E \tag{3.1}$$

бажарилса, у ҳолда A *унитар матрица* дейилади, бу ерда E— бирлик матрица.

Унитар матрица қуйидаги хоссаларга эга:

1) Агар A унитар матрица бўлса, у ҳолда унинг детерминанти модули 1 га тенг бўлган комплекс сондир. Ҳақиқатан ҳам, (3.1) га кўра

$$\det AA^* = \det A \cdot \det A^* = \det A \cdot \det \overline{A} = |\det A|^2 = 1.$$

2) Агар A унитар матрица бўлса, у ҳолда $A^{-1} = A^*$. Буни исботлаш учун (3.1) ни чапдан A^{-1} га кўпайтириш кифоядир.

3) Агар A унитар матрица бўлса, у ҳолда A^* ҳам унитардир.

4) Иккита унитар матрицаларнинг кўпайтмаси унитар матрицадир. Ҳақиқатан ҳам, A ва B унитар матрицалар бўлсин, у ҳолда

$$(AB)\,(AB)^* = ABB^*A^* = AEA^* = AA^* = E.$$

Энди квадрат илдизлар методини кўриб чиқайлик. Фараз қилайлик, A Эрмит матрицаси бўлсин. Квадрат илдизлар методининг ғояси A матрицани учбурчак ва диагонал матрицалар кўпайтмаси шаклида тасвирлашдан иборатдир:

$$A = T^*DT, \tag{3.2}$$

бу ерда

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

юқори учбурчак матрица бўлиб, D эса d_{ii} элементлари $+1$ ёки -1 дан иборат бўлган

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

диагонал матрицадир.

T матрица элементларини топиш учун (3.2) тенгликдан, матрицаларни кўпайтириш қоидасига асосланиб, t_{ij} ларга нисбатан қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \overline{t_{1i}}d_{11}t_{1j} + \ldots + \overline{t_{ii}}d_{ii}t_{ij} = a_{ij} \quad (i < j), \\ |t_{11}|^2d_{11} + \ldots + |t_{ii}|^2d_{ii} = a_{ii} \quad (i = j), \; (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{3.3}$$

Бу ерда $\overline{t_{ij}}$ лар t_{ij} билан ўзаро қўшма комплекс сонлардир. (3.3) системада тенгламаларнинг сони номаълумларнинг сонидан n тага кам. (3.3) системадан t_{ij} лар ягона равишда топилиши учун d_{ii} ларни шундай танлаб оламизки, t_{ii} лар ҳақиқий ва мусбат бўлсин. У вақтда (3.3) системанинг иккинчи тенгламасидан $i=1$ бўлганда

$$|t_{11}|^2d_{11} = a_{11}$$

га эга бўламиз. Энди $d_{11} = \mathrm{sign}a_{11}$ деб олиб t_{11} учун $t_{11} = \sqrt{|a_{11}|}$ ни ҳосил қиламиз. (3.3) системанинг биринчи тенгламасидан $i=1$ бўлганда $t_{ij} = \frac{a_{1j}}{d_{11}t_{11}}$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$ келиб чиқади. Шунга ўхшаш (3.3) системада $i = 2$ бўлганда аввал иккинчи тенгламадан t_{22} ни, сўнгра биринчи тенгламадан t_{2j} ни топамиз:

$$d_{22} = \mathrm{sign}(a_{22} - |t_{12}|^2d_{11}), \; t_{22} = \sqrt{|a_{22} - |t_{11}|^2d_{11}|},$$

$$t_{2j} = \frac{a_{2j} - \overline{t_{12}}d_{11}t_{1j}}{d_{22}t_{22}} \quad (j = \overline{3, n}).$$

Шундай қилиб, T нинг аввалги иккита сатр элементларини топиш учун формулалар чиқардик. Шунга ўхшаш, T матрицанинг қолган элементларини ҳам топамиз. Умумий ҳолда ҳисоблашлар қуйидаги формулалар ёрдамида олиб борилади:

$$\begin{cases} d_{11} = \operatorname{sign} a_{11}, \quad t_{11} = \sqrt{|a_{11}|}, \quad t_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{d_{11}t_{11}}, \\ d_{ii} = \operatorname{sign}\left(a_{ii} - \sum\limits_{s=1}^{i-1} |t_{si}|^2 d_{ss}\right), \\ t_{ii} = \sqrt{\left|a_{ii} - \sum\limits_{s=1}^{i-1} | t_{si} |^2 d_{ss}\right|} \quad (i>1), \\ t_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{s=1}^{i-1} \bar{t}_{si} d_{ss} t_{sj}}{d_{ii}t_{ii}} \quad (j = \overline{i+1,n}). \end{cases} \tag{3.4}$$

Шундай қилиб, (3.2) ёйилма мавжуд ва (3.4) формулалар ёрдамида аниқланади. Ниҳоят,

$$Ax = \bar{b}$$

системани ечиш учун уни $A = T^*DT$ ёйилмадан фойдаланиб, қуйидаги иккита учбурчак матрицали системалар шаклида ёзиб оламиз:

$$T^*D\bar{y} = \bar{b}, \quad T\bar{x} = \bar{y}.$$

Бу системаларни ёйиб ёзсак,

$$\begin{cases} t_{11}d_{11}y_1 = b_1, \\ \bar{t}_{12}d_{11}y_1 + t_{22}d_{22}y_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{t}_{1n}d_{11}y_1 + \bar{t}_{2n}d_{22}y_2 + \dots + t_{nn}d_{nn}y_n = b_n \end{cases}$$

ва

$$\begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \dots + t_{1n}x_n = y_1, \\ \qquad\quad t_{22}x_2 + \dots + t_{2n}x_n = y_2, \\ \qquad\quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\quad t_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

га эга бўламиз. Бундан эса, кетма-кет қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}d_{11}}, \qquad y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{s=1}^{i-1} \bar{t}_{si} y_s d_{ss}}{t_{ii}d_{ii}} \quad (i > 1) \tag{3.5}$$

ва

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \qquad x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{s=i+1}^{n} t_{is}x_s}{t_{ss}} \quad (i<n). \tag{3.6}$$

Агар A ҳақиқий ва симметрик матрица бўлса, бу матрицани бир-бирига нисбатан ўзаро транспонирланган иккита матрицалар кўпайтмаси шаклида ёзиш мумкин:

$$A = T'T,$$

бу ерда T — юқори учбурчак матрица. Бу ҳолда (3.4) формулалар бир оз соддалашиб, ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\left\{\begin{array}{ll} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{t_{11}}, & \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{s=1}^{i-1} t_{si}^2} & (i > 1), \\ t_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{s=1}^{i-1} t_{si} t_{sj}}{t_{ii}} & (j = \overline{i+1, n}). \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш кераккки, фақат A матрица мусбат аниқланган бўлгандагина T матрицанинг диагонал элементлари ҳақиқий ва мусбат бўлиши мумкин. Акс ҳолда, T матрица элементлари орасида комплекслари ҳам учраб қолиши мумкин.

Учбурчак матрицанинг детерминанти диагонал элементлари кўпайтмасига тенг эканлигини эътиборга олиб, (3.2) ёйилмадан $\det A$ ни топиш учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}\, t_{ii}^2$$

ёки

$$\det A = (p \prod d_{i_r\, i_r} |\, t_{i_r\, i_r}|^2)\ (q \prod d_{i_s\, i_s} |\, t_{i_s\, i_s}|^2).$$

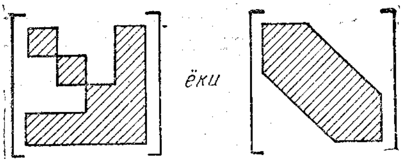
Бу ерда q ЭҲМ даги мумкин бўлган энг катта сонга, p эса энг кичигига яқин бўлиб, $pq = 1$; $t_{i_r\, i_r}$ лар T матрицанинг абсолют қийматлари бўйича бирдан ортмайдиган элементлари, $t_{i_s\, i_s}$ лар эса қолган элементларидир.

Бу метод ёрдамида хотираси 4095 та ячейкадан иборат ЭҲМ-ларда матрицаси ҳақиқий ва симметрик бўлган 88- тартибли системани ечиш мумкин.

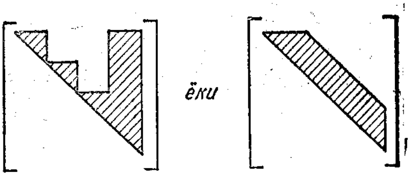
Квадрат илдизлар методи кўпинча кузатишлар натижасини энг кичик квадратлар методи билан ишлаб чиққанда ҳосил бўладиган тенгламаларнинг нормал системасини ечиш учун қўлланилади. Бундай система матрицасининг бош минорлари мусбат бўлган Эрмит матрицаси бўлади.

Бундай системаларнинг тартиблари одатда бир неча юз, ҳатто мингларга тенг бўлиши мумкин.

Одатда юқори тартибли чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш ниҳоятда мураккаб масала. Шунинг учун ҳам ҳар бир конкрет масаланинг ички хусусиятларидан фойдаланиш керак. Масалан, кўп масалалар, шу жумладан, энг кичик квадратлар



15-чизма.



16-чизма.

методи билан транспорт масаласини ечиш матрицаси 15- чизмадаги кўринишга эга бўлган юқори даражали алгебраик тенгламалар системасига олиб келади. Бундай системаларни квадрат илдизлар методи билан ечиш қулайдир.

Ҳақиқатан ҳам, фараз қилайлик, A Эрмит матрицасининг элементлари бирор j ва барча $1 \leqslant i \leqslant m_j < j$ лар учун $a_{ij} = 0$ шартни қаноатлантирсин. У ҳолда, (3.4) формуладан кўринадики, уларга мос бўлган t_{ij} элементлар ҳам нолга айланади. Шунинг учун ҳам, T матрицанинг кўриниши A матрицанинг ўнг ярмидек, яъни 16- чизмадагидек бўлади.

Ноль элементлар устида амал бажармасак, у ҳолда ҳисоблаш ишлари фақат тезлашибгина қолмасдан, балки ечиладиган масаланинг тартибини орттириш ҳам мумкин.

Соддалик учун симметрик матрицага эга бўлган қуйидаги:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 11, \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

системани квадрат илдизлар методи билан ечайлик.

Ечиш. Системанинг a_{ij} коэффициентлари ва b_i озод ҳадларини 12- жадвалнинг A қисмига жойлаштириб, Σ устунни ҳисоблаб чиқамиз. (3.7) ва (3.5) формулалар ёрдамида кетма-кет t_{ij} элементларни ва янги озод ҳад y_i ларни ҳисоблаб, жадвалнинг A_1 қисмини тўлдирамиз. Контрол учун ҳар гал Σ устунни ҳисоблаб турамиз. Масалан, t_{34} ва y_3 қуйидагича топилади:

$$t_{34} = \frac{a_{34} - t_{13}t_{14} - t_{23}t_{24}}{t_{33}} = \frac{3 - 2{,}82843 \cdot 0{,}70711 - 7{,}07138 \cdot 4{,}94995}{7{,}55013i} = 4{,}50363i,$$

$$y_3 = \frac{b_3 - t_{13}y_2 - t_{23}y_2}{t_{33}} = \frac{1 - 2{,}82843 \cdot 7{,}77819 - 7{,}07138 \cdot 30{,}40691}{7{,}55013i} = 28{,}61122i,$$

12- жадвал

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	y_i	Σ	схема қисмлари
2	—3	4	1	11	15	A
—3	5	—1	2	—6	—3	
4	—1	1	3	1	8	
1	2	3	2	1	9	

давоми

t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	$\bar{y}_i$	Σ	
1,41421	—2,12133 0,70708	2,82843 7,07138 7,55013i	0,70711 4,94995 4,50363i 1,64904i	7,77819 30,40691 28,61122i 4,94718	10,60661 43,13538 40,66504i 6,59622i	A_1
2,99958 3,99970	1,99975 2,99980	2,00002 3,00004	3,00004 4,00004	x_i	$\overline{x_i}$	A_2

Жадвалдаги ечимни вергулдан кейин уч хонасигача яхлитлаб олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$x_1 = 3,000; \quad x_2 = 2,000; \quad x_3 = 2,000; \quad x_4 = 3,0000.$$

Бу эса аниқ ечимни беради.

4- §. АЙЛАНТИРИШЛАР МЕТОДИ

Аналитик геометриядан маълумки, текисликда Декарт координаталар системасини ўқлар атрофида φ бурчакка айлантириш ушбу

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

матрица орқали бажарилади. Айлантиришдан фойдаланиб, чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш мумкин. Бунинг учун ортогонал матрицанинг хусусий ҳоли бўлган ушбу

$$T_{ij}=\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & \cos\varphi & \ldots & -\sin\varphi \\ & \vdots & & \vdots \\ & \sin\varphi & \ldots & \cos\varphi \\ & & & \ddots \\ & & & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad & (i) & \qquad & (j) \end{array} & \end{array}$$

элементар айлантириш матрицасидан фойдаланамиз. Бу матрица бирлик матрицадан фақатгина i- ва j- сатр ҳамда шу номерли устунларнинг кесишган жойларидаги тўртта элементлари билангина фарқ қилади.

Равшанки, $A = [a_{kl}]$ матрицани чапдан T_{ij} га кўпайтирсак, A матрицанинг фақат i- ва j- сатрлари ўзгаради, чунончи $A^{(1)} = T_{ij}A$ матрица учун

$$\begin{aligned} a_{il}^{(1)} &= a_{il}\cos\varphi - a_{jl}\sin\varphi, \\ a_{jl}^{(1)} &= a_{il}\sin\varphi + a_{jl}\cos\varphi \end{aligned} \qquad (l = \overline{1,n}) \qquad (4.1)$$

ларга эга бўламиз.

Шунга ўхшаш $A=[a_{kl}]$ матрицани T_{ij} га ўнгдан кўпайтирсак, унинг фақатгина i- ва j- устунларигина ушбу формулалар

$$\begin{aligned} a_{kl}^{(1)} &= a_{kl}\cos\varphi + a_{kj}\sin\varphi, \\ a_{kj}^{(1)} &= -a_{kj}\sin\varphi + a_{kj}\cos\varphi \end{aligned} \qquad (k=\overline{1,n}) \qquad (4.2)$$

бўйича ўзгаради холос.

Равшанки, агар a_{il} ёки a_{jl} элементлар нолдан фарқли бўлса, у ҳолда шундай φ ни топиш мумкинки, натижада $a_{jl}^{(1)}=0$ бўлсин. Бунинг учун

$$\sin\varphi = -\frac{a_{jl}}{\sqrt{a_{il}^2+a_{jl}^2}}, \cos\varphi = \frac{a_{il}}{\sqrt{a_{il}^2+a_{jl}^2}} \qquad (4.3)$$

каби олиш керак. Бу ҳолда

$$\begin{cases} a_{il}^{(1)} = \sqrt{a_{il}^2+a_{jl}^2} > 0, \\ a_{jl}^{(1)} = 0 \end{cases} \qquad (4.4)$$

бўлади. Демак, φ ни танлаш эвазига кўпайтма матрицанинг ихтиёрий элементини нолга айлантириш мумкин. Бунинг учун қуйидаги теореманинг ўринли эканлигини кўрсатиш кифоядир.

1-теорема. Ихтиёрий ҳақиқий махсусмас $A=[a_{kl}]$ матрицани чапдан кетма-кет элементар айлантириш матрицаларига кўпайтириш билан уни диагонал элементларининг охиргисидан бошқалари мусбат бўлган ўнг учбурчак матрицага келтириш мумкин.

Исбот. Фараз қилайлик,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

махсусмас ҳақиқий матрица бўлсин.

Аввал $a_{11} \neq 0$ деб ҳисоблаймиз. A матрицани кетма-кет T_{12}, T_{13}, ..., T_{1n} ларга кўпайтирамиз. Бу матрицаларни шундай танлаб оламизки, биринчи устуннинг энг юқоридаги элементидан бошқа ҳамма элементлари нолга айлансин.

Агарда $a_{11}=0$ бўлса, у ҳолда алмаштиришни T_{1j_0} га кўпайтиришдан бошлаймиз, бу ерда j_0 $a_{j_1} \neq 0$ шартни қаноатлантирадиган номерларнинг энг кичиги. Матрица махсусмас бўлганлиги учун биринчи устуннинг камида битта элементи нолдан фарқлидир, демак, шундай j_0 номер топилади.

Юқоридаги алмаштиришларни бажариш натижасида

$$A^{(1)} = T_{1n}T_{1,\,n-1}\dots T_{12}A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

матрицага келамиз ва бунда $a_{11}^{(1)} > 0$.

Бу ерда $A^{(1)}$ матрица махсусмас бўлганлиги учун $a_{22}^{(1)},\ldots,a_{nn}^{(1)}$ элементларнинг камида бирортаси нолдан фарқлидир. Энди элементар айлантириш матрицалари $T_{23}, T_{24},\ldots, T_{2n}$ ни шундай танлаб оламизки, буларга кетма-кет кўпайтириш натижасида $A^{(2)}$ матрицада иккинчи устунининг диагонал остидаги барча элементлари нолга айлансин. Шу жараённи давом эттириб, ниҳоят

$$A^{(n-1)}=T_{n-1,n}\ldots T_{12}A^{(n-2)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \ldots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \ldots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

матрицага келамиз. Шу билан теореманинг исботи ниҳоясига етди.

Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, $A^{(n-1)}$ ни ҳосил қилиш учун матрицаларни кўпайтиришлар сони диагонал остидаги элементларнинг сони $\frac{n(n-1)}{2}$ дан ортмайди.

Бу теоремадан шундай натижа келиб чиқади.

Натижа. Ихтиёрий махсусмас ҳақиқий матрицани ортогонал ва ўнг учбурчак матрицаларнинг кўпайтмаси шаклида тасвирлаш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, (4.5) тенгликдан $A=PA^{(n-1)}$, бу ерда $P=(T_{n-1,n}\ldots T_{12})^{-1}$ ортогонал матрицадир.

Исбот қилинган теоремани $A\bar{x}=\bar{b}$ тенгламани ечишга қўллаймиз. (4.5) тенгликдан кўрамизки, бу тенглама

$$A^{(n-1)}\bar{x}=\bar{c}$$

тенгламага тенг кучлидир, бу ерда $\bar{c}=T_{n-1,n}\ldots T_{12}\bar{b}$. (4.6) система учбурчакли система бўлганлиги учун, уни ечиш қийин эмас.

Номаълумларни йўқотишни

$$R_{ij}(\varphi,\psi)=\begin{array}{cc}\left[\begin{array}{ccccc} 1\ddots 1 & & & & \\ & \cos\varphi & \ldots & -e^{i\psi}\sin\varphi & \\ & & 1\ddots 1 & & \\ & e^{-i\psi}\sin\varphi & \ldots & \cos\varphi & \\ & & & & 1\ddots 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \quad & (i) & \qquad & (j) & \quad \end{array} & \end{array}$$

кўринишдаги унитар матрицалар ёрдамида ҳам бажариш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, агар A — ихтиёрий махсусмас комплекс матрица бўлса, у ҳолда уни чапдан $R_{ij}(\varphi,\psi)$ га кўпайтириб, янги B матрицани ҳосил қиламизки, унинг i- ва j- сатр элементлари

$$\begin{aligned} b_{ip}&=a_{ip}\cos\varphi-a_{jp}e^{i\psi}\sin\varphi \\ b_{jp}&=a_{ip}e^{-i\psi}\sin\varphi+a_{jp}\cos\varphi \end{aligned} \qquad (p=\overline{1,n}) \tag{4.7}$$

формулалар билан аниқланиб, қолган элементлари A матрицанинг мос элементлари билан устма-уст тушади. Агар биз B матрицанинг b_{js} элементларини нолга айлантирмоқчи бўлсак (бу эса j-тенгламадан $R_{ij}\, A\bar{x}=R_{ij}\bar{b}$ амал ёрдамида x_s ни йўқотиш билан тенг кучлидир), у ҳолда (4.7) формулаларда

$$\sqrt{|a_{is}|^2+|a_{js}|^2}>0 \text{ бўлса, } p=s \text{ бўлганда,}$$

$$\psi=\arg a_{is}-\arg a_{js},$$

$$\cos\varphi=\frac{|a_{is}|}{\sqrt{|a_{is}|^2+|a_{js}|^2}};$$

$$\sin\varphi=\frac{-|a_{js}|}{\sqrt{|a_{is}|^2+|a_{js}|^2}}$$

деб олиш керак. Акс ҳолда $\cos\varphi=1$, $\sin\varphi=0$ каби олиш керак. $R_{ij}(\varphi,\ \psi)$ матрицанинг бу хоссаси қуйидаги теоремани исботлашга имкон беради.

2-теорема. Ҳар қандай A комплекс матрицани унга $R_{ij}(\varphi,\psi)$ матрицаларни бир неча марта чапдан кўпайтириш натижасида юқори учбурчак матрицага келтириш мумкин.

Исбот. R_{12}, R_{13}, . . . , R_{1n} матрицаларни шундай танлаймизки, уларни чапдан A га кетма-кет кўпайтирилганда биринчи устуннинг барча диагонал ости элементлари нолга айлансин:

$$A_1=R_{1n}R_{1,n-1}\ldots R_{12}A=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Иккинчи қадамда A_1 ни мос равишда танлаб олинган R_{23}, R_{24} . . . , R_{2n} ларга, учинчи қадамда эса R_{34}, R_{35}, . . . , R_{3n} ларга ва ҳ. к. кўпайтирамиз. Бу жараённинг охирида юқори учбурчак A_{n-1} матрицани

$$A_{n-1,\,n}=R_{n-1,\,n}\cdot R_{n-2,n}\ \ldots\ R_{12}A$$

кўринишда ҳосил қиламиз. Шу билан теореманинг исботи ниҳоясига етди.

5- §. АКСЛАНТИРИШЛАР МЕТОДИ

Бу методнинг ғояси $A\bar{x}=\bar{b}$ система матрицасини унитар (3- § га қаранг) ва юқори учбурчак матрицалар кўпайтмасига ажратишга асосланган. Шунинг билан бирга, бу ерда унитар матрица бир нечта акслантириш матрицалари деб аталувчи квадрат матрицаларнинг кўпайтмасидан ташкил топгандир. Бу матрицалар векторларни берилган текисликка нисбатан акс эттириш қоидасига асосан векторлар фазосини алмаштириш хоссасига кўра шу ном билан аталади.

P_0 — ихтиёрий текислик бўлсин, $\overline{W}$ орқали P текисликка ортогонал ва узунлиги бирга тенг бўлган вектор устунини белгилаймиз. Энди ихтиёрий

$$\overline{z} = \overline{x} + \overline{y} \tag{5.1}$$

векторни оламиз, бу ерда $\overline{x}$ вектор $\overline{w}$ векторга ортогонал, яъни $(\overline{x}, \overline{w}) = 0$ бўлиб, $\overline{y}$ эса $\overline{w}$ га пропорционалдир: $\overline{y} = \alpha\,\overline{w}$ (α — ихтиёрий сон). $\overline{z}$ ни P текислигига нисбатан акслантириш натижасида ҳосил бўлган $\overline{z_1}$ вектор $\overline{z_1} = \overline{x} - \overline{y}$ кўринишга эгадир. $\overline{z}$ ни $\overline{z_1}$ га ўтказадиган акслантириш матрицасини U деб белгиласак, у ҳолда $U\overline{z} = z_1$ бўлади. Бу матрицанинг кўриниши

$$U = E - 2\overline{w}\;\overline{w}^* \tag{5.2}$$

формула билан аниқланади. Ҳақиқатан ҳам,

$$U\overline{z} = (E - 2\overline{w}\;\overline{w}^*)\overline{z} = \overline{z} - 2\overline{w}\;\overline{w}^*(\overline{x} + \alpha\overline{w}) = \overline{z} - 2\overline{w}\;\overline{w}^*\overline{x} -$$
$$- 2\alpha\overline{w}\;\overline{w}^*\overline{w} = \overline{z} - 2\alpha\overline{w} = \overline{x} + \alpha\overline{w} - 2\alpha\overline{w} = \overline{x} - \alpha\overline{w} = \overline{z_1}.$$

Чунки, $\overline{w}\;\overline{w}^*\overline{x} = \overline{w}(\overline{x}, \overline{w}) = 0$ ва $\overline{w}\;\overline{w}^*\overline{w} = \overline{w}\,(\overline{w}, \overline{w}) = \overline{w}$ дир. U-нинг унитар эканлиги ҳам осонгина текширилади:

$$UU^* = (E - 2\overline{w}\;\overline{w}^*)\;(E - 2\overline{w}\;\overline{w}^*) = E - 4\overline{w}\;\overline{w}^* + 4\overline{w}\;\overline{w}^*\overline{w}\;\overline{w}^* =$$
$$= E - 4\overline{w}\;\overline{w}^* + 4\overline{w}\;(\overline{w}^*\overline{w}\;\overline{w}^*) = 4 - 4\overline{w}\;\overline{w}^* + 4\overline{w}\;\overline{w}^* = E.$$

Берилган матрицани ўнг учбурчак матрицага келтириш учун акслантириш матрицаси U дан эффектив равишда фойдаланиш мумкин. Буни кўрсатиш учун, аввало, U матрица ёрдамида ихтиёрий $\overline{a}$ векторни бирлик $\overline{e}$ векторга ўтказишни, яъни U матрица ва α ни

$$U\overline{a} = \alpha\overline{e}$$

тенглик бажариладиган қилиб, аниқлашни кўриб чиқайлик. (5.2)ни қуйидаги

$$2(\overline{a}, \overline{w})\overline{w} = \overline{a} - \alpha\overline{e} \tag{5.3}$$

ёки ушбу

$$\overline{w} = \lambda(\overline{a} - \alpha\overline{e}) \tag{5.4}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $\lambda = \frac{1}{2(\overline{a}, \overline{w})}$. (5.4) ни (5.3) га қўйиб,

$$2(\overline{a}, \lambda(\overline{a} - \alpha\,\overline{e}))\;\lambda(\overline{a} - \alpha\,\overline{e}) = \overline{a} - \alpha\,\overline{e}$$

ёки

$$[2|\lambda|^2(\overline{a}, \overline{a} - \alpha\,\overline{e}) - 1]\;(\overline{a} - \alpha\,\overline{e}) = 0$$

га эга бўламиз. λ ни квадрат қавс ичидаги ифода нолга айланадиган қилиб танлаймиз. Бу эса $|\lambda|^2 = \frac{1}{2(\overline{a}, \overline{a} - \alpha\,\overline{e})}$ ни беради. Бу ерда α сонни ҳам топиш керак. Уни шундай танлаймизки, $(\overline{a}, \overline{a} - \alpha\overline{e}) > 0$ бўлсин. $|\alpha| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})}$ деб олсак,

$$(\overline{a}, \overline{a} - \alpha\overline{e}) = (\overline{a}, \overline{a}) - \overline{\alpha}\,(\overline{a}, \overline{e}) = |\alpha|^2 - \overline{\alpha}\,(\overline{a}, \overline{e}) =$$
$$= |\alpha|^2 - |\alpha|\ e^{-i\arg\alpha}\ |(\overline{a}, \overline{e})|\ e^{i\arg(\overline{a}, \overline{e})} =$$
$$= |\alpha|^2 - |\alpha|\ |\ (\overline{a}, \overline{e})\ |\ e^{i(-\arg\alpha + \arg(\overline{a}, \overline{e}))}$$

келиб чиқади. Агар

$$-e^{i(-\arg\alpha + \arg(\overline{a}, \overline{e}))} = 1$$

деб олсак, $(\overline{a}, \overline{a} - \alpha\overline{e})$ албатта мусбат бўлади. Бунинг учун $-\arg\alpha + \arg(\overline{a}, \overline{e}) = \pi$, яъни $\arg\alpha = -\pi + \arg(\overline{a}, \overline{e})$ деб олиш керак. Натижада биз қуйидагиларга эга бўламиз:

$$(\overline{a}, \overline{a} - \alpha\,\overline{e}) = |\alpha|^2 + |\alpha|\ |\ (\overline{a}, \overline{e})\ |$$

ва

$$|\lambda|^2 = \frac{1}{2[\ |\alpha|^2 + |\alpha| \cdot |(\overline{a}, \overline{e})|\ ]}\,.$$

Шундай қилиб, $\overline{a}$ ва $\overline{e}$ векторлар берилган бўлса, $U = E - 2\overline{w}\ \overline{w}^*$ матрица $U\overline{a} = \alpha\,\overline{e}$ шартни қаноатлантириши учун

$$\overline{w} = \lambda\,(\overline{a} - \alpha\,\overline{e}),\ |\alpha| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})},\ \arg\alpha = \arg(\overline{a}, \overline{e}) - \pi,$$
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\,[\ |\alpha|^2 + |\alpha| \cdot |(\overline{a}, \overline{e})|\ ]}} \tag{5.5}$$

деб олиш керак. Агар тригонометрик функциялар билан иш кўриш мақсадга мувофиқ бўлмаса, α ни қуйидагича аниқлаш маъқулдир:

$$\alpha = |\alpha|\ e^{i\arg\alpha} = -|\alpha|\ e^{i\arg(\overline{a}, \overline{e})} = -|\alpha| \cdot \frac{(\overline{a}, \overline{e})}{|(\overline{a}, \overline{e})|}\,.$$

Энди ихтиёрий махсусмас комплекс қийматли A матрицани унитар ва юқори учбурчак матрицалар кўпайтмасига ажратиш масаласи қуйидагича ҳал қилинади.

Биринчи қадамда $\overline{a}$ ва $\overline{e}$ векторларни

$$\overline{a} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})', \quad \overline{e} = (1, 0, \ldots, 0)'$$

каби олиб, α, λ, $\overline{w}$ ларни юқоридаги формулалар ёрдамида топамиз ва U_1 матрицани ҳосил қиламиз.

A матрицани чапдан U_1 га кўпайтирсак

$$A_1 = U_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

келиб чиқади. Кўриниб турибдики, бу ерда $a_{11}^{(1)} = \alpha$ дир. Иккинчи қадамда

$$\bar{a} = (0, a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{n2}^{(2)}); \quad \bar{e} = (0, 1, 0, \ldots, 0)'$$

векторлар ёрдамида U_2 матрицани ҳосил қиламиз ва A_1 ни чапдан U_2 га кўпайтириб,

$$A_2 = U_2 A_1 = U_2 U_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

матрицани келтириб чиқарамиз. U_2 матрица

$$U_2 = E - 2\bar{w}\bar{w}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_{22}^{(2)} & u_{23}^{(2)} & \ldots & u_{2n}^{(2)} \\ 0 & u_{32}^{(2)} & u_{33}^{(2)} & \ldots & u_{3n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & u_{n2}^{(2)} & u_{n3}^{(2)} & \ldots & u_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

кўринишга эга бўлганлиги учун A_2 ва A_1 матрицаларнинг биринчи сатрлари устма-уст тушади. Бу жараённи давом эттириб, $n-1$-қадамда

$$A_{n-1} = U_{n-1} \ldots U_2 U_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \ldots & a_{1,n-1}^{(n-1)} & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \ldots & a_{2,n-1}^{(n-1)} & a_{2,n}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

кўринишдаги матрицага эга бўламиз. $U_{n-1} \ldots U_2 U_1$ кўпайтмани U билан белгилаб, $A_{n-1} = UA$ ни ҳосил қиламиз, бу эса бизга керакли ажратишни беради, яъни A матрица U^* унитар матрица билан A_{n-1} юқори учбурчак матрицаларнинг кўпайтмасига тенгдир: $A = U^* A_{n-1}$.

Юқоридаги назарияга суяниб, акслантиришлар методининг ҳисоблаш схемасини берамиз. Фараз қилайлик, махсусмас комплекс матрицали қуйидаги

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

системани ечиш талаб қилинсин. Бу системанинг $\bar{a}_1^{(0)}, \ldots, \bar{a}_n^{(0)}, \bar{a}_{n+1}^{(0)}$ устунли кенгайтирилган матрицасини A_0 орқали белгилаб оламиз:

$$A_0 = (\bar{a}_1^{(0)}, \bar{a}_2^{(0)}, \ldots, \bar{a}_n^{(0)}, \bar{a}_{n+1}^{(0)}),$$

бу ерда $\bar{a}_k^{(0)} = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$ $(k = \overline{1, n+1})$, $\bar{a}_{n+1}^{(0)} = \bar{b}_0$. A матрицани

$$A_{k+1} = U_{k+1} A_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-2) \tag{5.6}$$

қоидага кўра алмаштираверамиз, бу ерда $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ акслантириш матрицаларидир. (5.6) дан

$$\overline{a}_i^{(k+1)} = U_{k+1}\overline{a}_i^{(k)} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (5.7)$$

келиб чиқади. U_1 матрицани тузаётганда $\overline{a}$ ва $\overline{e}$ векторлар сифатида

$$\overline{a} = \overline{a}_1^{(0)} = (a_{11},\ a_{21},\ \ldots,\ a_{n1})',\ \overline{e} = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)'$$

ларни олишни кўрган эдик, $\overline{a}$ ва $\overline{e}$ векторларнинг танланишига кўра

$$\overline{a}_i^{(1)} = U_1\overline{a}_i^{(0)} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1)$$

ва $\overline{a}_1^{(1)}$ вектор $\overline{a}_1^{(1)} = (a_{11}^{(1)},\ 0,\ \ldots,\ 0)'$ кўринишга эга бўлиб, $i>1$ бўлганда бошқа $\overline{a}_i^{(1)}$ лар умумий кўринишдаги векторлардир. Фараз қилайлик,

$$a_{ij}^{(k)} = 0 \quad (i>j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

элементларга эга бўлган A_k матрица тузилган бўлсин. У вақтда A_{k+1} ни тузаётганда

$$\overline{a} = (0,\ \ldots\ 0,\ a_{k+1,k+1}^{(k)},\ a_{k+2,k+1}^{(k)},\ \ldots,\ a_{n,k+1}^{(k)})'$$

ва

$$\overline{e} = (0,\ \ldots,\ 0,\ 1_{(k+1)},\ 0,\ \ldots,\ 0)'$$

деб олиш керак. Бундан кейин тузилган $A_{k+1}=U_{k+1}A_k$ шундай хоссага эгаки, унинг элементлари $i>j$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k+1$ лар учун $a_{ij}^{(k+1)}=0$ бўлади.

Шундай қилиб, (n—1)-қадамдан кейин ҳосил бўлган матрицанинг дастлабки n устуни юқори учбурчак матрицани ташкил этади. Шу билан бирга, $A\overline{x}=\overline{b}$ система унга эквивалент бўлган қуйидаги системага келади:

$$\left\{\begin{array}{rl} a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)}x_n &= a_{1,n+1}^{(n-1)}, \\ a_{22}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(n-1)}x_n &= a_{2,n+1}^{(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n &= a_{n-1,n+1}^{(n-1)}, \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= a_{n,n+1}^{(n-1)}. \end{array}\right.$$

Бундан эса

$$\left\{\begin{array}{l} x_n = \dfrac{a_{n,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \\ x_k = \dfrac{a_{k,n+1}^{(n-1)} - \sum\limits_{p=k+1}^{n} a_{kp}^{(n-1)}\ x_p}{a_{kk}^{(n-1)}} \\ (k=n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1) \end{array}\right. \qquad (5.8)$$

системага эга бўламиз.

Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, навбатдаги қадамнинг бажарилмаслиги навбатдаги $\overline{a}$ векторнинг нолга айланишига боғлиқ, чунки, бу пайтда $\alpha = 0$ бўлиб, λ ни ҳисоблаш мумкин эмас. Лекин $\overline{a}$ вектор нолга айланмайди, чунки A матрица махсусмас матрица бўлиб, унитар матрица ёрдамида алмаштирилмоқда.

Ҳисоблашнинг умумий ҳажмини камайтириш мақсадида (5.7) формулани қуйидаги

$$\overline{a}_i^{(k+1)} = \overline{a}_i^{(k)} - 2(\overline{a}_i^{(k)}, \overline{w})\ \overline{w} \tag{5.9}$$

кўринишда қўллаш маъқулдир. Агар $(\overline{w}\ \overline{w}^*)\overline{a}_i^{(k)} = (\overline{a}_i^{(k)}, \overline{w})\ \overline{w}$ ни ҳисобга олсак, (5.9) формула (5.7) дан келиб чиқади.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини акслантиришлар методи ёрдамида ечиш учун $\frac{1}{6}(4n^3 + 15n^2 + 11n)$ та кўпайтириш, $\frac{1}{6}(4n^3 + 9n^2 + 5n)$ та қўшиш, $2n - 1$ та бўлиш, $n - 1$ та илдиз чиқариш амалларини бажариш керак.

Мисол. Қуйидаги комплекс матрицали чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ечилсин:

$$\begin{cases} (5 + 3i)x_1 - 2x_2 - (2 + i)x_3 = -10 + 3i, \\ -x_1 + (4-i)x_2 + 2x_3 = 13 - 2i, \\ -(2 + 2i)x_1 - x_2 + (3 + 4i)x_3 = 14 + 16i. \end{cases}$$

Ечиш. Кенгайтирилган матрицанинг устунларини қуйидагича

$$\overline{a}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 + 3i \\ -1 \\ -2-2i \end{bmatrix}, \quad \overline{a}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4-i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \overline{a}_3^{(0)} = \begin{bmatrix} -2-i \\ 2 \\ 3+4i \end{bmatrix}, \quad \overline{a}_4^{(0)} = \begin{bmatrix} -10+3i \\ 13-2i \\ 14+16i \end{bmatrix}$$

белгилаб ва $\overline{a} = \overline{a}_1^{(0)}$, $\overline{e} = (1, 0, 0)'$ деб олиб, (5.5) формула ёрдамида α, λ, $\overline{w}$ ларни топамиз:

$$\alpha = -|\alpha| \frac{(\overline{a}, \overline{e})}{|(\overline{a}, \overline{e})|} = -\sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} \cdot \frac{(\overline{a}, \overline{e})}{|(\overline{a}, \overline{e})|} = -\sqrt{43} \cdot \frac{5 + 3i}{\sqrt{34}} = -5,62296-3,37378i$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2[|\alpha|^2 + |\alpha|\,|(\overline{a}, \overline{e})|]}} = \frac{1}{\sqrt{2(43 + \sqrt{43}\sqrt{34}}} = 0,07845,$$

$$\overline{w} = \lambda(\overline{a} - \overline{\alpha e}) = 0,07845(\overline{a} - \overline{\alpha e}) = \begin{bmatrix} 0,83337 + 0,50002i \\ -0,07845 \\ -0,15690-0,15690i \end{bmatrix}.$$

Бундан

$$w^* = (0,83337 - 0,50002i;\ -0,07845;\ -0,15690 + 0,15690i).'$$

Кейин $U_1 = E - 2\overline{w}\ \overline{w}^*$ формула ёрдамида

$$\begin{bmatrix} -0,88906 & 0,13076 + 0,07846i & 0,41842 - 0,10462i \\ 0,13076-0,07846i & 0,98756 & -0,02462 + 0,02462i \\ 0,41842 + 0,10462i & -0,02462 - 0,02462i & 0,90152 \end{bmatrix}$$

ни ҳосил қиламиз ва ниҳоят,

$$A_1 = U_1A =$$

$$= \begin{bmatrix} -5,62214 - 3,37324i & 1,96120 + 0,28770i & 3,71338 + 2,40580i \\ 0,00000 - 0,00005i & 3,71334 - 0,85526i & 1,46280 + 0,00154i \\ -0,00018 - 0,00004i & -1,86146 - 0,28310i & 1,92310 + 2,92918i \end{bmatrix}$$

ни топамиз. Бу матрицада a_{21} ва a_{31} лар аслида нолга тенг бўлиши керак эди. Уларнинг ўрнида кичик бўлса-да, лекин нолдан фарқли сонлар ҳосил бўлди, бу оралиқ натижалардаги яхлитлаш ҳисобигадир. Иккинчи қадамдаги ҳисоблашлар қуйидагилардан иборат:

$$\overline{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3{,}71334{-}0{,}85526i \\ -1{,}86146{-}0{,}28310i \end{bmatrix}, \quad \overline{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\alpha = -4{,}14192 + 0{,}95397i$; $\lambda = 0{,}12080$;

$$\overline{w}^* = (0;\ 0{,}94892 + 0{,}21855i;\ -0{,}22486 + 0{,}03420i),$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}89642 & 0{,}41180{-}0{,}16320i \\ 0 & 0{,}41180{+}0{,}16320i & 0{,}89654 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -5{,}62214 - 3{,}37324i & 1{,}96120 + 0{,}28770i & 3{,}71380 + 2{,}40580i \\ -0{,}00016 + 0{,}00001i & -4{,}14146 + 0{,}95318i & -0{,}04131 + 0{,}89101i \\ -0{,}00009 - 0{,}00003i & -0{,}00014 + 0{,}00001i & 2{,}32627 + 2{,}86549i \end{bmatrix}$$

Энди (5.7) га кўра озод ҳадлар вектори $\overline{a}_4^{(0)}$ устида

$$\overline{a}_4^{(1)} = U_1\overline{a}_4^{(0)},\ \overline{a}_4^{(2)} = U_2\overline{a}_4^{(1)}$$

алмаштиришларни бажарсак,

$$\overline{a}_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 18{,}24740 + 3{,}32132i \\ 11{,}02746 - 0{,}84748i \\ 7{,}75392 + 14{,}36256i \end{bmatrix}, \quad \overline{a}_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 18{,}24740 + 3{,}32132i \\ -4{,}34182 + 5{,}40876i \\ 11{,}63049 + 14{,}32730i \end{bmatrix}$$

ҳосил бўлади. Ниҳоят, (5.8) дан ечимни топамиз:

$$x_1 = 0{,}99978 + 1{,}00008i;\ x_2 = 0{,}99935 + 0{,}00014i;$$

$$x_3 = 4{,}99982 + 0{,}00003i.$$

Аниқ ечим эса $x_1^* = 1 + i$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 5$.

6- §. ОРТОГОНАЛЛАШТИРИШ МЕТОДИ

Ортогоналлаштириш методининг бир неча вариантлари мавжуд. Бу параграфда шулардан бирини кўриб чиқамиз. Бизга махсусмас матрицали, чизиқли алгебраик тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_{2,\,n+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + a_{n,\,n+1} = 0. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Ушбу $\overline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})'$ $(i = \overline{1, n})$, $\overline{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)'$ белгилашларни киритиб, (6.1) системани

$$\begin{cases} (\overline{a}_1, \overline{y}) = 0, \\ (\overline{a}_2, \overline{y}) = 0, \\ \ldots\ldots \\ (\overline{a}_n, \overline{y}) = 0 \end{cases}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бундан кўринадики, (6.1) системани ечиш, охирги компонентаси бирга тенг бўлиб, ўзи барча $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$

векторларга ортогонал бўлган $(n+1)$ ўлчовли $\bar{y}$ векторни топиш билан тенг кучлидир. Бу векторлар системасига яна бир вектор $\bar{a}_{n+1} = (0, \ldots, 0,1)'$ ни қўшамиз. Янгидан ҳосил бўлган система $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{n+1}$ чизиқли эрклидир, чунки сатрлари шу векторлардан иборат бўлган A матрицанинг детерминанти (6.1) система матрицасининг детерминантига тенгдир, шунинг учун ҳам у нолдан фарқлидир.

Энди $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{n+1}$ векторлар системасига ортогоналлаштириш жараёнини қўллашдан аввал баъзи тушунчаларни эслатиб ўтамиз.

Иккита $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ *векторларнинг скаляр кўпайтмаси* деб ушбу $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ йиғиндига айтилади; агар $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ бўлса, у ҳолда $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ *векторлар ўзаро ортогонал* дейилади ва $\|x\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ сонга *векторнинг нормаси* дейилади. Агар $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ векторлар системасининг исталган иккитаси ўзаро ортогонал бўлса, у ҳолда бундай система *ортогонал векторлар системаси* дейилади ва шу билан бирга бу векторларнинг нормаси бирга тенг бўлса, бу система *ортонормал векторлар системаси* дейилади.

Энди жараённи қуришга ўтамиз:

$$\bar{u}_1 = \bar{a}_1, \quad \bar{v}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} \tag{6.2}$$

деб оламиз.

Фараз қилайлик, бирор $k \geqslant 1$ учун $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$ ортогонал векторлар системаси ва $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ ортонормал векторлар системаси қурилган бўлсин. Энди $\bar{u}_{k+1}$ векторни $\bar{a}_{k+1}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ векторларнинг чизиқли комбинацияси шаклида, яъни

$$\bar{u}_{k+1} = \bar{a}_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{kj} \bar{v}_j \tag{6.3}$$

кўринишда излаймиз ва $\bar{u}_{k+1}$ нинг $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$ векторларга, яъни $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ векторларга ортогонал бўлишини талаб қиламиз:

$$0 = (\bar{u}_{k+1}, \bar{v}_i) = (\bar{a}_{k+1}, \bar{v}_i) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{kj} (\bar{v}_j, \bar{v}_i) = (\bar{a}_{k+1}, \bar{v}_i) + \lambda_{ki}.$$

Бундан

$$\lambda_{ki} = -(\bar{a}_{k+1}. \bar{v}_i) \tag{6.4}$$

ни топиб, (6.3) га қўйсак:

$$\bar{u}_{k+1} = \bar{a}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (\bar{a}_{k+1}, \bar{v}_j) \bar{v}_j \tag{6.5}$$

келиб чиқади. Сўнгра

$$\bar{v}_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}}{\|\bar{u}_{k+1}\|} \tag{6.6}$$

деб оламиз. Шундай қилиб, (6.2), (6.5) ва (6.6) формулалар ёрдамида $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n+1}$ ортогонал ва $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{n+1}$ ортонормал системани кетма-кет қурамиз.

Охирги $\bar{u}_{n+1} = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ векторнинг $n+1$-координатаси z_{n+1} нинг нолдан фарқли эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун тескарисини фараз қилайлик. У ҳолда

$$(\bar{u}_{n+1}, \bar{a}_1) = 0, (\bar{u}_{n+1}, \bar{a}_2) = 0, \ldots, (\bar{u}_{n+1}, \bar{a}_n) = 0$$

шартлар

$$(\bar{u}_{n+1}, \bar{v}_1) = 0, (\bar{u}_{n+1}, \bar{v}_2) = 0, \ldots, (\bar{u}_{n+1}, \bar{v}_n) = 0$$

шартларга тенг кучли бўлиб (чунки $\bar{v}_i$ лар $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_i$ ларнинг чизиқли комбинациясидир), улар нолдан фарқли ечимга эга бўлган

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} z_j = 0, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} z_j = 0, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} z_j = 0 \tag{6.7}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ташкил этади. Демак, бу системанинг детерминанти нолга тенг. Бундай бўлиши мумкин эмас, чунки (6.1) ва (6.7) ларнинг детерминантлари бир хил эди. Шартга кўра, бу детерминант нолдан фарқли. Бу қарама-қаршилик $z_{n+1} \neq 0$ эканлигини кўрсатади. Шундай қилиб $(\bar{u}_{n+1}, \bar{a}_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, шартларни қуйидаги кўринишда ёзиб олиш мумкин:

$$a_{i1} \frac{z_1}{z_{n+1}} + a_{i2} \frac{z_2}{z_{n+1}} + \ldots + a_{in} \frac{z_n}{z_{n+1}} + $$
$$+ a_{i,n+1} = 0 \ (i = 1, 2 \ldots, n).$$

Буни (6.1) система билан солиштирсак, берилган системанинг ечими

$$(x_1 \ldots, x_n) = \left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}} \right)$$

эканлиги келиб чиқади. Бу ечимни топиш учун $n^3 + n^2$ та кўпайтириш, $\frac{1}{2}(2n^3 - n^2 - n)$ та қўшиш, n та бўлиш, n та илдиз чиқариш амалларини бажаришга тўғри келади.

Юқорида келтирилган жараён барча матрицалар учун ҳам қониқарли ечимни топиш учун имкон беравермайди. Бунинг асосий сабаби (6.5) рекуррент муносабатнинг турғун эмаслиги бўлиб, бу нарса $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{n+1}$ векторлар системасининг ортогоналлигини бузади. Аниқроқ натижага эришиш учун қуйидагича йўл тутамиз:

$(\bar a_i, \bar y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, шартни қаноатлантирадиган $\bar y = (y_1, \ldots, y_n, 1)'$ векторни

$$\bar y = \sum_{j=1}^{n+1} d_j \bar v_j \qquad (6.8)$$

кўринишда излаймиз. Ушбу $(\bar a_i, \bar y) = 0$ $(i = \overline{1, n})$ ортогоналлик шартларидан d_i ларга нисбатан қуйидаги тенгламалар системаси келиб чиқади:

$$\sum_{j=1}^{n+1} d_j(\bar a_j, \bar v_j) = 0 \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (6.9)$$

Бундан ташқари $\bar y$ векторнинг $(n+1)$-координатасининг бирга тенглиги яна бир

$$\sum_{j=1}^{n+1} d_j v_{j,\, n+1} = 1 \qquad (6.10)$$

тенгламани беради. Бу тенглама (6.8) вектор тенгликнинг координаталарда ёзилган охирги тенгламасидир.

Агар ҳисоблашлар яхлитланмасдан олиб борилса, у ҳолда $i < j$ бўлганда $(\bar a_i, \bar v_j) = 0$ бўлганлиги учун (6.9) — (6.10) тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} d_1(\bar a_1, \bar v_1) = 0, \\ d_1(\bar a_2, \bar v_1) + d_2(\bar a_2, \bar v_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_1(\bar a_n, \bar v_1) + d_2(\bar a_n, \bar v_2) + \ldots + d_n(\bar a_n, \bar v_n) = 0, \\ d_1 v_{1,\, n+1} + d_2 v_{2,\, n+1} + \ldots + d_{n+1} v_{n+1,\, n+1} = 1. \end{cases} \qquad (6.11)$$

Кўриниб турибдики, бу системанинг ечими $\bar d_{(0)} = (\underbrace{0, \ldots 0}_{n}, v^{-1}_{n+1,\, n+1})'$ вектордан иборатдир.

Агар ҳисоблашлар яхлитлаш билан олиб борилган бўлса, у ҳолда (6.11) системанинг матрицаси кичик бўлса-да, лекин нолдан фарқли элементларга ҳам эга бўлади. Ҳосил бўлган системани

$$C\bar d + D\bar d = \bar g \qquad (6.12)$$

кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда $\bar g = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, 1)'$ ва C (6.11) системанинг матрицаси ҳамда

$$D = \begin{bmatrix} 0 & (\bar a_1, \bar v_2) & (\bar a_1, \bar v_3) \ldots & (\bar a_1, \bar v_{n+1}) \\ 0 & 0 & (\bar a_2, \bar v_3) \ldots & (\bar a_2, \bar v_{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & (\bar a_n, \bar v_{n+1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Дастлабки яқинлашишни $\overline{d}^{(0)}$ деб олиб, навбатдаги $\overline{d}^{(k+1)}$ яқинлашишларни

$$C\overline{d}^{(k+1)} + D\overline{d}^{(k)} = \overline{g} \tag{6.13}$$

итерацион жараёндан аниқлаймиз. Бу муносабатни қуйидаги

$$\overline{d}^{(k+1)} = - C^{-1}Dd^{(k)} + C^{-1}\overline{g} \tag{6.14}$$

кўринишда ёзиш қулайроқдир. D матрицанинг нормаси кичик бўлганлиги учун $C^{-1}D$ матрицанинг нормаси ҳам кичик бўлади. Шунинг учун ҳам бу итерацион жараёндан (8-§ га қ.) топилган кетма-кет яқинлашишлар тез яқинлашади. Бу усул ёрдамида ҳисоблаш хатосининг таъсирини камайтириш мумкин.

Мисол. Қуйидаги тенгламалар системаси

$$\begin{cases} 0{,}6x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3 = - 1, \\ - 0{,}2x_1 + 0{,}7x_2 - 0{,}2x_3 = 0, \\ 0{,}1x_1 - x_2 + 0{,}4x_3 = 1{,}5 \end{cases}$$

ортогоналлаштириш методи билан ечилсин.

Ечиш. (6.2) формулага кўра

$$u_1 = (0{,}6;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 1)';$$

$$v_1 = \frac{\overline{u}_1}{\sqrt{\overline{u}_1,\ \overline{u}_2}} = \frac{\overline{u}_1}{\sqrt{0{,}36 + 0{,}09 + 0{,}16 + 1}} = \frac{\overline{u}_1}{1{,}26886} =$$

$$= (0{,}47287;\ 0{,}23643;\ 0{,}31524,\ 0{,}78811).$$

Энди (6.4) формула ёрдамида

$$\lambda_{21} = - (\overline{u}_2,\ \overline{v}_1) = - 0{,}00788$$

ни топамиз, кейин (6.5) дан $k = 1$ бўлганда

$\overline{u}_2 = \overline{a}_2 - (\overline{a}_2,\ \overline{v}_1)\ \overline{v}_1 = (-0{,}20373;\ \ 0{,}69814;\ -0{,}20248;\ -0{,}00621)'$ ни ҳосил қиламиз. Бундан

$$\overline{v}_2 = \frac{\overline{u}_2}{\|\overline{u}_2\|} = \frac{\overline{u}_2}{0{,}75495} = (- 0{,}26986;\ 0{,}92475;\ - 0{,}26820;\ - 0{,}00823).$$

Энди скаляр кўпайтмаларни ҳисоблаймиз:

$$(\overline{a}_3,\ \overline{v}_1) = - 1{,}24521;\ (\overline{a}_3,\ \overline{v}_2) = - 1{,}04667.$$

(6.5) формулада $k = 2$ деб олиб $\overline{u}_3$ ва $\overline{v}_3$ лар учун қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\overline{u}_3 = \overline{a}_3 - (\overline{a}_3,\ \overline{v}_1)\ \overline{v}_1 - (\overline{a}_3,\ \overline{v}_2)\ \overline{v}_2 = (0{,}40600;\ 0{,}26232;\ 0{,}51152;\ - 0{,}52725)',$$

$$\overline{v}_3 = \frac{\overline{u}_3}{\|\overline{u}_3\|} = \frac{\overline{u}_3}{0{,}87954} = (0{,}46160;\ \ 0{,}29825;\ 0{,}58192;\ - 0{,}59946)'$$

Худди шу тарзда қуйидагиларни топамиз:

$$(\overline{a}_4,\ \overline{v}_1) = 0{,}78811;\ (\overline{a}_4,\ \overline{v}_2) = - 0{,}00823;\ (\overline{a}_4,\ \overline{v}_3) = - 0{,}59947,$$

$$\overline{u}_4 = (- 0{,}09817;\ - 0{,}00007;\ 0{,}09819;\ 0{,}01944)',\ \|\overline{u}_4\| = 0{,}10479.$$

Ниҳоят,

$$\overline{v}_4 = (- 0{,}93683;\ 0{,}00066;\ 0{,}93702,\ 0{,}18551)'.$$

Бу вектор компоненталарининг охиргисини 0,18551 га бўлиб, қуйидаги тақрибий ечимни топамиз:

$$x_1 = -5,05002;\ x_2 = 0,00356;\ x_3 = 5,05105.$$

Буни аниқ ечим $x_1^* = -5$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 5$ билан солиштирсак, ортогоналлаштириш методи билан топилган ечимнинг аниқлиги нисбатан катта эмаслиги кўриниб турибди.

Бу ечимнинг аниқлигини юқорида айтилган усул билан орттириш мумкин, лекин биз бунга тўхталмаймиз.

7-§. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАДАН АЙРИМ МАЪЛУМОТЛАР

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини итерацион методлар ёрдамида ечиш жараёнида биринчи навбатда векторлар ва матрицаларнинг нормалари ҳамда лимитлари тушунчаларига эҳтиёж туғилади. Шунинг учун ҳам бу масалаларга алоҳида тўхталиб ўтамиз.

Вектор ва матрицаларнинг нормалари. Аввало вектор узунлиги тушунчасини умумлаштирувчи вектор нормаси тушунчасини киритамиз. $\bar{x}$ векторнинг нормаси деб қуйидаги уч шартни қаноатлантирувчи ҳақиқий $\|\bar{x}\|$ сонга айтилади:

1) $\|\bar{x}\| \geqslant 0$ ва $\bar{x} = 0$ бўлгандагина $\|\bar{x}\| = 0$;

2) ҳар қандай α сон учун $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$;

3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leqslant \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ — учбурчак тенгсизлиги.

Бу таърифдан норманинг қуйидаги хоссаси келиб чиқади:

$$\left|\, \|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \,\right| \leqslant \|\bar{x} - \bar{y}\|. \tag{7.1}$$

Ҳақиқатан ҳам, 3) шартга кўра

$$\|\bar{x}\| = \|\bar{x} - \bar{y} + \bar{y}\| \leqslant \|\bar{x} - \bar{y}\| + \|\bar{y}\|,$$

яъни

$$\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \leqslant \|\bar{x} - \bar{y}\|. \tag{7.2}$$

Шунга ўхшаш,

$$\|\bar{y}\| - \|\bar{x}\| \leqslant \|\bar{y} - \bar{x}\| = \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

ёки

$$-(\|\bar{y}\| - \|\bar{x}\|) \leqslant \|\bar{x} - \bar{y}\|. \tag{7.3}$$

(7.2) ва (7.3) дан эса (7.1) келиб чиқади.

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ векторнинг нормаси тушунчасини фақат юқоридаги учта шартни қаноатлантирадиган қилиб, турли хил усуллар билан киритиш мумкин. Шулардан кўп учратиладиган учтасини кўриб ўтайлик.

1. Биринчи — кубик норма:

$$\|\bar{x}\|_1 = \max_i |x_i|. \tag{7.4}$$

Ҳақиқий векторлар фазосидаги, нормаси бирдан ортмайдиган векторларнинг тўплами:

$$-1 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ \dots, \ -1 \leqslant x_n \leqslant 1$$

бирлик кубдан иборатдир, шунинг учун $\|x\|_1$ ни *кубик норма* ҳам дейилади.

2. Иккинчи — октаэдрик норма:

$$\|\bar{x}\|_2 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \qquad (7.5)$$

Иккинчи нормаси 1 дан ортмайдиган ҳақиқий векторларнинг тўплами октаэдрнинг n- ўлчовли аналогидан иборатдир, шунинг учун $\|\bar{x}\|_2$ ни *октаэдрик норма* дейилади.

3. Учинчи — сферик норма:

$$\|\bar{x}\|_3 = \|\bar{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}. \qquad (7.6)$$

Бу норма вектор узунлигининг ўзгинаси бўлиб, $\|\bar{x}\| \leqslant 1$ шартни қаноатлантирадиган векторлар тўплами бирлик ёпиқ шардан иборатдир.

Бу нормалар учун 1) —3) шартларнинг бажарилишини текширамиз. Биринчи ва иккинчи шартларнинг бажарилиши бевосита кўриниб турибди. Энди ушбу

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leqslant \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

шартни текширайлик:

Биринчи норма учун:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_1 = \max |x_i + y_i| \leqslant \max |x_i| + \max |y_i| = \|\bar{x}\|_1 + \|\bar{y}\|_1.$$

Иккинчи норма учун

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|\bar{x}\|_2 + \|\bar{y}\|_2.$$

Ниҳоят, Коши-Буняковский тенгсизлигидан

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} = \\ = \|\bar{x}\|_3 + \|\bar{y}\|_3$$

келиб чиқади.

Энди матрица нормасини кўриб чиқамиз. A квадрат матрицанинг нормаси деб қуйидаги тўрт шартни қаноатлантирувчи ҳақиқий сонга айтилади:

1) $\|A\| \geqslant 0$ ва $A = 0$ бўлгандагина $\|A\| = 0$;
2) ихтиёрий α сон учун $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$;
3) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ (учбурчак тенгсизлиги);
4) $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

Бу матрица нормаси учун ҳам (7.1) тенгсизликка ўхшаш

$$|\|A\| - \|B\|| \leqslant \|A - B\| \qquad (7.7)$$

тенгсизликни келтириб чиқариш мумкин. Матрица нормасини турли усуллар билан аниқлаш мумкин. Аммо чизиқли алгебранинг кўп масалаларида матрица ва векторларнинг нормалари тушунчалари параллел ҳолда қатнашади. Шунинг учун ҳам матрица ва вектор нормалари тушунчаларини бир-бирига боғланган ҳолда киритиш мақсадга мувофиқдир.

Агар ҳар қандай квадрат A матрица учун ва ўлчами матрица тартибига тенг бўлган ихтиёрий $\bar{x}$ вектор учун ушбу

$$\|A\bar{x}\| \leqslant \|A\|\cdot\|\bar{x}\| \qquad (7.8)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда *матрица нормаси векторнинг берилган нормаси билан мосланган* дейилади.

Векторларнинг берилган нормасига матрицанинг мосланган нормаларидан энг кичигини танлаймиз. Шу мақсадда A матрицанинг нормасини $A\bar{x}$ вектор нормаси ёрдамида қуйидагича аниқлаймиз:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|A\bar{x}\|. \qquad (7.9)$$

Бу ерда $\bar{x}$ вектор нормаси бирга тенг бўлган барча векторларнинг тўпламидан олинади.

Биз кейинроқ векторлар ва матрицаларнинг лимити тушунчасини киритиб, улар ёрдамида норманинг узлуксизлигини кўрсатамиз. Лекин ҳозирча шу тушунчадан фойдаланишга тўғри келади.

Ҳар қандай A матрица учун $A\bar{x}$ вектор нормасининг узлуксизлигига кўра (7.9) тенгликда максимумга эришилади, яъни шундай $\bar{x}^{(0)}$ вектор топиладики $\|\bar{x}^{(0)}\| = 1$ ва $\|A\bar{x}^{(0)}\| = \|A\|$ тенгликлар бажарилади. (7.9) тенглик билан киритилган *матрица нормаси векторнинг берилган нормасига бўйсунган* дейилади.

1-теорема. Матрицанинг бўйсунган нормаси:

а) норма таърифининг 1) — 4) шартларини қаноатлантиради;

б) векторнинг берилган нормаси билан мосланган;

в) векторнинг берилган нормасига мосланган бошқа ҳар қандай нормасидан катта эмас.

Исбот. Норма таърифининг 1) шартини текширамиз. Фараз қилайлик, $A \neq 0$ бўлсин. У ҳолда, доимо $A\bar{y} \neq 0$ шартни қаноатлантирувчи $\bar{y}$ вектор топилади. Энди $\bar{y}$ векторга кўра $\bar{x} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$ векторни қараймиз. Вектор нормаси таърифининг 2) шартидан $\|\bar{x}\| = \left\|\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}\right\| = \frac{1}{\|\bar{y}\|}\cdot\|\bar{y}\| = 1$ келиб чиқади, $A\bar{x} \neq 0$ бўлганлигидан 1) шартга кўра $\|A\bar{x}\| > 0$ демак,

$$\|A\| = \max_{\|\bar{x}\|=1} \|A\bar{x}\| > 0$$

бўлади. Агар $A = 0$ бўлса, у ҳолда $\|A\| = \max\limits_{\|\bar{x}\|=1} \|0\cdot\bar{x}\| = 0$ бўлади.

2) шарт ҳам осонгина текширилади:

$$\|\alpha A\| = \max_{\|\bar{x}\|=1} \|\alpha A\bar{x}\| = \max_{\|\bar{x}\|=1} |\alpha|\cdot\|A\bar{x}\| = |\alpha|\max_{\|\bar{x}\|=1}\|A\bar{x}\| = |\alpha|\cdot\|A\|.$$

Энди 3) шартни текширамиз. Юқорида айтганимиздек, ҳар қандай $A+B$ матрица учун ҳар доим шундай $\bar{x}^{(0)}$ вектор топиладики унинг учун $\|\bar{x}^{(0)}\| = 1$ ва

$$\|A+B\| = \max_{\|\bar{x}\|=1}\|(A+B)\bar{x}\| = \|(A+B)\bar{x}^{(0)}\|$$

тенгликлар ўринли бўлади.

У ҳолда

$$\|A+B\| = \|A\bar{x}^{(0)}+B\bar{x}^{(0)}\| \leqslant \|A\bar{x}^{(0)}\|+\|B\bar{x}^{(0)}\| \leqslant \max_{\|\bar{x}\|=1}\|A\bar{x}\| + \max_{\|\bar{x}\|=1}\|B\bar{x}\| = \|A\|+\|B\|.$$

Норма таърифининг 4) шартини текширишдан аввал, мосланганлик шарти (7.8) ни текширамиз.

Агар $\bar{x}=\bar{0}$ бўлса, (7.8) нинг бажарилиши кўриниб турибди.

Фараз қилайлик, $\bar{x}\neq\bar{0}$ бўлсин. У ҳолда $\bar{y}^{(0)} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$ векторни оламиз. $\|\bar{y}^{(0)}\| = 1$ бўлганлиги учун

$$\|A\bar{x}\| = \|A(\|\bar{x}\|\bar{y}^{(0)})\| = \|\bar{x}\|\cdot\|A\bar{y}^{(0)}\| \leqslant \|\bar{x}\|\max_{\|\bar{y}\|=1}\|A\bar{y}\| = \|A\|\cdot\|\bar{x}\|.$$

Энди 4) шартни текширайлик. Худди аввалгидек AB матрица учун шундай $\bar{x}^{(0)}$ топиладики, у қуйидаги тенгликларни қаноатлантиради:

$$\|\bar{x}^{(0)}\| = 1 \quad \text{ва} \quad \|AB\bar{x}^{(0)}\| = \|AB|$$

у ҳолда

$$\|AB\| = \|A(B\bar{x}^{(0)})\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\bar{x}^{(0)}\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|\cdot\|\bar{x}^{(0)}\| = \|A\|\cdot\|B\|.$$

Ниҳоят, теореманинг охирги шартинигина текшириш қолди. Фараз қилайлик, $\|A\|$ матрицанинг векторларнинг берилган нормасига бўйсунган нормаси бўлиб, $\|\tilde{A}\|$ — векторларнинг шу нормаси билан мосланган ихтиёрий нормаси бўлсин. У вақтда, маълумки, A матрица учун

$$\|\bar{x}^{(0)}\| = 1, \quad \|A\| = \|A\bar{x}^{(0)}\|$$

тенгликларни қаноатлантирадиган $\bar{x}^{(0)}$ вектор топилади.

Лекин

$$\|A\bar{x}^{(0)}\| \leqslant \|\tilde{A}\|\,\|\bar{x}^{(0)}\| = \|\tilde{A}\|,$$

демак,

$$\|A\| \leqslant \|\bar{A}\|.$$

Шу билан теорема тўлиқ исботланди.

Энди матрицанинг векторларнинг юқорида киритилган нормаларига бўйсунган нормаси кўринишларини келтирамиз. Улар мос равишда қуйидагилардан иборатдир:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \text{ (кубик норма)}, \tag{7.10}$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \text{ (октаэдрик норма)}, \tag{7.11}$$

$$\|A\|_3 = \|\tilde{A}\| = \sqrt{\lambda_1} \text{ (сферик норма)}. \tag{7.12}$$

Бу ерда λ_1 $A'A$ матрицанинг энг катта хос сони.

Энди (7.10) — (7.12) нормаларнинг мос равишда (7.4) — (7.6) нормаларга бўйсунган нормалар эканини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, $A\bar{x}$ вектор қуйидаги

$$A\bar{x} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k\right)'$$

кўринишга эга бўлганлиги учун вектор нормасининг таърифига кўра

$$\|A\|_1 = \max_i \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right| \leqslant \max_i \sum_{k=1}^{n} \left| |a_{ik}| \cdot |x_k| \right|$$

ва агар $\|\bar{x}\|_1 = 1$ бўлса, у ҳолда

$$\|A\|_1 = \max_{\|\bar{x}\|_1 = 1} \|A\bar{x}\|_1 \leqslant \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|. \tag{7.13}$$

Фараз қилайлик, $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|$ максимумга $i = j$ бўлганда эришилсин.

У ҳолда

$$\bar{x}^{(0)} = (\operatorname{sign} a_{j1}, \operatorname{sign} a_{j2}, \ldots, \operatorname{sign} a_{jn})'$$

вектор учун $\|\bar{x}^{(0)}\|_1 = 1$ ва шу билан бирга $i \neq j$ бўлганда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^{(0)}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \leqslant \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| = \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|$$

тенгсизликлар бажарилиб, $i = j$ бўлганда эса

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k^{(0)}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \operatorname{sign} a_{jk}\right| = \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|$$

тенглик бажарилади.

Бу ердан

$$\|A\bar{x}^{(0)}\|_1 = \max_i \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^{(0)}\right| = \sum_{k=1}^{n}|a_{jk}| = \max_i \sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|. \qquad (7.14)$$

Демак,

$$\|A\|_1 = \max_{\|\bar{x}\|_1=1}\|A\bar{x}\|_1 \geqslant \|A\bar{x}^{(0)}\| = \max_{1\leqslant l\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}|a_{lk}|.$$

Қуйидаги

$$\|A\|_1 \leqslant \max_i \sum_{k=1}^{n}|a_{ik}| \text{ ва } \|A\|_1 \geqslant \max_i \sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|$$

тенгсизликларни таққослаш айтилган тасдиқни исботлайди.

Энди (7.11) тенгликнинг тўғрилигини кўрсатамиз. $\|\bar{x}\|_2 = 1$ деб олайлик, у ҳолда

$$\|A\bar{x}\|_2 = \sum_{l=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{lk}x_k\right| \leqslant \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{lk}|\cdot|x_k| \leqslant \max_k \left(\sum_{l=1}^{n}|a_{lk}|\right)\sum_{k=1}^{n}|x_k| =$$

$$= \max_k \sum_{l=1}^{n}|a_{lk}|.$$

Фараз қилайлик, $\max\limits_k \sum\limits_{l=1}^{n}|a_{lk}|$ га $k=j$ бўлганда эришилсин. Бу ерда $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ векторни шундай танлаймизки $k \neq j$ бўлганда $x_k^{(0)} = 0$ бўлиб, $x_j^{(0)} = 1$ бўлсин.

Кўриниб турибдики, $\|\bar{x}^{(0)}\|_2 = 1$ ва шу билан бирга

$$\|A\bar{x}^{(0)}\|_2 = \sum_{l=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{lk}x_k^{(0)}\right| = \sum_{l=1}^{n}|a_{lj}| = \max_k \sum_{l=1}^{n}|a_{lk}|.$$

Демак,

$$\max_{\|\bar{x}\|_2=1}\|A\bar{x}\|_2 = \|A\bar{x}^{(0)}\|_2 = \max_k \sum_{l=1}^{n}|a_{lk}|,$$

яъни

$$\|A\|_2 = \max_k \sum_{l=1}^{n}|a_{lk}|.$$

Ниҳоят, (7.12) формуланинг ўринли эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $\|\bar{x}\|_3 = 1$ бўлсин. Сферик норманинг квадрати скаляр кўпайтма билан устма-уст тушганлиги учун ва скаляр кўпайтманинг хоссасига кўра

$$\|A\bar{x}\|_3^2 = (A\bar{x}, A\bar{x}) = (\bar{x}, A'A\bar{x}).$$

$A'A$ — манфий бўлмаган симметрик матрицадир (агар барча $\bar{x}$ лар учун $(B\bar{x}, \bar{x}) \geqslant 0$ бўлса, B симметрик матрица *манфий бўлмаган матрица* дейилади). Чизиқли алгебра курсидан маълумки, бундай матрицаларнинг барча хос сонлари манфий эмас. Фараз қилайлик, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ лар $A'A$ матрицанинг хос сонлари бўлиб, $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(n)}$ уларга мос келадиган ҳақиқий ортонормал хос вектор бўлсин. Агар $\|\bar{x}\|_3 = 1$ шартни қаноатлантирувчи $\bar{x}$ векторни хос векторлар бўйича ёйсак,

$$\bar{x} = c_1\bar{x}^{(1)} + c_2\bar{x}^{(2)} + \ldots + c_n\bar{x}^{(n)},$$

у ҳолда $c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 = 1$ тенглик ўринли бўлади ва

$$\|A\bar{x}\|_3^2 = (\bar{x}, AA'x) = (c_1x^{(1)} + \ldots + c_n\bar{x}^{(n)}, \lambda_1c_1\bar{x}^{(1)} + \ldots + \lambda_nc_n\bar{x}^{(n)}) = \lambda_1c_1^2 + \ldots + \lambda_nc_n^2 \leqslant \lambda_1(c_1^2 + \ldots + c_n^2) = \lambda_1.$$

Энди $\bar{x} = \bar{x}^{(1)}$ деб олсак,

$$\|A\bar{x}^{(1)}\|_3^2 = (\bar{x}^{(1)}, A'A\bar{x}^{(1)}) = (\bar{x}^{(1)}, \lambda_1\bar{x}^{(1)}) = \lambda_1.$$

Шу билан учинчи тасдиқ ҳам исботланди.

Векторлар ва матрицалар кетма-кетликларининг яқинлашишлари. Фараз қилайлик,

$$\bar{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})' \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

векторлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар n та чекли

$$x_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} \quad (i = \overline{1, n})$$

лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ вектор $\{\bar{x}^{(k)}\}$ *векторлар кетма-кетлигининг лимити* дейилади ва бу кетма-кетликнинг ўзи $\bar{x}$ векторга яқинлашади дейилади.

Шу каби

$$A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}] \quad (i, j = \overline{1, n};\ k = 1,2, \ldots)$$

матрицалар кетма-кетлиги берилган бўлиб, n^2 та $a_{ij} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}$ лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $A = [a_{ij}]$ матрица $\{A^{(k)}\}$ *матрицалар кетма-кетлигининг лимити* дейилади.

Бу таърифга кўра, агар матрицалардан тузилган чексиз қатор қисмий йиғиндилари кетма-кетлигининг лимити мавжуд бўлса, у ҳолда бу қатор яқинлашувчи дейилади. Бу лимит берилган қаторнинг йиғиндиси дейилади.

Кўриниб турибдики, матрицали қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун матрицанинг мос равишдаги элементларидан тузилган барча n^2 та қаторнинг яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарлидир. Шу билан бирга бу қаторларнинг йиғиндилари берилган матрицали қатор йиғиндисининг элементлари бўлади.

Вектор нормаси тушунчаси асосида векторлар кетма-кетлигини яқинлашишини бошқача таърифлаш ҳам мумкин.

Таъриф. Агар

$$\|\overline{x}-\overline{x}^{(k)}\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

бўлса, $\{\overline{x}^{(k)}\}$ векторлар кетма-кетлиги $\overline{x}$ векторга яқинлашади дейилади.

Бу таъриф яқинлашишнинг аввалги таърифига эквивалент эканлигини исботлаш мумкин.

2-теорема. Ушбу

$$\overline{x}^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\overline{x}$$

ўринли бўлиши учун,

$$\|\overline{x}-\overline{x}^{(k)}\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Бошқа сўз билан айтганда чекли ўлчовли чизиқли фазода норма бўйича яқинлашиш координаталар бўйича яқинлашишга тенг кучлидир.

Исбот (зарурлиги). Фараз қилайлик, $\overline{x}^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\overline{x}$, яъни барча $i=$ $=1, 2, \ldots, n$ учун $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i$ бўлсин. Қуйидаги $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots,$ $\overline{e}_n$ базис-векторларни танлаб $\overline{x}-\overline{x}^{(k)}$ ни шу векторлар бўйича ёямиз:

$$\overline{x}-\overline{x}^{(k)}=\sum_{l=1}^{n}(x_l-x_l^{(k)})\overline{e_l}\quad(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Агар $L=\max\limits_{1\leqslant l<n}\|\overline{e_l}\|$ каби белгиласак, у ҳолда

$$\|\overline{x}-\overline{x}^{(k)}\|\leqslant L\sum_{l=1}^{n}|x_l-x_l^{(k)}|.$$

Шунинг учун ҳам

$$\|\overline{x}-\overline{x}^{(k)}\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

Етарлилиги. Фараз қилайлик

$$\lim_{k\to\infty}\|\overline{x}-\overline{x}^{(k)}\|=0$$

бўлсин. У ҳолда

$$\|x^{(k)}\|=\|\overline{x}+(\overline{x}^{(k)}-\overline{x})\|\leqslant\|\overline{x}\|+\|\overline{x}^{(k)}-\overline{x}\|$$

бўлганлиги сабабли, $\|\overline{x}^{(k)}\|$ барча $k=1,\ 2, \ldots$ лар учун чегараланган, яъни $\|\overline{x}^{(k)}\|\leqslant M$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ бўлади. Энди ихтиёрий $k=1,\ 2, \ldots$ учун $a_k=|x_i^{(k)}|+\ldots+|x_n^{(k)}|$ нинг ҳам чегараланганлигини, яъни $a_k\leqslant N$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ эканлигини кўрсатамиз.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни шундай k_1, k_2, ... индекслар кетма-кетлиги мавжуд бўлсинки: $a_k \xrightarrow[m k_m \to \infty]{} 0$ бўлсин. Ёзувни қисқартириш мақсадида $a_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ деб ҳисоблайлик. Берилган векторлар кетма-кетлиги $\{\overline{\lambda}^{(k)}\}$ га кўра янги векторлар кетма-кетлиги

$$\overline{y}^{(k)} = \frac{\overline{x}^{(k)}}{a_k} = (y_1^{(k)},\ y_2^{(k)},\ \ldots,\ y_n^{(k)})'$$

ни қурамиз. Бу ерда $y_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k)}}{a_k}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$|y_1^{(k)}| + |y_2^{(k)}| + \ldots + |y_n^{(k)}| = 1 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

эканлиги ва $\overline{y}^{(k)}$ ларнинг барчаси чегараланганлиги келиб чиқади. Шунинг учун ҳам шундай индекслар кетма-кетлигини танлаш мумкинки, чекли лимитлар

$$\lim_{k \to \infty} y_i^{(k)} = y_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

мавжуд бўлади ва $|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n| = 1$ бўлганлиги учун лимит вектор

$$\overline{y} = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)'$$

нолдан фарқлидир.

Иккинчи томондан $\|\overline{x}^{(k)}\| \leqslant M$ ва фаразга кўра $a_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$\|\overline{y}\| = \|\overline{y}^{(k)} + (\overline{y} - \overline{y}^{k}))\| \leqslant \|\overline{y}^{(k)}\| + \|\overline{y} - \overline{y}^{(k)}\| = \frac{\|\overline{x}^{(k)}\|}{a_k} +$$
$$+ \|\overline{y} - \overline{y}^{(k)}\| \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

тенгсизликдан $\|\overline{y}\| = 0$, яъни $\overline{y} = \overline{0}$ ни ҳосил қиламиз. Бу қарама-қаршилик $a_k \leqslant N$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ эканлигини, яъни $\overline{x}^{(k)}$ векторлар координаталарининг барчаси чегараланганлигини кўрсатади. Бундан эса шундай индекслар кетма-кетлигини танлаш мумкинлиги ва бу индекслар учун $\xi_i = \lim\limits_{k \to \infty} x_i^{(k)}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ чекли лимитларнинг мавжудлиги келиб чиқади. Лимитдаги $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ векторнинг $\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ вектор билан устма-уст тушишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, теорема шартига кўра $\|\overline{x} - \overline{x}^{(k)}\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ ва теореманинг зарурий қисмидан $\|\overline{\xi} - \overline{x}^{(k)}\| \to 0$ эканлиги кўриниб, барча $k = 1,\ 2,\ \ldots$ лар учун

$$\|\overline{x} - \overline{\xi}\| = \|(\overline{x} - \overline{x}^{(k)}) + (\overline{x}^{(k)} - \overline{\xi})\| \leqslant \|\overline{x} - \overline{x}^{(k)}\| + \|\overline{x}^{(k)} - \overline{\xi}\|$$

тенгсизликлар бажарилади. Демак, $\|\overline{x} - \overline{\xi}\| = 0$, яъни $\overline{\xi} = \overline{x}$. Шу билан теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан норманинг узлуксизлиги келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш матрицалар учун ҳам $A^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}A$ бўлиши учун $\|A-A^{(k)}\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ нинг бажарилиши зарур ва кифоялилигини кўрсатиш мумкин. Бунинг ёрдамида матрицалар кетма-кетлигининг яқинлашишини бошқача таърифлаш мумкин.

Энди (7.7) тенгсизликдан қуйидаги келиб чиқади: агар

$$A^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}A \text{ бўлса, у ҳолда } \|A^{(k)}\|\xrightarrow[k\to\infty]{}\|A\|.$$

Матрицали геометрик прогрессиянинг яқинлашиши. Бизга анализдан маълумки, $1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots$ сонли геометрик прогрессиянинг яқинлашувчи бўлиши учун $x^k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ бўлиши зарур ва кифоя бўлиб, шу билан бирга унинг йиғиндиси $(1-x)^{-1}$ га тенгдир.

Энди бу тасдиқларнинг қуйидаги

$$E+A+A^2+\ldots+A^k+\ldots \tag{7.15}$$

матрицали геометрик прогрессия учун ҳам ўринли эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун аввал қуйидаги бир неча ёрдамчи тасдиқларни кўриб чиқайлик.

1-лемма. Ушбу

$$A^k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

ўринли бўлиши учун, A матрицанинг барча хос сонларининг модуллари бирдан кичик бўлиши зарур ва кифоядир.

Исбот. Исботни бошлашдан аввал алгебрадан айрим тушунчаларни эслатиб ўтамиз. Агар шундай махсусмас B матрица мавжуд бўлиб,

$$A_1=B^{-1}AB$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда A_1 *матрица A матрицага ўхшаш* дейилади. Кўриниб турибдики, агар A_1 матрица A га ўхшаш бўлса, у ҳолда A ҳам A_1 га ўхшаш бўлади. Ўхшаш матрицалар бир хил хос сонларга эга. Ҳақиқатан ҳам,

$$\det(AB)=\det A\det B,\ \det B^{-1}\cdot\det B=\det B^{-1}B=1$$

бўлганлиги учун:

$$\det(A_1-\lambda E)=\det(B^{-1}AB-B^{-1}\lambda B)=\det(B^{-1}(A-\lambda E)B)=$$
$$=\det B^{-1}\det(A-\lambda E)\det B=\det(A-\lambda E),$$

яъни бу матрицалар бир хил характеристик детерминантларга эга.

Яна маълумки, ўхшаш алмаштиришлар ёрдамида, ихтиёрий n-тартибли A матрицани унинг *Жордан формасидаги каноник шаклига* келтириш мумкин:

$$I=B^{-1}AB. \tag{7.16}$$

Бу ерда

$$I = [I_{m_1}(\lambda_1),\ I_{m_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{m_r}(\lambda_r)]$$

квазидиагонал матрицадир ва r бир томондан

$$I_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}$$

Жордан катакларининг сонини билдирса, иккинчи томондан у A матрицанинг чизиқли эркли хос векторларининг сонидир, шу билан бирга $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$ бўлиб, $m_l\ I_{m_l}(\lambda_l)$ нинг тартибидир. (7.16) дан қуйидагиларни ёза оламиз:

$$A = BIB^{-1},$$

$$A^k = BIB^{-1}BIB^{-1} \ldots BIB^{-1} = BI^kB^{-1}.$$

Демак, $A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ бўлиши учун $I^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ бўлиши зарур ва етарлидир. (7.17) дан кўрамизки,

$$I^k = [I^k_{m_1}(\lambda_1),\ I^k_{m_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I^k_{m_r}(\lambda_r)].$$

Шунинг учун ҳам $A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ бўлиши учун барча $l = 1, 2, \ldots, r$ ларда $I^k_{m_l}(\lambda_l)$ нинг ноль матрицага интилиши зарур ва етарлидир.

Матрицаларни кўпайтириш қоидасига кўра:

$$I^2_{m_l}(\lambda_l) = \begin{bmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_l & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_l \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_l^2 & 2\lambda_l & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_l^2 & 2\lambda_l & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_l^2 \end{bmatrix}$$

Математик индукция ёрдамида $k > m_l$ бўлганда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I^{(k)}_{m_l}(\lambda_l) = \begin{bmatrix} \lambda_l^k & C_k^1\lambda_l^{k-1} & C_k^2\lambda_l^{k-2} & \ldots & C_k^{m_l-1}\lambda_l^{k-m_l+1} \\ 0 & \lambda_l^k & C_k^1\lambda_l^{k-1} & \ldots & C_k^{m_l-2}\lambda_l^{k-m_l+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_l^k \end{bmatrix}$$

ёки

$$I_{m_i}^{(k)}(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i^{(k)} & \frac{(\lambda_i^k)'}{1!} & \frac{(\lambda_i^k)''}{2!} & \dots & \frac{(\lambda_i^k)^{(m_i-1)}}{(m_i-1)!} \\ 0 & \lambda_i^k & \frac{(\lambda_i^k)'}{1!} & \dots & \frac{(\lambda_i^k)^{(m_i-2)}}{(m_i-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

Бу ерда қулайлик учун дифференциаллаш амалини киритдик. $I_{m_i}^k(\lambda_i)$ матрицанинг диагонал элементлари λ_i^k дан иборат. Шунинг учун ҳам $I_{m_i}^k(\lambda_i)$ нинг ноль матрицага интилиши учун $|\lambda_i|<1$ бўлиши зарурдир. Лекин бу шартнинг бажарилиши $I_{m_i}^k(\lambda_i)$ нинг ноль матрицага интилиши учун етарли ҳамдир, чунки ихтиёрий $j=0,\ 1,\ \dots,\ m_i-1$ учун

$$\frac{(\lambda^k)^{(j)}}{j!}\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

Шундай қилиб, лемма исботланди. Леммадаги яқинлашиш белгиси амалий масалаларда ноқулайлик туғдириши мумкин, чунки у A матрицанинг хос сонлари ҳақида аниқ маълумот талаб қилади. Қуйидаги белги анча қулайдир.

2-лемма. Ушбу

$$A^k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

ўринли бўлиши учун A матрицанинг камида бирор нормасининг бирдан кичик бўлиши етарлидир.

Исбот. Юқорида таъкидланганидек $A^k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ нинг бажарилиши учун бирор нормада $\|A^k-0\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ нинг бажарилиши етарлидир. Аммо

$$\|A^k-0\|=\|A^k\|=\|A\cdot A^{k-1}\|\leqslant\|A\|\cdot\|A^{k-1}\|\leqslant\dots\leqslant\|A\|^k.$$

Демак, бирор нормада $\|A\|<1$ бўлса, у ҳолда $\|A^k\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$, яъни $A^k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ бўлади. Ниҳоят, ушбу жумлани исботлайлик.

3-лемма. Матрицанинг барча хос сонларининг модули унинг ихтиёрий нормасидан ортмайди.

Исбот. Хос сон таърифига кўра шундай $\bar{x}\neq0$ вектор мавжудки,

$$A\bar{x}=\lambda\bar{x}$$

бўлади. Бундан эса $\|A\bar{x}\|=|\lambda|\,\|\bar{x}\|$. Лекин $\|A\bar{x}\|\leqslant\|A\|\cdot\|\bar{x}\|$, шунинг учун ҳам $|\lambda|\leqslant\|A\|$. Лемма исботланди.

Энди (7.15) матрицали геометрик прогрессиянинг яқинлашишига доир теоремаларни исботлашга ўтамиз.

3-теорема. (7.15) қаторнинг яқинлашиши учун

$$A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

нинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Бу ҳолда $E-A$ матрицанинг тескариси мавжуд бўлиб,

$$E+A+A^2+\ldots+A^k+\ldots=(E-A)^{-1}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Бу шартнинг зарурийлиги кўриниб турибди, чунки сонли қаторлар учун шунга ўхшаш шарт зарур бўлиб, n-тартибли квадрат матрицанинг яқинлашиши матрица элементларидан мос равишда тузилган n^2 та сонли қаторларнинг яқинлашишига тенг кучлидир. Етарлилигини кўрсатамиз ва (7.15) қаторнинг йиғиндисини топамиз. Агар $A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ бўлса, у ҳолда 1-леммага кўра A матрицанинг барча хос сонлари λ_i лар модуллари бўйича бирдан кичик. Демак, $E-A$ матрицанинг хос сонлари $1-\lambda_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ бўлиб, нолдан фарқлидир. Шунинг учун ҳам $\det(E-A)\neq 0$. Бундан эса $E-A$ матрицанинг махсусмаслиги ва $(E-A)^{-1}$ нинг мавжудлиги келиб чиқади.

Энди

$$(E+A+A^2+\ldots+A^k)(E-A)=E-A^{k+1}$$

айниятни ўнг томондан $(E-A)^{-1}$ га кўпайтириб,

$$E+A+A^2+\ldots+A^k=(E-A)^{-1}-A^{k+1}(E-A)^{-1}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда $A^{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ бўлганлиги учун

$$E+A+A^2+\ldots+A^k+\ldots=(E-A)^{-1}$$

келиб чиқади. Шу билан теорема исбот бўлди.

1-леммани ҳисобга олсак, бу яқинлашиш белгисини қуйидагича таърифлаш мумкин.

4-теорема. (7.15) қатор яқинлашиши учун A матрицанинг барча хос сонлари модуллари бўйича бирдан кичик бўлиши зарур ва етарлидир.

2-леммадан фойдаланиб, яқинлашишнинг етарли шартини бериш мумкин. Бу шарт текширишларда анча қулайдир.

5-теорема. Агар A матрицанинг бирор нормаси бирдан кичик бўлса, у ҳолда (7.15) матрицали прогрессия яқинлашади. Қуйидаги теорема (7.15) қаторнинг яқинлашиш тезлигини аниқлайди.

6-теорема. Агар $\|A\|<1$ бўлса, у ҳолда

$$\|(E-A)^{-1}-(E+A+A^2+\ldots+A^k)\|\leqslant\frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|}.$$

Исбот. $\|A\|<1$ шарт бажарилганда (7.15) қатор $(E-A)^{-1}$ матрицага яқинлашади, шунинг учун ҳам

$$(E-A)^{-1}-(E+A+A^2+\ldots+A^k+\ldots)=A^{k+1}+A^{k+2}+\ldots$$

ва

$$\|(E-A)^{-1}-(E+A+A^2+\dots A^k)\| \leqslant \|A^{k+1}\|+\|A^{k+2}\|+\dots \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|^{k+1}+\|A\|^{k+2}+\dots = \frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|}.$$

Демак, теорема исботланди.

8-§. ИТЕРАЦИОН МЕТОДЛАР

Энди итерацион методларни баён қилишга ўтамиз. Бобнинг бошида айтиб ўтилганидек, бу ерда аниқ ечим чексиз кетма-кетликларнинг лимити сифатида топилади.

Ҳозирги вақтда ҳар хил принципларга асосланган ҳолда жуда кўп итерацион методлар яратилган. Умуман, бу методларнинг ўзига хос томонларидан яна бири шундан иборатки, улар ўз хатосини ўзи тузатиб боради. Агар аниқ методлар билан ишлаётганда бирор қадамда хатога йўл қўйилса, бу хато охирги натижага ҳам таъсир қилади. Яқинлашувчи итерацион жараённинг бирор қадамида йўл қўйилган хато эса фақат бир неча итерация қадамини ортиқча бажаришгагина олиб келади холос. Бирор қадамда йўл қўйилган хато кейинги қадамларда тузатиб борилади. Методларнинг ҳисоблаш схемалари содда бўлиб, уларни ЭҲМларда реализация қилиш қулайдир. Лекин ҳар бир итерацион методнинг қўлланиш соҳаси чегаралангандир. Чунки итерация жараёни берилган система учун узоқлашиши ёки, шунингдек, секин яқинлашиши мумкинки, амалда ечимни қониқарли аниқликда топиб бўлмайди.

Шунинг учун ҳам, итерацион методларда фақат яқинлашиш масаласигина эмас, балки яқинлашиш тезлиги масаласи ҳам катта аҳамиятга эгадир. Яқинлашиш тезлиги дастлабки яқинлашиш векторининг қулай танланишига ҳам боғлиқдир.

Бу параграфда аввал итерацион жараён қуришнинг умумий принципини кўриб чиқамиз, сўнгра эса ҳисоблаш амалиётида кенг қўлланиладиган итерацион методларни келтирамиз.

Итерацион жараённи қуриш принциплари. Фараз қилайлик, махсусмас матрицали

$$A\bar{x}=\bar{b} \tag{8.1}$$

система берилган бўлсин. Итерацион методларни қураётганда бирор ихтиёрий дастлабки яқинлашиш вектори $\bar{x}^{(0)}$ олиниб, кейинги яқинлашишлар $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$ қуйидаги

$$\bar{x}^{(k+1)}=f_k(\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}) \tag{8.2}$$

рекуррент формула ёрдамида топилади, бу ерда f_k умуман олганда A матрицага, озод ҳадлар вектори $\bar{b}$ га, яқинлашиш номери k га ва дастлабки яқинлашишлар $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$ га боғлиқ бўлган қандайдир функциядир.

Агар f_k фақат $\bar{x}^{(k)}$ га боғлиқ бўлиб, $\bar{x}^{(0)}$, $\bar{x}^{(1)}$, $\ldots$, $\bar{x}^{(k-1)}$ ларга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда *итерация методи биринчи тартибга эга* дейилади. Агар f_k функцияси k га боғлиқ бўлмаса, итерация методи *стационар* дейилади. Албатта, f_k функциянинг энг соддаси чизиқли функциядир. Кетма-кет яқинлашишларнинг биринчи тартибли энг умумий чизиқли методи қуйидаги

$$\bar{x}^{(k+1)} = B_k\bar{x}^{(k)} + \bar{c}^{(k)} \tag{8.3}$$

кўринишга эга бўлиб, бу ерда B_k — квадрат матрица ва $\bar{c}^{(k)}$ — вектор. Биз (8.2) ва (8.3) итерацион методларга табиий равишда (8.1) нинг аниқ ечими $\bar{x}^* = A^{-1}\bar{b}$ қўзғалмас нуқта бўлиши керак, яъни $\bar{x}^{(0)}$ сифатида аниқ ечим $\bar{x}^*$ олинганда кейинги яқинлашишлар ҳам $\bar{x}^*$ га тенг бўлиши керак деган талабни қўйишимиз керак. Бу эса биринчи тартибли чизиқли метод учун ушбу

$$A^{-1}\bar{b} = B_k A^{-1}\bar{b} + \bar{c}_k \tag{8.4}$$

ёки

$$\bar{c}_k = (E - B_k)A^{-1}\bar{b} = C_k\bar{b} \tag{8.5}$$

тенгликларга олиб келади. Ўз навбатида (8.5) дан

$$B_k + C_k A = E \tag{8.6}$$

тенглик келиб чиқади. (8.5) дан фойдаланиб, (8.3) итерацион жараённи қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\bar{x}^{(k+1)} = B_k\bar{x}^{(k)} + C_k\bar{b}. \tag{8.7}$$

Бу ерда B_k ва C_k матрицалар $\bar{b}$ га боғлиқ эмас. Энди (8.6) ни (8.7) га келтириб қўйсак,

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - C_k\left(A\bar{x}^{(k)} - \bar{b}\right) \tag{8.8}$$

ҳосил бўлади.

Агар C_k^{-1} матрица мавжуд бўлса, у ҳолда (8.7) нинг иккала томонини чапдан C_k^{-1} га кўпайтириб,

$$D_k\bar{x}^{(k+1)} + F_k\bar{x}^{(k)} = \bar{b} \tag{8.9}$$

ни ҳосил қиламиз. Табиийки, бу ерда

$$D_k + F_k = A \tag{8.10}$$

тенглик бажарилиши керак. (8.9) тенглик $\bar{x}^{(k+1)}$ ни ошкормас кўринишда аниқлайди. Шунинг учун ҳам D_k шундай матрица бўлиши керакки, D_k^{-1} ни топиш қийин бўлмасин. Одатда D_k сифатида диагонал ёки учбурчак матрица олинади. Биринчи ҳолда *метод тўлиқ қадамли*, иккинчи ҳолда эса *бир қадамли* дейилади.

Кетма-кет яқинлашишлар, биринчи тартибли чизиқли методларнинг турли кўринишлари асосан (8.7) — (8.10) формулалар ёрдамида амалга оширилади. Жуда кўп чизиқли ва чизиқли бўлмаган кетма-кет яқинлашиш методларини

$$f(\bar{x}) = \|A\bar{x} - \bar{b}\|^2$$

функционални *энг кичик квадратлар методи* ёки бошқа методлар билан минималлаштириш натижасида ҳосил қилиш мумкин.

Оддий итерация методи. Фараз қилайлик,

$$A\bar{x} = \bar{b} \qquad (8.11)$$

система бирор усул билан

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{b} \qquad (8.12)$$

кўринишга келтирилган бўлсин, қандай келтириш кераклигини кейинчалик кўриб ўтамиз ва дастлабки яқинлашиш вектори $\bar{x}^{(0)}$ бирор усул билан (масалан, $\bar{x}^{(0)} = \bar{c}$ каби) топилган бўлсин. Агар кейинги яқинлашишлар

$$\bar{x}^{(k)} = B\bar{x}^{(k-1)} + \bar{c}, \quad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (8.13)$$

рекуррент формулалар ёрдамида топилса, бундай метод *оддий итерация методи* дейилади. (8.12) дан кўрамизки, оддий итерация методи бу биринчи тартибли тўлиқ қадамли итерацион методдир. Агар (8.13) кетма-кетликнинг лимити $\bar{x}^*$ мавжуд бўлса, (бу лимит (8.13) системанинг, (шу билан (8.11) системанинг ҳам) ечими бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (8.13) тенгликда лимитга ўтсак, $\bar{x}^* = B\bar{x}^* + \bar{c}$ келиб чиқади.

Оддий итерация методининг яқинлашиш шартини аниқлайлик.

1-теорема. (8.13) оддий итерация жараёни ўзининг ихтиёрий дастлабки яқинлашиш вектори $\bar{x}^{(0)}$ да яқинлашувчи бўлиши учун B матрицанинг барча хос сонлари бирдан кичик бўлиши зарур ва кифоядир.

Исбот. Зарурлиги. Фараз қилайлик, ихтиёрий дастлабки вектор учун $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}^{(k)} = \bar{x}^*$ лимит мавжуд бўлсин. У ҳолда $\bar{x}^* = B\bar{x}^* + \bar{c}$. (8.13) ни бу тенгликдан айириб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} = B(\bar{x}^* - \bar{x}^{(k-1)}) = B^2(\bar{x}^* - \bar{x}^{(k-2)}) = \ldots = B^k(\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)}).$$

Энди $\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)}$ вектор k га боғлиқ бўлмаганлиги учун

$$\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} = B^k(\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)})$$

тенгликда $k \to \infty$ лимитга ўтсак,

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

келиб чиқади, бундан эса 7-§ даги 1-леммага кўра B матрицанинг барча хос сонларининг модуллари бирдан кичиклиги кўринади.

К и ф о я л и г и. (8.13) орқали аниқланадиган барча яқинлашишлари дастлабки вектор $\bar{x}^{(0)}$ ва $\bar{c}$ орқали ифодалаймиз:

$$\bar{x}^{(k)} = B\bar{x}^{(k-1)} + \bar{c} = B(B\bar{x}^{(k-2)} + \bar{c}) + \bar{c} = B^2\bar{x}^{(k-2)} + (E + B)\bar{c} = \\ = \ldots = B^k\bar{x}^{(0)} + (E + B + \ldots B^{k-1})\bar{c}.$$

Энди, фараз қилайлик, B нинг барча хос сонлари бирдан кичик бўлсин. У ҳолда 7-§ даги 1-лемма ва 4-теоремага кўра

$$B^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad E + B + B^2 + \ldots + B^{k-1} \to (E - B)^{-1}.$$

Демак, $\bar{x}^{(0)}$ қандай бўлишидан қатъи назар $\bar{x}^{(k)}$ яқинлашувчи кетма-кетликдир.

Исбот қилинган теорема назарий жиҳатдан фойдали, чунки у мавжуд ҳақиқатни аниқ ифодалайди. Лекин, амалий ишлар учун ярамайди. Энди B матрицанинг элементлари орқали ифодаланадиган кифоялилик белгисини келтирамиз.

2-теорема. (8.13) оддий итерация жараёнининг яқинлашувчи бўлиши учун B матрицанинг бирор нормаси бирдан кичик бўлиши кифоядир.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, агар $\|B\| < 1$ бўлса, 7-§ даги 3-леммага кўра бу матрицанинг барча хос сонлари модуллари бўйича бирдан кичик бўлиб, бундан 1-теоремага асосан оддий итерацион жараённинг яқинлашишлиги келиб чиқади.

2-теорема бир неча қулай кифоялилик белгиларини келтиришга имкон беради.

3-теорема. (8.13) оддий итерация жараёни яқинлашиши учун B матрицанинг элементлари қуйидаги

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \mu < 1, \tag{8.14}$$

$$\max_j \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \mu < 1, \tag{8.15}$$

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} |b_{ij}|^2 \leqslant \mu < 1 \tag{8.16}$$

тенгсизликларнинг бирортасини қаноатлантириши кифоядир.

Агар биз

$$\|B\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|, \quad \|B\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}|$$

нормаларни эсласак, теоремадаги аввалги иккита шарт 2-теоремадан келиб чиқади. Охирги шартдаги тенгсизлик эса, $\|B\|_3 = \sqrt{\lambda_1}$ нинг бирдан кичик эканлигини кўрсатади. Ҳақиқатан ҳам, бу ерда λ_1 $B'B$ матрицанинг энг катта хос сони бўлганлиги ва $B'B$ нинг барча хос сонлари манфий бўлмаганлиги учун

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

Лекин бу тенгсизликнинг ўнг томонидаги ифода $B'B$ нинг изига (яъни $B'B$ матрица диагонал элементларининг йиғиндисига) тенг бўлиб, у эса $\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2$ га тенгдир.

Энди яқинлашиш тезлигини баҳолайдиган қуйидаги теоремани келтирамиз.

4-теорема. Агар B матрицанинг, $\bar{x}$ векторнинг берилган нормасига мосланган бирор нормаси бирдан кичик бўлса, у ҳолда (8.13) оддий итерация методининг хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \leqslant \|B\|^k \|\bar{x}^{(0)}\| + \frac{\|B\|^k \|c\|}{1 - \|B\|}.$$

Исбот. Теорема шартига кўра $\|B\| < 1$, шунинг учун ҳам

$$\bar{x}^* = (E + B + B^2 + \ldots + B^{k-1} + \ldots)\bar{c}. \tag{8.17}$$

Бу тенгликни (8.15) дан айирсак,

$$\bar{x}^* - \bar{x}^k = -B^k \bar{x}^{(0)} + (B^k + B^{k+1} + \ldots)\bar{c}. \tag{8.18}$$

Бундан эса

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \leqslant \|B\|^k \|\bar{x}^{(0)}\| + (\|B\|^k + \|B\|^{k+1} + \ldots)\|\bar{c}\| = \|B\|^k \|\bar{x}^{(0)}\| + \frac{\|B\|^k \|\bar{c}\|}{1 - \|B\|}.$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди. Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, агар $\bar{x}^{(0)}$ сифатида озод ҳадлар устуни $\bar{c}$ олинган бўлса, у ҳолда итерациянинг хатоси қуйидагича баҳоланади:

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \leqslant \frac{\|B^{k+1}\| \|\bar{c}\|}{1 - \|B\|}. \tag{8.19}$$

Ҳақиқатан ҳам, $\bar{x}^{(0)} = \bar{c}$ деб олсак, у ҳолда (8.18) ўрнига

$$\bar{x}^* - \bar{x}^k = (B^{k+1} + B^{k+2} + \ldots)\bar{c}$$

тенгликка эга бўламиз, бундан эса (8.19) келиб чиқади.

Энди (8.11) системани (8.12) кўринишга келтириш ва оддий итерациянинг амалда қўлланилиши устида тўхталиб ўтамиз. Шу мақсадда ихтиёрий махсусмас P матрица олиб, итерациянинг қуйидаги

$$\bar{x}^{(k+1)} = (E - PA)\bar{x}^{(k)} + P\bar{c} \tag{8.20}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Албатта, P матрица шундай танланган бўлиши керакки,

$$B = E - PA$$

матрица учун яқинлашиш шарти бажарилсин. Қуйидаги иккита хусусий ҳолни кўриб чиқамиз.

1. $P = D^{-1}$, бу ерда D диагонал матрица бўлиб, диагонал

элементлари A матрицанинг диагонал элементлари билан устма-уст тушсин. Бу ҳолда (8.20) итерация жараёнини тузиш

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

система тенгламаларини мос равишда $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ларга бўлиб, ҳосил бўлган тенгламаларда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларни мос равишда чап томонда қолдириб, қолганларини ўнг томонга ўтказишдан иборатдир. Натижада,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \ldots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1} \end{aligned}$$

системага эга бўламиз. Албатта бу усулни қўллаш мумкин бўлиши учун барча a_{ii} лар нолдан фарқли бўлиши керак. Бундан ташқари диагонал элементларнинг модуллари бошқа элементларнинг модулларидан анча катта бўлиши керак. Аниқроғи қуйидаги тенгсизликларнинг бирортаси бажарилиши лозим:

$$\max_i \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < |a_{ii}|, \tag{8.21}$$

$$\max_j \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1, \tag{8.22}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|a_{jj}|^2} \sum_{i=1,\ i\neq 1}^{n} |a_{ij}|^2 < 1. \tag{8.23}$$

Бу тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда мос равишда (8.14)—(8.16) тенгсизликлар ҳам бажарилади.

2. $P = A^{-1} - \varepsilon$, бу ерда $\varepsilon = [\varepsilon_{ij}]$ элементларининг модуллари етарлича кичик бўлган матрицадир. Бу ҳолда (8.20) тенглик

$$\overline{x}^{(k+1)} = \varepsilon A \overline{x}^{(k)} + (A^{-1} - \varepsilon)\overline{c}$$

кўринишга эга бўлиб, εA матрица яқинлашиш шартини қаноатлантиради.

(8.11) системани P га кўпайтириш система тенгламалари устида элементар алмаштириш бажариш билан тенг кучлидир.

Одатда P ни 2-кўринишда олинганда мисол ечиш учун қуйидагича иш тутилади. Берилган системадан шундай тенгламаларни ажратиб олинадики, бу тенгламаларда бирор номаълум олдидаги коэффициент модули бўйича шу тенгламанинг қолган барча коэффициентлари модулларининг йиғиндисидан катта бўлсин. Ажратилган тенгламалар шундай жойлаштириладики, уларнинг энг катта коэффициентлари диагонал коэффициентлари бўлсин. Тенгламаларнинг қолганларидан ва ажратилганларидан юқоридаги принцип сақланадиган, яъни энг катта коэффициент диагонал коэффициент бўладиган қилиб ўзаро чизиқли эркли бўлган чизиқли комбинациялар тузилади ва барча бўш сатрлар тўлдирилади. Шу билан бирга дастлабки системанинг ҳар бир тенгламаси янги система тенгламаларини тузаётганда қатнашиши керак.

Бу ерда кўрсатилган усулларни мисолларда тушунтирамиз.

1-мисол. Қуйидаги система одий итерация методи билан ечилсин:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 6, \\ -x_1 + 25x_2 + x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 11, \\ 2x_1 + x_2 - 20x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -19, \\ x_2 - x_3 + 10x_4 - 5x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 20x_5 = -32 \end{cases} \tag{8.24}$$

Ечиш. Биринчи усулда айтилганидек, бу системанинг тенгламаларини мос равишда 10, 25, —20, 10, —20 ларга бўлиб, қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}6 - 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}1x_5, \\ x_2 = 0{,}44 + 0{,}04x_1 - 0{,}04x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}08x_5, \\ x_3 = 0{,}95 + 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}1x_4 - 0{,}15x_5. \\ x_4 = 1 - 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}5x_5, \\ x_5 = 1{,}6 + 0{,}05x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}1x_4. \end{cases} \tag{8.25}$$

Бу ерда (8.14) даги йиғиндилар мос равишда 0,7; 0,36; 0,4; 0,7; 0,3 бўлиб, булардан эса $\|B\|_1 = 0{,}7 < 1$ келиб чиқади.

Дастлабки яқинлашиш $\bar{x}^{(0)}$ сифатида озод ҳадлар устуни (0,6; 0,44; 0,95; 1; 1,6)′ ни олиб, кейинги яқинлашишларни топамиз:

$$x_1^{(1)} = 0{,}6 - 0{,}1x_2^{(0)} + 0{,}3x_3^{(0)} + 0{,}2x_4^{(0)} - 0{,}1x_5^{(0)} = 0{,}6 - 0{,}1\cdot 0{,}44 + 0{,}3\cdot 0{,}95 + \\ + 0{,}2\cdot 1 - 0{,}1\cdot 1{,}6 = 0{,}881,$$

$$x_2^{(1)} = 0{,}44 + 0{,}04\cdot 0{,}6 - 0{,}04\cdot 0{,}95 + 0{,}2\cdot 1 + 0{,}08\cdot 1{,}6 = 0{,}754$$

Шунга ўхшаш $x_3^{(1)} = 0{,}892$; $x_4^{(1)} = 1{,}851$; $x_5^{(1)} = 1{,}72$. Ҳисоблашларнинг давоми 13-жадвалда келтирилган.

Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, ҳисоблашларни қисқартириш мақсадида аввалги бир неча яқинлашишларни камроқ ўнли рақамлари билан ҳисоблаш ҳам мумкин.

Ҳисоблашлар, одатда, $\bar{x}^{(k)}$ ва $\bar{x}^{(k+1)}$ яқинлашишлар керакли аниқликда устма-уст тушгунлари қадар давом эттирилади.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0,881	0,754	0,892	1,851	1,72
2	0,9884	0,9482	1,0029	1,9147	1,9859
3	0,9904	0,9814	0,9908	1,9939	1,9854
4	0,99944	0,99753	0,99769	1,99364	1,99897
5	0,99839	0,99865	0,99929	1,99954	1,99970
6	0,99986	0,99989	0,99977	1,99976	1,99960
7	0,999934	0,999920	1,000018	1,999788	1,999947
8	0,999974	0,999951	0,999976	2,000042	1,999978

Бу жадвалдан кўрамизки 8- итерация $x_1 = 0{,}99997$; $x_2 = 0{,}99995$; $x_3 = 0{,}99998$; $x_4 = 2{,}00004$; $x_5 = 1{,}99998$ ечимдан иборат. Бу топилган тақрибий ечим аниқ ечим $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1$, $x_4^* = x_5^* = 2$ дан бешинчи хонанинг бирликлари бўйичагина фарқланяпти.

2- мисол. Қуйидаги системани оддий итерация методини қўллаш мумкин бўлган кўринишга келтиринг:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 20x_4 = 10, & \text{(а)} \\ x_1 + 2x_2 - 15x_3 + 3x_4 = 7, & \text{(б)} \\ -8x_1 - x_2 + 10x_3 + 19x_4 = 10, & \text{(в)} \\ 11x_1 - 9x_2 - 2x_3 - x_4 = 6. & \text{(г)} \end{cases}$$

Ечиш. Кўриниб турибдики, бу системанинг коэффициентлари (8.21)—(8.23) тенгсизликларни қаноатлантирмайди. Шунинг учун ҳам иккинчи усулни қўллаймиз. (а) тенгламада x_4 олдидаги коэффициент шу тенгламадаги қолган коэффициентларнинг абсолют қийматлари бўйича олинган йиғиндисидан катта. Шунинг учун ҳам (а) ни янги ҳосил қилинадиган системанинг 4- тенгламаси сифатида оламиз. Шу мулоҳазаларга кўра (б) тенгламани янги системанинг 3- тенгламаси қилиб оламиз. Янги системанинг 1- тенгламасини ҳосил қилиш учун (а) дан (в) ни айирамиз, натижада

$$10x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$$

келиб чиқади. Ниҳоят, 2- тенгламасини ҳосил қилиш учун сўнгги ҳосил қилинган тенгламани (г) дан айирамиз:

$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6.$$

Шундай қилиб, қуйидаги системага эга бўлдик:

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - 15x_4 + 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 20x_4 = 10. \end{cases}$$

Кўриниб турибдики, бу системага итерация методини қўллаш мумкин.

Зейдел методи. Зейдел методи чизиқли бир қадамли биринчи тартибли итерацион методдир. Бу метод оддий итерация методидан шу билан фарқ қиладики, дастлабки яқинлашиш $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})'$ га кўра $x_1^{(1)}$ ни топамиз. Сўнгра $(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})'$ га кўра $x_2^{(1)}$ топилади ва ҳ. к. Барча $x_i^{(1)}$ лар аниқланганидан кейин

$x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$, . . . лар топилади. Аниқроқ айтганда, ҳисоблашлар қуйидаги схема бўйича олиб борилади:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)},$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)},$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{nj}}{a_{nn}} x_j^{(k+1)}.$$

Энди Зейдел методининг яқинлашиш шартини кўриб чиқайлик. Бу шарт қуйидаги теорема билан берилади.

5-теорема. Зейдел методининг яқинлашиши учун

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{11}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23} \dots a_{2n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & a_{n3}\lambda \dots a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.26)$$

тенгламанинг барча илдизлари модуллари бўйича бирдан кичик бўлиши зарур ва кифоядир.

Исбот. Берилган A матрицани иккита

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \dots & 0 & 0 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \\ 0 & 0 \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

матрицалар йиғиндиси $A = C + D$ шаклида ёзиб оламиз. У ҳолда $A\bar{x} = \bar{b}$ системани

$$C\bar{x} = -D\bar{x} + \bar{b}$$

шаклда ёзиш мумкин. Зейдел методи эса

$$C\bar{x}^{(k+1)} = -D\bar{x}^{(k)} + \bar{b} \qquad (8.27)$$

кўринишдаги итерациядан иборатдир. Бу тенгликни $\bar{x}^{(k+1)}$ га нисбатан ечсак:

$$\bar{x}^{(k+1)} = -C^{-1}D\bar{x}^{(k)} + C^{-1}\bar{b}. \qquad (8.28)$$

Бу эса, Зейдел методининг матрицаси $-C^{-1}D$ бўлган оддий итерацияга тенг кучли эканлигини кўрсатади. Демак, 1-теоремага кўра Зейдел методининг яқинлашувчи бўлиши учун $-C^{-1}D$ матрицанинг барча хос сонлари модуллари бўйича бирдан кичик бўлиши зарур ва кифоядир. Шунинг учун ҳам

$$\det(\lambda E + C^{-1}D) = 0 \tag{8.29}$$

тенгламанинг барча илдизлари модуллари бўйича бирдан кичик бўлиши керак. Агар бу тенглама илдизларининг ушбу

$$\det(\lambda C + D) = 0 \tag{8.30}$$

тенглама илдизлари билан устма-уст тушишини кўрсатсак, теорема исбот бўлади. Бу эса қуйидагича кўрсатилади:

$$\det(\lambda E + C^{-1}D) = \det[C^{-1}C(\lambda E + C^{-1}D)] = \det[C^{-1}(\lambda C + D)] =$$
$$= \det C^{-1} \cdot \det(\lambda C + D).$$

Бу ерда $\det C^{-1} \neq 0$ бўлганлиги учун (8.29) ва (8.30) бир хил илдизларга эга.

Агар биз (8.28) ни $\bar{x}^{(k+1)} = \tilde{B}\bar{x}^{(k)} + \bar{c}$ деб олиб, оддий итерация методи билан ечадиган бўлсак, у ҳолда (8.28) жараённинг яқинлашиши учун

$$\begin{vmatrix} -\gamma & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1n} \\ \tilde{b}_{21} & -\gamma & \dots & \tilde{b}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n2} & \dots & -\gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{8.31}$$

тенгламанинг барча $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ илдизлари модуллари бўйича бирдан кичик бўлиши керак.

(8.26) ва (8.31) тенгламаларни солиштириб кўрсак, оддий итерация методи билан Зейдел методининг яқинлашиш соҳалари, умуман, фарқли деган фикрга келамиз. Ҳақиқатан ҳам, шундай системалар мавжудки, улар учун оддий итерация методи яқинлашади, Зейдел методи эса узоқлашади ва аксинча шундай системаларни келтириш мумкинки, улар учун Зейдел методи яқинлашувчи бўлиб, оддий итерация методи узоқлашади.

Лекин (8.21) ёки (8.22) шартларнинг бирортаси бажарилса, оддий итерацияга нисбатан Зейдел методи тезроқ яқинлашади. Бу қуйидаги теоремада янада аниқроқ ифодаланган.

6-теорема. Агар қуйидаги

$$\max_{i} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1, \quad \max_{j} \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

шартларнинг бирортаси бажарилса, у ҳолда ихтиёрий дастлабки яқинлашиш $\bar{x}^{(0)}$ учун Зейдел методи яқинлашади ва бу яқинлашиш биринчи шарт бажарилганда оддий итерация методининг яқинлашишидан секин эмас.

Исбот. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}},\quad \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}},\quad \mu = \max_i \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |\alpha_{ij}|. \tag{8.32}$$

Фараз қилайлик, биринчи шарт бажарилсин у ҳолда $\mu < 1$ бўлади. Бу белгилашларда Зейдел методи ушбу

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i \tag{8.33}$$

схема бўйича олиб борилади. Бундан ташқари теореманинг биринчи шарти бажарилганда $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c}$ система ягона ечимга эга, бу ечимни масалан, оддий итерация билан топиш мумкин. Демак,

$$x_i = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i. \tag{8.34}$$

(8.34) дан (8.33) ни айириб модулларга ўтсак,

$$|x_i - x_i^{(k+1)}| i \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|\,|x_j - x_j^{(k+1)}| + \sum_{j=i+1}^{n} |\alpha_{ij}|\,|xi - x_j^{(k)}| \leqslant \max_j |x_j -$$
$$- x_j^{(k)}| \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| + \max_j |x_j - x_j^{(k)}| \sum_{j=i+1}^{n} |\alpha_{ij}| = \|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| + \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1 \sum_{j=i+1}^{n} |\alpha_{ij}|$$

келиб чиқади. Қуйидаги

$$p_i = \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|,\quad q_i = \sum_{j=i+1}^{n} |\alpha_{ij}|$$

белгилашларни киритсак,

$$|x_i - x_i^{(k+1)}| \leqslant p_i \|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 + q_i \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1 \tag{8.35}$$

бўлади. Фараз қилайлик, $\max_i |x_i - x_i^{(k+1)}|$ га $i = s = s(k)$ бўлганда эришилсин:

$$|x_s - x_s^{(k+1)}| = \max_i |x_i - x_i^{(k+1)}| = \|x - x^{(k+1)}\|_1.$$

У вақтда (8.35) да $i = s$ деб олиб,

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 \leqslant p_s \|x - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 + q_s \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1$$

ёки

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 \leqslant \frac{q_s}{1 - p_s} \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1$$

тенгсизликка эга бўламиз. Агар

$$\mu_1 = \max_i \frac{q_i}{1-p_i}$$

деб олсак, у ҳолда

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 \leqslant \mu_1 \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1 \tag{8.36}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Энди $\mu_1 \leqslant \mu$ эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, (8.32) га кўра

$$p_i + q_i = \sum_{i=1,\, j\neq i}^{n} |\alpha_{ij}| \leqslant \mu < 1$$

бўлганлиги учун

$$q_i \leqslant \mu - p_i.$$

Демак,

$$\frac{q_i}{1-p_i} \leqslant \frac{\mu - p_i}{1-p_i} \leqslant \frac{\mu - \mu p_i}{1-p_i} = \mu.$$

Бундан эса

$$\mu_1 \leqslant \mu \tag{8.37}$$

келиб чиқади. (8.36) тенгсизликдан

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\| \leqslant \mu_1^{k+1} \|\bar{x} - \bar{x}^{(0)}\|_1$$

ни ҳосил қиламиз. Бу эса теореманинг биринчи шарти бажарилганда Зейдел методининг яқинлашишлигини билдиради. (8.37) тенгсизлик эса Зейдел методининг яқинлашиши оддий итерация методига нисбатан секин эмаслигини кўрсатади.

Энди теореманинг иккинчи шарти бажарилганда Зейдел методининг яқинлашишлигини кўрсатамиз.

Биз бу ерда $\mu' = \sum\limits_{i=1,\, i\neq j}^{n} |\alpha_{ij}|$ деб оламиз.

Фараз қилайлик, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ ва $\bar{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots x_n^{(k)})'$ мос равишда $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c}$ системанинг ечими ва Зейдел жараёнининг k-яқинлашиши бўлсин. У ҳолда

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i$$

ва

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Булардан

$$|x_i - x_i^{(k+1)}| \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| |x_j - x_j^{(k+1)}| + \sum_{j=i+1}^{n} |\alpha_{ij}| |x_j - x_j^{(k)}|$$

келиб чиқади. Бу тенгсизликларни барча $i = 1, 2, \ldots, n$ лар бўйича йиғамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i^{(k+1)}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| |x_j - x_j^{(k+1)}| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} |\alpha_{ij}| |x_j - x_j^{(k)}|$$

ҳамда йиғиш тартибини ўзгартирсак,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i^{(k+1)}| \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} |x_j - x_j^{(k+1)}| \sum_{i=j+1}^{n} |\alpha_{ij}| + \\ + \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_j^{(k)}| \sum_{i=n}^{j-1} |\alpha_{ij}|. \end{aligned} \qquad (8.38)$$

Энди

$$s_j = \sum_{i=j+1}^{n} |\alpha_{,ij}| \; t_i = \sum_{i=1}^{j-1} |\alpha_{ij}| \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ва

$$s_n = 0, \; t_n = \sum_{i=1, \, i \neq j}^{n} |\alpha_{ij}|$$

деб оламиз. Кўриниб турибдики,

$$s_j + t_j = \sum_{i=1, \, i \neq j}^{n} |\alpha_{ij}| = \mu' < 1.$$

Бундан эса, $s_j < 1$ келиб чиқади. (8.38) тенгсизлик қуйидаги

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i^{(k+1)}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j |x_j - x_j^{(k+1)}| + \sum_{j=1}^{n} t_j |x_j - x_j^{(k)}|$$

Ёки

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - s_j) |x_j - x_j^{(k+1)}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} t_j \, |x_j - x_j^{(k)}|$$

кўринишга эга бўлади.

Энди $t_j \leqslant \mu' - s_j \leqslant \mu' - s_j \mu' = \mu'(1 - s_j)$ бўлганлиги учун

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (1 - s_j) |x_j - x_j^{(k+1)}| \leqslant \mu' \sum_{j=1}^{n} (1 - s_j) |x_j - x_j^{(k)}| \leqslant (\mu')^k \sum_{j=1}^{n} (1 - \\ - s_j) |x_j - x_j^{(0)}| \end{aligned}$$

келиб чиқади. Бундан эса, $\mu' < 1$ бўлганлиги учун

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (1 - s_j)|x_j - x_j^{(k)}| = 0$$

ҳосил бўлади. Демак,

$$\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

ҳосил бўлиб, шу билан теорема тўлиқ исбот қилинди.

Энди мисол кўрамиз.

Мисол. Зейдел методи билан (8.24) системанинг ечими 5 хона аниқликда топилсин.

Ечиш. (8.24) системани (8.25) кўринишда ёзиб оламиз ва дастлабки яқинлашиш $\overline{x}^{(0)}$ сифатида оддий итерация методидагидек $\overline{x}^{(0)} = (0{,}6;\ 0{,}44;\ 0{,}95;\ 1;\ 1{,}6)'$ деб оламиз. Бу ерда итерациянинг фақат бир қадамини келтирамиз:

$$x_1^{(1)} = 0{,}6 - 0{,}1x_2^{(0)} + 0{,}3x_3^{(0)} + 0{,}2x_4^{(0)} - 0{,}1x_5^{(0)} = 0{,}6 - 0{,}1\cdot 0{,}44 + 0{,}3\times$$
$$\times 0{,}95 + 0{,}2\cdot 1 - 0{,}1\cdot 1{,}6 = 0{,}881;$$

$$x_2^{(1)} = 0{,}44 + 0{,}04\cdot x_1^{(1)} - 0{,}04x_3^{(0)} + 0{,}2x_4^{(0)} + 0{,}08x_5^{(0)} = 0{,}44 + 0{,}04\cdot 0{,}881 -$$
$$- 0{,}04\cdot 0{,}95 + 0{,}2\cdot 1 + 0{,}08\cdot 1{,}6 = 0{,}771;$$

$$x_3^{(1)} = 0{,}95 + 0{,}1x_1^{(1)} + 0{,}05x_2^{(1)} + 0{,}1x_4^{(0)} - 0{,}15x_5^{(0)} = 0{,}95 + 0{,}1\cdot 0{,}881 +$$
$$+ 0{,}05\cdot 0{,}771 + 0{,}1\cdot 1 - 0{,}15\cdot 0{,}16 = 0{,}937;$$

$$x_4^{(1)} = 1 - 0{,}1x_2^{(1)} + 0{,}1x_3^{(1)} + 0{,}5x_5^{(0)} = 1{,}817;$$

$$x_5^{(1)} = 1{,}6 + 0{,}05x_1^{(1)} + 0{,}1x_2^{(1)} + 0{,}05x_3^{(1)} + 0{,}1x_4^{(1)} = 1{,}948.$$

Кейинги яқинлашишлар 14-жадвалда келтирилган.

Бу ерда 6-теореманинг шарти ўринли бўлганлиги учун оддий итерацияга нисбатан Зейдел итерацияси тезроқ яқинлашмоқда.

14-жадвал

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0,881	0,771	0,937	1,817	1,948
2	0,973	0,961	0,985	1,974	1,992
3	0,995	0,995	0,999	1,996	1,999
4	0,9995	0,9991	0.9997	1,9995	1,9998
5	0,99992	0,99989	0,99997	1,99991	1,99997
6	0,99999	0,99998	0,99999	1,99999	2,00000

9-§. ГРАДИЕНТЛАР (ЭНГ ТЕЗ ТУШИШ) МЕТОДИ

Бу метод ҳақиқий симметрик мусбат аниқланган матрицали, чизиқли алгебраик тенгламалар

$$A\overline{x} = \overline{b} \tag{9.1}$$

системасини ечиш учун мўлжалланган.

Градиентлар методини баён қилишдан аввал функционал градиенти тушунчасига қисқача тўхталиб ўтамиз.

Фараз қилайлик, $f(\bar{x})$ n ўлчовли $\bar{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ векторнинг бирор функционали бўлиб, $\bar{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ узунлиги бирга тенг бўлган вектор бўлсин.

Функциянинг ўсиш ёки камайиш тезлигини унинг ҳосиласи характерлаганидек, f функционалнинг $\bar{x}$ „аргументи" $\bar{y}$ йўналиши бўйича ўзгарганда, унинг ўзгариш тезлигини функционалнинг ҳосиласи аниқлайди. *f функционалнинг $\bar{x}$ нуқтада $\bar{y}$ йўналиши бўйича ҳосиласи* деб ушбу

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial y}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(\bar{x}+\alpha\bar{y})-f(\bar{x})}{\alpha}=\frac{d}{d\alpha}f(\bar{x}+\alpha\bar{y})|_{\alpha=0}$$

ифодага айтилади. Бу таърифдан

$$f(\bar{x}+\alpha\bar{y})=f(x_1+\alpha y_1,\ x_2+\alpha y_2,\ \ldots,\ x_n+\alpha y_n)$$

бўлганлиги учун

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial y}=\frac{d}{d\alpha}f(x_1+\alpha y_1,\ \ x_2+\alpha y_2,\ \ldots,\ x_n+\alpha y_n)|_{\alpha=0}=$$

$$=\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2}y_2+\ldots+\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}y_n=(\bar{z},\bar{y}), \qquad (9.2)$$

бу ерда

$$\bar{z}=(z_1, z_2, \ldots, z_n)',\ z_i=\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}.$$

$\bar{z}$ вектор *$f(\bar{x})$ функционалнинг градиенти* дейилади. (9.2) тенгликда $\|\bar{y}\|=1$ бўлганлиги учун

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}}=\|\bar{z}\|\cos(\widehat{\bar{z},\bar{y}})$$

келиб чиқади, бундан эса

$$-\|\bar{z}\|\leqslant\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial\bar{y}}\leqslant\|\bar{z}\|.$$

Шу билан бирга агар $\bar{y}$ нинг йўналиши градиент йўналиши билан устма-уст тушса, $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial\bar{y}}=\|\bar{z}\|$ ва $\bar{y}$ нинг йўналиши градиент йўналишига қарама-қарши бўлса, $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial\bar{y}}=-\|\bar{z}\|$. Шундай қилиб, градиент йўналиши бўйлаб $f(\bar{x})$ функционал катта тезлик билан ўсар экан ва градиент йўналишига тескари бўлган йўналиш бўйича у катта тезлик билан камаяр экан.

Энди градиентлар методига ўтамиз.

Градиентлар методида (9.1) системани ечиш учун

$$f(\bar{x})=(A\bar{x},\bar{x})-2(\bar{b},\bar{x}) \qquad (9.3)$$

функционал қаралади. Бу функционал $x_1, x_2, \dots, x_n$ ларга нисбатан иккинчи тартибли кўпҳаддир. $\bar{x}^*$ орқали (9.1) системанинг ечимини, яъни $\bar{x}^* = A^{-1}\bar{b}$ ни белгилаймиз.

A матрица симметрик ва мусбат аниқланган бўлганлиги учун

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}^*) = (A\bar{x}, \bar{x}) - 2(\bar{b}, \bar{x}) - (A\bar{x}^*, \bar{x}^*) + 2(\bar{b}, \bar{x}^*) =$$
$$= (A\bar{x}, \bar{x}) - 2(A\bar{x}^*, \bar{x}) - (A\bar{x}^*, \bar{x}^*) + 2(A\bar{x}^*, \bar{x}) = (A\bar{x}, \bar{x}) -$$
$$- (A\bar{x}^*, \bar{x}) - (A\bar{x}^*, \bar{x}) + (A\bar{x}^*, \bar{x}^*) = (A(\bar{x} - \bar{x}^*), \bar{x} - \bar{x}^*) \geqslant 0.$$

Шу билан бирга сўнгги ифодада $\bar{x} = \bar{x}^*$ бўлгандагина, тенглик ишораси ўринли бўлади. Шундай қилиб, (9.1) системани ечиш масаласи (9.3) функционални минимумга айлантирадиган $\bar{x}^*$ векторни топишга келтирилади. Бундай векторни топиш учун қуйидагича иш кўрамиз.

Фараз қилайлик, $\bar{x}^{(0)}$ ихтиёрий дастлабки яқинлашиш вектори бўлсин. (9.3) функционалнинг градиентини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} = \frac{d}{d\alpha} f(\bar{x} + \alpha\bar{y})|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}(A(\bar{x} + \alpha\bar{y}) - 2\bar{b}, \bar{x} + \alpha\bar{y})|_{\alpha=0} =$$
$$= \frac{d}{d\alpha}[\alpha^2(A\bar{y}, \bar{y}) - 2\alpha(\bar{b} - A\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x})]_{\alpha=0} = -2(\bar{b} - A\bar{x}, \bar{y}) =$$
$$= 2(A\bar{x} - \bar{b}, \bar{y}).$$

Буни (9.2) билан солиштириб, $f(\bar{x})$ нинг градиенти $2(A\bar{x} - \bar{b})$ га тенг эканлигини кўрамиз. Кейинги текширишларда фақат градиентнинг йўналишигина керак бўлганлиги учун градиент ўрнига мусбат кўпайтувчи 2 ни ташлаб, $A\bar{x} - \bar{b}$ векторни қараймиз. $\bar{x}^{(0)}$ нуқтада йўналиши градиент йўналишига тескари бўлган векторни $\bar{r}^{(0)}$ орқали белгилаймиз:

$$\bar{r}^{(0)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(0)}. \tag{9.4}$$

Бу вектор (9.1) *системанинг хатолик вектори* дейилади. $\bar{r}^{(0)}$ векторнинг йўналишида $f(\bar{x})$ функционалнинг $\bar{x}^{(0)}$ нуқтадаги камайиш тезлиги энг катта бўлади. $\bar{x}^{(0)}$ нуқтадан бошлаб $\bar{r}^{(0)}$ йўналиш бўйича $f(\bar{x}^{(0)} + \alpha\bar{r}^{(0)})$ минимал қийматига эришгунга қадар ҳаракатни давом эттирамиз. Бу нуқтани

$$\frac{d}{d\alpha} f(\bar{x}^{(0)} + \alpha\bar{r}^{(0)}) \equiv 2\alpha(A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) - 2(\bar{b} - A\bar{x}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = 0$$

тенгламадан топамиз:

$$\alpha_0 = \frac{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})}. \tag{9.5}$$

A матрица мусбат аниқланган бўлганлиги сабабли барча $\bar{r}^{(0)} \neq 0$ учун $(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) > 0$. Агар $\bar{r}^{(0)} = 0$ бўлса, у ҳолда (9.4) дан кўрамизки, $\bar{x}^{(0)}$ (9.1) системанинг ечимини беради ва шу билан жараён тўхтайди. Агар $\bar r^{(0)} \neq \bar 0$ бўлса, у ҳолда навбатдаги яқинлашиш сифатида

$$\bar x^{(1)} = \bar x^{(0)} + \alpha_0 \bar r^{(0)} \qquad (9.6)$$

векторни оламиз.

Сўнгра $\bar r^{(1)} = \bar b - A\bar x^{(1)}$ ни ҳисоблаймиз. Кейинги яқинлашиш вектори $\bar x^{(1)}$ ни $f(\bar x^{(1)} + \alpha \bar r^{(1)})$ функционалнинг минимумга эришиш шартидан аниқлаймиз:

$$\alpha_1 = \frac{(\bar r^{(1)}, \bar r^{(1)})}{(A\bar r^{(1)}, \bar r^{(1)})}, \quad \bar x^{(2)} = \bar x^{(1)} + \alpha_1 \bar r^{(1)}.$$

Бу жараённи давом эттириб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\bar r^{(k)} = \bar b - A\bar x^{(k)}, \qquad (9.7)$$

$$\alpha_k = \frac{(\bar r^{(k)}, \bar r^{(k)})}{(A\bar r^{(k)}, \bar r^{(k)})}, \qquad (9.8)$$

$$\bar x^{(k+1)} = \bar x^{(k)} + \alpha_k \bar r^{(k)}.$$

Бу методнинг яқинлашиши ҳақида қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема. Агар A мусбат аниқланган симметрик матрица бўлса, у ҳолда градиент методи билан қурилган $\bar x^{(0)}, \bar x^{(1)}, \ldots, \bar x^{(k)}$ кетма-кет яқинлашишлар $A\bar x = \bar b$ системанинг ечими $\bar x^*$ га геометрик прогрессия тезлигида яқинлашади. Аниқроғи, агар A матрицанинг λ_i хос сонлари $0 < m < \lambda_i < M$ тенгсизликларни қаноатлантирса, у ҳолда $\{\bar x^{(k)}\}$ кетма-кетликнинг $\bar x^*$ ечимга яқинлашиш тезлиги учинчи нормада қуйидагича баҳоланади:

$$\|\bar x^{(k)} - \bar x^*\|_3 \leqslant \frac{1}{m}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^{2k}(f(\bar x^{(0)}) - f(\bar x^*)).$$

Исбот. A матрицанинг хос сонларини қуйидагича

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n > 0$$

белгилаймиз, буларга мос келадиган ортонормаллаштирилган хос векторларни $\bar u_1, \bar u_2, \ldots, \bar u_n$ орқали белгилаймиз. У ҳолда ихтиёрий

$$\bar x = c_1 \bar u^{(1)} + c_2 \bar u^{(2)} + \ldots + c_n \bar u^{(n)}$$

вектор учун

$$(A\bar x, \bar x) = c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \ldots + c_n^2 \lambda_n$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан эса

$$\lambda_n(\bar x, \bar x) = \lambda_n(c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2) \leqslant (A\bar x, \bar x) \leqslant \lambda_1(c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2) = \lambda_1(\bar x, \bar x)$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Демак, A матрица мусбат аниқланган бўлганлиги учун шундай ўзгармас $m > 0$ ва $M > 0$ сонлар топиладики,

$$m(\bar{x},\ \bar{x}) \leqslant (A\bar{x},\ \bar{x}) \leqslant M(\bar{x},\ \bar{x})$$

тенгсизликлар бажарилади.

Ушбу $f(\bar{x}^{(1)}) - f(\bar{x}^{(0)})$ айирмани қарайлик. (9.3) ва (9.6)—(9.9) формулаларга кўра, мураккаб бўлмаган ҳисоблашлардан кейин қуйидагиларга эга бўламиз:

$$f(\bar{x}^{(1)}) - f(\bar{x}^{(0)}) = \alpha_0^2(\bar{r}^{(0)},\ A\bar{r}^{(0)}) - 2\alpha_0(\bar{r}^{(0)}\ \bar{r}^{(0)}) = -\frac{(\bar{r}^{(0)},\ \bar{r}^{(0)})^2}{(\bar{r}^{(0)},\ A\bar{r}^{(0)})}. \qquad (9.9)$$

A — симметрик матрица, $A\bar{x}^* = \bar{b}$ ва $\bar{r}^{(0)} = A(\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)})$ бўлганлиги учун

$$f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*) = (\bar{x}^{(0)} - \bar{x}^*), \quad A(\bar{x}^{(0)} - \bar{x}^*)) = (A^{-1}\bar{r}^{(0)},\ \bar{r}^{(0)}).$$

Демак, (9.9) га кўра

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} = \frac{(\bar{r}^{(0)},\ A\bar{r}^{(0)})(A^{-1}\,\bar{r}^{(0)},\ \bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)},\ \bar{r}^{(0)})^2}.$$

Энди $\bar{r}^{(0)}$ ни A матрицанинг хос векторлари бўйича ёямиз:

$$\bar{r}^{(0)} = \sum_{l=1}^{n} a_l\,\bar{u}_l\,.$$

У вақтда,

$$A\bar{r}^{(0)} = \sum_{l=0}^{n} \lambda_i\, a_l\, \bar{u}_l\,, \quad A^{-1}\bar{r}^{(0)} = \sum_{l=1}^{n} \lambda_i^{-1} a_l\, \bar{u}_l$$

ва

$$(A\bar{r}^{(0)},\ \bar{r}^{(0)}) = \sum_{l=1}^{n} a_i^2 \lambda_l\,,\ (A^{-1}\bar{r}^{(0)},\ \bar{r}^{(0)}) = \sum_{l=1}^{n} a_i^2 \lambda_l^{-1}.$$

Демак,

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} a_l^2\lambda_l \sum\limits_{l=1}^{n} a_l^2\,\lambda_l^{-1}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2}.$$

Қуйидагича

$$d_l = \frac{a_l^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} \quad (d_l \geqslant 0,\ \sum_{l=1}^{n} d\ {}_{l=1}),$$

белгилашни киритиб,

$$\frac{\bar{f}(x^{(0)}) - \bar{f}(x^{*})}{\bar{f}(x^{(0)}) - \bar{f}(x^{(1)})} = \sum_{i=1}^{n} d_i \lambda_i \sum_{j=1}^{n} d_j \lambda_j^{-1} \qquad (9.10)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Қуйидагини исботлайлик: агар $0 \leqslant m < \lambda_i < M$ $(i = \overline{1, n})$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий ҳақиқий $d_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, n})$, $\sum_{i=1}^{n} d_i = 1$ сонлар учун

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \lambda_i \sum_{j=1}^{n} d_j \lambda_j^{-1} \leqslant \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right]^2 \qquad (9.11)$$

тенгсизлик ўринлидир. Буни исботлаш учун λ_i ўрнига $\xi_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{mM}}$ сонларни оламиз, у вақтда

$$\sqrt{\frac{m}{M}} \leqslant \xi_i \leqslant \sqrt{\frac{M}{m}}$$

бўлиб,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \lambda_i \sum_{j=1}^{n} d_j \lambda_j^{-1} = \sum_{i=1}^{n} d_i \xi_i \sum_{j=1}^{n} d_j \xi_j^{-1}$$

тенглик ўринли бўлади. Охирги ифодага икки сон ўрта геометриги унинг ўрта арифметигидан ортмаслиги ҳақидаги теоремани қўллаймиз:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \xi_i \sum_{i=1}^{n} d_j \xi_j^{-1} \leqslant \frac{1}{4}\left\{\sum_{i=1}^{n} d_i (\xi_i + \xi_i^{-1})\right\}^2. \qquad (9.12)$$

Ушбу

$$\varphi(\xi) = \xi + \frac{1}{\xi}$$

функция $\xi > 0$ бўлганда $(0, 1)$ оралиқда камайиб, $(1, \infty)$ оралиқда ўсади ва ўзининг энг кичик қийматини $\xi = 1$ нуқтада қабул қилади; $\left[\sqrt{\frac{m}{M}}, \sqrt{\frac{M}{m}}\right]$ оралиқда эса $\xi = \sqrt{\frac{m}{M}}$ ва $\xi = \sqrt{\frac{M}{m}}$ нуқталарда ўзининг энг катта қийматини қабул қилади, бу қиймат

$$\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \qquad (9.13)$$

га тенгдир. (9.12) ифодада ҳар бир $\xi_i + \xi_i^{-1}$ ни унинг энг катта қиймати (9.13) билан алмаштирамиз, у ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \lambda_i \sum_{j=1}^{n} d_j \lambda_j^{-1} \leqslant \frac{1}{4}\Big\{\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}}\Big) \sum_{i=1}^{n} d_i\Big\}^2 = \frac{1}{4}\Big(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}}\Big)^2,$$

шу билан (9.11) исботланди. (9.11) ни (9.10) га қўллаб,

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)})-f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)})-f(\bar{x}^{(1)})}\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+\sqrt{\frac{M}{m}}\right)^2=\frac{1}{q}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $0<q<1$. Бундан эса $f(\bar{x}^{(0)})-f(\bar{x}^*)=c$ деб белгилаб олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$f(\bar{x}^{(1)})-f(\bar{x}^*)\leqslant(1-q)[f(\bar{x}^{(0)})-f(\bar{x}^*)]=(1-q)c.$$

Шундай қилиб, ихтиёрий k учун

$$f(\bar{x}^k)-f(\bar{x}^*)\leqslant(1-q)^k c$$

ни ҳосил қиламиз. Энди $\bar{x}^{(k)}$ нинг $\bar{x}^*$ га интилиш тезлигини учинчи нормада баҳолайлик, $(A\bar{x},\ \bar{x})\geqslant m(\bar{x},\ \bar{x})$ бўлганлиги учун

$$\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}^*\|_3^2=(\bar{x}^{(k)}-\bar{x}^*,\ \bar{x}^{(k)}-\bar{x}^*)\leqslant\frac{1}{m}(A\bar{x}^{(k)}-\bar{b},\ \bar{x}^{(k)}-\bar{x}^*).$$

Равшанки

$$(A\bar{x}^{(k)}-\bar{b},\ \bar{x}^{(k)}-\bar{x}^*)=f(\bar{x}^{(k)})-f(\bar{x}^*).$$

Охирги икки ифодадан

$$\|\bar{x}^{(k)}-\bar{x}^*\|_3^2\leqslant\frac{1}{m}[f(\bar{x}^{(k)})-f(\bar{x}^*)]\leqslant\frac{c}{m}(1-q)^k=\frac{c}{m}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^{2k}.$$

Шу билан теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу системани

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3+x_4=7,\\2x_1+6x_2+x_3+x_4=11,\\x_1+x_2+8x_3+2x_4=23,\\x_1+x_2+2x_3+4x_4=17\end{cases}$$

градиентлар методи билан ечайлик.

Ечиш. Итерацион методда хато ўз-ўзидан тузатиладиган бўлганлиги учун, дастлабки қадамдаги ҳисоблашларни катта аниқликда олиб бориш шарт эмас. Дастлабки яқинлашиш сифатида $\bar{x}^{(0)}=(1,\ 1,\ 1,\ 1)'$ векторни оламиз, у ҳолда

$$\bar{r}^{(0)}=\bar{b}-A\bar{x}^{(0)}=(9,\ 10,\ 12,\ 8)',\ A\bar{r}^{(0)}=(12,\ 22,\ 115,\ 57)',$$

$$\alpha_0=\frac{(\bar{r}^{(0)},\ \bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)},\ A\bar{r}^{(0)})}=\frac{207}{1776}=0{,}117;$$

$$\bar{x}^{(1)}=(0{,}767;\ 1{,}117;\ 2{,}282;\ 2{,}049)'.$$

Навбатдаги қадамларни (9.5) — (9.7) формулалар ёрдамида давом эттирамиз:

$$\begin{aligned}
x^{(2)}&=(0{,}008;\ 0{,}767;\ 2{,}006;\ 2{,}575)',\\
x^{(3)}&=(0{,}105;\ 0{,}974;\ 2{,}124;\ 2{,}794)',\\
x^{(4)}&=(0{,}023;\ 0{,}980;\ 1{,}986;\ 2{,}898)',\\
x^{(5)}&=(0{,}028;\ 1{,}005;\ 2{,}027;\ 2{,}955)',\\
x^{(6)}&=(0{,}007;\ 0{,}994;\ 2{,}002;\ 2{,}970)',\\
x^{(7)}&=(0{,}00786;\ 1{,}00133;\ 2{,}00838;\ 2{,}98671)',\\
x^{(8)}&=(0{,}002131;\ 0{,}998390;\ 2{,}000618;\ 2{,}990963)'.
\end{aligned}$$

Аниқ ечим $\overline{x}^* = (0,\ 1,\ 2,\ 3)'$ билан такрибий ечим орасидаги фарқ қуйидагича экан

$$\|\overline{x}^{(8)} - \overline{x}^*\|_3 = \sqrt{(\overline{x}^{(8)} - \overline{x}^*,\ \overline{x}^{(8)} - \overline{x}^*)} =$$

$$= \sqrt{(0{,}002131)^2 + (0{,}001910)^2 + (0{,}000618)^2 + (0{,}009037)^2} < 0{,}0095.$$

10-§. ҚЎШМА ГРАДИЕНТЛАР МЕТОДИ

Бу методнинг ҳам асосий ғояси градиентлар методи каби

$$f(\overline{x}) = (A\overline{x},\ \overline{x}) - 2(\overline{b},\ \overline{x}) \qquad (10.1)$$

функционални минималлаштиришдан иборатдир. Худди ўтган параграфдаги каби, бу ерда ҳам $f(\overline{x})$ га минимумни таъминловчи вектор $\overline{x}^*$ симметрик ва мусбат аниқланган A матрицали $A\overline{x} = \overline{b}$ системанинг ечими бўлади. Бу метод ўзида аниқ ва итерацион методларнинг ижобий хусусиятларини мужассамлаштирган. Бу метод итерацион метод сифатида ҳар доим яқинлашади ва ўз хатосини ўзи тузатиб боради. Иккинчи томондан бирор дастлабки яқинлашиш танлангандан кейин, n-қадамда (ундан ўтмасдан) итерация жараёни узилиб, аниқ ечимни беради.

Қўшма градиентлар методини ноль элементлари кўп бўлган тенгламалар системасини ечишда қўллаш маъқулдир, системани бу метод билан ечганда матрица элементлари фақат векторга кўпайтиришдагина қатнашади, ЭҲМ ларда эса матрицани векторга кўпайтиришни шундай ташкил этиш мумкинки, арифметик амалларда нолдан фарқли элементлар қатнашсин.

Градиентлар методидагидек бирор дастлабки яқинлашиш вектори $\overline{x}^{(0)} = (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)})$ ни танлаб олиб, навбатдаги яқинлашиш векторини

$$\overline{x}^{(1)} = \overline{x}^{(0)} + \alpha_0 \overline{r}^{(0)} \qquad (10.2)$$

формула ёрдамида ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\overline{r}^{(0)} = (r_1^{(0)},\ r_2^{(0)},\ \ldots,\ r_n^{(0)}) = \overline{b} - A\overline{x}^{(0)}, \qquad (10.3)$$

$$\alpha_0 = \frac{(\overline{r}^{(0)},\ \overline{r}^{(0)})}{(A\overline{r}^{(0)},\ \overline{r}^{(0)})}\ .$$

Навбатдаги яқинлашишни қуйидагича топамиз. $\overline{x}^{(0)}$ нуқтадан $(n-1)$ ўлчовли

$$(A\overline{r}^{(0)},\ \overline{x} - \overline{x}^{(0)}) = 0 \qquad (10.4)$$

T_{n-1} гипертекислик ўтказамиз ва янгидан ҳосил бўлган хатоликни $\overline{r}^{(1)}$ орқали белгилаймиз:

$$\overline{r}^{(1)} = \overline{b} - A\overline{x}^{(1)} = \overline{r}^{(0)} - \alpha_0 A\overline{r}^{(0)}. \qquad (10.5)$$

$\overline{r}^{(1)}$ вектор $f(\overline{x}) = f(\overline{x}^{(1)})$ сиртнинг $\overline{x}^{(1)}$ нуқтасидаги нормал бўйича йўналтирилган (чунки $f(\overline{x})$ нинг бирор нуқтадаги энг тез ўзгариш йўналиши шу нуқтадан ўтказилган нормал йўналиши билан устма-уст тушади), $\overline{r}^{(0)}$ вектор эса шу нуқтадан ўтадиган уринма текисликка параллелдир. Шунинг учун ҳам $\overline{r}^{(0)}$ ва $\overline{r}^{(1)}$ лар ўзаро ортогоналдир:

$$(\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(1)}) = 0. \qquad (10.6)$$

T_{n-1} гипертекислик $\overline{x}^* = A^{-1}\overline{b}$ нуқтадан ўтади, чунки

$$(A\overline{r}^{(0)}, A^{-1}\overline{b} - \overline{x}^{(1)}) = (\overline{r}^{(0)}, \overline{b} - A\overline{x}^{(1)}) = (\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(1)}) = 0.$$

Демак, (10.1) системанинг ечими $\overline{x}^{(1)}$ нуқтадан ўтувчи T_{n-1} гипертекисликда ётар экан. Лекин $\overline{x}^{(1)}$ нуқтадан $\overline{x}^*$ га келиш учун T_{n-1} текисликда қайси йўналиш бўйича ҳаракат қилишни билмаймиз. Бу йўналишни аниқлаш учун бизда етарли маълумот йўқ. Шунинг учун ҳам T_{n-1} да ётувчи бирор $\overline{p}^{(1)}$ векторни аниқлаб олиб, $\overline{x}^{(1)}$ нуқтадан шу йўналиш бўйича $f(\overline{x}^{(1)} + \alpha\overline{p}^{(1)})$ минимумга эришгунга қадар ҳаракат қиламиз. Ихтиёрий β учун $\overline{r}^{(1)} + \beta\overline{r}^{(0)}$ вектор $f(\overline{x}) = f(\overline{x}^{(1)})$ сиртнинг $\overline{x}^{(1)}$ нуқтасида ўтказилган бирор нормал текисликка параллелдир. Энди β ни шундай танлаймизки, $\overline{r}^{(1)} + \beta\overline{r}^{(0)}$ вектор T_{n-1} текисликда ётсин, яъни $A\overline{r}^{(0)}$ га ортогонал бўлсин:

$$(\overline{r}^{(1)} + \beta_0\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)}) = (\overline{r}^{(1)}, A\overline{r}^{(0)}) + \beta_0(\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)}) = 0. \qquad (10.7)$$

Бундан эса

$$\beta_0 = -\frac{(\overline{r}^{(1)}, A\overline{r}^{(0)})}{(\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)})}. \qquad (10.8)$$

Шундай қилиб, $\overline{p}^{(1)}$ вектор сифатида T_{n-1} гипертекисликда ётувчи $\overline{r}^{(1)} + \beta_0\overline{r}^{(0)}$ векторни олишимиз мумкин:

$$\overline{p}^{(1)} = \overline{r}^{(1)} + \beta_0\overline{r}^{(0)}. \qquad (10.9)$$

Кейин $\frac{d}{d\alpha}f(\overline{x}^{(1)} + \alpha\overline{p}^{(1)}) = 0$ тенгликдан

$$\alpha_1 = \frac{(\overline{r}^{(1)}, \overline{p}^{(1)})}{(\overline{r}^{(1)}, A\overline{p}^{(1)})} \qquad (10.10)$$

ни ҳосил қиламиз. $\overline{x}^*$ ечимга иккинчи яқинлашиш сифатида $\overline{x}^{(2)} = \overline{x}^{(1)} + \alpha_1\overline{p}^{(1)}$ векторни оламиз. Хатолик вектори

$$\overline{r}^{(2)} = \overline{b} - A\overline{x}^{(2)} = \overline{r}^{(1)} - \alpha_1 A\overline{p}^{(1)} \qquad (10.11)$$

$\overline{x}^{(2)}$ нуқтада $f(\overline{x}) = f(\overline{x}^{(2)})$ сиртга ўтказилган нормал бўйича йўналишга эга. Энди $\overline{r}^{(2)}$ векторнинг $\overline{r}^{(0)}$ ва $\overline{r}^{(1)}$ га ортогоналлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, (10.6) — (10.11) га кўра

$$(\overline{r}^{(2)}, \overline{r}^{(0)}) = (\overline{r}^{(1)} - \alpha A\overline{p}^{(1)}, \overline{r}^{(0)}) = -\alpha_1(A\overline{p}^{(1)}, \overline{r}^{(0)}) =$$

$$= -\alpha_1(\overline{p}^{(1)}, A\overline{r}^{(0)}) = -\alpha_1(\overline{r}^{(1)} + \beta_0\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)}) = 0,$$

$$(\overline{r}^{(2)}, \overline{r}^{(1)}) = (\overline{r}^{(1)} - \alpha_1 A\overline{p}^{(1)}, \overline{p}^{(1)} - \beta_0\overline{r}^{(0)}) = (\overline{r}^{(1)}, \overline{p}^{(1)}) -$$

$$-\alpha_1(A\overline{p}^{(1)}, \overline{p}^{(1)}) = 0.$$

$\bar{x}^{(2)}$ нуқтадан ўтувчи

$$(A\bar{r}^{(0)}, \bar{x}-\bar{x}^{(1)})=0, \quad (A\bar{p}^{(1)}, \bar{x}-\bar{x}^{(2)})=0$$

$(n-2)$ ўлчовли гипертекисликни T_{n-2} орқали белгилаймиз. $\bar{x}^*$ нуқта T_{n-2} да ётади, чунки $\bar{x}^* \in T_{n-1}$ бўлганлиги учун $(A\bar{r}^{(0)}, \bar{x}^*-\bar{x}^{(1)})=0$ бўлиб, иккинчи томондан

$$(A\bar{p}^{(1)}, \bar{x}^*-\bar{x}^{(2)}) = (\bar{p}^{(1)}, A\cdot A^{-1}\bar{b}-A\bar{x}^{(2)}) = (\bar{p}^{(1)}, \bar{b}-A\bar{x}^{(2)}) = \\ = (\bar{r}^{(1)}+\beta_0\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(2)})=0.$$

Ҳозир яна $\bar{x}^{(2)}$ топилаётган пайтдаги ҳолатга келиб қолдик, яъни бизга $\bar{x}^{(2)}$ яқинлашиш ва $\bar{x}^{(2)}$ ҳамда $\bar{x}^*$ лардан ўтувчи T_{n-2} гипертекислик маълум. Шунинг учун ҳам биз худди аввалгидек иш тутамиз. Ихтиёрий β учун $\bar{r}^{(2)}+\beta\bar{p}^{(1)}$ вектор T_{n-1} га параллел, чунки

$$(\bar{r}^{(2)}+\beta\bar{p}^{(1)}, A\bar{r}^{(0)}) = (\bar{r}^{(2)}, A\bar{r}^{(0)}) + \beta(\bar{r}^{(1)}, A\bar{r}^{(0)}) = (\bar{r}^{(2)}, A\bar{r}^{(0)}) = \\ = \left(\bar{r}^{(2)}, \frac{1}{\alpha_0}(\bar{r}^{(0)}-\bar{r}^{(1)})\right)=0.$$

Энди β ни шундай танлаймизки, $\bar{r}^{(2)}+\beta\bar{p}^{(1)}$ вектор T_{n-2} га параллел бўлсин, яъни бу векторнинг $A\bar{p}^{(1)}$ векторга ортогонал бўлишлигини талаб қиламиз:

$$(\bar{r}^{(2)}+\beta_1\bar{p}^{(1)}, A\bar{p}^{(1)}) = (\bar{r}^{(2)}, A\bar{p}^{(1)}) + \beta_1(\bar{p}^{(1)}, A\bar{p}^{(1)})=0.$$

Бундан эса

$$\beta_1 = -\frac{(\bar{r}^{(2)}, A\bar{p}^{(1)})}{(\bar{p}^{(1)}, A\bar{p}^{(1)})}. \qquad (10.12)$$

Энди $\bar{x}^{(2)}$ нуқтадан $\bar{r}^{(2)}+\beta_1\bar{p}^{(1)}$ вектор йўналиши томон $f(\bar{x}^{(2)}+\alpha\bar{p}^{(2)})$ минимумга эришгунга қадар ҳаракат қиламиз. Минимум шартидан

$$\alpha_2 = \frac{(\bar{r}^{(2)}, \bar{p}^{(2)})}{(\bar{p}^{(2)}, A\bar{p}^{(2)})}$$

ни топамиз. $\bar{x}^*$ ечимнинг учинчи яқинлашиши сифатида $\bar{x}^{(3)}=\bar{x}^{(2)}+\alpha_2\bar{p}^{(2)}$ ни оламиз. Навбатдаги хатолик вектори

$$\bar{r}^{(3)}=\bar{b}-A\bar{x}^{(3)}=\bar{r}^{(2)}-\alpha_2 A\bar{p}^{(2)}$$

дан иборат. Бу жараённи давом эттириб қуйидаги рекуррент муносабатлар ёрдамида $\{\bar{x}^{(k)}\}$, $\{\bar{r}^{(k)}\}$, $\{\bar{p}^{(k)}\}$ векторлар ва $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ сонлар кетма- кетлигини аниқлаймиз:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{p}^{(0)}=\bar{r}^{(0)}=\bar{b}-A\bar{x}^{(0)}, \quad \alpha_k=\dfrac{(\bar{r}^{(k)}, \bar{p}^{(k)})}{(\bar{p}^{(k)}, A\bar{p}^{(k)})}, \\ \bar{x}^{(k+1)}=\bar{x}^{(k)}+\alpha_k\bar{p}^{(k)}, \quad \bar{r}^{(k+1)}=\bar{b}-A\bar{x}^{(k+1)}=\bar{r}^{(k)}-\alpha_k A\bar{p}^{(k)}, \\ \beta_k=-\dfrac{(\bar{r}^{(k+1)}), A\bar{p}^{(k)})}{(\bar{p}^{(k)}, A\bar{p}^{(k)})}, \quad \bar{p}^{(k+1)}=\bar{r}^{(k+1)}+\beta_k\bar{p}^{(k)}. \end{array}\right. \qquad (10.13)$$

Бу векторлар учун қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

$$(\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j)}) = 0, \text{ агар } i > j \text{ бўлса}, \tag{10.14}$$

$$(\bar{r}^{(i)}, \bar{r}^{(j)}) = 0, \text{ агар } i \neq j \text{ бўлса}. \tag{10.15}$$

Ҳақиқатан ҳам, $\bar{p}^{(i)}$ векторларнинг ҳосил қилинишига кўра $i \neq j$ бўлганда

$$(\bar{p}^{(i)}, A\bar{p}^{(j)}) = (A\bar{p}^{(i)}, \bar{p}^{(j)}) = 0.$$

Бундан ташқари

$$(\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j)}) = (\bar{r}^{(i-1)} - \alpha_{i-1}A\bar{p}^{(i-1)}, \bar{p}^{(j)}) = (\bar{r}^{(i-1)}, \bar{p}^{(j)}) -$$
$$- \alpha_{i-1}(A\bar{p}^{(i-1)}, \bar{p}^{(j)}).$$

Агар $i = j + 1$ бўлса, у ҳолда α_{i-1} нинг таърифига кўра охирги тенглик нолга тенг; агар $i > j + 1$ бўлса, у ҳолда $(A\bar{p}^{(i-1)}, \bar{p}^{(j)}) = 0$ ва исботланганга кўра: $(\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j)}) = (\bar{r}^{(i-1)}, \bar{p}^{(j)})$. $\bar{r}^{(i)}$ нинг индексини кетма-кет камайтириб, бир неча қадамдан сўнг (α_j нинг таърифига кўра) $(\bar{r}^{(j+1)}, \bar{p}^{(j)}) = (\bar{r}^{(j)}, \bar{p}^{(j)}) - \alpha_j(A\bar{p}^{(j)}, \bar{p}^{(j)}) = 0$ скаляр кўпайтмага эга бўламиз.

Шундай қилиб, (10.14) исбот бўлди. (10.15) ни исботлаш учун $i > j$ деб оламиз (чунки i ва j индекслар тенг ҳуқуқлидир).

У ҳолда

$$(\bar{r}^{(i)}, \bar{r}^{(j)}) = (\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j)} - \beta_{j-1}\bar{p}^{(j-1)}) =$$
$$= (\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j)}) - \beta_{j-1}(\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j-1)}) = 0.$$

n ўлчовли векторлар фазосида ўзаро ортогонал векторларнинг сони n тадан ошмаслиги сабабли бирор $k \leqslant n$ қадамда $\bar{r}^{(k)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k)} = 0$ га эга бўламиз, яъни $\bar{x}^{(k)}$ (10.1) системанинг ечими бўлади.

Қўшма градиентлар методи ҳам баъзи камчиликлардан ҳоли эмас. Бу методдаги ортогоналлаштириш жараёни яхлитлаш хатосига нисбатан нотурғун бўлиши ҳам мумкин. (10.13) формулада $\bar{r}^{(k-1)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k)} = \bar{r}^{(k-1)} - \alpha_{k-1}A\bar{p}^{(k-1)}$ деб олдик. Аммо яхлитлаш ҳисобига бу ерда тенглик бажарилмаслиги ҳам мумкин. Нотурғунликни сусайтириш мақсадида, $\bar{r}^{(k)}$ векторни $\bar{r}^{(k)} = \bar{r}^{(k-1)} - \alpha_{k-1} \times A\bar{p}^{(k-1)}$ формула бўйича ҳисоблаб, йўл-йўлакай $\bar{r}^{(k)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k)}$ формула билан ҳам ҳисоблаб бориш ва натижаларни солиштириб туриш керак. Агар булар бир-биридан фарқ қилса, $\bar{r}^{(k)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k)}$ деб олиш лозимдир.

Мисол. Қуйидаги система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ x_2 + 5x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_3 + 8x_4 = 2 \end{cases}$$

қўшма градиентлар методи билан ечилсин.

Е ч и ш. Системанинг

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

матрицаси симметрик ва бош минорлари мусбат, шунинг учун у мусбат аниқланган ҳамдир. $\overline{x}^{(0)}$ сифатида $(1, 0, 0, 0)'$ векторни оламиз. Барча ҳисоблашларни (10.13) формулалар ёрдамида олиб борамиз:

$$\overline{p}^{(0)} = \overline{r}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A\overline{p}^{(0)} = (-9, -20, 17, 10)',$$

$$\alpha_0 = \frac{(\overline{r}^{(0)}, \overline{p}^{(0)})}{(\overline{p}^{(0)}, A\overline{p}^{(0)})} = \frac{4+16+16+1}{18+80+68+10} = \frac{37}{176} = 0{,}210227;$$

$$\overline{x}^{(1)} = \overline{x}^{(0)} - \alpha_0 A\overline{p}^{(0)} = (-0{,}107957;\ -0{,}840908;\ 0{,}840908;\ 0{,}210227);$$

$$\overline{r}^{(1)} = \overline{r}^{(0)} - \alpha_0 A\overline{p}^{(0)} = (-0{,}107957;\ 0{,}204590;\ 0{,}426141;\ -1{,}102270)';$$

$$\beta_0 = -\frac{(\overline{r}^{(1)}, A\overline{p}^{(0)})}{(\overline{p}^{(0)}, A\overline{p}^{(0)})} = \frac{6{,}897490}{176} = 0{,}039190,$$

$$\overline{p}^{(1)} = \overline{r}^{(1)} + \beta_0\overline{p}^{(0)} = (-0{,}186337;\ 0.047780;\ 0{,}582901;\ -1{,}063080)'.$$

Ҳисоблаш давомининг натижаси 15- жадвалда келтирилган.

15- жадвал

k	$\overline{x}^{(k)}$	$\overline{r}^{(k)}$	$\overline{p}^{(k)}$	$A\overline{p}^{(k)}$	α_k	β_k
0	1 0 0 0	— 2 — 4 4 1	— 2 — 4 4 1	— 9 — 20 17 10	0,210227	0, 039190
1	0,579546 — 0,840908 0,840908 0,210227	— 0,107957 0,204540 0,426141 — 1,102270	— 0,186337 0,047780 0,582901 — 1,063080	—1,153857 0,449127 1,899205 —8,108076	0,146091	—1,683324
2	0,607103 — 0,833843 0,927116 0,179136	— 0,118554 0,027893 0,018901 — 0,967309	— 0,432221 — 0,052534 — 0,962313 0,822203	0,284914 —2,089427 0,192645 5,183090	—0,187983	0,011951
3	0,683354 — 0,823967 1,108015 0,024576	— 0,064995 — 0,036488 — 0,740068 0,007025	— 0,071220 — 0,037116 — 0,752182 0,016851	—0,128009 —1,028142 —3,781174 —0,688591	0,195565	
4	0,674426 — 0,831226 0,960914 0,027871					

Демак, $x_1 = 0{,}674426$; $x_2 = -0{,}831226$;
$x_3 = 0{,}960914$; $x_4 = 0{,}027871$.

11- §. МИНИМАЛ ФАРҚЛАР МЕТОДИ

Бу метод М. А. Красноселиский ва С. Г. Крейн томонидан 1952 йилда яратилган эди. Фараз қилайлик, A мусбат аниқланган матрица бўлиб, $\overline{x}^{(0)}$ эса $A\overline{x} = \overline{b}$ система ечимининг дастлабки яқинлашиши бўлсин. Одатдагидек, $\overline{r}^{(0)}$ орқали фарқлар векторини, яъни $\overline{b} - A\overline{x}^{(0)}$ ни белгилаймиз. Навбатдаги яқинлашиш $\overline{x}^{(1)}$ ни градиентлар методидагидек $\overline{x}^{(0)} + \alpha_0\overline{r}^{(0)}$ кўринишда излаймиз ва α_0 параметрни шундай танлаб оламизки, $\|\overline{r}^{(1)}\|^2 = (\overline{r}^{(1)}, \overline{r}^{(1)})$ функционал минимумга айлансин. Бу ерда $\overline{r}^{(1)} = \overline{b} - A\overline{x}^{(1)} = \overline{r}^{(0)} - A(\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(0)}) = \overline{r}^{(0)} - \alpha_0 A\overline{r}^{(0)}$. Шундай қилиб, α_0 ни ушбу

$$
\begin{aligned}
(\overline{r}^{(1)}, \overline{r}^{(1)}) &= (\overline{r}^{(0)} - \alpha_0 A\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(0)} - \alpha_0 A\overline{r}^{(0)}) = \\
&= (\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(0)}) - 2\alpha_0(\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)}) + \alpha_0^2(A\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)}) = \\
&= (\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(0)}) - \frac{(A\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(0)})^2}{(A\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)})} + \\
&+ (A\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)}) \left[\alpha_0 - \frac{(A\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(0)})}{(A\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)})}\right]^2
\end{aligned}
$$

ифоданинг минимумга айланиш шартидан топамиз. Бу ифода эса ўзининг минимал қиймати $(\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(0)}) - \frac{(A\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(0)})^2}{(A\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)})}$ га $\alpha_0 = \frac{(A\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(0)})}{(A\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)})}$ бўлганда эришади. Демак, биринчи қадамда қуйидагига эга бўлдик:

$$\overline{x}^{(1)} = \overline{x}^{(0)} + \alpha_0\overline{r}^{(0)}, \qquad \alpha_0 = \frac{(A\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(0)})}{(A\overline{r}^{(0)}, A\overline{r}^{(0)})}.$$

Иккинчи қадамда эса

$$\overline{r}^{(1)} = \overline{b} - A\overline{x}^{(1)} = \overline{r}^{(0)} - \alpha_0 A\overline{r}^{(0)},$$

$$\alpha_1 = \frac{(A\overline{r}^{(1)}, \overline{r}^{(1)})}{(A\overline{r}^{(1)}, A\overline{r}^{(1)})}, \quad \overline{x}^{(2)} = \overline{x}^{(1)} + \alpha_1\overline{r}^{(1)}.$$

Худди шунга ўхшаш k- қадамда қуйидаги формулаларга эга бўламиз: $\overline{r}^{(k)} = \overline{b} - A\overline{x}^{(k)} = \overline{r}^{(k-1)} - \alpha_{k-1}A\overline{r}^{(k-1)}$,

$$\alpha_k = \frac{(A\overline{r}^{(k)}, \overline{r}^{(k)})}{(A\overline{r}^{(k)}, A\overline{r}^{(k)})}, \quad \overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} + \alpha_k\overline{r}^{(k)}.$$

Яқинлашиш ҳақида градиентлар методидаги каби қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. $\overline{x}^{(0)}, \overline{x}^{(1)}, \ldots, \overline{x}^{(k)} \ldots$ кетма-кет яқинлашишлар $A\overline{x} = \overline{b}$ система ечимига геометрик прогрессия тезлигида яқинлашади.

Мисол. Ушбу система

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 17 \end{cases}$$

минимал фарқлар методи билан ечилсин.

Ечиш. Дастлабки яқинлашиш сифатида $\overline{x}^{(0)} = (0,\ 0,\ 0,\ 1)'$ векторни оламиз, у ҳолда

$$\overline{r}^{(0)} = \overline{b} - A\overline{x}^{(0)} = (-3,\ 0,\ 9,\ 5)',\quad A\ \overline{r}^{(0)} = (-1,\ 8,\ 79,\ 35)',$$

$$\alpha_0 = \frac{(A\overline{r}^{(0)},\ \overline{r}^{(0)})}{(A\overline{r}^{(0)},\ A\overline{r}^{(0)})} = \frac{889}{7531} = 0{,}1180454;$$

$$\overline{x}^{(1)} = (-0{,}354136;\ \ 0;\ 1{,}062408;\ \ 1{,}590227)'.$$

Шунга ўхшаш навбатдаги яқинлашишларни топишимиз мумкин:

$$\begin{aligned} \overline{x}^{(2)} &= (0{,}008460;\ \ 0{,}767495;\ \ 2{,}005787;\ \ 2{,}574838)', \\ \overline{x}^{(3)} &= (0{,}105047;\ \ 0{,}973666;\ \ 2{,}123706;\ \ 2{,}799272),' \\ \overline{x}^{(4)} &= (0{,}023240;\ \ 0{,}979935;\ \ 1{,}986107;\ \ 2{,}898334),' \\ \overline{x}^{(5)} &= (0{,}028442;\ \ 1{,}004896;\ \ 2{,}027116;\ \ 2{,}955150),' \\ \overline{x}^{(6)} &= (0{,}007439;\ \ 0{,}994176;\ \ 2{,}001999;\ \ 2{,}969578),' \\ \overline{x}^{(7)} &= (0{,}007863;\ \ 1{,}001331;\ \ 2{,}008379;\ \ 2{,}986709),' \\ \overline{x}^{(8)} &= (0{,}002131;\ \ 0{,}998390;\ \ 2{,}000618;\ \ 2{,}990963)'. \end{aligned}$$

Аниқ ечим $\overline{x}^* = (0,\ 1,\ 2,\ 3)^*$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

МАШҚЛАР

1. Қуйидаги тенгламалар системаси юқоридаги барча методлар билан ечилсин:

$$\begin{cases} 2{,}9112x_1 + 0{,}5211x_2 + 0{,}6756x_3 + 0{,}1214x_4 = -0{,}9964, \\ 0{,}5211x_1 + 4{,}0015x_2 + 0{,}8161x_3 + 0{,}7218x_4 = 0{,}8683, \\ 0{,}6756x_1 + 0{,}8161x_2 + 5{,}5516x_3 + 0{,}4140x_4 = 2{,}8520, \\ 0{,}1214x_1 + 0{,}7218x_2 + 0{,}4140x_3 + 6{,}7550x_4 = 6{,}9013, \end{cases}$$

2. Агар барча

$$|a_{11}|,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \ldots$$

детерминантлар нолдан фарқли бўлса, у ҳолда $A\overline{x} = \overline{b}$ системани ечиш учун Гаусс методини қўллаш мумкинлигини кўрсатинг.

3. Қўшма градиентлар методида мусбат аниқланган симметрик A матрица учун барча $\overline{r}^{(0)}, \overline{r}^{(1)}, \ldots, \overline{r}^{(n-1)}$ векторлар нолдан фарқли бўлса, у ҳолда

$$\det A = (\alpha_0\, \alpha_1\ , \ldots\ \alpha_{n-1})^{-1}$$

эканлигини кўрсатинг.

4. 7- § да киритилган векторлар нормаси қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиришлигини кўрсатинг:

$$\|\overline{x}\|_1 \leqslant \|\overline{x}\|_2 \leqslant n\|\overline{x}\|_1,$$

$$\|\overline{x}\|_1 \leqslant \|\overline{x}\|_3 \leqslant \sqrt{n}\|\overline{x}\|_1,$$

$$n^{-\frac{1}{2}}\|\overline{x}\|_2 \leqslant \|\overline{x}\|_3 \leqslant \|\overline{x}\|_2.$$

5. Фараз қилайлик, ихтиёрий A матрица учун $M(A)$ ва $N(A)$ қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$M(A) = n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|, \quad N(A) = \sqrt{\operatorname{tr} A^* A}.$$

Қуйидагиларни кўрсатинг:

1) $M(A)$ ва $N(A)$ матрицанинг нормаси;

2) Бу нормалар векторларнинг юқорида кўриб ўтилган нормаларининг бирортасига бўйсунмайди.

6. Қуйидаги тенгсизликларни исботланг:

$$\begin{aligned}
&n^{-1} M(A) \leqslant \| A \|_k \leqslant M(A) \quad (k = 1,\ 2,\ 3),\\
&n^{-1} M(A) \leqslant N(A) \leqslant M(A),\\
&n^{-\frac{1}{2}} N(A) \leqslant \| A \|_3 \leqslant N(A),\\
&n^{-\frac{1}{2}} N(A) \leqslant \| A \|_k \leqslant \sqrt{n}\, N(A) \quad (k = 1,\ 2),\\
&n^{-\frac{1}{2}} \| A \|_3 \leqslant \| A \|_k \leqslant \sqrt{n}\, \| A \|_3 \quad (k = 1,\ 2),\\
&n^{-1} \| A \|_1 \leqslant \| A \|_2 \leqslant n \| A \|_1.
\end{aligned}$$

4- БОБ. МАТРИЦАЛАРНИНГ ХОС СОН ВА ХОС ВЕКТОРЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ

1- §. УМУМИЙ МУЛОҲАЗАЛАР

Бу бобда матрицаларнинг хос сон ва хос векторларини ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

Агар бирор нолдан фарқли $\bar{x}$ вектор учун

$$A\bar{x} = \lambda \bar{x} \tag{1.1}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда λ сон A квадрат матрицанинг *хос сони* ёки *характеристик сони* дейилади. Бу тенгликни қаноатлантирадиган ҳар қандай нолдан фарқли $\bar{x}$ вектор A матрицанинг λ *хос сонига мос келадиган хос вектори* дейилади. Кўриниб турибдики, агар $\bar{x}$ хос вектор бўлса, у ҳолда $a\bar{x}$ (a — ихтиёрий сон) вектор ҳам хос вектор бўлади.

Матрицанинг хос сони ва хос вектори ҳақидаги маълумотлар математикада ва унинг бошқа соҳалардаги татбиқларида ҳам кенг қўлланилади. Олдинги бобда биз буни

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини итерацион метод билан ечиш мисолида кўрган эдик. Бу ерда итерацион процесснинг яқинлашиши ва яқинлашиш тезлиги B матрицанинг модули бўйича энг катта хос сонининг миқдорига боғлиқ эди.

Астрономия, механика, физика, химиянинг қатор масалаларида айрим матрицаларнинг барча хос сонларини ва уларга мос келадиган хос векторларини топиш талаб қилинади. Бундай масала *хос сонларнинг тўлиқ муаммоси* дейилади.

Айрим масалаларда эса, масалан, ядро масаласида, матрицанинг модули бўйича энг катта ёки энг кичик хос сонини топиш талаб қилинади. Тебранувчи жараёнларда эса матрица хос сонларининг модуллари бўйича иккита энг каттасини аниқлашга зарурият туғилади. Матрицаларнинг битта ёки бир нечта хос сон ва хос векторларини топиш *хос сонларининг қисмий муаммоси* дейилади.

Бир жинсли (1.1) системанинг нолдан фарқли ечими мавжуд бўлиши учун

$$D(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (1.2)$$

шарт бажарилиши керак. Бу тенглама одатда A матрицанинг асрий (бу термин астрономиядан кириб қолган) ёки *характеристик тенгламаси* дейилади. (1.2) тенгламанинг чап томони

$$\det(A-\lambda E)=(-1)^n(\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-\ldots-p_n) \quad (1.3)$$

n-даражали кўпҳад бўлиб, у A матрицанинг характеристик кўпҳади дейилади. Айрим ҳолларда (1.3) кўпҳад ўрнида A матрицанинг *хос кўпҳади* деб аталувчи

$$p(\lambda)=\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-\ldots-p_n \qquad (1.4)$$

кўпҳад билан иш қурилади. Матрицанинг хос сонлари унинг хос кўпҳадининг илдизлари бўлади. (1.4) кўпҳад n- даражали бўлганлиги учун у n та илдизга эга. A матрицанинг λ_i хос сонига мос келадиган хос векторларини топиш учун

$$(A-\lambda_i E)\overline{x}=\overline{0} \qquad (1.5)$$

бир жинсли тенгламалар системасининг нолдан фарқли ечимини топиш керак. Шундай қилиб, хос сон ва хос векторларни топиш масаласи уч босқичдан иборат: 1) $P(\lambda)$ ни қуриш, 2) $P(\lambda)=0$ тенгламани ечиб, барча λ_i $(i=\overline{1,n})$ хос сонларни топиш, 3) барча λ_i ларга мос келган хос векторларни (1.5) дан топиш. Бу босқичларнинг ҳар бири етарлича мураккаб ҳисоблаш масалаларидан иборатдир. Ҳақиқатан ҳам, λ (1.2) детерминантнинг ҳар бир сатри ва ҳар бир устунида қатнашганлиги учун, бундай детерминантни λ нинг даражаларига нисбатан ёйиб чиқиш, яъни (1.3) тенгликни ҳосил қилиш катта қийинчилик туғдиради. Алгебрадан маълумки, умумий ҳолда, $P(\lambda)$ нинг коэффициентларини A матрицанинг $(-1)^{i-1}$ ишора билан олинган i- тартибли бош миноралари p_i нинг йиғиндисига тенг:

$$p_1=\sum_{j=1}^{n}a_{jj},\; p_2=-\sum_{j<k}\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk}\end{vmatrix},\; p_3=\sum_{j<k<l}\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} \\ a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{lj} & a_{lk} & a_{ll}\end{vmatrix} \quad (1.6)$$

ва ҳоказо. Демак,

$$p_n=(-1)^{n-1}\det A. \qquad (1.7)$$

Яққол кўриш мумкинки, A матрицанинг i- тартибли диагонал минораларининг сони C_n^i га тенг. Демак, n- тартибли матрицани хос кўпҳади $P(\lambda)$ нинг коэффициентларини бевосита ҳисоблаш учун

$$C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$$

та ҳар хил тартибли детерминантларни ҳисоблаш керак. Етарлича катта n учун бу масала катта ҳисоблашларни талаб қилади.

Виет теоремасидан фойдаланиб, қуйидаги тенгликларни ёзишимиз мумкин:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = p_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n = (-1)^{n-1} p_n.$$

Бу тенгликларни (1.6) тенгликларнинг биринчиси ва (1.7) тенглик билан солиштирсак,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \operatorname{tr} A,$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n = \det A$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, матрицанинг барча хос сонларининг йиғиндиси унинг изи tr га (инглизча trace — из сўзидан) тенг бўлиб, уларнинг кўпайтмаси шу матрицанинг детерминантига тенг. Бу ердан хусусий ҳолда қуйидаги келиб чиқади: A матрицанинг ҳеч бўлмаганда биронта хос сони нолга тенг бўлиши учун $\det A = 0$ бўлиши зарур ва кифоядир.

Хос сонлар муаммосининг иккинчи ва учинчи босқичлари, яъни юқори даражали алгебраик тенгламаларни ечиш ва бир жинсли чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг тривиал бўлмаган ечимини топиш етарлича катта n лар учун қанчалик кўп меҳнат талаб қилишини биз 2 ва 3- бобларда кўрган эдик. Ҳозирги вақтда хос сон ва хос векторларни топиш методлари икки группага бўлинади: *аниқ ёки тўғри методлар* ва *итерацион* методлар. Биринчи группага кирадиган методлар бўйича матрицанинг хос кўпҳади топилади (яъни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ коэффициентлар ҳисобланади), кейин унинг илдизларини топиб хос сонларни ҳосил қилинади ва ниҳоят, хос сонлардан фойдаланиб хос векторлар қурилади. Бу методларнинг аниқ методлар дейилишига сабаб шундан иборатки, агар матрица элементлари аниқ берилган бўлса ва ҳисоблашлар аниқ олиб борилса, натижада характеристик кўпҳад коэффициентларининг қийматлари ҳам аниқ топилади ва хос векторларнинг компонентлари хос сонлар орқали аниқ формулалар билан ифодаланади. Аниқ методлар, одатда, хос сонларнинг тўлиқ муаммосини ечиш учун қўлланилади.

Итерацион методларда характеристик сонлар характеристик кўпҳад коэффициентларини аниқламасдан туриб, бевосита ҳисобланади. Бу эса ҳисоблаш масаласини жуда соддалаштиради: юқори даражали алгебраик тенгламаларни ечишдан озод қилади. Итерацион методларда хос сонларни ҳисоблаш билан бир вақтда хос векторлар ҳам топилади. Бу методларнинг схемаси итерацион характерга эга. Бу методларда хос сон ва хос векторлар сонли ва векторлар кетма-кетлигининг лимити сифатида топилади.

Одатда, итерацион методлар хос сонларнинг қисмий муаммосини ечиш учун, яъни матрицаларнинг битта ёки бир нечта хос сонлари ва уларга мос келадиган хос векторларни топиш учун қўлланилади. Ҳозирги вақтда тўлиқ муаммо айрим ҳолларда, махсус итерацион методлар билан ҳам ечилади. Лекин бу методлар кўп меҳнат талаб қилади.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш қадимий тарихга эга. Ҳиндлар VI асрдан бошлаб чизиқли алгебраик тенгламалар системасини еча бошлаганлар. Лекин Леверье (1840 й.) ва Якоби (1846 й.) методларини ҳисобга олмаганда, хос сон ва хос векторларни топиш методлари асримизнинг ўттизинчи йилларидан бошлаб яратилган.

2-§. А. Н. КРИЛОВ МЕТОДИ

Академик А. Н. Крилов 1931 йилда хос сонлар муаммосини ечишнинг қулай методини яратди. У ўз методининг ғоясини тушунтириш учун берилган матрица билан боғлиқ бўлган оддий дифференциал тенгламалар системасини киритади ва унинг устида алмаштириш олиб боради. Бу алмаштиришларнинг алгебраик моҳиятини аниқлаш билан Н. Н. Лузин, И. Н. Хладовский, Ф. Р. Гантмахер, Д. Қ. Фаддеевлар шуғулланишган. Биз бу ерда А. Н. Крилов методининг мана шу алгебраик интерпретациясини кўриб чиқамиз.

Матрицаларнинг минимал кўпҳадлари. Аввал чизиқли алгебрадан айрим таъриф ва теоремаларни келтирамиз. Агар A квадрат матрица учун

$$f(A) \equiv a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m E = 0$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_n$$

кўпҳад A матрица учун *нолга айлантирувчи кўпҳад* дейилади. Фақат *келтирилган,* яъни бош коэффициенти бирга тенг бўлган кўпҳадларни қараймиз. Бундай кўпҳадларнинг тўплами бўш эмас, Гамильтон-Кели теоремасига кўра A матрицанинг хос кўпҳади $P(\lambda)$ унинг нолга айлантирувчи кўпҳадидир: $P(A)=0$. Демак, n-тартибли ихтиёрий квадрат матрица учун n-даражали нолга айлантирувчи кўпҳад мавжуд. Бундай кўпҳад ягона эмас, чунки агар $P(\lambda)$ A матрица учун нолга айлантирувчи кўпҳад бўлса, у ҳолда $P(\lambda)$ га бўлинадиган ҳар қандай бошқа кўпҳад ҳам нолга айлантирувчи кўпҳад бўлади. A матрицани нолга айлантирувчи кўпҳадлар орасида энг кичик даражага эга бўлган ягона $\varphi(\lambda)$ кўпҳад мавжуд. Бу кўпҳад *A матрицанинг минимал кўпҳади* дейилади. Ҳар қандай нолга айлантирувчи кўпҳад, шу жумладан A матрицанинг хос кўпҳади $P(\lambda)$ ҳам минимал кўпҳадга бўлинади. Минимал кўпҳаднинг илдизлари хос кўпҳаднинг барча бир-биридан фарқли илдизларидан иборатдир.

Яна қуйидаги тушунчани киритамиз. Фараз қилайлик, $\bar{c}$ бирор вектор бўлсин. Маълумки, n ўлчовли фазода n тадан ортиқ чизиқли эркли вектор бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун

$$\bar{c}, A\bar{c}, A^2\bar{c}, \dots, A^n\bar{c} \tag{2.1}$$

векторлар орасида чизиқли боғланиш мавжуддир. Ҳаттоки, ихтиёрий $\bar{c}$ вектор учун ҳам

$$\varphi(A)\bar{c}=\bar{0} \tag{2.2}$$

чизиқли боғланиш мавжуд. Демак, A матрицанинг $\varphi(\lambda)$ минимал кўпҳадининг даражаси n дан кичик бўлса, (2.1) системада чизиқли эркли векторларнинг сони n дан кичикдир. Берилган $\bar{c}$ вектор учун

$$\psi(A)\bar{c}=\bar{0} \tag{2.3}$$

тенгликни қаноатлантирадиган $\psi(\lambda)$ кўпҳадлар орасида бош коэффициенти бирга тенг бўлган энг кичик даражали ягона $\varphi\bar{c}^{(\lambda)}$ кўпҳад мавжудки, унинг учун

$$\varphi_{\bar{c}}(\lambda)\bar{c}=\bar{0}$$

тенглик ўринли бўлади. Бундай кўпҳад *$\bar{c}$ векторнинг минимал кўпҳади* дейилади ва у (2.3) тенгликни қаноатлантирувчи $\psi(\lambda)$ кўпҳаднинг бўлувчиси бўлади. Хусусий ҳолда, ихтиёрий $\bar{c}$ векторнинг минимал кўпҳади $\varphi_{\bar{c}}(\lambda)$ A матрица минимал кўпҳади $\varphi(\lambda)$ нинг бўлувчиси бўлади. Агар (2.1) системада $\bar{c}, A\bar{c}, A^2\bar{c}, \dots, A^{m-1}\bar{c}$ векторлар чизиқли эркли бўлиб, $A^m\bar{c}$ уларга чизиқли боғлиқ бўлса,

$$A^m\bar{c}=q_m\bar{c}+q_{m-1}A\bar{c}+\dots+q_1A^{m-1}\bar{c},$$

у ҳолда

$$\lambda^m-q_1\lambda^{m-1}-q_2\lambda^{m-2}-\dots-q_{m-1}\lambda-q_m=0$$

кўпҳад A матрицанинг минимал кўпҳади $\varphi(\lambda)$ га ёки унинг бўлувчиси $\varphi_{\bar{c}}(\lambda)$ га тенг.

Минимал кўпҳадни топиш. Энди А. Н. Крилов методини кўриб чиқамиз. Ихтиёрий нолдан фарқли $\bar{c}^{(0)}=(c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0n})'$ векторни олиб,

$$c^{(i)}=A\bar{c}^{(i-1)}=(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})' \quad (i=\overline{1,n}) \tag{2.4}$$

векторлар кетма-кетлигини тузамиз. Юқорида айтганимиздек, бу векторлар орасида

$$q_1\bar{c}^{(n-1)}+q_2\bar{c}^{(n-2)}+\dots+q_n\bar{c}^{(0)}=\bar{c}^{(n)} \tag{2.5}$$

чизиқли комбинация мавжуддир. Агар буни координаталарда ёзиб олсак, q_1, q_2, . . . ,q_n ларни топиш учун қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} q_1 c_{n-1,1} + q_2 c_{n-2,1} + \dots + q_n c_{01} = c_{n1}, \\ q_1 c_{n-1,2} + q_2 c_{n-2,2} + \dots + q_n c_{02} = c_{n2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_1 c_{n-1,n} + q_2 c_{n-2,n} + \dots + q_n c_{0n} = c_{nn}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Бу системанинг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{n-1,1} & \dots & c_{01} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n-1,n} & \dots & c_{0n} \end{vmatrix}$$

фақат $\bar{c}^{(n-1)}, \bar{c}^{(n-2)}, \dots, \bar{c}^{(0)}$ векторлар чизиқли эркли бўлгандагина нолдан фарқлидир, чунки бу детерминантнинг устунлари шу векторлар координаталаридан тузилган.

Агар Гаусс методининг тўғри юришидаги барча n қадам бажарилиб, (2.6) система қуйидаги

$$\begin{cases} q_1 + b_{12} q_2 + b_{13} q_3 + \dots + b_{1n} q_n = d_1 \\ \qquad q_2 + b_{23} q_3 + \dots + b_{2n} q_n = d_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad q_n = d_n \end{cases} \tag{2.7}$$

учбурчак шаклга келтирилса, у ҳолда $\Delta \neq 0$ бўлиб, $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(n-1)}$ векторлар чизиқли эрклидир. У вақтда (2.7) системадан қаралаётган комбинациянинг коэффициентлари q_n, q_{n-1} . . . , q_1 ни топа оламиз.

Агар Гаусс методидаги тўғри юришнинг фақат m та қадами бажарилса, у ҳолда фақат аввалги m та $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(m-1)}$ векторлар чизиқли эркли бўлади. Керакли

$$q_1 \bar{c}^{(m-1)} + q_2 \bar{c}^{(m-2)} + \dots + q_m \bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(m)}$$

чизиқли комбинацияни координаталарда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} q_1 c_{m-1,1} + q_2 c_{m-2,1} + \dots + q_n c_{01} = c_{m1}, \\ q_1 c_{m-1,2} + q_2 c_{m-2,2} + \dots + q_m c_{02} = c_{m2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_1 c_{m-1,n} + q_2 c_{m-2,n} + \dots + q_m c_{0n} = c_{mn}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Бу системадан Гаусс методи ёрдамида m та чизиқли эркли тенгламаларни ажратиб олиб, q_n, q_{m-1}, . . . , q_1 коэффициентларни топамиз.

Шундай қилиб, биз $m = n$ бўлганда A матрицанинг хос кўпҳадини ва $m < n$ бўлганда унинг бўлувчисини топишимиз мумкин. Аввал $m = n$ бўлган ҳолни кўрайлик. Бу ҳолда (2.5) чизиқли комбинациянинг q_1, q_2, . . . , q_n коэффициентлари

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n$$

хос кўпҳаднинг мос равишда $p_1, p_2, \dots, p_n$ коэффициентларига тенг:

$$q_i = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ҳақиқатан ҳам, Гамильтон-Кели теоремасига кўра

$$P(A) \equiv A^n - p_1 A^{n-1} - \dots - p_n E = 0.$$

Бу тенгликни $\bar{c}^{(0)}$ векторга кўпайтириб ва

$$A^i \bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ларни ҳисобга олиб,

$$p_1 \bar{c}^{(n-1)} + p_2 \bar{c}^{(n-2)} + \dots + p_n \bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(n)}$$

га эга бўламиз. Бу тенгликни (2.5) дан айириб,

$$(q_1 - p_1)\bar{c}^{(n-1)} + (q_2 - p_2)\bar{c}^{(n-2)} + \dots + (q_n - p_n)\bar{c}^{(0)} = 0 \qquad (2.9)$$

ни ҳосил қиламиз.

$\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(n-1)}$ векторлар чизиқли эркли бўлганлиги учун (2.9) тенглик фақат $p_i = q_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ бўлгандагина бажарилади.

Демак, $m = n$ бўлганда қурилган чизиқли комбинациянинг кўринишига қараб, A матрицанинг $P(\lambda)$ хос кўпҳадини ёзиш мумкин. $P(\lambda) = 0$ тенгламани ечиб матрицанинг барча хос сонларини топамиз. Агар $m < n$ бўлса, қурилган чизиқли комбинация

$$q_1 \bar{c}^{(m-1)} + q_2 \bar{c}^{(m-2)} + \dots + q_m \bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(m)} \qquad (2.10)$$

кўринишга эга бўлади. Энди $\bar{c}^{(i)} = A^i \bar{c}^{(0)}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ ларни ҳисобга олиб (2.10) тенгликни

$$(A^m - q_1 A^{m-1} - q_2 A^{m-2} - \dots - q_m E)\bar{c}^{(0)} = 0$$

ёки

$$\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(A)\bar{c}^{(0)} = 0$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу ерда

$$\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda) = \lambda^m - q_1 \lambda^{m-1} - q_2 \lambda^{m-2} - \dots - q_m.$$

Демак, изланаётган комбинациянинг коэффициентлари $q_1, q_2, \dots, q_m$ $\bar{c}^{(0)}$ векторнинг минимал кўпҳади $\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda)$ нинг коэффициентларидир. Бундай кўпҳад $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(m-1)}$ векторлар чизиқли эркли бўлганлиги учун ягонадир.

Шундай қилиб, $m < n$ бўлганда биз $P(\lambda)$ нинг $\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda)$ бўлувчисини топамиз ва $\varphi_{c^{(0)}} \lambda = 0$ тенгламани ечиб, матрицанинг бир қисм хос сонларини топамиз. Дастлабки $\bar{c}^{(0)}$ *векторни бошқача танлаб*, қолган хос сонларни ҳам топиш мумкин. Шу билан бирга янги танланган вектор олдин аниқланган векторларнинг чизиқли комбинацияси бўлмаслиги керак.

Матрицанинг хос векторларини топиш. Энди хос векторларни топиш масаласига ўтамиз. Фараз қилайлик, λ_i

$$\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda) = \lambda^m - q_1 \lambda^{m-1} - q_2 \lambda^{m-2} - \dots - q_m$$

минимал кўпҳаднинг илдизи бўлсин (кейинги мулоҳазалар $m=n$ ва $m<n$ ҳоллар учун бир хил). A матрицанинг λ_i хос сонига мос келадиган $\bar{x}^{(i)}$ хос векторини олдинги пунктда топилган $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}, \ldots, \bar{c}^{(m-1)}$ векторларнинг чизиқли комбинацияси шаклида излаймиз:

$$\bar{x}^{(i)}=\beta_{i1}\bar{c}^{(0)}+\beta_{i2}\bar{c}^{(1)}+\ldots+\beta_{im}\bar{c}^{(m-1)}. \tag{2.11}$$

Бу тенгликни A га кўпайтириб ва $\bar{c}^{(j)}=A\bar{c}^{(j-1)}$ ҳамда $A\bar{x}^{(i)}=\lambda_i\bar{x}^{(i)}$ тенгликларни ҳисобга олиб,

$$\lambda_i(\beta_{i1}\bar{c}^{(0)}+\beta_{i2}\bar{c}^{(1)}+\ldots+\beta_{im}\bar{c}^{(m-1)})=$$
$$=\beta_{i1}\bar{c}^{(1)}+\beta_{i2}\bar{c}^{(2)}+\ldots+\beta_{im}\bar{c}^{(m)} \tag{2.12}$$

га эга бўламиз. Бундан ташқари, яна

$$\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(A)\bar{c}^{(0)}=\bar{c}^{(m)}-q_1\bar{c}^{(m-1)}-q_2\bar{c}^{(m-2)}-\ldots-q_m\bar{c}^{(0)}=0$$

ни ҳисобга олсак, у ҳолда (2.12) ни

$$\lambda_i(\beta_{i1}\bar{c}^{(0)}+\beta_{i2}\bar{c}^{(1)}+\ldots+\beta_{im}\bar{c}^{(m-1)})=$$
$$=\beta_{i1}\bar{c}^{(1)}+\beta_{i2}\bar{c}^{(2)}+\ldots+\beta_{i,m-1}\bar{c}^{(m-1)}+$$
$$+\beta_{im}(q_1\bar{c}^{(m-1)}+q_2\bar{c}^{(m-2)}+\ldots+q_{m-1}\bar{c}^{(1)}+q_m\bar{c}^{(0)})$$

ёки

$$(\lambda_i\beta_{i1}-\beta_{im}q_m)\bar{c}^{(0)}+(\lambda_i\beta_{i2}-\beta_{i1}-\beta_{im}q_{m-1})\bar{c}^{(1)}+$$
$$+\ldots+(\lambda_i\beta_{i,m-1}-\beta_{i,m-2}-q_2\beta_{im})\bar{c}^{(m-2)}+$$
$$+(\lambda_i\beta_{im}-\beta_{i,m-1}-q_1\beta_{im})\bar{c}^{(m-1)}=0$$

кўринишда ёзиб олишимиз мумкин. Бундан $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \ldots, \bar{c}^{(m-1)}$ векторларнинг чизиқли эрклилигини ҳисобга олсак,

$$\begin{aligned}
&\lambda_i\beta_{i1}-\beta_{im}q_m=0,\\
&\lambda_i\beta_{i2}-\beta_{i1}-\beta_{im}q_{m-1}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_i\beta_{i,m-1}-\beta_{i,m-2}-\beta_{im}q_2=0,\\
&\lambda_i\beta_{im}-\beta_{i,m-1}-\beta_{im}q_1=0
\end{aligned}$$

тенгликлар келиб чиқади. Охирги тенгликдан бошлаб, кетма-кет β_{ik} ларни топамиз:

$$\begin{aligned}
&\beta_{i,m-1}=(\lambda_i-q_1)\beta_{im},\\
&\beta_{i,m-2}=(\lambda_i^2-q_1\lambda_i-q_2)\beta_{im},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\beta_{i1}=(\lambda_i^{m-1}-q_1\lambda_i^{m-2}-\ldots-q_{m-1})\beta_{im},\\
&(\lambda_i^m-q_1\lambda_i^{m-1}-\ldots-q_m)\beta_{im}=0.
\end{aligned}$$

Охирги тенглик барча β_{im} лар учун ўринлидир, чунки

$$\varphi_{\bar{c}}(\lambda_i)=\lambda_i^m-q_1\lambda_i^{m-1}-\ldots-q_m=0.$$

Бу тенгликдан ҳисоблашни контрол қилиш учун фойдаланиш мумкин. Ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида $\beta_{im}=1$ деб олишимиз мумкин. Унда қолганлари қуйидагича топилади:

$$\begin{cases} \beta_{im}=1, \\ \beta_{i,m-1}=\lambda_i-q_1, \\ \beta_{i,m-2}=\lambda_i^2-q_1\lambda_i-q_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_{i1}=\lambda_i^{m-1}-q_1\lambda_i^{m-2}-\dots-q_{m-1}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Буларни ҳисоблашда Горнер схемасидан фойдаланиш маъқулдир. Агар берилган λ_i хос сонга A матрицанинг бир неча хос вектори мос келса, у ҳолда уларни излаш учун бошқа дастлабки векторни танлаб олиб, шу ҳисоблаш жараёнини такрорлаш мумкин.

1-мисол. А. Н. Крилов методи билан қуйидаги

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

матрицанинг характеристик кўпҳади топилсин.

Ечиш. Дастлабки $\bar{c}^{(0)}$ вектор сифатида $(1,\ 0,\ 0,\ 0)'$ ни олиб, $\bar{c}^{(1)}$, $\bar{c}^{(2)}$, $\bar{c}^{(3)}$, $\bar{c}^{(4)}$ ларни топамиз:

$$\bar{c}^{(1)}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{c}^{(2)}=\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix},\qquad \bar{c}^{(3)}=\begin{bmatrix} 3 \\ 36 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix},\qquad \bar{c}^{(4)}=\begin{bmatrix} 129 \\ 132 \\ 30 \\ 102 \end{bmatrix}.$$

Бу векторлар ёрдамида (2.6) системани тузамиз:

$$\begin{cases} 3q_1+9q_2-q_3+q_4=129, \\ 36q_1+6q_2+2q_3=132, \\ 30q_1+2q_3=30, \\ 6q_2=102. \end{cases}$$

Бу системани Гаусс методи билан ечамиз:

$$q_1=0,\qquad q_2=17,\qquad q_3=15,\qquad q_4=-9.$$

Демак, A матрицанинг характеристик кўпҳади

$$\varphi(\lambda)=\lambda^4-17\lambda^2-15\lambda+9$$

экан.

2-мисол. Қуйидаги

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix}$$

матрицанинг хос сонлари ва хос векторлари топилсин.

Ечиш. 1- мисолдагидек, $\bar{c}^{(i)}$ векторларни топамиз:

$$\bar{c}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^{(2)} = \begin{bmatrix} -29 \\ -15 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^{(3)} = \begin{bmatrix} 125 \\ 63 \\ 63 \end{bmatrix}.$$

(2.6) система қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} -29q_1 + 5q_2 + q_3 = 125, \\ -15q_1 + 3q_2 \qquad = 63, \\ -15q_1 + 3q_2 \qquad = 63. \end{cases}$$

Бу системани Гаусс методи билан ечганда тўғри юришнинг учинчи қадами бажарилмайди, чунки учинчи тенглама иккинчи билан бир хил. Шунинг учун ҳам (2.8) системани тузамиз:

$$\begin{cases} 5q_1 + q_2 = -29, \\ 3q_1 \qquad = -15. \end{cases}$$

Бундан $q_1 = -5$, $q_2 = -4$ ва $\varphi_{\bar{c}}(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$. Шундай қилиб, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$. Энди учинчи хос сонни топиш учун $a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ тенгликдан фойдаланамиз: $5 + 14 - 25 = -1 - 4 + \lambda_3$. Демак, $\lambda_3 = -1$. Шундай қилиб, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ экан. Энди бу хос сонларга мос келадиган хос векторларни топамиз. Бунинг учун (2.11) — (2.13) ва $\beta_{i2} = 1$ дан фойдаланиб, қуйидагиларни ёза оламиз:

$$\bar{x}^{(i)} = \beta_{i1}\bar{c}^{(0)} + \beta_{i2}\bar{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5(\lambda_i - q_1) + 1 \\ 3(\lambda_i - q_1) \\ 3(\lambda_i - q_1) \end{bmatrix}.$$

Бундан эса

$$\bar{x}^{(1)} = (6,\ 3,\ 3)', \qquad \bar{x}^{(2)} = (21,\ 12,\ 12)'$$

ни топамиз. Учинчи векторни топиш учун дастлабки векторни бошқача танлаш керак.

3- §. Қ. ЛАНЦОШ МЕТОДИ

Бу метод ҳам Крилов методига ўхшашдир. Фақат бу ерда хос кўпҳад коэффициентларини аниқлайдиган вектор формада ёзилган ушбу

$$q_1\bar{c}^{(n-1)} + q_2\bar{c}^{(n-2)} + \ldots + q_n\bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(n)}$$

системани ёки минимал кўпҳад коэффициентларини аниқлайдиган

$$q_1\bar{c}^{(m-1)} + q_2\bar{c}^{(m-2)} + \ldots + q_m\bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(m)}$$

системани ечиш учун ортогоналлаштириш методи қўлланилади.

Хос кўпҳадни топиш. Ўзаро ортогонал бўлган векторлар системаси кетма-кет қурилади. Берилган дастлабки вектор $\bar{c}^{(0)} \neq \bar{0}$ ва унинг итерацияси $A\bar{c}^{(0)}$ га кўра $\bar{c}^{(0)}$ га ортогонал бўлган $\bar{c}^{(1)} = A\bar{c}^{(0)} - g_{10}\bar{c}^{(0)}$ векторни қурамиз. Бу ҳар доим мумкин ва $(\bar{c}^{(1)}, \bar{c}^{(0)}) = 0$ ортогоналлик шарти g_{10} ни топишга имкон беради:

$$g_{10} = \frac{(A\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(0)})}{(\bar{c},^{(0)}\ \bar{c}^{(0)})}.$$

Агар $\bar{c}^{(1)} = \bar{0}$ бўлса, у ҳолда $\bar{c}^{(0)}$ ва $A\bar{c}^{(0)}$ векторлар ортогонал бўлади ҳамда $Q_1(\lambda) = \lambda - g_{10}$ кўпҳад A матрица минимал кўпҳадининг бўлувчиси бўлиб, бу кўпҳаднинг илдизи $\lambda = g_{10}$ матрицанинг хос сони бўлади. Бундан кейин $\bar{c}^{(0)}$ устида бошқа амал бажарилмайди. Агар $\bar{c}^{(1)} \neq \bar{0}$ бўлса, у ҳолда $A\bar{c}^{(1)}$ векторни тузамиз ва $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}$ ларга ортогонал бўлган

$$\bar{c}^{(2)} = A\bar{c}^{(1)} - g_{21}\bar{c}^{(1)} - g_{20}\bar{c}^{(0)}$$

векторни қурамиз. Ушбу $(\bar{c}^{(2)}, \bar{c}^{(1)}) = 0$ ва $(\bar{c}^{(2)}, \bar{c}^{(0)}) = 0$ ортогоналлик шартлари g_{21} ва g_{20} ни топишга имкон беради:

$$g_{21} = \frac{(A\bar{c}^{(1)}, \bar{c}^{(1)})}{(\bar{c}^{(1)}, \bar{c}^{(1)})}, \qquad g_{20} = \frac{(A\bar{c}^{(1)}, \bar{c}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(0)})}.$$

Агар $\bar{c}^{(2)} = \bar{0}$ бўлса, у ҳолда

$$A\,(A\bar{c}^{(0)} - g_{10}\bar{c}^{(0)}) - g_{21}(A\bar{c}^{(0)} - g_{20}\bar{c}^{(0)}) = 0$$

тенглик $\bar{c}^{(0)}$, $A\bar{c}^{(0)}$, $A^2\bar{c}^{(0)}$ векторлар орасидаги чизиқли боғланишни беради ва

$$Q_2(\lambda) = (\lambda - g_{21})\,(\lambda - g_{20}) - g_{20} = (\lambda - g_{21})\;Q_1\,(\lambda) - g_{20}$$

кўпҳад эса A матрица минимал кўпҳаднинг бўлувчиси бўлади. Агар $\bar{c}^{(2)} \neq \bar{0}$ бўлса, у ҳолда бу жараён давом эттирилади.

Фараз қилайлик, $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}$, . . . , $\bar{c}^{(m-1)}$ векторлар топилган бўлиб, барча $i \neq j$ $(i,\ j = \overline{0,\ m-1})$ учун $(\bar{c}^{(i)}, \bar{c}^{(j)}) = 0$ ортогоналлик шартини қаноатлантирсин. У ҳолда

$$\bar{c}^{(m)} = A\bar{c}^{(m-1)} - g_{m,m-1}\bar{c}^{(m-1)} - g_{m,m-2}\bar{c}^{(m-2)} - \ldots - g_{m0}\bar{c}^{(0)}, \quad (3.1)$$

векторни тузамиз ва $g_{m,m-1}$, $g_{m,m-2}$, . . . , g_{m0} коэффициентларни шундай танлаймизки, бу вектор $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}$, . . . , $\bar{c}^{(m-1)}$ векторларнинг ҳар бири билан ортогонал бўлсин. Ортогоналлик шарти $(\bar{c}^{(m)}, \bar{c}^{(i)}) = 0$ $(i = \overline{0,\ m-1})$ дан g_{mi} коэффициентларни топамиз:

$$g_{mi} = \frac{(A\bar{c}^{(m-1)}, \bar{c}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{c}^{(i)})} \quad (i = \overline{0,\ m-1}).$$

Биз $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}$, . . . , $\bar{c}^{(m)}$ векторларни қуриш билан бир пайтда

$$\begin{aligned}
&Q_0(\lambda) = 1,\\
&Q_1(\lambda) = (\lambda - g_{10})\;Q_0(\lambda),\\
&Q_2(\lambda) = (\lambda - g_{21})Q_1(\lambda) - g_{20}Q_0(\lambda),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Q_m(\lambda) = (\lambda - g_{m,m-1})Q_{m-1}(\lambda) - g_{m,m-1}Q_{m-2}(\lambda) - \ldots - g_{n,0}Q_0(\lambda)
\end{aligned}$$

кўпҳадлар кетма-кетлигини ҳам тузамиз. Маълумки, n ўлчовли фазода чизиқли эркли векторларнинг сони n дан ортмайди. Шунинг учун ҳам, ортогоналлаштириш жараёнининг бирор k $(k \leqslant n)$-қадамда $\bar{c}^{(k)} = \bar{0}$ га эга бўламиз. У ҳолда

$$A\bar{c}^{(k-1)} - g_{k,k-1}\bar{c}^{(k-1)} - g_{k,k-2}\bar{c}^{(k-2)} - \ldots - g_{k0}\bar{c}^{(0)} = \bar{0}$$

тенглик $\overline{c}^{(0)}$, $\overline{Ac}^{(0)}$, $A^2\overline{c}^{(0)}, \ldots, A^k\overline{c}^{(0)}$ векторларнинг чизиқли боғланганлигини кўрсатади. Шунинг учун ҳам $Q_k(\lambda)$ кўпҳад A матрица минимал кўпҳадининг бўлувчиси бўлади. Агар $k = n$ бўлса, $Q_n(\lambda)$ A матрицанинг хос кўпҳади $P(\lambda)$ билан устма-уст тушади. Агар $k < n$ бўлса, $Q_k(\lambda)$ кўпҳад хос кўпҳад $P(\lambda)$ нинг бўлувчиси бўлади ва биз фақат хос сонларнинг бирор қисмини аниқлаш имконига эга бўламиз. Қолган хос сонларни топиш учун ишни яна бошқа дастлабки вектор $\overline{c}_1^{(0)}$ дан бошлаш керак ва бу векторни шундай танлаш керакки, у $\overline{c}^{(0)}, \overline{c}^{(1)}, \ldots, \overline{c}^{(k-1)}$ векторларга ортогонал бўлсин.

Симметрик A матрица учун (3.1) тенглик соддалашади. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда

$$g_{mi} = \frac{(A\overline{c}^{(m-1)}, \overline{c}^{(i)})}{(\overline{c}^{(i)}, \overline{c}^{(i)})} = \frac{(\overline{c}^{(m-1)}, A\overline{c}^{(i)})}{(\overline{c}^{(i)}, \overline{c}^{(i)})} =$$

$$= \frac{(\overline{c}^{(m-1)}, \overline{c}^{(i+1)} + g_{i+1,i}\overline{c}^{(i)} + \ldots + g_{i+1,0}\overline{c}^{(0)})}{(\overline{c}^{(i)}, \overline{c}^{(i)})}$$

бўлиб, $i + 1 < m - 1$ бўлса, $g_{mi} = 0$ бўлади. Демак, матрица симметрик бўлганда. (3.1) тенглик қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\overline{c}^{(m)} = A\overline{c}^{(m-1)} - g_{m,m-1}\overline{c}^{(m-1)} - g_{m,m-2}\overline{c}^{(m-2)}. \qquad (3.2)$$

Шу билан бирга

$$Q_m(\lambda) = (\lambda - g_{m,m-1})\; Q_{m-1}(\lambda) - g_{m,m-1}Q_{m-2}(\lambda) - \ldots - g_{m0}Q_0(\lambda)$$

кўпҳад ҳам соддалашади:

$$Q_m(\lambda) = (\lambda - g_{m,m-1})Q_{m-1}(\lambda) - g_{m,m-1}Q_{m-2}(\lambda).$$

Бу эса методнинг ҳисоблаш схемасини соддалаштиради. Шунинг учун ҳам Ланцош методининг симметрик матрица ҳоли одатда *минимал итерация методи* деб аталади.

Бундай соддалаштиришга симметрик бўлмаган матрица учун ҳам эришиш мумкин, фақат бу ерда ортогоналлаштириш жараёнини биортогоналлаштириш жараёни билан алмаштириш керак.

Иккита $\overline{c}^{(0)}$ ва $\overline{b}^{(0)}$ дастлабки векторларни танлаб оламиз. Буларга кўра $A\overline{c}^{(0)}$ ва $A'\overline{b}^{(0)}$ ларни топиб,

$$\overline{c}^{(1)} = A\overline{c}^{(0)} - g_{10}\overline{c}^{(0)}, \quad \overline{b}^{(1)} = A'\overline{b}^{(0)} - h_{10}\overline{b}^{(0)}$$

чизиқли комбинацияларни тузамиз. Бу ерда g_{10} ва h_{10} коэффициентларни $(\overline{c}^{(1)}, \overline{b}^{(0)}) = (\overline{b}^{(1)}, \overline{c}^{(0)}) = 0$ биортогоналлик шартидан танлаймиз. Агар дастлабки векторлар $c^{(0)}$ ва $b^{(0)}$ ортогонал бўлмаса, у ҳолда g_{10} ва h_{10} ни топиш мумкин:

$$g_{10} = \frac{(A\overline{c}^{(0)}, \overline{b}^{(0)})}{(\overline{c}^{(0)}, \overline{b}^{(0)})} = \frac{(\overline{c}^{(0)}, A'\overline{b}^{(0)})}{(\overline{c}^{(0)}, \overline{b}^{(0)})} = h_{10}.$$

Биз $(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)}) \neq 0$ шарт бажарилган деб фараз қиламиз. Топилган векторлар $\bar{c}^{(1)}$ ва $\bar{b}^{(1)}$ га кўра шундай

$$\bar{c}^{(2)} = A\bar{c}^{(1)} - g_{21}\bar{c}^{(1)} - g_{20}\bar{c}^{(0)}, \quad \bar{b}^{(2)} = A'\bar{b}^{(1)} - h_{21}\bar{b}^{(1)} - h_{20}\bar{b}^{(0)}$$

чизиқли комбинацияларни тузамизки, натижада

$$(\bar{c}^{(2)}, \bar{b}^{(1)}) = (\bar{c}^{(2)}, \bar{b}^{(0)}) = (\bar{b}^{(2)}, \bar{c}^{(1)}) = (\bar{b}^{(2)}, \bar{c}^{(0)}) = 0$$

бўлсин. Агар $(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)}) \neq 0$ ва $(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)}) \neq 0$ бўлса, у ҳолда бу шартлардан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$g_{21} = \frac{(A\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)})} = \frac{(\bar{c}^{(1)}, A'\bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)})} = h_{21},$$

$$g_{20} = \frac{(A\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(0)})} = \frac{(\bar{c}^{(1)}, A'\bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} =$$

$$= \frac{(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)} + h_{10}\bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = \frac{(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = \frac{(A\bar{c}^{(0)} - g_{10}\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} =$$

$$= \frac{(A\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = \frac{(\bar{c}^{(1)}, A'\bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = h_{20}.$$

Фараз қилайлик, шундай

$$\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \ldots, \bar{c}^{(k)}; \quad \bar{b}^{(0)}, \bar{b}^{(1)}, \ldots \bar{b}^{(k)}$$

векторларни тузган бўлайликки, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $(\bar{b}^{(i)}, \bar{c}^{(j)}) = 0 \qquad (i \neq j);$
2) $(\bar{b}^{(i)}, \bar{c}^{(i)}) \neq 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$

У ҳолда шундай

$$\begin{cases} \bar{c}^{(k+1)} = A\bar{c}^{(k)} - g_{k+1,k}\bar{c}^{(k)} - g_{k+1,k-1}\bar{c}^{(k-1)} - \ldots - g_{k+1,0}\bar{c}^{(0)}, \\ \bar{b}^{(k+1)} = A'\bar{b}^{(k)} - h_{k+1,k}\bar{b}^{(k)} - h_{k+1,k-1}\bar{b}^{(k-1)} - \ldots - g_{k+1,0}\bar{b}^{(0)} \end{cases} \quad (3.3)$$

векторларни тузамизки, улар

$$(\bar{c}^{(k+1)}, \bar{b}^{(i)}) = (\bar{b}^{(k+1)}, \bar{c}^{(i)}) = 0 \qquad (i = \overline{0, k})$$

шартларни қаноатлантирсин. Бу шартлардан эса

$$g_{k+1,i} = \frac{(A\bar{c}^{(k)}, \bar{b}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} = \frac{(\bar{c}^{(k)}, A'\bar{b}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} = \frac{(\bar{c}^{(k)}, \bar{b}^{(i+1)} + h_{i+1,i}\bar{b}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} =$$

$$= \frac{(\bar{c}^{(k)}, \bar{b}^{(i+1)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} + h_{i+1,i}\frac{(\bar{c}^{(k)}, \bar{b}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} =$$

$$= \begin{cases} h_{k+1,k}, & \text{агар } i = k \text{ бўлса,} \\ \dfrac{(\bar{c}^{(k)}, \bar{b}^{(k)})}{(\bar{c}^{(k-1)}, \bar{b}^{(k-1)})} = g_{k+1,k-1}, & \text{агар } i = k-1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } i < k-1 \text{ бўлса;} \end{cases}$$

$$h_{k+1,i}=\frac{(A'\bar{b}^{(k)},\ \bar{c}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)},\ \bar{b}^{(i)})}=\frac{(\bar{b}^{(k)},\ A\bar{c}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)},\ \bar{b}^{(i)})}=$$

$$=\begin{cases} g_{k+1,i}\ , & \text{агар}\quad i=k\quad \text{бўлса},\\ g_{k+1,k-1}\ , & \text{агар}\quad i=k-1\ \text{бўлса},\\ 0\ , & \text{агар}\quad i<k-1\ \text{бўлса}.\end{cases}$$

Шундай қилиб, (3.3) тенгликлар соддалашиб, қуйидаги кўринишга келади:

$$\bar{c}^{(k+1)}=A\bar{c}^{(k)}-g_{k+1,k}\bar{c}^{(k)}-g_{k+1,k-1}\bar{c}^{(k-1)},$$

$$\bar{b}^{(k+1)}=A'\bar{b}^{(k)}-g_{k+1,k}\bar{b}^{(k)}-g_{k+1,k-1}\bar{b}^{(k-1)}.$$

Бу жараёнлар мумкин бўлишлиги учун олдинги топилган $\bar{c}^{(k)}$ ва $\bar{b}^{(k)}$ векторлар $(\bar{c}^{(k)},\ \bar{b}^{(k)})\neq 0$ шартни қаноатлантиришлари керак. Бу шарт қуйидаги уч ҳолда бузилиши мумкин:

1) $\bar{c}^{(k)}=\bar{0}$ ва $\bar{b}^{(k)}=\bar{0}$,
2) $\bar{c}^{(k)}=\bar{0}$ ёки $\bar{b}^{(k)}=\bar{0}$,
3) $\bar{c}^{(k)}\neq\bar{0}$, $\bar{b}^{(k)}\neq\bar{0}$, лекин $\bar{c}^{(k)}\perp\bar{b}^{(k)}$.

Охирги ҳол $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{b}^{(0)}$ дастлабки векторларни ноқулай танлаш натижасида келиб чиқади. Бундай ҳолда, дастлабки векторларни бошқача танлаш керак.

Агар A матрица минимал кўпҳадининг даражаси m бўлса, у ҳолда (A ва A' матрицалар бир хил минимал кўпҳадга эга бўлганликлари учун) $\bar{c}^{(0)}$, $A\bar{c}^{(0)}$, . . . , $A^{m}\bar{c}^{(0)}$ ва $\bar{b}^{(0)}$, $A'\bar{b}^{(0)}$, . . . , $A'^{m}\bar{b}^{(0)}$ векторлар чизиқли боғланган бўлади. Шунинг учун ҳам биортогоналлаштириш жараёни $k\leqslant m$ қадамда тугайди ва $\bar{c}^{(k)}=0$ ёки $\bar{b}^{(k)}=0$ векторга эга бўлиб, у ҳолда $\bar{c}^{(0)}$, $A\bar{c}^{(0)}$, . . . , $A^{(k)}\bar{c}^{(0)}$ векторлар ёки $\bar{b}^{(0)}$, $A'\bar{b}^{(0)}$, . . . , $A'^{(k)}\bar{b}^{(0)}$ векторлар орасида чизиқли боғланишга эга бўламиз. Ортогоналлаштириш жараёнидагидек, бу ерда ҳам A матрицанинг минимал кўпҳади ёки унинг бўлувчисини кетма-кет қуйидагича топамиз:

$$\begin{aligned} &Q_0(\lambda)=1,\\ &Q_1(\lambda)=(\lambda-g_{10})Q_0(\lambda),\\ &Q_2(\lambda)=(\lambda-g_{21})Q_1(\lambda)-g_{20}Q_0(\lambda),\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &Q_k(\lambda)=(\lambda-g_{k,k-1})Q_{k-1}(\lambda)-g_{k,k-2}\,Q_{k-2}(\lambda).\end{aligned}$$

Мисол. Қуйидаги

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 30 & -48\\ 3 & 14 & -24\\ 3 & 15 & -25\end{bmatrix}$$

матрицанинг хос сонлари топилсин.

Ечиш. Бу ерда A матрица симметрик бўлмаганлиги учун биортогоналлаштириш жараёнини қўллаймиз. Бунинг учун $\bar{c}^{(0)}=\bar{b}^{(0)}=(1,\ \ 0,\ \ 0)'$ деб оламиз. У ҳолда

$$A\bar{c}^{(0)}=\begin{bmatrix}5\\3\\3\end{bmatrix},\qquad A'\bar{b}^{(0)}=\begin{bmatrix}5\\30\\-48\end{bmatrix},\qquad g_{10}=\frac{(A\bar{c}^{(0)},\ \bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)},\ \bar{b}^{(0)})}=5$$

ва

$$\bar{c}^{(1)} = A\bar{c}^{(0)} - g_{10}\bar{c}^{(0)} = (0,\ 3,\ 3)',$$
$$\bar{b}^{(1)} = A'\bar{b}^{(0)} - g_{10}\bar{b}^{(0)} = (0,\ 30, -48)'$$

бўлади.

Иккинчи қадамда

$$A\bar{c}^{(1)} = (-54, -30, -30)',\quad A'\bar{b}^{(1)} = (-54, -300,\ 480)',$$
$$g_{21} = \frac{(A\bar{c}^{(1)},\ \bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(1)},\ \bar{b}^{(1)})} = -10,\qquad g_{20} = \frac{(A\bar{c}^{(1)},\ \bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)},\ \bar{b}^{(0)})} = -54$$

ва $\bar{c}^{(2)} = \bar{b}^{(2)} = \bar{0}$ га эга бўламиз.

Демак, биз иккинчи вариантдаги 1) ҳолга дуч келдик. Минимал кўпҳаднинг бўлувчисини қуйидагича топамиз:

$$\varphi_0(\lambda) = 1,$$
$$\varphi_1(\lambda) = \lambda - 5,$$
$$\varphi_2(\lambda) = (\lambda + 10)\ (\lambda - 5) + 54 = \lambda^2 + 5\lambda + 4.$$

Бундан кўринадики, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$ хос сонлар бўлар экан. Учинчи хос сонни топиш учун матрицанинг изидан фойдаланамиз:

$$5 + 14 - 25 = -1 - 4 + \lambda_3,\ \lambda_3 = -1.$$

Хос векторларни топиш. Баённи қисқартириш мақсадида A матрица симметрик бўлган ҳолни қарайлик. Фараз қилайлик, Ланцош методини қўллаб, $\bar{c}^{(k)} = \bar{0}$ га эга бўлган бўлайлик. Айтайлик, λ_i $\bar{c}^{(0)}$ вектор минимал кўпҳади $\psi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda)$ нинг бирор илдизи бўлсин. У ҳолда бу хос сонга мос келадиган $\bar{x}^{(i)}$ хос векторни қуйидаги кўринишда излаймиз

$$\bar{x}^{(i)} = \beta_0\bar{c}^{(0)} + \beta_1\bar{c}^{(1)} + \ldots + \beta_{k-1}\bar{c}^{(k-1)}. \tag{3.4}$$

Кейин $A\bar{x}^{(i)} = \lambda_i\bar{x}^{(i)}$ шартдан ва олдинги пунктдаги

$$A\bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(1)} + g_{10}\bar{c}^{(0)},$$
$$A\bar{c}^{(1)} = \bar{c}^{(2)} + g_{21}\bar{c}^{(1)} + g_{20}\bar{c}^{(0)},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$A\bar{c}^{(k-2)} = \bar{c}^{(k-1)} + g_{k-1,k-2}\bar{c}^{(k-2)} + g_{k-1,k-3}\bar{c}^{(k-3)},$$
$$A\bar{c}^{(k-1)} = g_{k-1,k-1}\bar{c}^{(k-1)} + g_{k-1,\ k-2}\bar{c}^{(k-2)}$$

тенгликлардан фойдаланиб, (3.4) тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\beta_0\,(\bar{c}^{(1)} + g_{10}\,\bar{c}^{(0)}) + \beta_1\,(\bar{c}^{(2)} + g_{21}\,\bar{c}^{\,(1)} + g_{20}\,\bar{c}^{(0)}) + \ldots +$$
$$+ \beta_{k-2}\,(\bar{c}^{(k-1)} + g_{k-1,\ k-2}\,\bar{c}^{(k-2)} + g_{k-1,\ k-3}\,\bar{c}^{(k-3)}) +$$
$$+ \beta_{k-1}\,(g_{k,\ k-1}\,\bar{c}^{(k-1)} + g_{k-1,\ k-2}\,\bar{c}^{(k-2)}) =$$
$$= \lambda_l\,\beta_0\,\bar{c}^{(0)} + \lambda_l\,\beta_1\,\bar{c}^{(1)} + \ldots + \lambda_l\,\beta_{k-1}\,\bar{c}^{(k-1)}.$$

Бундан $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \ldots, \bar{c}^{(k-1)}$ векторларни чизиқли эрклилигини ҳисобга олсак, қуйидагилар келиб чиқади:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_0\,(\lambda_l - g_{10}) - g_{20}\,\beta_1 = 0, \\ \beta_1\,(\lambda_l - g_{21}) - g_{31}\,\beta_2 - \beta_0 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \beta_{k-2}\,(\lambda_l - g_{k-1,\ k-2}) - g_{k,\ k-2}\,\beta_{k-1} - \beta_{k-3} = 0, \\ \beta_{k-1}\,(\lambda_l - g_{k,\ k-1}) - \beta_{k-2} = 0. \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Бу ердан кўрамизки, $\beta_{k-2}, \beta_{k-3}, \dots, \beta_0$ лар β_{k-1} га пропорционалдир. Шунинг учун ҳам $\beta_{k-1} = 1$ деб олишимиз мумкин. У ҳолда қолган β_i коэффициентларни кетма-кет топамиз:

$$\begin{aligned}
&\beta_{k-2} = \lambda_l - g_{k,\,k-1},\\
&\beta_{k-3} = \beta_{k-2}(\lambda_l - g_{k-1,\,k-2}) - g_{k,\,k-2},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\beta_0 = \beta_1(\lambda_l - g_{21}) - g_{31}\beta_2.
\end{aligned}$$

Крилов методига ўхшаш (3.5) тенгликлардаги биринчи тенглик қолганларининг натижаси бўлиб, у $\bar{c}^{(0)}$ вектор минимал кўпҳадининг $\lambda = \lambda_l$ даги ифодасидир. Бу тенгликдан ҳисоблаш жараёнини контрол қилишда фойдаланиш мумкин.

Агар биз қуйидаги кўпҳадларни киритсак:

$$\begin{cases}
\varphi_0(\lambda) = 1,\\
\varphi_1(\lambda) = (\lambda - g_{k,\,k-1})\varphi_0(\lambda),\\
\varphi_2(\lambda) = (\lambda - g_{k-1,\,k-2})\varphi_1(\lambda) - g_{k,\,k-2}\varphi_0(\lambda),\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\varphi_k(\lambda) = (\lambda - g_{10})\varphi_{k-1}(\lambda) - g_{20}\varphi_{k-2}(\lambda),
\end{cases} \qquad (3.6)$$

у ҳолда λ_l га мос келадиган $\bar{x}^{(i)}$ хос векторни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\bar{x}^{(l)} = \varphi_{k-1}(\lambda_i)\,\bar{c}^{(0)} + \varphi_{k-2}(\lambda_l)\,\bar{c}^{(1)} + \dots + \varphi_0(\lambda_i)\,\bar{c}^{(k-1)}.$$

(3.6) тенгликдаги $\varphi_k(\lambda)$ кўпҳад $P_k(\lambda)$ кўпҳад билан устма-уст тушади.

4- §. А. М. ДАНИЛЕВСКИЙ МЕТОДИ

Хос сонлар муаммосини ечишнинг содда ва тежамкор усулини 1937 йилда А. М. Данилевский таклиф этди. Бу методнинг ғояси берилган матрицани ўхшаш алмаштиришлар ёрдамида *Фробениус*-

$$P = \begin{bmatrix}
p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n\\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

нинг нормал формасига келтиришдан иборатдир. A ва P матрицалар ўхшаш бўлганлиги учун улар бир хил характеристик кўпҳадга эга. Лекин P матрицанинг характеристик кўпҳадини бевосита ёзиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $D(\lambda) = \det(P - \lambda E)$ ни биринчи сатр элементлари бўйича ёйиб чиқсак:

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix}
p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n\\
1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda
\end{bmatrix} =$$

$$= (p_1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1} - p_2(-\lambda)^{n-2} + p_3(-\lambda)^{n-3} + \dots +$$
$$+ (-1)^{n-1}p_n = (-1)^{n-1}(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n).$$

Шундай қилиб, Фробениус матрицасининг биринчи сатр элементлари $p_1, p_2, \ldots, p_n$ унинг хос кўпҳадининг мос равишдаги коэффициентларидан иборатдир. A ва P матрицалар ўхшаш, яъни $P = S^{-1}AS$ бўлганлиги учун, $p(\lambda)$ A матрицанинг ҳам хос кўпҳадидир.

A матрицанинг элементларига боғлиқ равишда Данилевский методида регуляр ва норегуляр ҳол учрайди. Аввал регуляр ҳолни кўриб чиқамиз.

Фараз қилайлик, A матрицанинг $a_{n,\,n-1}$ элементи нолдан фарқли бўлсин. Биринчи қадамда A матрицани ўнг томондан

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{n,\,n-1}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{n,\,n-1}} & \ldots & -\dfrac{a_{n,\,n-2}}{a_{n,\,n-1}} & \dfrac{1}{a_{n,n-1}} & -\dfrac{a_{nn}}{a_{n,\,n-1}} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицага кўпайтирамиз, натижада

$$B^{(0)} = AM_{n-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1,\,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2,\,n-1} & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ b_{n-1,\,1} & b_{n-1,\,2} & \ldots & b_{n-1,\,n-1} & b_{n-1,\,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ҳосил бўлади. M_{n-1} матрица A ва бирлик матрицалар ёрдамида қуйидагича тузилади:

1) бирлик матрицанинг $(n-1)$-устунининг элементларини $a_{n,\,n-1} \neq 0$ элементга бўламиз,

2) ҳосил бўлган устунни A матрицанинг n- сатрининг a_{n1}, $a_{n2}, \ldots, a_{n,\,n-2}$ элементларига кўпайтириб, мос равишда бирлик матрицанинг $1, 2, \ldots, n-2, n$-устуни элементларидан айирамиз, натижада M_{n-1} матрица тузилади.

Матрицаларни кўпайтириш қоидасига кўра $B^{(0)}$ матрицанинг элементлари қуйидаги

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{i,\,n-1}\frac{a_{nj}}{a_{n,\,n-1}} \quad (j = 1,2, \ldots, n;\ j \neq n-1)$$

$$b_{n,\,n-1} = \frac{a_{i,\,n-1}}{a_{n,\,n-1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади. Лекин қурилган $B^{(0)} = AM_{n-1}$ матрица A матрицага ўхшаш эмас. Ўхшаш алмаштириш ҳосил қилиш учун тескари M_{n-1}^{-1} матрицани чапдан $B^{(0)}$ га кўпайтириш керак:

$$M_{n-1}^{-1}AM_{n-1} = M_{n-1}^{-1}B^{(0)}.$$

Тескари матрица M_{n-1}^{-1} қуйидаги

$$M_{n-1}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0\ldots\ldots & 0 & 1. \end{bmatrix}$$

кўринишга эга эканлигини бевосита текшириб кўриш мумкин. M_{n-1}^{-1} матрицани $B^{(0)}$ матрицага чап томондан кўпайтириш унинг охирги сатрини ўзгартирмайди. Шунинг учун ҳам Данилевский методининг биринчи қадами бажарилганда биз қуйидаги кўринишга эга бўлган матрицани ҳосил қиламиз:

$$A^{(1)}=M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)}\ldots & a_{1,\,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)}\ldots & a_{2,\,n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n-1,\,1}^{(1)} & a_{n-1,\,2}^{(1)}\ldots & a_{n-1,\,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ 0 & 0\ \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Бу ерда $a_{ij}^{(1)}$ қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади:

$$a_{ij}^{(1)}=b_{ij}\quad (1\leqslant i\leqslant n-2,\ 1\leqslant j\leqslant n),$$

$$a_{n-1,\,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kj}\quad (1\leqslant j\leqslant n).$$

Энди $A^{(1)}$ матрицанинг $a_{n-2,\,n-1}^{(1)}$ элементи нолдан фарқли деб фараз қиламиз. У вақтда Данилевский методидаги иккинчи қадам биринчи қадамга ўхшаш бўлиб, $A^{(1)}$ матрицанинг $(n-2)$-сатрини Фробениус формасига келтиришдан иборатдир. Бу алмаштиришлар натижасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A^{(2)}=M_{n-2}^{-1}A^{(1)}M_{n-2}=M_{n-2}^{-1}M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}M_{n-2}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)}\ \ldots & a_{1,\,n-2}^{(2)} & a_{1,\,n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n-2,\,1}^{(2)}\ \ldots & a_{n-2,\,n-1}^{(2)} & a_{n-2,\,n-1}^{(2)} & a_{n-2,\,n}^{(2)} \\ 0\ \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0\ \ldots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Бу ерда

$$M_{n-2}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -\dfrac{a_{n-1,\,1}^{(1)}}{a_{n-1,\,n-2}^{(1)}} & \ldots & -\dfrac{a_{n-1,n-3}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & \dfrac{1}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & -\dfrac{a_{n-1,\,n-1}^{(1)}}{a_{n-1,\,n-2}^{(1)}} & -\dfrac{a_{n-1,\,n}^{(1)}}{a_{n-1,\,n-2}^{(1)}} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{n-2}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-1,2}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & , \cdot\ \cdot & a_{n-1,\,n-1}^{(1)} & a_{n-1,\,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Бундан ташқари

$$b_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(1)}-a_{i,n-2}^{(1)}\cdot\frac{a_{n-1,\,j}^{(1)}}{a_{n-1,\,n-2}^{(1)}}\qquad (j=\overline{1,\ n};\ j\neq n-2),$$

$$b_{i,\,n-2}^{(2)}=\frac{a_{i,\,n-2}^{(2)}}{a_{n-1,\,n-2}^{(1)}},\qquad a_{ij}^{(2)}=b_{ij}^{(1)}\,(i=\overline{1,n-3}),$$

$$a_{n-2,\,j}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}a_{n-1,\,k}^{(1)}\,b_{kj}^{(1)}.$$

Бу жараённи давом эттирамиз. Агар $a_{n,\,n-1}\neq 0,\ a_{n-1,\,n-2}^{(1)}\neq 0,\ \ldots,\ a_{21}^{(n-2)}\neq 0$ бўлса, у ҳолда Данилевский методининг $(n-1)$-қадамидан кейин қуйидагига эга бўламиз:

$$A^{(n-1)}=M_1^{-1}\ \ldots\ M_{n-1}^{-1}\,AM_{n-1}\ \ldots\ M_1=S^{-1}AS=P=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \ldots & a_{1,\,n-1}^{(n-1)} & a_{1n}^{(n-1)} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Шундай қилиб, дастлабки A матрица $S=M_{n-1}M_{n-2}\ \ldots\ M_1$ матрица орқали ўхшаш алмаштириш ёрдамида Фробениус нормал формасига келтирилади ва шу билан хос кўпҳад

$$P(\lambda)=\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}\ \ldots\ -p_n$$

топилади.

Данилевский методидаги норегуляр ҳол. Энди норегуляр ҳолни кўриб чиқайлик. Фараз қилайлик, Данилевский методининг $(n-k)$-қадами бажарилсин ва шу билан бирга $A^{(n-k)}$ матрицанинг $a_{k,\,k-1}^{(n-k)}$ элементи нолга тенг бўлсин. Навбатдаги $(n-k+1)$-қадамни юқоридаги усул билан бажариш мумкин эмас. Бу ерда икки вариант бўлиши мумкин.

1) Фараз қилайлик, $A^{(n-k)}$ матрицада $a_{k,\,k-1}^{(n-k)}$ элементдан чапроқда, масалан, i- элемент $(i<k-1)$ $a_{ki}^{(n-k)}\neq 0$ бўлсин. Бундай вақтда норегуляр ҳолни регуляр ҳолга келтириш мумкин. Бунинг учун $A^{(n-k)}$ матрицада $(k-1)$- устунни i- устун билан ва худди шу номерли сатрларни ҳам ўзаро алмаштириш керак. Бундай алмаштиришни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкинлигини бевосита текшириб кўриш мумкин:

$$UA^{(n-k)}\,U,$$

бу ерда

$$U=\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & & & & i & & (k-1) & & & & & \\
\hline
1 & 0 & & & \cdot & & \cdot & & & & & \\
0 & 1 & & & \cdot & & \cdot & & & & & \\
 & & \ddots & & \cdot & & \cdot & & & & & \\
 & & & 1 & \cdot & & \cdot & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (i) \\
 & & & & \cdot & & \cdot & & & & & \\
 & & & & \cdot & & \cdot & & & & & \\
 & & & & \cdot & & \cdot & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (k-1) \\
 & & & & \cdot & & \cdot & 1 & & & & \\
 & & & & \cdot & & \cdot & & \ddots & & & \\
 & & & & \cdot & & \cdot & & & 1 & 0 & \\
 & & & & \cdot & & \cdot & & & 0 & 1 &
\end{array}$$

$\tilde{U}A^{(n-k)}\,U$ алмаштириш $A^{(n-k)}$ матрица учун ўхшаш алмаштиришдир. Ҳақиқатан ҳам, бу алмаштиришни икки марта бажарсак, аввалги матрицага келамиз, демак $U^2=E$, яъни $U=U^{-1}$. Бундан $UA^{(n-k)}\,U=U^{-1}A^{(n-k)}\,U$ ўхшаш алмаштириш эканлиги келиб чиқади.

Бу алмаштиришдан кейин Данилевский методидаги кейинги қадамни регуляр ҳолдагидек бажаришимиз мумкин.

2) Фараз қилайлик,

$$a_{k1}^{(n-k)}=a_{k2}^{(n-k)}=\ldots=a_{k,k-1}^{(n-k)}=0$$

бўлсин. У ҳолда $A^{(n-k)}$ қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$A^{(n-k)}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
a_{11}^{(n-k)} & \ldots & a_{1,k-1}^{(n-k)} & a_{1k}^{(n-k)} & \ldots\ a_{1,n-1}^{(n-k)} & a_{1n}^{(n-k)} \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\
a_{k-1,1}^{(n-k)} & \ldots & a_{k-1,k-1}^{(n-k)} & a_{k-1,k}^{(n-k)} & \ldots\ a_{k-1,n-1}^{(n-k)} & a_{k-1,n}^{(n-k)} \\
\hline
0 & \ldots & 0 & a_{kk}^{(n-k)} & \ldots\ a_{k,n-1}^{(n-k)} & a_{kn}^{(n-k)} \\
0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots\ 0 & 0 \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots\ 1 & 0
\end{array}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} B^{(n-k)} & C^{(n-k)} \\ 0 & P^{(n-k)} \end{bmatrix}$$

Бу ерда $P^{(n-k)}$ Фробениус нормал формасига эга бўлган $(n-k+1)$-тартибли квадрат матрица, $B^{(n-k)}$ эса $(k-1)$-тартибли квадрат матрица. Лаплас теоремасига кўра:

$$\det(A^{(n-k)}-\lambda E)=\det(B^{(n-k)}-\lambda E_{k-1})\det(P^{(n-k)}-\lambda E_{n-k+1}), \quad (4.1)$$

яъни $P^{(n-k)}$ матрицанинг хос кўпҳади A матрица хос кўпҳадининг бўлувчисидир. (4.1) тенгликдан кўрамизки, A матрицанинг хос кўпҳадини топиш учун яна $B^{(n-k)}$ матрицанинг хос кўпҳадини тониш керак. Буни эса юқорида келтирилган метод билан бажариш мумкин. Данилевский методи хос кўпҳадни топиш методлари орасида энг тежамкор методдир. Ҳисоблаш жараёнини контроль қилиш учун топилган p_1 коэффициентни матрицанинг изи билан таққослаш керак.

Данилевский методи билан хос векторни ҳисоблаш. Агар A матрицанинг хос сонлари маълум бўлса, А. М. Данилевский методи билан унинг хос векторларини аниқлаш мумкин. Фараз қилайлик, λ A матрицанинг ва демак, унга ўхшаш бўлган P Фробениус матрицасининг хос сони бўлсин.

P матрицанинг берилган λ хос сонига тегишли бўлган $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ хос векторини топамиз. $P\bar{y} = \lambda\bar{y}$ бўлганлиги учун $(P - \lambda E)\bar{y} = \bar{0}$ ёки

$$\begin{bmatrix} p_1 - \lambda & p_2 \ldots . & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda \ldots . & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \ldots . & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = 0.$$

Бундан эса $\bar{y}$ хос векторнинг $y_1, y_2, \ldots y_n$ координаталарини топиш учун қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} (p_1 - \lambda) y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_n y_n = 0, \\ y_1 - \lambda y_2 = 0, \\ y_2 - \lambda y_3 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n-1} - \lambda y_n = 0 \end{cases} \qquad (4.2)$$

Бу системадан

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= \lambda y_n, \\ y_{n-2} &= \lambda^2 y_n, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_1 &= \lambda^{n-1} y_n \end{aligned}$$

ни топамиз. Хос вектор хоссасига кўра $y_n = 1$ деб олишимиз мумкин, у ҳолда

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ y_{n-1} = \lambda, \\ y_{n-2} = \lambda^2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_1 = \lambda^{n-1} \end{cases} \qquad (4.3)$$

га эга бўламиз. Демак, изланаётган хос вектор $\bar{y} = (\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \ldots, 1)$ кўринишга эга. (4.3) ни (4.2) системанинг биринчи тенгламасига олиб бориб қўйсак, у

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} \ldots . - p_n = 0$$

кўринишга эга бўлади, бу эса ҳисоблаш жараёнини контрол қилишга хизмат қилади. Ўхшаш алмаштириш матрицаси S маълум бўлса, A матрицанинг хос векторини топиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар $\overline{x}$ A матрицанинг λ хос сонига мос келадиган хос вектори бўлса, у холда $\overline{x}=S\overline{y}$ бўлади, чунки $P\overline{y}=\lambda\overline{y}$ ва $P=S^{-1}AS$ бўлганлиги учун $S^{-1}AS\overline{y}=\lambda\overline{y}$ дир. Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини S га чапдан кўпайтирсак, $AS\overline{y}=\lambda S\overline{y}$ келиб чиқади.

Шундай қилиб, S матрица маълум бўлса, A матрицанинг хос векторини топиш қийин эмас. Данилевский методининг регуляр ҳолида ва норегуляр ҳолининг биринчи вариантида S матрицани бевосита ёзиш мумкин. Масалан, регуляр ҳолда

$$S=M_{n-1}M_{n-2}\ \ldots\ M_1.$$

M_i $(i=\overline{1,\ n-1})$ матрицалар бирлик матрицадан фақат битта сатри билан фарқ қилганлиги учун

$$\overline{x}=S\overline{y}=M_{n-1}M_{n-2}\ \ldots\ M_1\overline{y} \tag{4.4}$$

векторни топаётганда аввал $S=M_{n-1}\ M_{n-2}\ \ldots.\ M_1$ кўпайтмани топмасдан $\overline{y}$ векторни кетма-кет $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{n-1}$ матрицаларга кўпайтириш маъқулдир. Вэкторни M_i га кўпайтирилганда векторнинг фақат битта координатаси ўзгаради.

Данилевский методидаги норегуляр ҳолнинг иккинчи вариантида матрицанинг хос векторини бу йўл билан топиб бўлмайди. Бундай ҳолда хос векторни Крилов методида кўрсатилган усул билан топиш маъқулдир.

Мисол. Қуйидаги

$$A=\begin{bmatrix} 23 & -9 & -2 & 0 \\ -4 & 23 & 0 & -2 \\ -8 & 0 & 23 & -9 \\ 0 & -8 & -4 & 23 \end{bmatrix}$$

матрицанинг хос сонлари ва хос векторлари топилсин.

Ечиш. А. М. Данилевский методи ёрдамида қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$A^{(1)}=M_3^{-1}AM_3=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23 & -9 & -2 & 0 \\ -4 & 23 & 0 & -2 \\ -8 & 0 & 23 & -9 \\ 0 & -8 & -4 & 23 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{4} & \frac{23}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -23 & -5 & \frac{1}{2} & -\frac{23}{2} \\ -4 & 23 & 0 & -2 \\ 64 & 0 & 46 & -477 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Бу ерда Данилевский методидаги норегуляр ҳолнинг биринчи вариантига дуч келдик. Шунинг учун ҳам $A^{(1)}$ матрицани чап ва ўнг томонидан

$$U=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицага кўпайтирамиз, унда 1- ва 2- устунларнинг ўринлари ўзаро алмашинади:

$$UA^{(1)}U=\begin{bmatrix} 23 & -4 & 0 & -2 \\ -5 & 23 & \frac{1}{2} & -\frac{23}{2} \\ 0 & 64 & 46 & -477 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Бу матрицага Данилевский методининг навбатдаги қадамини қўллаймиз:

$$A^{(2)}=M_2^{-1}\,UA^{(1)}\,UM_2=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 46 & -477 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23 & -4 & 0 & -2 \\ -5 & 23 & \frac{1}{2} & -\frac{23}{2} \\ 0 & 64 & 46 & -477 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} & -\frac{46}{64} & \frac{477}{64} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 23 & -\frac{1}{16} & \frac{46}{16} & -\frac{509}{16} \\ -320 & 69 & -1503 & 10235 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)}=M_1^{-1}A^{(2)}M_1=$$

$$=\begin{bmatrix} -320 & 69 & -1503 & 10235 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23 & -\frac{1}{16} & \frac{46}{16} & -\frac{509}{16} \\ -320 & 69 & -1503 & 10235 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} -\frac{1}{320} & \frac{69}{320} & -\frac{1503}{320} & \frac{10235}{320} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 92 & -3070 & 43884 & -225225 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Демак,

$$P(\lambda)=\lambda^4-92\lambda^3+3070\lambda^2-43884\lambda+225225.$$

Кўпайтувчиларга ажратиб,

$$P(\lambda)=(\lambda-13)(\lambda-21)(\lambda-25)(\lambda-33)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан эса хос сонларни топамиз:

$$\lambda_1=13,\quad \lambda_2=21,\quad \lambda_3=25,\quad \lambda_4=33.$$

Энди хос векторларни топамиз. Бу ерда $S = M_3 U M_2 M_1$ бўлганлиги **учун** (4.3) — (4.4) формулаларга кўра

$$\overline{x}^{(1)} = M_3 U M_2 M_1 \overline{y}^{(1)} = M_3 U M_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{320} & \frac{69}{320} & -\frac{1503}{320} & \frac{10235}{320} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13^3 \\ 13^2 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= M_3 U \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} & -\frac{46}{64} & \frac{477}{64} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 13^2 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} = M_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= M_3 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{4} & \frac{23}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Шундай қилиб, $\overline{x}^{(1)} = (3,2,6,4)'$. Шу йўл билан ҳисоблаб, қолган хос векторларни ҳам топамиз:

$$\overline{x}^{(2)} = (3,\ 2,\ -6,\ 4)',\ \overline{x}^{(3)} = (3,\ -2,\ 6,\ -4)',\ \overline{x}^{(4)} = (3,\ -\ 2,\ -6,\ 4)'.$$

5- §. ЛЕВЕРЬЕ МЕТОДИ

A матрица

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \ldots - p_n \qquad (5.1)$$

хос кўпҳадининг илдизларини $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ билан, шу илдизларнинг симметрик функцияларини эса S_k билан белгилаймиз:

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \quad (k = \overline{1, n}). \qquad (5.2)$$

Хос кўпҳаднинг коэффициентлари $p_1, p_2, \ldots, p_n$ билан S_k ларни боғлайдиган қуйидаги *Ньютон формулалари* мавжуд:

$$S_k - p_1 S_{k-1} - \ldots - p_{k-1} S_1 - k p_k = 0 \ (k = \overline{1, n}). \qquad (5.3)$$

Бу формулалардан кейинчалик ҳам фойдаланамиз. Уларни исботлаш учун $P(\lambda)$ ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n).$$

Бу тенгликни дифференциалласак,

$$P'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1, j \neq i}^{n} (\lambda - \lambda_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} \qquad (5.4)$$

айният келиб чиқади. Бу айниятнинг ўнг томонини ҳисоблаймиз:

$$\frac{P(\lambda)}{\lambda-\lambda_i}=\lambda^{n-1}+(-p_1+\lambda_i)\lambda^{n-2}+(-p_2-p_1\lambda_i+\lambda_i^2)\lambda^{n-3}+\dots+$$
$$+(-p_{n-1}-p_{n-2}\lambda_i-\dots-p_1\lambda_i^{n-2}+\lambda_i^{n-1}) \qquad (5.5)$$
$$(i=1,2,\dots,n).$$

Иккинчи томондан

$$P'(\lambda)=n\lambda^{n-1}-(n-1)p_1\lambda^{n-2}-(n-2)p_2\lambda^{n-3}-\dots-p_{n-1}$$

ни ҳисобга олиб, (5.4) айниятни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$P'(\lambda)=n\lambda^{n-1}-(n-1)p_1\lambda^{n-2}-(n-2)p_2\lambda^{n-3}-\dots-p_{n-1}\equiv$$
$$\equiv n\lambda^{n-1}+(-np_1+S_1)\lambda^{n-2}+(-np_2-p_1S_1+S_2)\lambda^{n-3}+$$
$$+(-np_3-p_2S_1-p_1S_2+S_3)\lambda^{n-4}+\dots+$$
$$+(-np_{n-1}-p_{n-2}S_1-p_{n-3}S_2-\dots-p_1S_{n-2}+S_{n-1}). \qquad (5.6)$$

Бундан қуйидагилар келиб чиқади:

$$\begin{cases} -(n-1)p_1=-np_1+S_1, \\ -(n-2)p_2=-np_2-p_1S_1+S_2, \\ -(n-3)p_3=-np_3-p_2S_1-p_1S_2+S_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -p_{n-1}=-np_{n-1}-p_{n-2}S_1-\dots-p_1S_{n-2}+S_{n-1}. \end{cases} \qquad (5.7)$$

Бу тенгликларни соддалаштирсак:

$$\begin{cases} S_1-p_1=0, \\ S_2-p_1S_1-2p_2=0, \\ S_3-p_1S_2-p_2S_1-3p_3=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{n-1}-p_1S_{n-2}-\dots-p_{n-2}S_1-(n-1)p_{n-1}=0. \end{cases} \qquad (5.8)$$

Булардан кетма-кет $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ ларни аниқлаймиз. p_n ни ҳосил қилиш учун қуйидагилардан фойдаланамиз:

$$P(\lambda_1)=\lambda_1^n-p_1\lambda_1^{n-1}-\dots-p_{n-1}\lambda_1-p_n=0$$
$$P(\lambda_2)=\lambda_2^n-p_1\lambda_2^{n-1}-\dots-p_{n-1}\lambda_2-p_n=0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P(\lambda_n)=\lambda_n^n-p_1\lambda_n^{n-1}-\dots-p_{n-1}\lambda_n-p_n=0.$$

Энди буларни қўшиб,

$$S_n-p_1S_{n-1}-\dots-p_{n-1}S_1-np_n=0 \qquad (5.9)$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенглик (5.8) билан бирга *Ньютон формулаларини* беради.

Хос кўпҳад коэффициентларини (5.8) — (5.9) лардан фойдаланиб кетма-кет қуйидагича ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} p_1=S_1, \\ p_2=\frac{1}{2}(S_2-p_1S_1), \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_n=\frac{1}{n}(S_n-p_1S_{n-1}-\dots-p_{n-1}S_1). \end{cases}$$

Агар $S_1, S_2, \ldots, S_n$ маълум бўлса, бу формулалар ёрдамида $p_1, p_2, \ldots, p_n$ топилади. Маълумки, S_1 A матрицанинг изига тенг:

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{tr}\, A.$$

Иккинчи томондан $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ лар $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$ матрицанинг хос сонлари эканлигини ҳам биламиз, шунинг учун ҳам

$$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k = \mathrm{tr}\, A^k = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(k)}.$$

Шундай қилиб, $P(\lambda)$ хос кўпҳаднинг коэффициентларини топиш учун $A^2, A^3, \ldots, A^n$ матрицаларни ҳосил қилиб, уларнинг изи

$S_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}^{(k)}$ $(k = \overline{1, n})$ ни топиш керак.

Матрица изини топиш учун бу матрицанинг фақат диагонал элементларини билиш кифоядир. Шунинг учун ҳам $m = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ деб олиб, $A^2, A^3, \ldots, A^m$ ни ҳосил қилиш ҳамда $A^{m+1}, A^{m+2}, \ldots, A^n$ матрицаларнинг фақат диагонал элементларини ҳисоблаш керак. Бу эса ҳисоблашни анча қисқартиради.

Шунга қарамасдан Леверье методи жуда кўп меҳнат талаб қилади.

Мисол. Леверье методи билан

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

матрицанинг характеристик кўпҳади топилсин.

Ечиш. Бу ерда $m = \left[\frac{4+1}{2}\right] = 2$ бўлганлиги учун A^2 ни ҳисоблаб, A^3 ва A^4 ларнинг фақат диагонал элементларини топамиз:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 8 & 10 \\ 6 & 6 & 15 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & 11 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -2 & 8 & 10 \\ 6 & 6 & 15 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 17 & & \\ & & 35 & \\ & & & -10 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 8 & 10 \\ 6 & 6 & 15 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -2 & 8 & 10 \\ 6 & 6 & 15 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 129 & & & \\ & 108 & & \\ & & 159 & \\ & & & 148 \end{bmatrix}.$$

Демак, бу ердан

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \operatorname{tr} A = -1+1+2-2=0,\\
S_2 &= \operatorname{tr} A^2 = 9+6+8+11=34,\\
S_3 &= \operatorname{tr} A^3 = 3+17+35-10=45,\\
S_4 &= \operatorname{tr} A^4 = 129+108+159+148=542.
\end{aligned}
$$

Энди (5.10) формулалар ёрдамида

$$
\begin{aligned}
p_1 &= S_1 = 0,\\
p_2 &= \frac{1}{2}(S_2 - p_1 S_1) = 17,\\
p_3 &= \frac{1}{3}(S_3 - p_1 S_2 - p_2 S_1) = 15,\\
p_4 &= \frac{1}{4}(S_4 - p_1 S_3 - p_2 S_2 - p_3 S_1) = -9
\end{aligned}
$$

ларни топамиз.

Демак,

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 17\lambda^2 - 15\lambda + 9$$

берилган матрицанинг характеристик кўпҳадидир.

6- §. Д. К. ФАДДЕЕВ МЕТОДИ

Д. К. Фаддеев Леверье методини шундай такомиллаштирдики, натижада, берилган A матрицанинг хос кўпҳадини топиш билан бир вақтда унга тескари бўлган A^{-1} матрицани ҳамда A матрицанинг хос векторларини ҳам топиш мумкин бўлади.

Леверье методидаги $A, A^2, \ldots, A^n$ матрицалар кетма-кетлиги ўрнидаги ушбу $A_1, A_2, \ldots, A_n$ кетма-кетликни Д. К. Фаддеев қуйидагича аниқлайди:

$$
\begin{cases}
A_1 = A, \quad \operatorname{tr} A_1 = q_1, \quad B_1 = A_1 - q_1 E,\\
A_2 = AB_1, \dfrac{\operatorname{tr} A_2}{2} = q_2, \quad B_2 = A_2 - q_2 E,\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
A_{n-1} = AB_{n-2}, \dfrac{\operatorname{tr} A_{n-1}}{n-1} = q_{n-1}, B_{n-1} = A_{n-1} - q_{n-1} E,\\
A_n = AB_{n-1}, \dfrac{\operatorname{tr} A_n}{n} = q_n, \quad B_n = A_n - q_n E.
\end{cases}
\tag{6.1}
$$

Бу ерда қуйидагиларни исботлаймиз:

а) $q_1 = p_1 \quad q_2 = p_2, \ldots, q_n = p_n$;

в) B_n ноль матрица;

в) агар A махсусмас матрица бўлса, у ҳолда

$$A^{-1} = \frac{B_{n-1}}{p_n}.$$

Математик индукция методи билан аввал а) ни исботлаймиз. Равшанки, $p_1 = \operatorname{tr} A = q_1$. Энди фараз қилайлик, $q_1 = p_1$, $q_2 = p_2$, $\ldots, q_{k-1} = p_{k-1}$ бўлсин, у ҳолда $q_k = p_k$ эканлигини кўрсатамиз. (6.1) дан ва юқоридаги фараздан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A_k = A^k - q_1 A^{k-1} - \ldots - q_{k-1} A = A^k - p_1 A^{k-1} - \ldots - p_{k-1} A.$$

Демак,

$$\operatorname{tr} A_k = k q_k = \operatorname{tr} A^k - p_1 \operatorname{tr} A^{k-1} - \ldots - p_{k-1} \operatorname{tr} A =$$
$$= S_k - p_1 S_{k-1} - \ldots - p_{k-1} S_1.$$

Бу ердан Ньютон формулалари (5.3) га кўра $kq_k = kp_k$, яъни $q_k = p_k$. Бу эса биринчи тасдиқни исботлайди.

Иккинчи тасдиқни исботлаш учун Гамильтон — Кели теоремасидан фойдаланамиз:

$$B_n = A_n - p_n E = A^n - p_1 A^{n-1} - \ldots - p_n E = 0.$$

Бу тенгликка кўра $A_n = p_n E$, (6.1) дан эса $A_n = A \cdot B_{n-1}$. Демак,

$$A^{-1} = \frac{B_{n-1}}{p_n}.$$

Шу билан учинчи тасдиқ ҳам исботланди. Юқорида ҳосил қилинган $A_n = p_n E$ тенглик контроль вазифасини бажаради, агар A_n матрица скаляр $p_n E$ матрицадан қанча кам фарқ қилса, ҳисоблаш шунча яхши олиб борилган бўлади.

Мисол. Қуйидаги

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицанинг хос кўпҳадини ва A^{-1} ни топамиз.

Ечиш. (6.1) формулага кўра

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_1 = 3, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = AB_1 = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 11 \end{bmatrix}, \quad p_2 = 14, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Демак, $p_3 = 8$ бўлиб,

$$p_3(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 14\lambda - 8$$

ва

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Энди хос векторларни топиш масаласини кўрайлик. Юқорида аниқланган $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ матрицалардан фойдаланиб,

$$Q(\lambda) = \lambda^{n-1} E + \lambda^{n-2} B_1 + \lambda^{n-3} B_2 + \ldots + B_{n-1}$$

матрицани тузамиз. Агар A матрицанинг барча $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ хос сонлари бир-биридан фарқли бўлса, у ҳолда $Q(\lambda_k)$ матрицалар ноль матрица эмаслигини кўрсатиш мумкин. Энди $Q(\lambda_k)$ матрицанинг ҳар бир устуни A матрицанинг λ_k хос сонига мос келадиган хос вектордан иборат эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, $B_j - AB_{j-1} = -p_j E$ $(j = \overline{1, n})$ ва λ_k хос кўпҳаднинг илдизи бўлганлиги учун

$$\begin{aligned}(\lambda_k E - A)\, Q(\lambda_k) &= \\ = (\lambda_k E - A)(\lambda_k^{n-1} E + \lambda_k^{n-2} B_1 + \ldots + \lambda_k B_{n-2} + B_{n-1}) &= \\ = \lambda_k^n E + \lambda_k^{n-1}(B_1 - A) + \ldots + \lambda_k (B_{n-1} - AB_{n-2}) - AB_{n-1} &= \\ = (\lambda_k^n - p_1 \lambda_k^{n-1} - \ldots - p_n) E &= 0,\end{aligned}$$

яъни

$$(\lambda_k E - A)\, Q(\lambda_k) = 0,$$

бундан эса

$$(\lambda_k E - A)\, \overline{x} = 0.$$

ёки

$$A\overline{x} = \lambda_k \overline{x}$$

келиб чиқади, бу ерда $\overline{x}$ вектор $Q(\lambda_k)$ матрицанинг ихтиёрий устуни. Албатта, хос векторни топиш учун $Q(\lambda_k)$ матрицанинг ҳамма устунларини эмас, балки унинг бирор устунини топиш кифоядир. $Q(\lambda_k)$ матрицанинг $\overline{u}$ устунини қуйидаги рекуррент формуладан аниқлаш маъқулдир:

$$\overline{u}_0 = \overline{e},\ \overline{u}_i = \lambda_k \overline{u}_{i-1} + \overline{b}_i,$$

бу ерда $\overline{b}_i$ B_i матрицанинг бирор устуни бўлиб, $\overline{e}$ эса бирлик матрицанинг шу номерли устунидир. Бу ҳолда

$$\overline{u} = \overline{u}_{n-1}.$$

7- §. НОАНИҚ КОЭФФИЦИЕНТЛАР МЕТОДИ

Характеристик кўпҳадни ёзиш мураккаб масала эканлигини айтиб ўтган эдик. Ноаниқ коэффициентлар методи мана шу мураккаб масалани анча содда масалага, яъни $D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ ни $\lambda = 0, 1, \ldots, n-1$ қийматларда ҳисоблаш ва битта сонли матрицанинг тескарисини топишга олиб келади. Олдинги бобдаги методларнинг бирортасини қўллаб, $D(0), D(1), \ldots, D(n-1)$ ни ҳисоблаймиз, натижада хос кўпҳаднинг $p_1, p_2, \ldots, p_n$ коэффициентларини топиш учун қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} p_n = (-1)^{n-1} D(0), \\ (-1)^n (1^n - p_1 \cdot 1^{n-1} - p_2 \cdot 1^{n-2} - \ldots - p_n) = D(1), \\ (-1)^n (2^n - p_1 \cdot 2^{n-1} - p_2\, 2^{n-2} - \ldots - p_n) = D(2), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (-1)^n ((n-1)^n - p_1 (n-1)^{n-1} - p_2 (n-1)^{n-2} - \ldots - p_n) = D(n-1). \end{cases} \qquad (7.1)$$

Бу ердан эса

$$\begin{cases} p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}=1+(-1)^n(D(0)-D(1)), \\ p_1\cdot 2^{n-1}+p_2\cdot 2^{n-2}+\ldots+p_{n-1}2=2^n+(-1)^n\ (D(0)-D(2)), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_1(n-1)^{n-1}+p_2(n-1)^{n-2}+\ldots+p_{n-1}(n-1)=(n-1)^n+ \\ \qquad +(-1)^n(D(0)-D(n-1)). \end{cases} \tag{7.2}$$

Бу системани ечиб, хос кўпҳад коэффициентлари $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ни топиб оламиз. Қуйидаги матрица

$$B_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & \ldots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n-1)^{n-1} & (n-1)^{n-2} & \ldots & n-1 \end{bmatrix}$$

ва

$$\bar{d}=\begin{bmatrix} 1+(-1)^n(D(0)-D(1)) \\ 2^n+(-1)^n(D(0)-D(2)) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (n-1)^n+(-1)^n\ (D(0)-D(n-1) \end{bmatrix},\quad \bar{p}=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

векторларни киритиб, (7.2) системани матрицали тенглама шаклида ёзиб оламиз:

$$B_{n-1}\bar{p}=\bar{d}\,.$$

Бундан эса

$$\bar{p}=B_{n-1}^{-1}\bar{d}\,. \tag{7.3}$$

Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, бу метод билан бир нечта бир хил тартибли матрицаларнинг кўпҳадини топиш қулайдир, тескари матрица фақат характеристик детерминантнинг тартибига боғлиқ бўлиб, уни олдиндан топиб қўйиш мумкин.

Мисол. Қуйидаги

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

матрицанинг хос кўпҳади топилсин.

Ечиш. Гаусс методи билан аввал

$$B_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2 \\ 3^3 & 3^2 & 3 \end{bmatrix}$$

матрицанинг тескарисини топамиз:

$$B_3^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Сўнгра қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$D(0)=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=9,\ D(1)=\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-22,$$

$$D(2)=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}=-73,\ D(3)=\begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}=$$

$$=-108.$$

Энди (7.3) тенгликка кўра

$$\overline{p}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 \\ 98 \\ 198 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 17 \\ 15 \end{bmatrix}$$

ни топамиз. Демак,

$$P(\lambda)=\lambda^4-17\lambda^2-15\lambda+9$$

берилган матрицанинг характеристик кўпҳадидир.

8- §. ҲОШИЯЛАШ МЕТОДИ

Маълумки, n- тартибли $A=A_n$ квадрат матрицанинг характеристик кўпҳади

$$D(\lambda)=D_n(\lambda)=\det(A-\lambda E)$$

ни топиш n ортган сари қийинлашиб боради. Лекин $D_n(\lambda)$ билан $(n-1)$ -тартибли A_{n-1} квадрат матрицанинг характеристик кўпҳади орасида рекуррент муносабат ўрнатиб, $D_n(\lambda)$ ни топиш масаласини $D_2(\lambda)$ ни топишга келтириш мумкин. Бунинг учун биз олий алгебрадан айрим маълумотлар келтирамиз. Берилган $A=[a_{ij}]$ матрицага бириктирилган матрица деб,

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

матрицага айтилади, бу ерда A_{ij} лар a_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчисидир. Матрицаларни кўпайтириш қоидасидан

$$AA^*=A^*A=\begin{bmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix}=d\cdot E \tag{8.2}$$

келиб чиқади, бу ерда $d=\det A$.

Энди ҳошиялаш методини тушунтиришга ўтамиз. Бунинг учун A_n матрицани

$$A = A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \bar{u}^{(n-1)} \\ \bar{v}^{(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу ерда

$$\bar{u}^{(n-1)} = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{n-1,\ n})',$$
$$\bar{v}^{(n-1)} = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{n,\ n-1}).$$

Энди $A_n - \lambda E_n$ матрицага бириктирилган матрицани $C(\lambda) = C_n()\lambda = = [\bar{c}_{ij}(\ )]$ орқали белгилаб, (8.1) тенгликдан

$$\bar{c}_{nn}(\ ) = D_{n-1}(\lambda)$$

эканлигини кўрамиз, (8.3) тенгликдагидек, $C_n(\lambda)$ ни ҳам катакларга бўламиз:

$$C_n(\lambda) = \begin{bmatrix} C_{n-1}(\lambda) & \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) \\ \bar{h}^{(n-1)}(\lambda) & D_{n-1}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Бу ерда

$$\bar{g}^{(n-1)}(\lambda) = (c_{n1}(\lambda), c_{n2}(\lambda), \ldots, c_{n,\ n-1}(\lambda))',$$
$$\bar{h}^{(n-1)}(\lambda) = (c_{1n}(\lambda), c_{n2}(\lambda), \ldots, c_{n-1,\ n}(\lambda))$$

бўлиб, $D_{n-1}(\lambda)$ эса A_{n-1} матрицанинг характеристик кўпҳадидир. (8.2) тенгликдан

$$(A_n - \lambda E_n)\, C_n(\lambda) = D_n(\lambda)\, E_n$$

ёки

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} - \lambda E_{n-1} & \bar{u}^{(n-1)} \\ \bar{v}^{(n-1)} & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{n-1}(\lambda) & \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) \\ \bar{h}^{(n-1)}(\lambda) & D_{n-1}(\lambda) \end{bmatrix} = D_n(\lambda)\, E_n$$

га эга бўламиз. Бундан эса қуйидаги

$$\begin{cases} (A_{n-1} - \lambda E_{n-1})\, \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) + \bar{u}^{(n-1)} D_{n-1}(\lambda) = \bar{0}, \\ \bar{v}^{(n-1)}\, \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) + (a_{nn} - \lambda)\, D_{n-1}(\lambda) = D_n(\lambda). \end{cases} \tag{8.4}$$

тенгликлар келиб чиқади. Бу тенгликларнинг биринчисидан $\bar{g}^{(n-1)}(\lambda)$ ни топамиз. Бунинг учун биринчи тенгликни

$$\lambda \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) = A_{n-1}\, \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) + \bar{u}^{(n-1)} D_{n-1}(\lambda) \tag{8.5}$$

шаклда ёзиб олиш маъқулдир. Бу тенгликдан

$$D_{n-1}(\lambda) = \lambda^{n-1} + q_1 \lambda^{n-2} + q_2 \lambda^{n-3} + \ldots + q_{n-1} \tag{8.6}$$

бўлганлиги учун, кўрамизки, $\bar{g}^{(n-1)}(\lambda)$ вектор λ га нисбатан $(n-2)$-даражали вектор — кўпҳаддир:

$$\bar{g}^{(n-1)}(\lambda) = \bar{b}_0^{(n-1)} \lambda^{n-2} + \bar{b}_1^{(n-1)} \lambda^{n-3} + \ldots + \bar{b}_{n-2}^{(n-1)}. \tag{8.7}$$

Буни ва (8.6) ни (8.5) га қўйиб, λ нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни солиштирсак, $\overline{b}_j^{(n-1)} \, (j=\overline{0, n-2})$ лар учун қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} \overline{b}_0^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\overline{u}^{(n-1)}, \\ \overline{b}_1^{(n-1)} = A_{n-1}\overline{b}_0^{(n-1)} + q_1\overline{u}^{(n-1)}, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \overline{b}_{n-2}^{(n-1)} = A_{n-1}b_{n-3}^{(n-1)} + q_{n-2}\overline{u}^{(n-1)}. \end{cases} \tag{8.8}$$

Шундай қилиб, бевосита $D_2(\lambda)$ ни ҳисоблаб, кейин кетма-кет $D_3(\lambda)$, $D_4(\lambda)$, . . . , $D_n(\lambda)$ ларни ҳисоблаймиз.

Мисол. Қуйидаги

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицанинг характеристик кўпҳади топилсин.

Ечиш. Аввало

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdot & 3 \\ 2 & 1 & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 2 & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

матрицани оламиз ва $D_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ дан фойдаланиб, $\overline{g}^{(2)}(\lambda)$ нинг коэффициентларини (8.8) дан топамиз:

$$b_0^{(2)} = \overline{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\overline{b}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Энди $\overline{g}^{(2)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ни (8.4) га қўйиб, $D_3(\lambda)$ ни ҳосил қиламиз: $D_3(\lambda) = [3,2]\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right) + (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 14\lambda + 8.$

Энди $A_4 = A$ деб олиб, $\overline{g}^{(3)}(\lambda)$ ни топамиз:

$$\overline{b}_0^{(3)} = -\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \overline{b}_1^{(3)} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -12 \end{bmatrix},$$

$$\overline{b}_2^{(3)} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} + 14\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix},$$

$$\overline{g}^{(3)}(\lambda) = -\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\lambda^2 - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}\lambda - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ниҳоят, $D_4(\lambda)$ ни топамиз:

$$D_4(\lambda) = [4,\ 3,\ 2]\left(-\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\lambda^2 - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}\lambda - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}\right) + (1-\lambda)(-\lambda^3 + $$

$$+ 3\lambda^2 + 14\lambda + 8) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20.$$

9-§. ХОС СОНЛАРНИНГ ҚИСМИЙ МУАММОСИНИ ЕЧИШНИНГ ИТЕРАЦИОН МЕТОДЛАРИ

Бу параграфда биз хос сонларнинг қисмий муаммосини ечишнинг энг содда методларини кўриб чиқамиз. Бундан ташқари қараладиган матрицаларимиз оддий структурага эга деб фараз қиламиз.

Таъриф. Агар n-тартибли A квадрат матрица n та чизиқли эркли хос векторларга эга бўлса, бундай матрица *оддий структурага эга* дейилади.

Чизиқли алгебрадан маълумки, матрицаларнинг қуйидаги синфлари оддий структурага эга:

1. Симметрик матрица, чунки унинг хос қийматлари ҳақиқий сонлар бўлиб, хос векторлардан тузилган ортогонал базис мавжуддир.

2. Эрмит матрицаси, унинг барча хос сонлари ҳақиқий бўлиб, хос векторларидан мос равишдаги n ўлчовли комплекс фазода ортонормал базис тузиш мумкин.

3. Нормал матрица. Агар A матрица ўзининг қўшмаси A^* билан коммутатив, яъни $AA^* = A^*A$ бўлса, у ҳолда A *матрица нормал* дейилади. Умуман олганда, бу учта синфга тегишли матрицалардан ташқари оддий структурага эга бўлган бошқа матрицалар ҳам мавжуд. Биз аввал модули бўйича энг катта хос сон ва унга мос келган хос векторни топиш билан шуғулланамиз. Кейин эса модули бўйича катталик жиҳатдан иккинчи ўринда турган хос сон ва унга мос келадиган хос векторни топамиз.

Энг катта хос сон ва унга мос келадиган хос векторни топишда даражали метод. Фараз қилайлик, А матрица оддий структурага эга ва унинг хос сонлари $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ бўлиб, уларга мос келадиган чизиқли эркли хос векторлар $\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, \ldots, \overline{x}^{(n)}$ бўлсин. Бу ерда тўрт ҳолни кўриб чиқамиз:

1-ҳол. A матрицанинг хос сонларидан биттаси модули бўйича энг катта бўлсин. Умумийликка зарар етказмасдан хос сонлар қуйидаги тартибда жойлашган деб фараз қилишимиз мумкин:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|. \quad (9.1)$$

Биз λ_1 нинг тақрибий қийматини топиш усулини кўрсатамиз. Ихтиёрий нолдан фарқли $\overline{y}^{(0)}$ векторни олиб, уни A матрица хос векторлари бўйича ёямиз:

$$\overline{y}^{(0)} = b_1\overline{x}^{(1)} + b_2\overline{x}^{(2)} + \ldots + b_n\overline{x}^{(n)}.$$

Бу ерда b_i лар ўзгармас сонлар бўлиб, айримлари ноль бўлиши ҳам мумкин. $\overline{y}^{(0)}$ вектор устида A^k матрица ёрдамида алмаштириш бажарамиз:

$$\overline{y}^{(k)} = A^k\overline{y}^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} b_j A^k \overline{x}^{(j)}.$$

Бу ердан $A^k\bar{x}^{(j)} = \lambda_j^k\bar{x}^{(j)}$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$\bar{y}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} b_j\lambda_j^k\bar{x}^{(j)} \qquad (9.2)$$

га эга бўламиз.

Энди n ўлчовли векторлар фазоси R_n да ихтиёрий $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ базис оламиз. Шу базисда

$$\bar{y}^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})',$$

$$\bar{x}^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})'$$

бўлсин. (9.2) тенгликни координаталарда ёзиб чиқамиз:

$$y_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} b_jx_{ij}\ \lambda_j^k\ (i = \overline{1, n}). \qquad (9.3)$$

Шунга ўхшаш

$$y_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_jx_{ij}\lambda_j^{k+1}. \qquad (9.4)$$

Бу ерда $c_{ij} = b_jx_{ij}$ деб белгилаб, (9.4) ни (9.3) га бўламиз:

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} = \frac{c_{i1}\lambda_1^{k+1} + c_{i2}\lambda_2^{k+1} + \ldots + c_{in}\lambda_n^{k+1}}{c_{i1}\lambda_1^k + c_{i2}\lambda_2^k + \ldots + c_{in}\ \lambda_n^k}. \qquad (9.5)$$

Фараз қилайлик, $c_{i1} \neq 0$ бўлсин, бунга эришиш учун дастлабки вектор $y^{(0)}$ ва $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ базисни керакли равишда танлаш керак. Энди $d_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{i1}}$ ва $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ деб (9.5) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} = \lambda_1\frac{1 + d_{i2}\mu_2^{k+1} + \ldots + d_{in}\mu_n^{k+1}}{1 + d_{i2}\mu_2^k + \ldots + d_{in}\mu_n^k}. \qquad (9.6)$$

Бу ердан эса (9.1) ни ҳисобга олсак, $k \to \infty$ да $\mu_n^k \leqslant \ldots \leqslant \mu_2^k \to 0$ келиб чиқади.

Демак, (9.6) ни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} = \lambda_1[1 + 0(|\mu_2|^{k+1})]\,[1 + 0(|\mu_2|^k)]^{a} = \lambda_1[1 + 0\,(|\mu_2|^k)] =$$

$$= \lambda_1 + 0\,(|\mu_2|^k).$$

Бу ердан эса етарлича катта k лар учун

$$\lambda_1 \approx \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} \qquad (9.7)$$

деб олишимиз мумкин. Одатда $\bar{x}^{(1)}$ векторнинг бир неча координаталари нолдан фарқли бўлади. Шунинг учун (9.7) да нисбатни i нинг бир неча қийматида ҳисоблаш мумкин. Агар бу нисбатлар етарли аниқликда устма-уст тушса, у ҳолда биз λ_1 ни етарли аниқлик билан топган бўламиз. Равшанки, бу жараённинг яқинлашиш тезлиги μ_2 нинг кичиклигига боғлиқдир.

Эслатма. Юқоридаги итерацион жараённинг яқинлашишини тезлаштириш учун айрим ҳолларда қуйидаги матрицалар кетма-кетлигини тузиш фойдалидир:

$$\begin{aligned} &A^2 = A\cdot A,\\ &A^4 = A^2\cdot A^2,\\ &A^8 = A^4\cdot A^4,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &A^{2^m} = A^{2^{m-1}}\cdot A^{2^{m-1}}. \end{aligned}$$

Бу ердан эса $k = 2^m$ деб олиб,

$$\bar{y}^{(k)} = A^k\bar{y}^{(0)}$$

ва

$$\bar{y}^{(k+1)} = A\bar{y}^{(k)}$$

га эга бўламиз.

Топилган энг катта хос сон λ_1 га мос келадиган хос вектор сифатида $\bar{y}^{(k)}$ ни олишимиз мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (9.2) формуладан

$$\bar{y}^{(k)} = b_1\lambda_1^k\bar{x}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} b_j\lambda_j^k\,\bar{x}^{(j)}$$

га эга бўламиз. Бу ердан

$$\bar{y}^{(k)} = b_1\lambda_1^k\left\{\bar{x}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n}\frac{b_j}{b_1}\ \mu_j^k\,\bar{x}^{(j)}\right\}.$$

Агар биз $\mu_j^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда етарли аниқлик билан

$$\bar{y}^{(k)} \approx b_1\lambda_1^k\ \bar{x}^{(1)}$$

га эга бўламиз, яъни $\bar{y}^{(k)}$ хос вектор $\bar{x}^{(1)}$ дан сонли кўпайтувчи билан фарқ қиляпти ва, демак, у λ_1 хос сонга мос келадиган хос вектордир.

Мисол. Қуйидаги

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицанинг энг катта хос сони ва унга мос келадиган хос вектори топилсин.

Ечиш. Дастлабки $\bar{y}^{(0)} = (2, -1, -1)'$ векторни олиб, унинг итерациясини ҳосил қиламиз.

Натижа 16- жадвалда келтирилган.

16- жадвал

$\bar{y}$	$A\bar{y}$	$A^2\bar{y}$	$A^3\bar{y}$	$A^4\bar{y}$	$A^5\bar{y}$	$A^6\bar{y}$	$A^7\bar{y}$
2	11	61	336	1842	10071	54981	299916
—1	—6	—31	—162	—861	—4626	—25011	—135702
—1	—2	—8	—39	—201	—1062	—5688	—30699

давоми

$A^8\bar{y}$	$A^9\bar{y}$	$A^{10}\bar{y}$	$A^{11}\bar{y}$	$A^{12}\bar{y}$
1635288	8914131	48586477	264798094	1442094008
—737711	—4015822	—21865709	—119103538	—648894351
—166401	—904112	—4919934	—26785643	—145889181

Итерацияни шу ерда тўхтатиб

$$\frac{y_1^{(12)}}{y_1^{(11)}} = \frac{1442094008}{264798094} = 5,4460; \quad \frac{y_2^{(12)}}{y_2^{(11)}} = \frac{648894351}{119103538} = 5,4481;$$

$$\frac{y_3^{(12)}}{y_3^{(11)}} = \frac{145889181}{26785643} = 5,4400$$

га эга бўламиз. Демак, λ_1 нинг тақрибий қиймати

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}\,(5,4460 + 5,4481 + 5,4400) = 5,4447 \approx 5,445$$

га тенг. A матрицанинг биринчи хос вектори сифатида

$$\bar{y}^{(12)} = \begin{bmatrix} 1442094008 \\ -648894351 \\ -145889181 \end{bmatrix}$$

ни олишимиз мумкин. Бу векторни нормаллаштиргандан сўнг

$$\bar{x}^{(1)} = (1;\ -0,46;\ -0,10)'$$

келиб чиқади.

2-ҳол. A матрица хос сонининг модули бўйича энг каттаси каррали бўлсин. Фараз қилайлик,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s,$$
$$|\lambda_1| > |\lambda_{s+1}| \geqslant |\lambda_{s+2}| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$$

бўлсин. Бу ҳолда (9.5) тенглик қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} = \frac{(c_{i1} + \ldots + c_{is})\lambda_1^{k+1} + c_{i,\,s+1}\,\lambda_{s+1}^{k+1} + \ldots + c_{in}\lambda_n^{k+1}}{(c_{i1} + \ldots + c_{is})\lambda_1^{k} + c_{i,\,s+1}\,\lambda_{s+1}^{k} + \ldots + c_{in}\lambda_n^{k}}. \qquad (9.8)$$

Бу ерда ҳам $c_{i1} + \ldots + c_{is} \neq 0$ деб фараз қиламиз ва $d_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{i1} + \ldots + c_{is}}$ $(j > s)$, $\mu_l = \frac{\lambda_l}{\lambda_1}$ белгилашларни киритиб, (9.8) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} = \lambda_1 \frac{1 + d_{i,\,s+1}\mu_{s+1}^{k+1} + \ldots + d_{in}\mu_n^{k+1}}{1 + d_{i,\,s+1}\mu_{s+1}^{k} + \ldots + d_{in}\mu_n^{k}}.$$

Бундан эса, $\mu_{s+1}^k \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 0$ ни ҳисобга олиб,

$$\lambda_1 = \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} + 0\,(|\mu_{s+1}|^k)$$

га эга бўламиз. Шундай қилиб, юқорида келтирилган жараён бу ерда ҳам ўринлидир. 1) ҳолдагидек A матрицанинг λ_1 хос сонига мос келадиган хос вектор сифатида тақрибий равишда $\overline{y}^{(k)}$ ни олишимиз мумкин. Умуман айтганда, бошқа дастлабки $\overline{y}^{(0)}$ векторни танлаб бошқа $A^k\overline{y}^{(0)}$ хос векторга эга бўламиз. Шундай қилиб, λ_1 га мос келадиган бошқа хос векторларни ҳам топиш мумкин.

3-ҳол. Фараз қилайлик, A матрицанинг хос сонлари қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = -\lambda_{r+1} = \ldots = -\lambda_{r+p}$$

ва

$$|\lambda_1| = \ldots = |\lambda_{r+p}| > |\lambda_{r+p+1}| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|.$$

Бу ерда юқоридаги итерацион жараённи қўллаб бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, (9.3) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y_i^{(k)} = (b_1 x_{i1} + \ldots + b_r x_{ir})\lambda_1^k + (b_{r+1} x_{i,\,r+1} + \ldots +$$
$$+ b_{r+p} x_{i,\,r+p})(-\lambda_1)^k + b_{r+p+1}\, x_{i,\,r+p+1}\lambda_{r+p+1}^k + \ldots + b_n x_{in}\lambda_n^k =$$
$$= d_{i1}\lambda_1^k + d_{i,\,r+1}(-1)^k\lambda_1^k + d_{i,\,r+p+1}\lambda_{r+p+1}^k + \ldots + d_{in}\lambda_n^k.$$

Бу ерда $d_{i1}\lambda_1^k$ ва $d_{i,\,r+1}(-1)^k\lambda_1^k$ ҳадлар бир хил тартибга эга бўлиб, k нинг ўзгариши билан иккинчиси ўз ишорасини ўзгартиради. Демак,

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$$

нисбат $k \to \infty$ да лимитга эга бўлмайди. Лекин бу ерда $y_i^{(2k)}$ ва $y_i^{(2k+2)}$ ёки $y_i^{(2k-1)}$ ва $y_i^{(2k+1)}$ дан фойдаланиб, λ_1^2 ни топишимиз мумкин:

$$\frac{y_i^{(2k+2)}}{y_i^{(2k)}} = \lambda_1^2 + 0\,(|\mu_{k+p+1}|^{2k}),$$

$$\frac{y_i^{(2k+1)}}{y_i^{(2k-1)}} = \lambda_1^2 + 0\,(|\mu_{k+p+1}|^{2k}).$$

Шундай қилиб, бу ҳолда A матрицанинг модули бўйича энг катта хос сонини топишимиз мумкин. A матрицанинг λ_1 ва $-\lambda_1$ хос сонларга мос келадиган хос векторларини топиш учун $\overline{y}^{(k+1)} + \lambda_1\overline{y}^{(k)}$ ва $\overline{y}^{(k+1)} - \lambda_1\overline{y}^{(k)}$ векторларни тузамиз:

$$\overline{y}^{(k+1)} + \lambda_1\overline{y^{(k)}} = 2\lambda_1^{k+1}(b_1\overline{x}^{(1)} + \ldots + b_r\overline{x}^{(r)}) + (\lambda_1 +$$
$$+ \lambda_{r+p+1})b_{r+p+1}\,\lambda_{r+p+1}^k\overline{x}^{(r+p+1)} + \ldots + (\lambda_1 + \lambda_n)\lambda_n^k b_n\overline{x}^{(n)} =$$
$$= \lambda_1^{(k+1)}[2(b_1\overline{x^{(1)}} + \ldots + b_r\overline{x^{(r)}}) + 0\,(|\mu_{r+p+1}|^k)],$$

$$\overline{y}^{(k+1)} - \lambda_1\overline{y}^{(k)} = (-\lambda_1)^{k+1}[2(b_{r+1}\overline{x}^{(r+1)} + \ldots + b_{r+p}\overline{x}^{(r+p)}) +$$
$$+ 0\,(|\mu_{r+p+1}|^k)].$$

A матрицанинг λ_1 хос сонига $b_1\overline{x}^{(1)}+\ldots+b_r\overline{x}^{(r)}$ хос вектор ва $-\lambda_1$ хос сонига $b_{r+1}\overline{x}^{(r+1)}+\ldots+b_{r+p}\overline{x}^{(r+p)}$ хос вектор мос келади. Шунинг учун ҳам, λ_1 га мос келадиган хос вектор сифатида $\overline{y}^{(k+1)}+\lambda_1\overline{y}^{(k)}$ ни олишимиз мумкин. Агар r ва p ёки буларнинг бирортаси бирдан катта бўлса, у ҳолда бошқа дастлабки $\overline{y}^{(0)}$ векторни танлаб шу жараённи такрорлаш керак.

4-ҳол. Бу ҳолга A матрицанинг модули бўйича энг катта хос сонлари қўшма комплекс бўлган ҳол ёки модуллари билан ўзаро жуда яқин бўлган ҳол киради. Фараз қилайлик, λ_1 ва λ_2 хос сонлар қўшма комплекс сонлар бўлиб, қуйидаги шартни қаноатлантирсин:

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|>|\lambda_3|\geqslant\ldots\geqslant|\lambda_n|.$$

Бу ҳолда, қуйидаги тақрибий тенгликларнинг ўринли эканлигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$\begin{cases}\overline{y}^{(k)}\simeq b_1\lambda_1^k\overline{x}^{(1)}+b_2\lambda_2^k\overline{x}^{(2)},\\ \overline{y}^{(k+1)}\cong b_1\lambda_1^{k+1}\overline{x}^{(1)}+b_2\lambda_2^{k+1}\overline{x}^{(2)},\\ \overline{y}^{(k+2)}\simeq b_1\lambda_1^{k+2}\overline{x}^{(1)}+b_2\lambda_2^{k+2}\overline{x}^{(2)}.\end{cases}\tag{9.9}$$

Демак, бу векторлар орасида қуйидаги тақрибий чизиқли боғланиш мавжуд:

$$\overline{y}^{(k+2)}-(\lambda_1+\lambda_2)\,\overline{y}^{(k+1)}+\lambda_1\lambda_2\overline{y}^{(k)}=\overline{0}.$$

Агар ҳисоблаш жараёнида $\overline{y}^{(k)}$, $\overline{y}^{(k+1)}$, $\overline{y}^{(k+2)}$ векторлар орасида

$$\overline{y}^{(k+2)}+p\overline{y}^{(k+1)}+q\overline{y}^{(k)}=\overline{0}\tag{9.10}$$

чизиқли боғланиш ўринли бўлса, у ҳолда λ_1 ва λ_2 лар

$$u^2+pu+q=0\tag{9.11}$$

квадрат тенгламани қаноатлантиради. Бу тенгламанинг p ва q коэффициентларини қуйидаги мулоҳазалар ёрдамида топиш мумкин. (9.10) тенгликда компонентларга ўтсак,

$$y_i^{(k+2)}+py_i^{(k+1)}+qy_i^{(k)}=0,$$
$$y_j^{(k+2)}+py_j^{(k+1)}+qy_j^{(k)}=0$$

бўлиб, $i\neq j$ деб оламиз. Бу ердан p ва q ни топиб, (9.11) га қўйсак, у ҳолда (9.11) ни қуйидагича ёзсак бўлади:

$$\begin{bmatrix}1 & y_i^{(k)} & y_j^{(k)}\\ u & y_i^{(k+1)} & y_j^{(k+1)}\\ u^2 & y_i^{(k+2)} & y_j^{(k+2)}\end{bmatrix}=0\ (i,\ j=\overline{1,n};\ i\neq j).\tag{9.12}$$

(9.11) тенгликдан λ_1 ва λ_2 топилгандан кейин уларга мос келадиган хос векторларни ҳам топиш мумкин, (9.9) дан

$$\overline{y}^{(k+1)}-\lambda_1\overline{y}^{(k)}=b_2\lambda_2^k(\lambda_2-\lambda_1)\overline{x}^{(2)},$$
$$\overline{y}^{(k+1)}-\lambda_2\overline{y}^{(k)}=b_1\lambda_1^k(\lambda_1-\lambda_2)\,\overline{x}^{(1)}$$

га эга бўламиз. Бу натижаларни, модуллари тенг ёки яқин бўлган хос сонларнинг сони бир жуфтдан кўп бўлган ҳол учун ҳам умумлаштириш мумкин.

Мисол. Қуйидаги

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

матрицанинг модуллари бўйича энг катта хос сонлари ва унга мос келадиган хос векторлари топилсин.

Ечиш. Қуйидаги $\overline{y}^{(0)}=(1, 1, 1, 1)'$ векторни олиб унинг итерацияларини ҳосил қиламиз. Бу итерациялар 17- жадвалда келтирилган.

17- жадвал

$\overline{y}^{(0)}$	$A\overline{y}$	$A^2\overline{y}$	$A^3\overline{y}$	$A^4\overline{y}$	$A^5\overline{y}$	$A^6\overline{y}$	$A^7\overline{y}$	$A^8\overline{y}$	$A^9\overline{y}$
1	—1	—28	—204	—1072	—4496	—14528	—6304	120126	1079100
1	18	103	419	1181	801	—17857	—160433	—789083	—3162093
1	6	40	233	1142	4665	—14936	27289	—70750	—959363
1	2	5	12	29	70	169	408	20985	49376

Бу жадвалдан кўриниб турибдики, итерациялар кетма-кетлигининг мос равишдаги компонентларининг нисбатлари тартибсиз равишда ўзгаряпти, ҳатто, ишоралар алмашиниши рўй бермоқда. Бу эса комплекс илдизларнинг мавжудлигидан далолат беради. Энди λ_1 ва λ_2 комплекс хос сонларни топиш учун (9.12) тенгламани тузамиз:

$$\begin{bmatrix} 1 & -6304 & -160433 \\ u & 120126 & -789083 \\ u^2 & 1079100 & -3162093 \end{bmatrix}=0.$$

Бу ердан

$$u^2+7{,}95u+19{,}55=0$$

ва

$$\lambda_{1,2}=-3{,}975\pm i\cdot 1{,}936$$

га эга бўламиз. Хос сонларнинг аниқ қиймати эса $\lambda_{1,2}=-4\pm 2i$ дир. Биз тақрибий ечимни унча катта бўлмаган аниқлик билан топдик. Чунки итерациямизнинг сони етарли эмас эди. Аниқроқ натижага эга бўлиш учун итерацияни яна давом эттириш керак.

Иккинчи хос сон ва унга мос келадиган хос векторни топиш. Фараз қилайлик, А матрицанинг хос сонлари қуйидаги шартни қаноатлантирсин:

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>|\lambda_3|\geqslant\ldots\geqslant|\lambda_n|,$$

яъни A матрицанинг бир-биридан фарқли бўлган иккита модуллари бўйича энг катта хос сони мавжуд бўлсин. Бундай вақтда 1-ҳолда кўрилган усулга ўхшаш усулни қўллаб, λ_2 ва унга мос келадиган $\overline{x}^{(2)}$ хос векторни топиш мумкин. (9.2) формулага кўра

$$\overline{y}^{(k)}=b_1\lambda_1^k\overline{x}^{(1)}+b_2\lambda_2^k\overline{x}^{(2)}+\ldots+b_n\lambda_n^k\overline{x}^{(n)},\qquad(9.13)$$

$$\overline{y}^{(k+1)}=b_1\lambda_1^{k+1}\overline{x}^{(1)}+b_2\lambda_2^{k+1}\overline{x}^{(2)}+\ldots+b_n\lambda_n^{k+1}\overline{x}^{(n)}.\qquad(9.14)$$

Бу тенгликларда λ_1 ни йўқотиш учун (9.13) ни λ_1 га кўпайтириб (9.14) дан айирамиз. Натижада

$$\overline{y}^{(k+1)} - \lambda_1\overline{y}^{(k)} = b_2\lambda_2^k(\lambda_2 - \lambda_1)\overline{x}^{(2)} + \dots + b_n\lambda_n^k(\lambda_n - \lambda_1)\overline{x}^{(n)} \qquad (9.15)$$

га эга бўламиз.

Ёзувни қисқартириш мақсадида $y^{(k)}$ нинг λ- *айирмаси* деб аталувчи қуйидаги

$$\Delta_\lambda \overline{y}^{(k)} = \overline{y}^{(k+1)} - \lambda\overline{y}^{(k)}$$

белгилашни киритамиз. Агар $b \neq 0$ бўлса, у ҳолда $k \to \infty$ да (9.15) да биринчи қўшилувчи йиғиндининг бош қисми бўлади ва биз

$$\Delta_{\lambda_1}\overline{y}^{(k)} \approx b_2\lambda_2^k(\lambda_2 - \lambda_1)\overline{x}^{(2)} \qquad (9.16)$$

тақрибий тенгликка эга бўламиз. Бу ердан эса

$$\Delta_{\lambda_1}\overline{y}^{(k-1)} \approx b_2\lambda_2^{k-1}(\lambda_2 - \lambda_1)\overline{x}^{(2)}. \qquad (9.17)$$

Бу тенгликларни компонентларда ёзиб, қуйидаги тақрибий тенгликларга эга бўламиз:

$$\lambda_2 \approx \frac{\Delta_{\lambda_1} y_j^{(k)}}{\Delta_{\lambda_1} y_j^{(k-1)}} = \frac{y_j^{(k+1)} - \lambda_1 y_j^{(k)}}{y_j^{(k)} - \lambda_1 y_j^{(k-1)}}\,. \qquad (9.18)$$

Бу формула ёрдамида λ_2 ни топишимиз мумкин. Бир-бирига яқин сонлар $y_j^{(k)}$ ва $\lambda_1 y_j^{(k-1)}$ ҳамда $y_j^{(k+1)}$ ва $\lambda_1 y_j^{(k)}$ бўлганлиги учун аниқлик йўқолади. Шунинг учун ҳам, практикада λ_2 ни аниқлайдиган итерация номери m ни λ_1 ни аниқлайдиган итерация номери k дан кичикроқ қилиб олиш, яъни λ_2 ни қуйидагича аниқлаш маъқулдир:

$$\lambda_2 \approx \frac{y_j^{(m+1)} - \lambda_1 y_j^{(m)}}{y_j^{(m)} - \lambda_1 y_j^{(m-1)}} \qquad (m < k). \qquad (9.19)$$

Агар l етарлича катта бўлса, λ_2^l нинг λ_j^l $(j = 3, 4, \dots)$ дан ортиқлиги сезилиб қолади, m сифатида шу l ларнинг энг кичигини олиш керак. Умуман айтганда, (9.19) формула λ_2 нинг қўпол қийматини беради. Шу усул билан қолган хос сонларни ҳам топиш мумкин, лекин натижа яна ҳам қўполроқ чиқади.

(9.16) дан кўриниб турибдики, $\overline{x}^{(2)}$ $\Delta_{\lambda_1}\overline{y}^{(m)}$ дан фақат ўзгармас кўпаювчига фарқ қиляпти, шунинг учун ҳам

$$\overline{x}^{(2)} \approx \Delta_{\lambda_1}\overline{y}^{(m)}$$

деб олишимиз мумкин.

10- §. МУСБАТ АНИҚЛАНГАН СИММЕТРИК МАТРИЦАНИНГ ХОС СОНЛАРИ ВА ХОС ВЕКТОРЛАРИНИ АНИҚЛАШ

Биз юқорида оддий структурага эга бўлган матрицаларнинг модули бўйича энг катта биринчи ва иккинчи хос сонлари ва уларга мос келадиган хос векторларини топишни кўриб чиқдик.

Энди мусбат аниқланган симметрик матрицанинг барча хос элементларини итерация усули ёрдамида топиш билан шуғулланамиз. Маълумки, мусбат аниқланган симметрик A матрицанинг барча хос сонлари $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ҳақиқий ва мусбат бўлиб, $\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}, \dots, \overline{x}^{(n)}$ хос векторларни шундай танлаш мумкинки, улар ортогоналлик

$$(\overline{x}^{(i)}, \overline{x}^{(j)}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^{(i)} x_k^{(j)} = 0 \quad (i \neq j) \qquad (10.1)$$

шартини қаноатлантиради. Биринчи хос вектор $\overline{x}^{(1)}$ ни аниқлайдиган тенгламалар системасини ёзамиз:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + \dots + a_{1n}x_n^{(1)} = 0, \\ a_{21}x_1^{(1)} + (a_{22} - \lambda_1)x_2^{(1)} + \dots + a_{2n}x_n^{(1)} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + \dots + (a_{nn} - \lambda_1)x_n^{(1)} = 0 \end{cases} \qquad (10.2)$$

ёки

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1}(a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + \dots + a_{1n}x_n^{(1)}), \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1}(a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} + \dots + a_{2n}x_n^{(1)}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1}(a_{n-1,1}x_1^{(1)} + a_{n-1,1}x_2^{(1)} + \dots + a_{n-1,n}x_n^{(1)}), \\ \lambda_1 = \frac{1}{x_n^{(1)}}(a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + \dots a_{nn}x_n^{(1)}). \end{cases} \qquad (10.3)$$

Хос векторлар координаталарининг ҳаммасини бирор сонга кўпайтириш ёки бўлиш мумкин. Шунинг учун ҳам $x_n^{(1)} = 1$ деб оламиз. У ҳолда (10.3) система n та $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(1)}, \lambda_1$ номаълумли n та тенгламадан иборат. Мос равишда танлаб олинган дастлабки яқинлашиш $x_1^{(1,0)}, \dots, x_{n-1}^{(1,0)}, \lambda_1^{(0)}$ ни олиб (10.3) системани итерация методи билан ечамиз:

$$x_k^{(1,m+1)} = \frac{1}{\lambda_1^{(m)}}\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{kj}x_j^{(1,m)} + a_{kn}\right) \qquad (k = \overline{1, n-1}),$$

$$\lambda_1^{(m+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(1,m+1)} + a_{nn} \qquad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Иккинчи системани ечишда оддий итерация методининг ўрнига Зейдель методидан ҳам фойдаланиш мумкин. Шу йўл билан биринчи хос сон

$$\lambda_1 \approx \lambda_1^{(m)}$$

ва унга мос келадиган хос вектор

$$\overline{x}^{(1)} \approx (x_1^{(1,m)}, \dots, x_{n-1}^{(1,m)}, 1)$$

ни топиш мумкин.

Иккинчи хос сон λ_2 ва унга мос келадиган хос вектор $\overline{x}^{(2)}$ ни топиш учун биз яна λ_2 ва $\overline{x}^{(2)}$ ни ҳосил қиладиган системадан фойдаланамиз. Бу системани биз қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\lambda_2 x_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(2)} \qquad (i=\overline{1,n}). \qquad (10.4)$$

Ортогоналлик шарти

$$(\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)}) = \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{(1,m)}\, x_j^{(2)} + x_n^{(2)} = 0 \qquad (10.5)$$

дан $x_j^{(2)}$ номаълум компонентларнинг бирортасини, масалан $x_n^{(2)}$ ни қолган компонентлар орқали ифодалаш мумкин. Худди шу $x_n^{(2)}$ ни (10.4) га қўйсак, у ҳолда у қуйидаги унга тенг кучли бўлган системага айланади:

$$\begin{cases} x_i^{(2)} = \dfrac{1}{\lambda_2} \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^{(1)}\, x_j^{(2)} \qquad (i=\overline{1,\, n-2}), \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{x_{n-1}^{(2)}} \displaystyle\sum_{j-1}^{n-1} a_{n-1,j}^{(1)}\, x_j^{(2)}. \end{cases} \qquad (10.6)$$

Бу ерда

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{in} x_j^{(1,m)}.$$

Бунда ҳам $x_{n-1}^{(2)} = 1$ деб олиб ва $x_k^{(2,0)}$, $\lambda_2^{(0)}$ дастлабки яқинлашишларни танлаб (10.6) системани итерация методи билан ечиб, λ_2 ва $\overline{x}^{(2)}$ нинг тақрибий қийматларини топамиз:

$$\lambda_2 \approx \lambda_2^{(m)}, \quad \overline{x}^{(2)} \approx (x_1^{(2,m)}, \ldots, x_{n-2}^{(2,m)}, 1, x_n^{(2)})'.$$

Бу ерда $x_n^{(2)}$ ортогоналлик шарти (10.5) дан топилади. Шунга ўхшаш қолган хос сон ва хос векторларни топиш мумкин. (10.4) системанинг n- тенгламасидан контрол сифатида, яъни топилган λ_2 ва $\overline{x}^{(2)}$ ларнинг аниқлигини текшириш учун фойдаланиш мумкин. Қаралаётган методда, λ_k ни аниқланаётганда $\overline{x}^{(k)}$ нинг $x_{n-k+1}^{(k)} = 0$ бўлиши билан боғлиқ бўлган махсус ҳоллар ҳам бўлиши мумкин. Бундай махсус ҳол (10.2) системага итерация методини қўллаш учун қулай (10.3) кўринишга келтиришдан келиб чиққанлиги учун ундан қутулиш мумкин.

Мисол. Қуйидаги

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицанинг барча хос сонлари ва уларга мос келадиган хос векторлари топилсин.

Ечиш. Бу матрица симметрик ва унинг бош минорлари

$$D_1 = 5 > 0, \; D_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 14 > 0, \qquad D_3 = \det A = 9 > 0$$

мусбат бўлганлиги учун у мусбат аниқлангандир. λ_i ва $\overline{x}^{(i)}$ ни аниқлайдиган система:

$$\begin{cases} \lambda_i \; x_1^{(i)} = 5x_1^{(i)} - x_2^{(i)}, \\ \lambda_i \; x_2^{(i)} = -x_1^{(i)} + 3x_2^{(i)} + x_3^{(i)}, \\ \lambda_i \; x_3^{(i)} = x_2^{(i)} + x_3^{(i)}. \end{cases} \tag{10.7}$$

Бу ерда $x_3^{(1)} = 1$ деб олганда итерацион жараён узоқлашади, шунинг учун ҳам $i = 1$ ва $x_1^{(1)} = 1$ деб олиб

$$\begin{cases} x_2^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1}\left(3x_2^{(1)} + x_3^{(1)} - 1\right), \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1}\left(x_2^{(1)} + x_3^{(1)}\right), \\ \lambda_1 = 5 - x_2^{(1)} \end{cases} \tag{10.8}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу системани Зейдель методи билан ечамиз. Дастлабки яқинлашиш сифатида

$$x_2^{(1,0)} = -0{,}5; \qquad x_3^{(1,0)} = 0$$

деб олсак (10.8) нинг охирги тенгламасидан $\lambda_1^{(0)} = 5{,}5$ ни ҳосил қиламиз. Зейдель итерациясининг натижаси 18- жадвалда келтирилган. Жадвалдан кўрамизки,

$$\lambda_1 = 5{,}4491$$

ва

$$\overline{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}4491 \\ -0{,}1001 \end{bmatrix}$$

18- жадвал

k	$x_2^{(1,k)}$	$x_3^{(1,k)}$	$\lambda_2^{(k)}$
0	—0,5	0	5,5
1	—0,4545	—0,0826	5,4545
2	—0,4484	—0,0974	5,4484
3	—0,4476	—0,1000	5,4476
4	—0,4484	—0,1001	5,4484
5	—0,4490	—0,1001	5,4490
6	—0,4491	—0,1001	5,4491
7	—0,4491	—0,1001	5,4491

Энди (10.7) системада $i=2$ деб оламиз ва $\overline{x}^{(1)}$ нинг $\overline{x}^{(2)}$ билан ортогоналлик шарти

$$x_1^{(2)} - 0{,}4491x_2^{(2)} - 0{,}1001x_3^{(2)} = 0$$

дан $x_1^{(2)}$ ни топамиз. Бундан

$$x_1^{(2)} = 0{,}4491x_2^{(2)} + 0{,}1001x_3^{(2)} \tag{10.9}$$

ни (10.7) га қўйиб ва $x_2^{(2)} = 1$ деб олсак, у ҳолда

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{\lambda_2}\left(1 + x_3^{(2)}\right),$$

$$\lambda_2 = 3{,}4491 + 1{,}1001x_3^{(2)}.$$

Бу ерда

$$x_3^{(2,0)} = 0, \qquad \lambda_2^{(0)} = 4$$

деб олиб, итерацияни қўллаймиз. Натижа 19- жадвалда келтирилган.

19- жадвал

k	$x_3^{(2,k)}$	$\lambda_2^{(k)}$
0	0	4
1	0,25	3,72
2	0,34	3,82
3	0,35	3,83
4	0,353	3,837
5	0,3529	3,8373
6	0,3526	3,8370
7	0,3525	3,8369
8	0,3525	3,8369

Жадвалдан кўрамизки, $\lambda_2 \approx 3,8369$. Энди $x_1^{(2)}$ ни (10.9) тенгликдан топамиз: $x_1^{(2)} \approx 0,4844$. Шундай қилиб,

$$\overline{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,4844 \\ 1 \\ 0,3525 \end{bmatrix}.$$

Учинчи хос вектор $\overline{x}^{(3)}$ ни ортогоналлик шартларидан аниқлаймиз:

$$(\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(3)}) = x_1^{(3)} - 0,4491x_2^{(3)} - 0,1001x_3^{(2)} = 0,$$

$$(\overline{x}^{(2)}, \overline{x}^{(3)} = 0,4844x_1^{(3)} + x_2^{(3)} - 0,3525x_3^{(3)} = 0.$$

Бундан эса $x_3^{(3)} = 1$ деб олиб, $x_1^{(3)} = -0,2166$ ва $x_2^{(3)} = -0,7029$ ни топиб оламиз. Демак,

$$\overline{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0,2166 \\ -0,7029 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ниҳоят, (10.7) системанинг охирги тенглигида $i=3$ деб олиб, λ_3 ни топамиз: $\lambda_3 = 0,2971$.

11-§. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЧИШДА ИТЕРАЦИЯ МЕТОДИНИНГ ЯҚИНЛАШИШИНИ ТЕЗЛАШТИРИШ

Биз 2- бобда алгебраик ва трансцендент тенгламаларни итерация методи билан ечишда итерация яқинлашишининг тезлигини орттириш методларини кўриб чиққан эдик.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишда ва матрицанинг хос сони ҳамда хос векторларини топишда итерация методининг яқинлашиш тезлигини орттириш мумкин эмасмикан деган савол туғилади. Бундай методлар айрим ҳолларда мавжуд. Биз бу ерда матрицаси модули бўйича фақатгина битта энг катта хос сонга эга бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишда итерация тезлигини орттиришнинг Л. А. Люстерник таклиф этган методини кўриб чиқамиз.

Агар

$$A\overline{x} = \overline{b} \tag{11.1}$$

чизиқли алгебраик тенгламалар системасини итерацион метод билан ечадиган бўлсак, бунинг учун B ва C матрицаларни $B+CA=$ $=E$ шартни қаноатлантирадиган қилиб танлаб олиб, (11.1) системани

$$\overline{x}^{(k+1)} = B\overline{x}^{(k)} + C\overline{b} \tag{11.2}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Фараз қилайлик, ихтиёрий дастлабки вектор $\overline{x}^{(0)}$ учун $\{\overline{x}^{(k)}\}$ кетма-кетлик (11.1) система ечимига яқинлашсин. У ҳолда B матрицанинг барча хос сонлари $|\lambda_i| < 1$ $(i = \overline{1,n})$ тенгсизликни қаноатлантиради. Агар $|\lambda_i|$ ларнинг бирортаси 1 га яқин бўлса, у ҳолда итерация жуда ҳам секин яқинлашади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $\{\overline{x}^{(k)}\}$ нинг бир неча дастлабки ҳадини топиш кифоядир. Шунда бу кетма-кетликнинг яқинлашишини тезлаштириш масаласи туғилади. B матрицанинг хос сонлари

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$$

тартибда жойлашган деб фараз қиламиз. Люстерник методининг асосий ғояси қолдиқнинг бош қисмини ажратиб олишдан иборатдир.

Шундай қилиб, биз $\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}$ қолдиқ ҳадининг бош қисмини ажратишимиз керак. Бунинг учун $\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(0)}$ векторни B матрицанинг хос векторлари бўйича ёямиз:

$$\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(0)} = \beta_1\overline{z}_1 + \beta_2\overline{z}_2 + \ldots + \beta_n\overline{z}_n.$$

Энди $\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(0)}$ га (11.2) ни қўллаб

$$\overline{x}^{(2)} - \overline{x}^{(1)} = B(\overline{x}^{(1)} - \overline{x}^{(0)})$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\overline{x}^{(2)} - \overline{x}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\lambda_j\overline{z}_j. \tag{11.3}$$

Шунга ўхшаш ихтиёрий $\overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^{(k)} = B(\overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{(k-1)})$ вектор учун

$$\overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\lambda_j^k\overline{z}_j \tag{11.4}$$

ёйилмага эга бўламиз. Шартга кўра $\{\overline{x}^{(k)}\}$ яқинлашувчи ва

$$|\lambda_i| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_i^k = \frac{1}{1-\lambda_i}$$

бўлганлиги учун, $\lim\limits_{m\to\infty}\overline{x}^{(m)} = \overline{x}^*$ ни эътиборга олиб,

$$\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} (\overline{x}^{(k+l+1)} - \overline{x}^{(k+l)}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \beta_j\lambda_j^{k+l}\overline{z}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j^k}{1-\lambda_j}\beta_j\overline{z}_j \tag{11.5}$$

га эга бўламиз. Агар k етарлича катта бўлса, у ҳолда (11.3) шартга кўра (11.4) ва (11.5) ёйилмалардан бош қисмларини ажратиб олишимиз мумкин. Натижада қуйидаги тақрибий тенгликларга эга бўламиз:

$$\overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^{(k)} \approx \beta_1 \lambda_1^k \overline{z}_1, \tag{11.6}$$

$$\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)} \approx \beta_1 \frac{\lambda_1^k}{1-\lambda_1} \overline{z}_1. \tag{11.7}$$

Бундан эса

$$\overline{x}^* \approx \overline{x}^{(k)} + \frac{1}{1-\lambda_1} (\overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^{(k)}) \tag{11.8}$$

келиб чиқади. Агар $\tilde{\lambda}_1$ орқали λ_1 нинг тақрибий қийматини белгиласак, у ҳолда, (11.6) га кўра,

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}} \quad (j = \overline{1,n}),$$

$$\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 + \bar{0}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right) = \tilde{\lambda}_1 + \varepsilon \tag{11.9}$$

муносабатлар ўринлилигини 8- § да кўрган эдик.

Қуйидагича тузилган

$$\overline{y}^{(k)} = \overline{x}^{(k)} + \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1} (\overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^{(k)}) \tag{11.10}$$

вектор аниқ вектор $\overline{x}^*$ га $\overline{x}^{(k)}$ ва $\overline{x}^{(k+1)}$ векторларга нисбатан яқинроқ эканлигини кўрсатамиз. Аввал $\overline{x}^* - \overline{y}^{(k)}$ ва $\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}$ орасидаги муносабатни топамиз. Бунинг учун

$$B_1 = \frac{1}{1-\tilde{\lambda}} [B - \tilde{\lambda}_1 E]$$

матрицани олиб, $\overline{x}^* - \overline{y}^{(k)} = B_1(\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)})$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\overline{x}^* - \overline{y}^{(k)} = \overline{x}^* - \overline{x}^{(k)} - \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1} (\overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^{(k)}) =$$

$$= \overline{x}^* - \overline{x}^{(k)} - \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1} [(\overline{x}^{(k+1)} - \overline{x}^*) + (\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)})] =$$

$$= \overline{x}^* - \overline{x}^{(k)} - \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1} [-B(\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}) + (\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)})] =$$

$$= \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1} B(\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}) + \left(1 - \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1}\right)(\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}) =$$

$$= \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1} B(\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}) - \frac{\tilde{\lambda}_1}{1-\tilde{\lambda}_1} (\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}) = B_1(\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}).$$

Энди (11.5) дан фойдаланиб,

$$\bar{x}^* - \bar{y}^{(k)} = B_1(\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}) = \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j^k}{1-\lambda_1}\beta_j(\lambda_j - \tilde{\lambda}_j)\bar{z}_j =$$

$$= \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1}\left[\frac{\lambda_1^k\beta_1\varepsilon\bar{z}_1}{1-\lambda_1} + \sum_{j=2}^{n}\frac{\lambda_j^k}{1-\lambda_j}\beta_j(\lambda_j - \tilde{\lambda}_1)\bar{z}_j\right]$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан (11.9) га кўра, яъни $\varepsilon = 0\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)$ бўлганлиги учун

$$\bar{x}^* - \bar{y}^{(k)} = 0\,(|\lambda_2|^k)\bar{z}_1,$$

(11.7) формуладан эса

$$\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} = 0\,(|\lambda_1|^k)\bar{z}_1.$$

Охирги тенгликлардан кўриниб турибдики, $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ нисбат қанча кичик бўлса, яқинлашиш тезлиги шунча ортади.

Агар $\tilde{\lambda}_1$ 1 га яқин бўлса, у ҳолда $\frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1}$ шунча катта бўлиб, бунинг натижасида (11.10) формула билан ҳисоблаганда аниқлик йўқолади. Шунинг учун ҳам, у формула ўрнига

$$\bar{y}^{(k)} = \bar{x}^{(k)} + \frac{1}{1-\tilde{\lambda}_1^p}(\bar{x}^{(k+p)} - \bar{x}^{(p)}) \tag{11.11}$$

билан ҳисоблаш мақсадга мувофиқдир, бу ерда $\tilde{\lambda}_1^p$ бирдан анча кичик бўлиши керак. Бу формула ҳам (11.10) формула каби ҳосил қилинади.

12-§. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИМИНИНГ ХАТОСИНИ БАҲОЛАШ ВА МАТРИЦАЛАРНИНГ ШАРТЛАНГАНЛИГИ

Одатда амалиётда тақрибий ечимнинг аниқлиги ҳақида тақрибий ечимни берилган системага келтириб қўйилиб, сўнгра ҳосил бўлган боғланишсизликнинг бирор метрикадаги миқдорига қараб баҳо берилади. Фараз қилайлик, $\bar{x}^*$

$$A\bar{x} = \bar{b} \tag{12.1}$$

системанинг аниқ ечими бўлиб, $\bar{y}$ эса унинг тақрибий ечими бўлсин. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A\bar{y} = \bar{d},\ \bar{\varepsilon} = \bar{x}^* - \bar{y},\ \bar{r} = \bar{b} - \bar{d} = \bar{b} - A\bar{y}. \tag{12.2}$$

Бу ерда $\bar{\varepsilon}$ *хатолик вектори*, $\bar{r}$ эса *боғланишсизлик вектори* деб аталади. Бу векторлар қуйидаги

$$A\bar{\varepsilon} = \bar{r},\ \bar{\varepsilon} = A^{-1}\bar{r} \tag{12.3}$$

муносабатлар билан боғланган бўлиб, хатолик вектори боғланишсизлик вектори орқали аниқланади. Аммо боғланишсизлик вектори компонентларининг кичиклиги ҳар доим ҳам хатолар вектори компонентларининг кичиклигидан далолат бераверрмайди. Ҳақиқатан ҳам, фараз қилайлик (12.1) система жуда кичик λ хос сонга эга бўлиб, бу хос сонга мос келувчи хос вектор $\bar{z}$ бўлсин, яъни

$$A\bar{z} = \lambda\bar{z},$$

у ҳолда

$$A(\bar{x}^* + \bar{z}) = \bar{b} + \lambda\bar{z}$$

бўлиб, λ жуда кичик бўлганлиги учун $\bar{b} + \lambda\bar{z}$ векторнинг компонентлари $\bar{b}$ векторнинг мос компонентларидан жуда кам фарқ қилиши мумкин, аммо шунга қарамасдан $\bar{x}^* + \bar{z}$ векторнинг компонентлари $\bar{x}^*$ векторнинг мос компонентларидан жуда катта фарқ қилиши мумкин. Шу муносабат билан $\bar{\varepsilon}$ ва $\bar{r}$ векторларнинг нормалари орасидаги муносабатни баҳолайдиган қандайдир сонли характеристикалар киритишга тўғри келади. Амалиётда $\|\bar{\varepsilon}\|$ ва $\|\bar{r}\|$ нормаларнинг ўзлари аҳамиятга эга бўлмай, балки маълум маънода „нисбий хатоларни“ белгилайдиган

$$\frac{\|\bar{\varepsilon}\|}{\|\bar{x}^*\|}, \quad \frac{\|\bar{r}\|}{\|\bar{b}\|}$$

нисбатлар катта аҳамиятга эгадир.

Матрица ва системанинг шартланганлиги тушунчаси. Боғланишсизлик вектори $\bar{r}$ мумкин бўлган барча қийматларни қабул қилганда $\bar{x}^*$ ва $\bar{b}$ векторлари „нисбий хатолигининг“ нисбатини киритамиз:

$$\mu = \sup_{\bar{r}} \left(\frac{\|\bar{\varepsilon}\|}{\|\bar{x}^*\|} : \frac{\|\bar{r}\|}{\|\bar{b}\|} \right). \tag{12.4}$$

Бундан эса

$$\|\bar{\varepsilon}\| \leqslant \mu \frac{\|\bar{x}^*\|}{\|\bar{b}\|} \cdot \|\bar{r}\| \tag{12.5}$$

келиб чиқади ва (12.5) дан кўринадики, μ кичик бўлса, у ҳолда боғланишсизлик вектори нормасининг кичиклигидан хатолар нормасининг кичиклиги келиб чиқади. Бу ҳолда (12.11) *система яхши шартланган* дейилади. Агар μ катта бўлса, у ҳолда $\|\bar{r}\|$ нинг кичиклигига қарамасдан $\|\bar{\varepsilon}\|$ жуда катта бўлиши мумкин. Бундай ҳолда (12.1) *система ёмон шартланган* дейилади. Шунга ўхшаш матрица шартланганлиги тушунчасини киритиш мумкин. Матрица нормасининг таърифи ва (12.2) дан

$$\sup_{\bar{r}} \frac{\|\bar{\varepsilon}\|}{\|\bar{r}\|} = \sup_{\bar{r}} \frac{\|\bar{x}^* - \bar{y}\|}{\|\bar{r}\|} = \sup_{\bar{r}} \frac{\|A^{-1}(A\bar{x}^* - A\bar{y}^*)\|}{\|\bar{r}\|} =$$

$$= \sup_{\bar{r}} \frac{\|A^{-1}\bar{r}\|}{\|\bar{r}\|} = \|\bar{A}^{-1}\| \tag{12.6}$$

$$\mu = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{x}^*\|}\cdot\|A^{-1}\| \tag{12.7}$$

келиб чиқади.

Энди (12.1) системани ўнг томони $\bar{b}$ мумкин бўлган барча қийматларни қабул қилганда текширамиз. Ҳар бир $\bar{b}$ учун ўзининг $\bar{x}^*$ ечими мос келади. Бу ечимлар тўпламини X орқали белгилаймиз ва (12.7) билан аниқланган μ нинг $\bar{x}^*$ векторлар X да ўзгарган пайтдаги хусусиятини, яъни

$$\sup_{\bar{x}^*\in X} \mu$$

ни кўриб чиқамиз. Матрица нормасининг таърифига кўра

$$\nu = \sup_{\bar{x}^*\in X} \mu = \sup_{\bar{x}^*\in X} \frac{\|A\bar{x}^*\|}{\|\bar{x}^*\|}\cdot\|A^{-1}\| = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|. \tag{12.8}$$

ν сони A *матрицанинг шартланганлик сони* дейилади. (12.8) дан кўриниб турибдики, агар A матрица махсусликка яқин бўлса, у ҳолда бундай матрица учун ν сони жуда катта бўлади. Бундай матрицани *ёмон шартланган матрица* дейилади. Агар ν кичик сон бўлса, у ҳолда *A матрица яхши шартланган* дейилади. Ҳар хил нормаларда μ ва ν лар ҳар хил сонли қийматларга эга бўладилар. Матрицанинг ихтиёрий нормасининг унинг максимал хос сонининг модулидан катта ёки унга тенглигини 3-бобда кўрган эдик. Бундан ташқари, тескари матрицанинг хос сонлари берилган матрица хос сонларининг тескари қийматларига тенглиги маълум. Шунинг учун

$$\nu = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| \geqslant \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} \geqslant 1. \tag{12.9}$$

Учинчи нормада (12.9) муносабатни аниқроқ ёзиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$\nu_3 = \|A\|_3\cdot\|A^{-1}\|_3 = \sqrt{\max\xi_i}\,\sqrt{\max\eta_i}\,, \tag{12.10}$$

бу ерда ξ_i $A'A$ матрицанинг хос сони бўлиб, η_i $(A^{-1})'A^{-1}$ матрицанинг хос сонидир. Аммо $(A^{-1})'A^{-1} = (AA')^{-1}$ ва AA', $A'A$ матрицалар ўхшаш бўлганликлари учун $\eta_i = \frac{1}{\xi_i}$. Демак, (12.10) дан

$$\nu_3 = \sqrt{\frac{\max\xi_i}{\min\xi_i}}.$$

Хусусий ҳолда симметрик A матрицалар учун $\xi_i = |\lambda_i|^2$ ва

$$\nu_3 = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|} \tag{12.11}$$

бўлади.

Мисол. Қуйидаги матрицани оламиз [44]:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Бу матрицанинг элементлари катта сон бўлишига қарамасдан $\det A=1$, шунинг учун бу матрица ёмон шартланган бўлиши керак. Бу матрицанинг тескариси:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Берилган A матрица элементларини озгина ўзгартирганда у махсус матрица бўлиб қолиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$A(\varepsilon)=\begin{bmatrix} 5+\varepsilon & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

ни олайлик. Бу ерда $\det A(\varepsilon)=1+68\varepsilon$ дир. Демак, $\varepsilon=-\frac{1}{68}\approx-0{,}015$ бўлганда бу матрица махсус матрицага айланади. Шундай қилиб, A матрицанинг элементлари 0,02 аниқликда берилган бўлса, уни амалда махсус деб қараш керак. Қаралаётган A^{-1} матрицанинг элементлари кескин ўзгаради. Ҳақиқатан ҳам,

$$A_1=\begin{bmatrix} 4{,}99 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

учун $\det A_1=0{,}320$ бўлиб,

$$A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 204{,}82 & -128{,}12 & -53{,}12 & 31{,}25 \\ -128{,}12 & 77{,}53 & 31{,}78 & -18{,}81 \\ -53{,}12 & 31{,}78 & 14{,}03 & -8{,}31 \\ 31{,}25 & -18{,}81 & -8{,}31 & 5{,}12 \end{bmatrix}$$

дир. Агар тескари матрицанинг элементлари катта бўлса, у ҳолда бир-бирига «яқин» озод ҳадларга ҳам $A\bar{x}=\bar{b}$ системанинг бир-биридан «узоқ» ечимлари мос келиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$\bar{b}_1=(23,\ 32,\ 33,\ 31)'$$

ва

$$\bar{b}_2=(23{,}1;\ 31{,}9;\ 32{,}9;\ 31{,}1)'$$

озод ҳадларга

$$\bar{x}^{(1)}=(1,\ 1,\ 1,\ 1)'$$

ва

$$\bar{x}^{(2)}=(14{,}6;\ -7{,}2;\ -2{,}5;\ 3{,}1)'$$

ечимлар мос келади. A_1 матрицанинг шартланганлик сони ν учинчи нормада

$$\nu_3=\|A\|_3\|A_1^{-1}\|_3=\sqrt{933}\ \sqrt{9708}\approx3009{,}6.$$

Бу ҳақиқатан ҳам катта сон. Энди $A_1\bar{x} = \bar{b}$ системанинг шартланганлик ўлчовини $\bar{b} = \bar{b}_1$ учун топамиз:

$$\mu_3 = \frac{\|\bar{b}_1\|_3}{\|\bar{x}\|_3} \cdot \|A_1^{-1}\|_3 = \frac{\sqrt{3603}}{\sqrt{4}} \cdot \sqrt{9708} \approx 2957{,}1.$$

Хатоликлар вектори $\bar{\varepsilon}$ ни баҳолаш. Биз юқорида шартланганлик сони катта бўлиб, озод ҳад озгина ўзгарганда ечим анчага фарқ қилишини конкрет ҳолда қараган эдик, энди шу масалани умумий ҳолда кўриб чиқамиз.

Фараз қилайлик, (12.1) система билан бир вақтда

$$B\bar{y} = \bar{f} \tag{12.12}$$

система ҳам берилган бўлиб, B матрица ва $\bar{f}$ вектор билан A матрица ва $\bar{b}$ вектор орасида қуйидаги тенгликлар ўринли бўлсин:

$$B = A - CA, \; \bar{f} = \bar{b} + \bar{\delta}, \tag{12.13}$$

бу ерда

$$\|C\| \leqslant q < 1, \; \|\bar{\delta}\| \leqslant p.$$

Энди (12.12) ва (12.13) дан

$$(E - C)A\bar{y} = \bar{f}$$

ёки

$$A\bar{y} = (E - C)^{-1}\bar{f} = (E + C + C^2 + \ldots)(\bar{b} + \bar{\delta}) - \bar{b} + (C + C^2 + \\ + \ldots)\bar{b} + (E + C + C^2 + \ldots)\bar{\delta}$$

га эга бўламиз. Бу тенгликни $\bar{r} = \bar{b} - A\bar{y}$ билан солиштирсак, у ҳолда (12.1) система тақрибий ечими $\bar{y}$ нинг боғланишсизлик вектори

$$\bar{r} = -[(C + C^2 + \ldots)\bar{b} + (E + C + C^2 + \ldots)\bar{\delta}]$$

бўлади. Демак, μ ва ν таърифига кўра, қуйидаги муносабат ўринлидир:

$$\frac{\|\bar{\varepsilon}\|}{\|\bar{x}^*\|} = \frac{\|\bar{x}^* - \bar{y}\|}{\|\bar{x}^*\|} \leqslant \mu \frac{\|\bar{r}\|}{\|\bar{b}\|} = \frac{\mu}{\|\bar{b}\|}\| - (C + C^2 + \ldots)\bar{b} - (E + C + \\ + C^2 + \ldots)\bar{\delta}\| \leqslant \mu \left\{\frac{q}{1-q} + \frac{1}{1-q}\frac{\|\bar{\delta}\|}{\|\bar{b}\|}\right\} \leqslant \nu \left\{\frac{q}{1-q} + \frac{1}{1-q}\frac{p}{\|\bar{b}\|}\right\}. \tag{12.14}$$

Бундан кўрамизки шартланганлик сони ν ва p ҳамда q қанча кичик бўлса „нисбий хато“ $\frac{\|\bar{\varepsilon}\|}{\|\bar{x}^*\|}$ ҳам шунча кичик бўлади. (12.14) дан амалда керак бўладиган $\|\bar{\varepsilon}\|$ нинг баҳосини чиқариш мумкин.

Бунинг учун

$$m(p,\ q)=\frac{p}{1-q}+\frac{1}{1-q}\frac{p}{\|\bar{b}\|}$$

деб белгилаб ва $\|\bar{x}^*\|=\|\bar{y}+\bar{x}^*-\bar{y}\|\leqslant\|\bar{y}\|+\|\bar{x}^*-\bar{y}\|=\|\bar{y}\|+\|\bar{\varepsilon}\|$ ни ҳисобга олиб, $1-\nu m(p,\ q)>0$ бўлганда

$$\|\bar{\varepsilon}\|\leqslant\|\bar{y}\|\ \frac{\nu\, m(p,\ q)}{1-\nu\, m(p,\ q)} \tag{12.15}$$

га эга бўламиз. Одатда амалда бизга A ва $\bar{b}$ маълум бўлмасдан балки B ва $\bar{f}$ берилган бўлади. Шунинг учун ҳам (12.15) ўрнида қуйидаги баҳони қараш керак:

$$\|\bar{\varepsilon}\|\leqslant\|\bar{y}\|\,\frac{\nu^* m(p,\ q^*)}{1-\nu^* m(p,\, q^*)}, \tag{12.16}$$

бу ерда ν^* B матрицанинг шартланганлик сони бўлиб,

$$q^*=\|DB^{-1}\|,\ D=B-A \text{ ва } m(p,\ q^*)=\frac{q^*}{1-q^*}+\frac{1}{1-q^*}\frac{p}{\|\bar{f}\|}$$

дир.

Амалда (12.1) системани ечишнинг кўп методлари A матрицани алмаштириб содда кўринишга, масалан, диагонал, учбурчак ва. ҳ. к. кўринишга келтиришдан иборатдир. Бундай алмаштириш A матрицани чап томондан бирор M матрицага кўпайтириш натижасида бажарилади. Ихтиёрий махсусмас A матрица учун

$$\|MA\|\leqslant\|M\|\cdot\|A\|,\ \|A^{-1}M^{-1}\|\leqslant\|A^{-1}\|\cdot\|M^{-1}\|$$

бўлганлигидан,

$$\nu(MA)\leqslant\nu(M)\,\nu(A)$$

келиб чиқади, яъни алмаштириш натижасида, умуман айтганда, A матрицанинг шартланганлик сони ортиб борар экан.

Кўрсатиш мумкинки [4], фақат $M=cU$ бўлгандагина (бу ерда U ортогонал матрица ва c — ўзгармас сон) $\nu(M)=1$ бўлиб, $\nu(MA)=\nu(A)$ бўлади.

Машқлар

1. Қуйидаги

$$\begin{bmatrix} 8{,}82 & 3{,}45 & 5{,}58 & 4{,}41 \\ 3{,}45 & 4{,}01 & 0{,}89 & 3{,}24 \\ 5{,}58 & 0{,}89 & 5{,}86 & 1{,}38 \\ 4{,}41 & 3{,}24 & 1{,}38 & 1{,}07 \end{bmatrix}$$

матрицанинг хос сони ва хос векторларини шу бобдаги барча методлар билан топинг.

2. Агар A ва B бир хил тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$$

матрицанинг характеристик кўпҳади $A+B$ ва $A-B$ матрицалар характеристик кўпҳадининг кўпайтмасига тенглигини исбот қилинг.

3. Ҳар қандай n-тартибли квадрат комплекс A матрица

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

кўринишдаги матрицага ўхшашлигини кўрсатинг, бу ерда B_{22} $(n-1)$-тартибли квадрат матрицадир. $B = P^{-1}AP$ шартни қаноатлантирадиган P матрицани тузиш йўлини кўрсатинг.

4. Айтайлик, A матрицанинг хос қиймати λ бўлиб, унга мос келадиган хос вектор $\overline{x}$ бўлсин. Ихтиёрий α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ учун $\overline{x}$ вектор $\alpha_0 E + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_n A^n$ матрицанинг $\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_n\lambda^n$ хос сонига мос келувчи хос вектор эканлигини кўрсатинг.

5. Ихтиёрий A матрица ва α сон учун A ва $A - \alpha E$ матрицалар бир хил хос векторга эга бўлишини кўрсатинг.

6. Агар A содда структурага эга бўлса, у ҳолда $\alpha_0 E + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_n A^n$ ҳам содда структурага эга бўлишини кўрсатинг.

7. Агар A матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_{n,\, n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

кўринишга эга бўлиб, $\mathrm{sig}\, n\, a_{k,\, k-1} = \mathrm{sig}\, n\, a_{k,\, k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ бўлса, у ҳолда A матрицанинг барча хос сонлари ҳақиқий бўлишини кўрсатинг.

8. Охирги масала натижасидан фойдаланиб, Лежандр кўпҳадининг барча илдизлари ҳақиқий эканлигини кўрсатинг.

9. Қуйидаги n-тартибли

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots -1 & 2 \end{bmatrix}$$

матрицанинг барча хос сонлари $\lambda_k = 2\left(1 + \cos\frac{\pi k}{n+1}\right)$ $(k = \overline{1, n})$ эканлигини кўрсатинг.

5-БОБ. ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ

1-§. МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

Аксарият ҳисоблаш методлари масаланинг қўйилишида қатнашадиган функцияларни унга бирор, муайян маънода яқин ва тузилиши соддароқ бўлган функцияларга алмаштириш ғоясига асосланган.

Ушбу бобда функцияларни яқинлаштириш масаласининг энг содда ва жуда кенг қўлланиладиган қисми — функцияларни интерполяциялаш масаласи қаралади.

Дастлаб интерполяциялаш деганда функциянинг қийматларини аргументнинг жадвалда берилмаган қийматлари учун топиш тушунилар эди. Бу ҳолда интерполяциялашни „сатрлар орасидагиларни ўқий билиш санъати“ деб ҳам таърифлаш мумкин. Ҳозирги вақтда интерполяциялаш тушунчаси жуда кенг маънода тушунилади. Интерполяция масаласининг моҳияти қуйидагидан иборат. Фараз қилайлик, $[a, b]$ оралиқда $y = f(x)$ функция берилган ёки ҳеч бўлмаганда унинг $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ қийматлари маълум бўлсин. Шу оралиқда аниқланган ва ҳисоблаш учун қулай бўлган қандайдир функциялар $\{P(x)\}$ синфини, масалан, кўпҳадлар синфини оламиз. Берилган $y=f(x)$ *функцияни* $[a, b]$ *оралиқда интерполяциялаш масаласи* шу функцияни берилган синфнинг шундай $P(x)$ функцияси билан тақрибий равишда

$$f(x)\approx P(x)$$

алмаштиришдан иборатки, $P(x)$ берилган x_0, x_1, ..., x_n нуқталарда $f(x)$ билан бир хил қийматларни қабул қилсин:

$$P(x_i)=f(x_i) \quad (i=\overline{0, n}).$$

Бу ерда кўрсатилган x_0, x_1, ..., x_n нуқталар *интерполяция тугунлари* ёки *тугунлар* дейилади, $P(x)$ эса *интерполяцияловчи функция* дейилади. Агар $\{P(x)\}$ синфи сифатида даражали кўпҳадлар синфи олинса, у ҳолда интерполяциялаш алгебраик дейилади. Алгебраик интерполяциялаш аппарати ҳисоблаш математикасининг кўп соҳаларида қўлланилади, чунончи, дифференциаллаш ва интеграллашда, трансцендент, дифференциал ва интеграл тенгламаларни ечишда, функция экстремумини топишда, ҳамда функция жадвалини тузишда. Тейлор ёйилмаси классик анализда қай даражада аҳамиятга эга бўлса, алгебраик интерполяциялаш ҳам ҳисоблаш математикасида шундай аҳамиятга эгадир. Айрим ҳолларда интерполяциялашнинг бошқа кўринишларини қўллаш мақсадга мувофиқдир. Масалан, $f(x)$ даврий функция бўлса, у ҳолда $\{P(x)\}$ синфи сифатида тригонометрик функциялар синфи олинади; агар интерполяцияланадиган функция берилган нуқталарда чексизга айланадиган бўлса, у ҳолда $\{P(x)\}$ синфи сифатида рационал функциялар синфини олиш маъқулдир.

Бу бобда, биз, асосан, алгебраик интерполяциялашнинг ҳар хил усулларини кўриб чиқамиз ва бундай яқинлаштиришнинг аниқлигини баҳолаймиз. Бобнинг охирида интерполяциялашнинг айрим татбиқларини кўриб чиқамиз.

2-§. ИНТЕРПОЛЯЦИОН КЎПҲАДЛАРНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ. ЛАГРАНЖ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАСИ

Биз асосан алгебраик интерполяциялаш билан шуғулланамиз. Масаланинг қўйилиши қуйидагичадир. Даражаси n дан юқори бўлмаган шундай кўпҳад қурилсинки, у берилган $(n+1)$ та x_0, x_1, ..., x_n нуқталарда берилган

$$f(x_0),\ f(x_1),\ \ldots,\ f(x_n)$$

қийматларни қабул қилсин. Бу масалани геометрик таърифлаш ҳам мумкин: даражаси n дан ортмайдиган шундай $P(x)$ кўпҳад қурилсинки, унинг графиги берилган $(n+1)$ та $M_k(x_k, f(x_k))$ $(k=\overline{0, n})$ нуқталардан ўтсин.

Демак, c_m коэффициентларни шундай аниқлаш керакки,

$$P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \tag{2.1}$$

кўпҳад учун ушбу

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0.\ 1, \dots, n \tag{2.2}$$

тенгликлар бажарилсин. Бу тенгликларни очиб ёзсак, $c_m (m = \overline{0, n})$ ларга нисбатан $(n + 1)$ номаълумли $(n + 1)$ та тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2 + \dots + c_nx_0^n = f(x_0), \\ c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \dots + c_nx_1^n = f(x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_0 + c_1x_n + c_2x_n^2 + \dots + c_nx_n^n = f(x_n). \end{cases} \tag{2.3}$$

Бу системанинг детерминанти Вандермонд детерминантидир: $W(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Масала мазмунидан равшанки, x_k нуқталар бир-биридан фарқли, демак бу детерминант нолдан фарқлидир. Шунинг учун ҳам (2.3) система ва шу билан бирга қўйилган интерполяция масаласи ягона ечимга эга. Бу системани ечиб, c_m ларни топиб (2.1) га қўйсак, $P(x)$ кўпҳад аниқланади. Биз $P(x)$ нинг ошкор кўринишини топиш учун бошқача йўл тутамиз, аввало фундаментал кўпҳадлар деб аталувчи $Q_{nj}(x)$ ларни, яъни

$$Q_{nj}(x_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ бўлганда,} \\ 1, & i = j \text{ бўлганда} \end{cases}$$

шартларни қаноатлантирадиган n- даражали кўпҳадларни қурамиз. У ҳолда

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) Q_{nj}(x) \tag{2.4}$$

изланаётган интерполяцион кўпҳад бўлади. Ҳақиқатан ҳам, барча $i = 0, 1, 2, \dots n$ учун

$$L_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) Q_{nj}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \delta_i^j = f(x_i)$$

ва иккинчи томондан $L_n(x)$ n-даражали кўпҳаддир.

Энди $Q_{n,j}(x)$ нинг ошкор кўринишини топамиз, $j \neq i$ бўлганда $Q_{n,j}(x_i) = 0$, шунинг учун ҳам $Q_{n,j}(x)$ кўпҳад $j \neq i$ бўлганда $x - x_i$ га бўлинади. Шундай қилиб, n- даражали кўпҳаднинг n та бўлувчилари бизга маълум, бундан эса

$$Q_{n,j}(x) = C \prod_{i \neq j} (x - x_i)$$

келиб чиқади. Номаълум кўпайтувчи C ни эса

$$Q_{n,j}(x_j) = C \prod_{i \neq j} (x_j - x_i) = 1$$

шартдан топамиз; натижада:

$$Q_{n,j}(x) = \prod_{l \neq j} \frac{x - x_l}{x_j - x_l}.$$

Бу ифодани (2.4) га қўйиб, керакли кўпҳадни аниқлаймиз:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{l \neq j} \frac{x - x_l}{x_j - x_l}. \qquad (2.5)$$

Бу кўпҳад *Лагранж интерполяцион кўпҳади* дейилади.

Бу формуланинг хусусий ҳолларини кўрайлик: $n = 1$ бўлганда Лагранж кўпҳади икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ формуласини беради:

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} f(x_1).$$

Агар $n = 2$ бўлса, у вақтда квадратик интерполяцион кўпҳадга эга бўламиз, бу кўпҳад учта нуқтадан ўтувчи ва вертикал ўққа эга бўлган параболани аниқлайди;

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2).$$

Мисол. 0, 1, 2 нуқталарда мос равишда 1, 2, 5 қийматларни қабул қилувчи квадратик кўпҳад қурилсин.

Бу қийматларни охирги формулага қўямиз:

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \cdot 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \cdot 5 = x^2 + 1.$$

Энди Лагранж интерполяцион формуласининг бошқа кўринишини келтирамиз. Бунинг учун

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{l=0}^{n} (x - x_l)$$

кўпҳадни киритамиз. Бундан ҳосила олсак,

$$\omega'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\prod_{l \neq k} (x - x_l)\right].$$

Квадрат қавс ичидаги ифода $x = x_j$ ва $k \neq j$ бўлганда нолга айланади, чунки $(x_j - x_j)$ кўпайтувчи қатнашади. Демак,

$$\omega'_{n+1}(x_j) = \prod_{l \neq j} (x_j - x_l).$$

Шунинг учун ҳам, $\prod\limits_{l \neq j} \frac{x - x_l}{x_j - x_l}$ Лагранж коэффициентини

$$\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_j)(x - x_j)}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан эса Лагранж кўпҳади қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_j)\,(x-x_j)}\,. \qquad (2.6)$$

Энди тугунлар бир хил узоқликда жойлашган: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$ хусусий ҳолни кўрамиз.

Бу ҳолда соддалик учун $x = x_0 + th$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда

$$x - x_j = h(t - j), \quad \omega_{n+1}(x) = h^{n+1}\omega^*_{n+1}(t),$$

бу ерда

$$\omega^*_{n+1}(t) = t(t-1)\ldots(t-n), \quad \omega'_{n+1}(x_j) = (-1)^{n-j}j!(n-j)!h^n$$

бўлиб, (2.6) Лагранж интерполяцион кўпҳади қуйидаги кўринишни олади:

$$L_n(x_0 + th) = \omega^*_{n+1}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}f(x_j)}{(t-j)j!(n-j)!}\,. \qquad (2.7)$$

3-§. ЭЙТКЕН СХЕМАСИ

Интерполяцион кўпҳадни қуриш учун ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида Эйткен схемасини қўллаш қулайдир. $L_{(012\ldots n)}(x)$ орқали $x_0, x_1, \ldots, x_n$ тугунлар ёрдамида қурилган n-даражали кўпҳадни белгилаймиз. Маълум (2.5) формулага кўра

$$L_{(01)}(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0-x \\ f(x_1) & x_1-x \end{vmatrix}}{x_1-x_0},$$

$$L_{(1,\,2)}(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_0}f(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_1) & x_1-x \\ f(x_2) & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_1},$$

$$L_{(0,\,2)}(x) = \frac{x-x_2}{x_0-x_2}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_2-x_0}f(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0-x \\ f(x_2) & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_0}.$$

Энди $L_{(0,\,2)}(x)$ ифода $f(x_0)$ ва $f(x_2)$ лардан қандай қонуният билан тузилган бўлса, худди шу қонуният билан $L_{(01)}(x)$ ва $L_{(12)}(x)$ ёрдамида тузилган

$$P(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{(01)}(x) & x_0-x \\ L_{(12)}(x) & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_0}$$

ифодани кўриб чиқамиз. Кўриниб турибдики, $P(x)$ иккинчи даражали кўпҳад бўлиб,

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P(x_1) = f(x_1), \quad P(x_2) = f(x_2)$$

тенгликлар ўринлидир. Демак,

$$P(x) = L_{(012)}(x).$$

Шундай қилиб, $L_{(01)}(x)$ ва $L_{(12)}(x)$ га биринчи тартибли интерполяцияни қўллаб, $L_{(012)}(x)$ кўпҳадга эга бўлдик. Худди шу натижани қолган икки формуладан ҳам ҳосил қила оламиз:

$$L_{(012)}(x)=\frac{\begin{vmatrix} L_{(01)}(x) & x_1-x \\ L_{(02)}(x) & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_1},$$

$$L_{(012)}(x)=\frac{\begin{vmatrix} L_{(02)}(x) & x_0-x \\ L_{(12)}(x) & x_1-x \end{vmatrix}}{x_1-x_0}.$$

Бу жараённи чексиз давом эттиришимиз мумкин.

Шундай қилиб, $n+1$ та нуқта ёрдамида n-даражали интерполяцион кўпҳад қуриш учун шу нуқталарнинг n таси ёрдамида тузилган иккита бир-биридан фарқли $(n-1)$-даражали интерполяцион кўпҳадларга биринчи тартибли интерполяцияни қўллаш керак. Масалан,

$$L_{(01234)}(x)=\frac{\begin{vmatrix} L_{(0123)}(x) & x_3-x \\ L_{(0124)}(x) & x_4-x \end{vmatrix}}{x_4-x_3}=\frac{\begin{vmatrix} L_{(0123)}(x) & x_0-x \\ L_{(1234)}(x) & x_4-x \end{vmatrix}}{x_4-x_0}.$$

Юқорида келтирилган схема *Эйткен схемаси* дейилади. Одатда Эйткен схемаси $L_n(x)$ нинг умумий кўринишини топиш учун эмас, балки унинг бирор x нуқтадаги қийматини ҳисоблашда фойдаланилади. Ҳисоблашларни 20-жадвал шаклида ёзиш маъқулдир.

20- жадвал

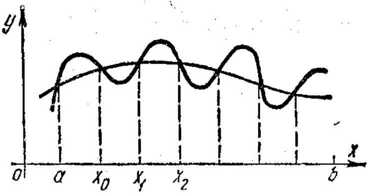
x_i	y_i	x_i-x	$L(i-1,\ i)$	$L(i-2,\dots,i)$	$L(i-3,\dots,i)$	$L(i-4,\dots,i)$	$L(i-5,\dots,i)$
x_0	y_0	x_0-x					
x_1	y_1	x_1-x	$L_{(01)}(x)$				
x_2	y_2	x_2-x	$L_{(12)}(x)$	$L_{(012)}(x)$			
x_3	y_3	x_3-x	$L_{(23)}(x)$	$L_{(123)}(x)$	$L_{(0123)}(x)$		
x_4	y_4	x_4-x	$L_{(34)}(x)$	$L_{(234)}(x)$	$L_{(1234)}(x)$	$L_{(01234)}(x)$	
x_5	y_5	x_5-x	$L_{(45)}(x)$	$L_{(345)}(x)$	$L_{(2345)}(x)$	$L_{(12345)}(x)$	$L_{(012345)}(x)$

Мисол. Қадами $h=0{,}01$ га тенг бўлган $\sin x$ нинг жадвалидан фойдаланиб, $\sin x$ нинг $x=0{,}704$ нуқтадаги қийматини топамиз. Ҳисоблаш натижалари 21- жадвалда келтирилган.

21- жадвал

0,68	0,62879	—0,024				
0,69	0,63654	—0,014	0,647400			
0,70	0,64422	—0,004	0,647292	0,6472488		
0,71	0,65183	0,006	0,647264	0,6472808	0,6472626	
0,72	0,65938	0,016	0,647300	0,6472424	0,6473038	0,6472679
$\sin 0{,}704=0{,}64727$						

4- §. ЛАГРАНЖ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАСИНИНГ ҚОЛДИҚ ҲАДИНИ БАҲОЛАШ



17-чизма.

Агар бирор $[a, b]$ оралиқда берилган $f(x)$ функцияни $L_n(x)$ интерполяцион кўпҳад билан алмаштирсак, улар интерполяция тугунларида ўзаро устма-уст тушиб, бошқа нуқталарда эса фарқ қилади (17- чизма). Шунинг учун қолдиқ ҳаднинг $R(x) = f(x)-L_n(x)$ кўринишини топиш ва уни баҳолаш билан шуғулланиш мақсадга мувофиқ. Бунинг учун интерполяция тугунларини ўз ичига оладиган $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ функция $(n+1)$- тартибли $f^{(n+1)}(x)$ узлуксиз ҳосилага эга деб фараз қиламиз. Интерполяциянинг қолдиқ ҳади $R(x)$ учун қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда $(n+1)$- тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда интерполяция қолдиқ ҳадини

$$R(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} \qquad (4.1)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу ерда $\xi \in [a, b]$ бўлиб, умуман айтганда x нинг функциясидир.

Исбот. (4.1) ни кўрсатиш учун ёрдамчи $\varphi(z) = R(z) - K\omega_{n+1}(z)$ функцияни текширамиз, бу ерда K номаълум ўзгармас коэффициент. Бу функциянинг $z = x_0, x_1, \ldots, x_n$ ларда ноль қийматларни қабул қилиши равшан. Номаълум K коэффициентни шундай танлаймизки, $\varphi(z)$ функция $z = x \in [a, b]$ ва $x = x_i$ $(i = \overline{0,n})$ нуқталарда ноль қийматни қабул қилсин. Демак,

$$K = \frac{R(x)}{\omega_{n+1}(x)}. \qquad (4.2)$$

Натижада $\varphi(z)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг $n+2$ та $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$ нуқталарида нолга айланади. Ролль теоремасига кўра $\varphi'(z)$ бу оралиқда камида $n+1$ та нуқтада нолга айланади, $\varphi''(z)$ эса камида n та нуқтада ва ҳоказо, $\varphi^{(n+1)}(z)$ камида битта нуқтада нолга айланади. Айтайлик бу нуқта ξ бўлсин, $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Бундан $L_n(x)$ нинг n- даражали кўпҳад эканлигини ҳисобга олсак:

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(\xi) - K\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi) =$$
$$= f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0,$$

яъни $K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ ва бундан, ҳамда (4.2) дан (4.1) формуланинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

5- §. ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАР ҚОЛДИҚ ҲАДЛАРИНИ МИНИМАЛЛАШТИРИШ ВА П. Л. ЧЕБИШЕВ КЎПҲАДЛАРИ

Мумкин қадар кичик бўлган ва $|R(x)| \leqslant \alpha(x)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\alpha(x)$ миқдор интерполяция методининг x нуқтадаги абсолют хатоси ва $a \leqslant x \leqslant b$ оралиқда $\alpha(x) \leqslant \alpha^*$ тенгсизликни каноатлантирувчи мумкин қадар кичик бўлган α^* миқдор эса интерполяция методининг $[a, b]$ оралиқда абсолют хатоси бўлади.

Агар $M_{n+1} = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|$ ни аниқлаш мумкин бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва α^* ни табиий равишда

$$\alpha(x) = M_{n+1} \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!},$$

$$\alpha^* = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\omega_{n+1}(x)| \tag{5.1}$$

тенгликлар билан аниқлаш мумкин. Охирги тенглик шуни кўрсатадики агар $f(x)$ функция ва шу билан бирга M_{n+1} берилган бўлса, у ҳолда α^* фақат $\omega_{n+1}(x)$ гагина боғлиқ бўлиб қолади. Лекин $\omega_{n+1}(x)$ кўпҳад интерполяция тугунлари $x_0, x_1, \ldots, x_n$ билан тўла равишда аниқланади.

Шундай савол туғилиши мумкин: $[a, b]$ оралиқда интерполяция тугунларини танлаш ҳисобига шу оралиқда интерполяция методининг абсолют хатоси энг кичик бўлишига эришиш мумкинми? Бу саволга жавоб бериш учун П. Л. Чебишев кўпҳадлари ва уларнинг хоссаларидан фойдаланамиз.

Чебишев кўпҳадлари $T_n(x)$ қуйидагича аниқланади:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \quad |x| \leqslant 1.$$

Бундан $n = 1$ да

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

ва $n = 2$ да

$$T_2(x) = \cos[2\arccos x] = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Сўнгра

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta$$

айниятда $\theta = \arccos x$ деб олиб $T_n(x)$ учун

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{5.2}$$

рекуррент муносабатга эга бўламиз. Бу муносабатдан кўринадики, $T_n(x)$ n- даражали кўпҳад бўлиб, x нинг юқори даражасининг коэффициенти 2^{n-1} га тенг экан. (5.2) формуладан кетма-кет қуйидагиларни топиш мумкин:

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;,
\end{aligned}$$

$T_n(x)$ нинг барча n та илдизлари ҳақиқий бўлиб $[-1, 1]$ оралиқда жойлашган. Улар $\cos[n\arccos x] = 0$ тенгликдан топилади:

$$n\arccos x = \frac{\pi}{2}(2k+1) \text{ ёки } x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

Бунда k га n та турли $0, 1, \ldots, n-1$ қийматлар бериб, n та турли илдизларга эга бўламиз. Энди $T_n(x)$ нинг $[-1, 1]$ оралиқдаги максимум ва минимумларини топамиз. Стационар нуқталари $T'_n(x)=0$ дан, яъни $\sin[n\arccos x] = 0$ тенгликдан топилади. Бундан $x_m = \cos\frac{m\pi}{n}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ ва $T_n\left(\cos\frac{m\pi}{n}\right)=(-1)^m$. Демак, барча максимумлар 1 га тенг.

Агар интерполяциялаш оралиғи $[a, b]$ сифатида $[-1, 1]$ ва интерполяция тугунлари сифатида эса Чебишев кўпҳадларининг илдизлари x_k лар олинса, у ҳолда $\omega_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$ ва $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\omega_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}$ бўлади.

Қуйидаги

$$\overline{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = x^n + \ldots$$

кўпҳадлар нолдан *энг кам оғувчи кўпҳадлар* дейилади.

Бу таърифнинг маъносини қуйидаги лемма аниқлайди.

Лемма. Бош коэффициенти 1 га тенг бўлган ҳар қандай n-даражали $P_n(x)$ кўпҳад учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$\max_{[-1,1]}|P_n(x)| \geqslant \max_{[-1,1]}|\overline{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Исбот. Тескарисини фараз қиламиз. У ҳолда $\overline{T}_n(x) - P_n(x)$ кўпҳад $(n-1)$ даражали бўлиб, шу билан бирга

$$\mathrm{sign}[\overline{T}_n(x_k) - P_n(x_k)] = \mathrm{sign}\left[\frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P_n(x_k)\right] = (-1)^k,$$

чунки, шартга кўра, барча k лар учун $|P_n(x_k)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Шундай қилиб, $\overline{T}_n(x) - P_n(x)$ кўпҳад барча $k = 0, 1, \ldots, n$ лар учун қўшни x_k ва x_{k+1} нуқталарда ишорасини ўзгартиради. Демак, $(n-1)$-даражали $\overline{T}_n(x) - P_n(x)$ кўпҳад нолдан фарқли, чунки у x_k $(k=\overline{0,n})$ нуқталарда нолдан фарқли бўлиб, n та ҳар хил илдизларга эга. Бу эса қарама-қаршиликка олиб келади.

Агар интерполяция ихтиёрий $[a, b]$ оралиқда бажарилса, у ҳолда

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)z + b + a]$$

чизиқли алмаштириш ёрдамида уни $[-1, 1]$ оралиққа келтириш мумкин. Шу билан бирга $\overline{T}_n(x)$ кўпҳад бош коэффициенти $\frac{2^n}{(b-a)^n}$ га тенг бўлган $\overline{T}_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$ кўпҳадга айланади.

Леммага кўра, бош коэффициенти 1 га тенг бўлган

$$\overline{T}_n^{[a,\ b]}(x) = (b-a)^n 2^{1-2n}\, T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

кўпҳад $[a,\ b]$ оралиқда нолдан энг кам оғадиган кўпҳаддир. $\overline{T}_n^{[a,\ b]}(x)$ нинг илдизлари

$$x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi(2k+1)}{2n} \qquad (k=\overline{0,n-1})$$

эканлигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин. Ихтиёрий оралиқ учун интерполяцион формуланинг хатолиги қуйидагича бўлади:

$$|R(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

6- §. БЎЛИНГАН АЙИРМАЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Ҳосила тушунчасининг умумлашмаси бўлган бўлинган айирмалар тушунчасини киритамиз. Бирор синфдан олинган $f(x)$ функция ва бир-бирларидан фарқли $x_0, x_1, \ldots, x_n$ тугунлар берилган бўлсин. $f(x)$ функциянинг $x = x_i$ тугундаги нолинчи тартибли бўлинган айирмаси деб $f(x_i)$ га айтилади; биринчи тартибли бўлинган айирмаси эса (x_i, x_j тугунларда)

$$f(x_i,\ x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \tag{6.1}$$

тенглик билан аниқланади, x_i, x_j, x_m тугунларга мос келган иккинчи тартиблиси эса

$$f(x_i,\ x_j,\ x_m) = \frac{f(x_j,\ x_m) - f(x_i,\ x_j)}{x_m - x_i}$$

тенглик билан ва, умуман, k- тартибли бўлинган $f(x_0, \ldots, x_k)$ айирма $(k-1)$- тартиблиси орқали

$$f(x_0, \ldots, x_k) = \frac{f(x_1, \ldots, x_k) - f(x_0, \ldots x_{k-1})}{x_k - x_0}$$

формула билан аниқланади. Бўлинган айирмаларни 22- жадвал кўринишида ёзиш маъқулдир.

22- жадвал

x_0	$f(x_0)$				
		$f(x_0,x_1)$			
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0,x_1,x_2)$		
		$f(x_1,x_2)$		$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$	
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1,x_2,x_3)$		$f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$
		$f(x_2,x_3)$		$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$	
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2,x_3,x_4)$		
		$f(x_3,x_4)$			
x_4	$f(x_4)$				

Лемма. Бўлинган айирмалар учун

$$f(x_0, \ldots, x_k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{j \neq i}(x_i - x_j)} \tag{6.2}$$

тенглик ўринлидир.

Исбот. Леммани индукция методи билан исбот қиламиз: $k = 0$ бўлганда (2.2) $f(x_0) = f(x_0)$ тенгликка айланади. $k = 1$ бўлганда (2.2) тенглик (2.1) тенглик билан устма-уст тушади. Фараз қилайлик, (2.2) тенглик $k \leqslant n$ учун ўринли бўлсин. У вақтда

$$f(x_0, \ldots, x_{n+1}) = \frac{f(x_1, \ldots, x_{n+1}) - f(x_0, \ldots, x_n)}{x_{n+1} - x_0} =$$

$$= \frac{1}{x_{n+1} - x_0}\left[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant n+1}}(x_i - x_j)} - \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ 0 \leqslant j \leqslant n}}(x_i - x_j)}\right].$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида $i \neq 0$, $i \neq n+1$ бўлганда $f(x_i)$ олдидаги коэффициент қуйидагига тенг:

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_0}\left[\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant n+1}}(x_i - x_j)} - \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ 0 \leqslant j \leqslant n}}(x_i - x_j)}\right] =$$

$$= \frac{(x_i - x_0) - (x_i - x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0)\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ 0 \leqslant j \leqslant n+1}}(x_i - x_j)} = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ 0 \leqslant j \leqslant n+1}}(x_i - x_j)},$$

яъни изланаётган кўринишга эга; $i = 0$ ва $i = n + 1$ лар учун $f(x_i)$ фақат бир мартагина қатнашади ва унинг олдидаги коэффициент керакли кўринишга эга бўлади. Шу билан лемма исбот бўлди. Бу леммадан қатор натижалар келиб чиқади.

1- натижа. Функциялар алгебраик йиғиндисининг бўлинган айирмаси қўшилувчилар бўлинган айирмаларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

2- натижа. Ўзгармас кўпайтувчини бўлинган айирма белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

3- натижа. Бўлинган айирма ўз аргументлари $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ларнинг симметрик функциясидир, яъни уларнинг ўринлари алмаштирилганда бўлинган айирма ўзгармайди.

Бу натижаларни исботлашни китобхонга ҳавола қиламиз.

7- §. НЬЮТОННИНГ БЎЛИНГАН АЙИРМАЛИ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАСИ

Лагранж интерполяцион кўпҳадининг ҳар бир ҳади интерполяция тугунларининг ҳаммасига боғлиқдир. Агар янги тугунлар киритиладиган бўлса, интерполяцион кўпҳадни қайтадан қуришга тўғри келади. Бу Лагранж интерполяцион кўпҳадининг камчилиги-дир. Лагранж интерполяцион кўпҳадини шундай тартибда ёзиш мумкинки, ҳосил бўлган кўпҳаднинг ихтиёрий i- ҳади интерполяция тугунларининг фақат аввалги i тасига ва функциянинг шу тугунлардаги қийматларига боғлиқ бўлади. Айтилганларни бўлинган айирмалар ёрдамида бажарамиз:

$$f(x) - L_n(x) = f(x) - \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod\limits_{j \neq i}(x_i - x_j)} =$$

$$= \omega_{n+1}(x) \left[\frac{f(x)}{\prod\limits_{i=0}^{n} (x - x_i)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x) \prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)} \right].$$

Бу ифодани 6- параграфдаги лемма билан солиштириб кўрсак, квадрат қавслар ичидаги ифода $f(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)$ нинг айнан ўзи эканлиги келиб чиқади. Демак, биз

$$f(x) - L_n(x) = f(x;\ x_0;\ \ldots;\ x_n)\ \omega_{n+1}(x) \qquad (7.1)$$

деб ёзишимиз мумкин.

Энди $L_m(x)$ тугунлари $x_0, x_1, \ldots, x_m$ дан иборат бўлган Лагранж интерполяцион кўпҳади бўлсин. У ҳолда Лагранжнинг $L_n(x)$ интерполяцион кўпҳадини

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + \ldots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)] \qquad (7.2)$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Бу ерда $L_m(x) - L_{m-1}(x)$ $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ нуқталарда нолга айланадиган m- даражали кўпҳад, чунки $L_m(x_j) = L_{m-1}(x_j) = f(x_j)$ $(j = \overline{0, m-1})$. Шунинг учун ҳам

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = A_m \omega_m(x),\ \omega_m(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_{m-1}).$$

Бунда $x = x_m$ деб олсак,

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = A_m \omega_m(x_m)$$

га эга бўламиз. Иккинчи томондан (7.1) тенгликда $n = m - 1$ ва $x = x_m$ деб олсак, у ҳолда

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = f(x_m;\ x_0;\ \ldots;\ x_{m-1})\omega_m(x_m).$$

Шундай қилиб, $A_m = f(x_0;\ \ldots;\ x_m)$ ва демак,

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = f(x_0;\ \ldots;\ x_m)\ \omega_m(x).$$

Бу миқдорларни (7.2) тенгликка қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0;\ x_1)\ (x - x_0) + \ldots +$$
$$+ f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n)\ (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}). \qquad (7.3)$$

Бу ҳосил бўлган интерполяцион кўпҳад *Ньютоннинг бўлинган айирмали интерполяцион кўпҳади* дейилади.

(7.1) тенгликни $f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ \omega_{n+1}(x)$ тенглик билан солиштирсак

$$f(x;\ x_0;\ \dots;\ x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\quad x_0 \leqslant \xi \leqslant x_n \tag{7.4}$$

келиб чиқади.

Энди бир хусусий ҳолни, яъни $f(x)$ m- даражали кўпҳад

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$$

бўлган ҳолни қарайлик. (7.4) формуладан ихтиёрий $x_0, x_1, \dots, x_n$ лар учун қуйидагига эга бўламиз:

$$P_m(x,\ x_0;\ \dots;\ x_n) = \begin{cases} a_n, \text{ агар } m = n \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } m < n \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Ньютон интерполяцион формуласини тузишда ҳам Эйткен схемасидан фойдаланиш мумкин. Қуйида Ньютон интерполяцион формуласининг қўлланилишига доир мисол келтирилган.

Мисол. $y = f(x)$ функциянинг қуйидаги

x	0	5	10	12	13	15	16
y	1	151	1051	1789	2263	3451	4177

жадвалда берилган қийматларидан фойдаланиб, унинг $x=12{,}5$ даги қийматини топайлик.

Ечиш. Бўлинган айирмалар жадвалини тузамиз:

0	1			
		30		
5	151		15	
		180		1
10	1051		27	
		369		1
12	$\underline{1789}$		35	
		$\underline{474}$		1
13	2263		$\underline{40}$	
		594		$\underline{1}$
15	3451		44	
		726		
16	4177			

Учинчи тартибли бўлинган айирма ўзгармас бўлганлиги учун $y = f(x)$ функция 3- даражали кўпҳад экан. Берилган $x = 12{,}5$ қиймат жадвалдаги $x=12$ ва $x=13$ қийматлар орасида бўлганлиги учун, ости чизилган бўлинган айирмалардан фойдаланиб, Ньютоннинг интерпояцион формуласини тузамиз:

$$f(x) = 1789 + 474(x-12) + 40\,(x-12)\,(x-13) + (x-12)\,(x-13)\,(x-15).$$

Бундан

$$f(12{,}5) = 1789 + 474\cdot 0{,}5 - 40\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 + 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}25 = 2016{,}625.$$

8- §. ЧЕКЛИ АЙИРМАЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Фараз қилайлик аргументнинг ўзаро тенг узоқликда жойлашган $x_i = x_0 + ih$ (h— жадвал қадами) қийматларида $f(x)$ функциянинг мос равишдаги қийматлари $f_i = f(x_i)$ берилган бўлсин. Ушбу

$f_{i+1}-f_i$ айирмага биринчи тартибли чекли айирма дейилади; шароитга кўра бу миқдорни *ўнг чекли айирма:* Δf_i, *чап чекли айирма:* ∇f_{i+1} ёки *марказий айирма:* $\delta f_{i+{}^1/_2}=f_{i+{}^1/_2}$ лар каби белгиланади. Шундай қилиб, қуйидагича ёза оламиз:

$$f_{i+1}-f_i=\Delta f_i=\nabla f_{i+1}=\delta f_{i+{}^1/_2}=f^1_{i+{}^1/_2}. \tag{8.1}$$

Юқори тартибли айирмалар рекуррент муносабатлар ёрдамида тузилади:

$$\begin{gathered}\Delta^k f_i=\Delta(\Delta^{k-1}f_i)=\Delta^{k-1}(\Delta f_i)=\Delta^{k-1}f_{i+1}-\Delta^{k-1}f_i,\\ \nabla^k f_i=\nabla(\nabla^{k-1}f_i)=\nabla^{k-1}(\nabla f_i)=\nabla^{k-1}f_i-\nabla^{k-1}f_{i-1},\\ \delta^k f_i=\delta(\delta^{k-1}f_i)=\delta^{k-1}(\delta f_i)=\delta^{k-1}f_{i+{}^1/_2}-\delta^{k-1}f_{i-{}^1/_2},\\ f^k_i=f^{k-1}_{i+{}^1/_2}-f^{k-1}_{i-{}^1/_2}.\end{gathered}$$

Айирмалар жадвали одатда қуйидагича тасвирланади:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_0	f_0				
		$f^1_{{}^1/_2}$			
x_1	f_1		f^2_1		
		$f^1_{{}^3/_2}$		$f^3_{{}^3/_2}$	
x_2	f_2		f^2_2		f^4_2
		$f^1_{{}^5/_2}$		$f^3_{{}^5/_2}$	
x_3	f_3		f^2_3		
		$f^1_{{}^7/_2}$			
x_4	f_4				

Ҳисоблаш практикасида ишнинг ҳамма босқичларида назорат қилувчи амалларнинг мавжудлиги талаб қилинади. Бу нарса кўпол хатоларга йўл қўймасликка ёки ҳеч бўлмаганда уларни минимумга келтириш учун хизмат қилади. Бундай назорат қилувчи амаллар айирмалар жадвалини тузаётганда бевосита ҳосил бўлади. (8.1) ва ундан кейинги формулалардан кўриниб турибдики,

$$\begin{gathered}f^1_{{}^1/_2}+f^1_{{}^3/_2}+\ldots+f^1_{n-{}^1/_2}=f_1-f_0+f_2-f_1+\ldots+f_n-f_{n-1}=\\ =f_n-f_0,\ f^2_1+f^2_2+\ldots+f^2_{n-1}=f^1_{{}^3/_2}-f^1_{{}^1/_2}+f^1_{{}^5/_2}-f^1_{{}^3/_2}+\ldots+\\ +f^1_{n-{}^1/_2}-f^1_{n-{}^3/_2}=f^1_{n-{}^1/_2}-f^1_{{}^1/_2},\end{gathered}$$

яъни жадвалнинг ҳар бир устунидаги сонларнинг йиғиндиси аввалги устун энг четки элементларининг айирмасига тенг. Айрим интерполяцион формулаларда f_i ва уларнинг чекли айирмалари билан бир қаторда айирмаларнинг қуйидаги ўрта арифметиги ишлатилади:

$$\mu f^{2k-1}_i=\frac{f^{2k-1}_{i-{}^1/_2}+f^{2k-1}_{i+{}^1/_2}}{2},$$

$$\mu f^{2k}_{i+1/2} = \frac{f_i^{2k}+f_{i+1}^{2k}}{2}.$$

Энди чекли айирмаларнинг айрим хоссаларини кўриб чиқамиз.

1- лемма. k- тартибли чекли айирма функциянинг қийматлари орқали қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$f_i^k=\sum_{l=0}^{k}(-1)^j C_k^j f_{i+\frac{k}{2}-j}. \tag{8.2}$$

Бу ерда k жуфт бўлганда i бутун бўлиб, k тоқ бўлганда i ярим бутундир.

Исбот. Математик индукция методи билан исбот қиламиз. $k=1$ бўлганда, (8.1) га кўра (8.2) нинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Фараз қилайлик, (8.2) формула $k=l$ бўлганда ўринли бўлсин. У ҳолда

$$f_i^{l+1}=f^l_{i+\frac{1}{2}}-f^l_{i-\frac{1}{2}}=\sum_{j=0}^{l}(-1)^j C_l^j f_{i+\frac{1}{2}+\frac{l}{2}-j}-$$

$$-\sum_{j=0}^{l}(-1)^j C_l^j f_{i-\frac{1}{2}+\frac{l}{2}-j}.$$

Бу тенгликда бир хил f_m лар олдидаги коэффициентларни йиғиб ва

$$C_l^j+C_l^{j+1}=C_{l+1}^{j+1}$$

тенгликдан фойдаланиб, f_i^{l+1} учун изланган ифодага эга бўламиз. Шу билан лемма исбот бўлди.

Мисол. $k=2$, 3, 4 учун (8.2) дан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$f_i^2=f_{i+1}-2f_i+f_{i-1},$$
$$f_i^3=f_{i+3/2}-3f_{i+1/2}+3f_{i-1/2}-f_{i-3/2},$$
$$f_i^4=f_{i+2}-4f_{i+1}+6f_i-4f_{i-1}+f_{i-2}.$$

Бу леммадан қуйидаги натижаларга келамиз.

1- натижа. Иккита φ ва g функция йиғиндиси ёки айирмасининг f_i^k чекли айирмалари мос равишда шу функциялар чекли айирмаларининг йиғиндиси ёки айирмасига тенг:

$$f_i^k=\varphi_i^k\pm g_i^k.$$

2- натижа. Функция билан ўзгармас сон кўпайтмасининг чекли айирмалари функция чекли айирмалари билан ўзгармас сонниng кўпайтмасига тенг:

$$(af)_i^k=af_i^k.$$

2- лемма. Жадвалнинг қадами $h = x_i - x_{i-1}$ ўзгармас бўлса, у ҳолда бўлинган айирма билан чекли айирма орасида қуйидаги муносабат ўринлидир:

$$f(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{f^k_{i+k/2}}{h^k\, k!}. \qquad (8.3)$$

Исботни бу ерда ҳам индукция методи билан олиб борамиз. $k=1$ бўлганда

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f^1_{i+1/2}}{h},$$

бўлиб, (8.3) формуланинг тўғрилиги равшан. Фараз қилайлик, (8.3) формула барча $m \leqslant k$ лар учун ўринли бўлсин, у ҳолда

$$f(x_i, \dots, x_{i+k+1}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}) - f(x_i, \dots, x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i} =$$

$$= \frac{f^k_{i+1+k/2} - f^k_{i+k/2}}{(h^k k!)\,(h(k+1))} = \frac{f^k_{i+(k+1)/2}}{h^{k+1}(k+1)!}.$$

Шундай қилиб, (8.3) формула $m = k+1$ учун ҳам ўринли экан. Лемма исботланди.

Энди (7.4) формулага кўра

$$f(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \qquad x_i \leqslant \xi \leqslant x_{i+k}.$$

Бу тенгликни (8.3) билан солиштириб,

$$\Delta^k f_i = \nabla^k f_{i+k} = \delta^k f_{i+k/2} = f^{(k)}(\xi)\, h^k$$

ни ҳосил қиламиз.

Охирги тенгликдан қуйидаги натижага келамиз.

3- натижа. n- даражали кўпҳаднинг n- тартибли чекли айирмаси ўзгармас сонга тенг бўлиб, ундан юқори тартиблиси эса нолга тенг.

Охирги натижа кўпҳад жадвалини тузишнинг қулай усулини беради. Аввал аргументнинг $(n+1)$ та қийматларида n- даражали кўпҳаднинг қийматларини ҳисоблаймиз. Шу маълумотлардан фойдаланиб, n- тартибли айирмалар жадвалини тузамиз, сўнгра, n- тартибли айирмаларнинг доимийлигидан фойдаланиб, n- тартибли айирмалар устунини тўлдирамиз. Ундан кейин, $(n-1)$-, $(n-2)$- тартибли ва ҳоказо айирмалар устунларини тўлдирамиз. Бу устунларни тўлдираётганда

$$f^k_i = f^k_{i-1/2} + f^{k+1}_{i-1/2}$$

формуладан фойдаланамиз. Практикада бу усулни қўллаётганда қўпол хатоларга йўл қўймаслик мақсадида вақти-вақти билан кўпҳаднинг қийматини ҳисоблаб туриш мақсадга мувофиқдир.

Мисол. Жадвал қадамини $h=1$ ва дастлабки қийматни $x_0=1$ деб ҳисоблаб, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 5$ кўпҳаднинг айирмалар жадвали тузилсин

Ечиш. $f(x)$ нинг $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ нуқталардаги қийматларини, ҳисоблаймиз: $f_0 = -7$, $f_1 = 3$, $f_2 = 31$. Бундан эса қуйидагилар келиб чиқади:

$$f^1_{1/2} = f_1 - f_0 = 10,\ f^1_{3/2} = f_2 - f_1 = 28,\ f^2_1 = f^1_{3/2} - f^1_{1/2} = 18.$$

23- жадвал

x	f	f^1	f^2	f^3
1	—7			
		10		
2	3		18	
		28		6
3	31		24	
		52		6
4	83		30	
		82		6
5	165		36	
		118		6
6	283		42	
		160		
7	443			

Бу қийматларни 23- жадвалга жойлаштирамиз. Бизнинг функциямиз 3- даражали кўпҳад бўлганлиги учун унинг 3- тартибли айирмаси ўзгармас сон бўлиб, $f^3_{3/2} = 3! = 6$ га тенгдир. 23- жадвалнинг қолган устунлари қуйидаги

$$f^2_i = f^2_{i-1} + f^3_{i-1/2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ),$$
$$f^1_{i+1/2} = f^1_{i-1/2} + f^2_i \qquad (i = 2,\ 3,\ \dots\ ,\ ),$$
$$f_i = f_{i-1} + f^1_{i-1/2} \qquad (i = 3,\ 4,\ \dots\ ).$$

формулалар ёрдамида тўлдирилади.

Айирмалар жадвалини тузаётганда ҳисобловчи тасодифан хатога йўл қўйиши мумкин. Ҳозир биз f_i ни ҳисоблашда йўл қўйилган ε хато айирмаларга қандай таъсир қилишини кузатамиз (24- жадвал).

24- жадвалдан ёки (8.2) формуладан кўринадики, k- тартибли айирмага хато $(-1)^j C^j_k$ $(j = \overline{0,\ k})$ коэффициент билан тарқалади, демак k- тартибли айирма максимал хатосининг абсолют қиймати жуда тез ўсади: ҳар бир f^k_i айирма учун хатоларнинг ишораси билан олинган йиғинди нолга тенг бўлиб, абсолют қиймати билан олинган йиғинди эса $|\varepsilon|\ 2^k$ га тенг. Шундай қилиб, функциянинг қийматлари ҳисобланаётганда йўл қўйилган арзимас хато унинг юқори тартибли айирмаларига катта таъсир кўрсатар экан.

Айирмалар жадвалидаги ε хатонинг тарқалиш қонуни айрим ҳолларда бу хатонинг ўрнини ва қийматини топишга ҳамда жадвални тузатишга имкон беради. Одатда айирмалар жадвали бирор белгиланган ўнли хона аниқлигида ҳисобланади. Агар $y = f(x)$

24- жадвал

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
...	...	...	...	...	...
x_{i-4}	f_{i-4}				
		$f^1_{i-7/2}$			
x_{i-3}	f_{i-3}		f^2_{i-3}		
		$f^1_{i-5/2}$		$f^3_{i-5/2}$	
x_{i-2}	f_{i-2}		f^2_{i-2}		$f^4_{i-2}+\varepsilon$
		$f^1_{i-3/2}$		$f^3_{i-3/2}+\varepsilon$	
x_{i-1}	f_{i-1}		$f^2_{i-1}+\varepsilon$		$f^4_{i-1}-4\varepsilon$
		$f^1_{i-1/2}+\varepsilon$		$f^3_{i-1/2}-3\varepsilon$	
x_i	$f_i+\varepsilon$		$f^2_i-2\varepsilon$		$f^4_i+6\varepsilon$
		$f^1_{i+1/2}-\varepsilon$		$f^3_{i+1/2}+3\varepsilon$	
x_{i+1}	f_{i+1}		$f^2_{i+1}+\varepsilon$		$f^4_{i+1}-4\varepsilon$
		$f^1_{i+3/2}$		$f^3_{i+3/2}-\varepsilon$	
x_{i+2}	f_{i+2}		f^2_{i+2}		$f^4_{i+2}+\varepsilon$
		$f^1_{i+5/2}$		$f^3_{i+5/2}$	
x_{i+3}	f_{i+3}		f^2_{i+3}		
		$f^1_{i+7/2}$			
x_{i+4}	f_{i+4}				
...	...	...	...	...	...

функция k- тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда унинг k- тартибгача бўлган айирмалари текис ўзгариб, k- тартиблиси белгиланган ўнли хона миқёсида деярли ўзгармас бўлади. Жадвалнинг бирор қисмида охирги шартнинг бажарилмаслиги, умуман айтганда, ҳисоблаш хатоси мавжудлигидан далолат беради. k-тартибли айирманинг нормадан максимал оғишини ўрнатилгандан кейин, қуйидаги шартлар бажарилганда бу хатонинг ўрнини ва қийматини аниқлаш мумкин: 1) бу хато фақат бир жойда ва функциянинг қийматини ҳисоблаш пайтида содир бўлган; 2) чекли айирмаларни ҳисоблаётганда бошқа хатога йўл қўйилмаган. 24-жадвалдан кўринадики, f_i^k даги максимал хато f_i нинг хато қиймати жойлашган сатрда ёки ундан битта юқоридаги ва битта пастдаги сатрларда бўлади. Шундай қилиб, хато ҳисобланган жадвалдаги $f_n+\varepsilon$ қийматнинг ўрни n маълум бўлиб, миқдори ε ни топиш керак бўлсин. Соддалик учун учинчи айирма деярли ўзгармас бўлсин деб фараз қиламиз, у ҳолда иккинчи айирма арифметик прогрессияни ташкил этади ва шунинг учун ҳам иккинчи айирма f_i^2 нинг аниқ қиймати учта ўзаро қўшни хато айирмаларнинг ўрта арифметигига тенг бўлади (қ. 24- жадвал):

$$f_i^2=\frac{1}{3}\left[(f_{i-1}^2+\varepsilon)+(f_i^2-2\varepsilon)+(f_{i-1}^2+\varepsilon)\right],$$

чунки ε лар ўзаро қисқариб кетади. Иккинчи айирма f_i^2 нинг топилган аниқ қийматидан фойдаланиб хато миқдори ε ни аниқлаш мумкин. Бу миқдор иккинчи айирманинг тузатилган қиймати билан хато қиймати орасидаги айирманинг ярмига тенг:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[f_i^2 - (f_i^2 - 2\varepsilon)\right].$$

f_i нинг аниқ қиймати эса

$$f_i = (f_i + \varepsilon) - \varepsilon$$

айниятдан топилади. Ҳисоблашнинг тўғрилигини текшириш учун айирмаларни яна бир марта ҳисоблаш керак.

25- жадвал

x	f	f'	f^2	хато
1,9	6,190			
		174		
2,0	6,364		0	
		174		
2,1	6,538		0	
		174		
2,2	6,712		(—5)0	ε
		1(69)74		
2,3	6,88(1)6		(10)0	-2ε
		17(9)4		
2,4	7,060		(—5)0	ε
		174		
2,5	7,234		0	
		174		
2,6	7,408		0	
		174		
2,7	7,582			

Мисол. 25- жадвалдаги хато тузатилсин.

Ечиш. Жадвалда хато рақамлар қавс ичида олинган ва айирмалар устунида ўнли хоналар кўрсатилмаган, улар функция қийматлари устунидан аён. Бундан кўринадики, иккинчи айирманинг текис ўзгариши $x=2{,}3$ да бузилмоқда. Мавжуд хато катта қавсга олинган уч сатрга тарқалган. $x=2{,}3$ даги f_i^2 нинг аниқ қийматини топиш учун иккинчи айирмаларнинг ҳар уч сатрдаги қийматлари ўрта арифметигини оламиз:

$$f_i^2 = \frac{10^{-3}}{3}(-5 + 10 - 5) = 0.$$

Бундан

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(0 - 0{,}010) = -0{,}005.$$

$f(x)$ нинг $x=2{,}3$ нуқтадаги қийматига тузатиш сифатида, аниқ қийматини топамиз:

$$f_i = (f_i + \varepsilon) - \varepsilon = 6{,}881 - (-0{,}005) = 6{,}886.$$

Бу тузатишлардан кейин биринчи айирма ўзгармас бўлиб, иккинчи айирма нолга тенг бўлади.

9- §. ТУГУНЛАР ТЕНГ УЗОҚЛИКДА ЖОЙЛАШГАН ҲОЛ УЧУН НЬЮТОН ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАРИ

Ушбу ва кейинги параграфларда интерполяция тугунлари тенг узоқликда жойлашган ҳолни, яъни $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда интерполяцион формуланинг кўринишлари анча соддалашади. Биз ҳозир Ньютоннинг иккита интерполяцион формуласини чиқарамиз. Буларнинг биринчиси функцияни жадвал бошида ва иккинчиси жадвал охирида интерполяциялаш учун мўлжалланган (11- § га қаранг).

Фараз қилайлик, $L_n(x)$ $x_0, x_1, \dots, x_n$ тугунлар бўйича тузилган Ньютон интерполяцион кўпҳади бўлсин:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + \\ + f(x_0, \dots, x_n)(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}). \qquad (9.1)$$

Бундаги бўлинган айирмаларни (8.3) формулага кўра чекли айирмалар билан алмаштирайлик.

Ушбу $x = x_0 + th$ алмаштиришни ҳам бажаргандан кейин (9.1) кўпҳад қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + tf^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2} f^2_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f^3_{3/2} + \\ + \dots + \frac{t(t-1)\dots[t-(n-1)]}{n!} f^n_{n/2}. \qquad (9.2)$$

Бу формуланинг қолдиқ ҳади қуйидаги кўринишда бўлади:

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_0 - h)\dots(x - x_0 - nh)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \\ = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1)\dots(t-n). \qquad (9.3)$$

(9.2) формула *Ньютоннинг жадвал бошидаги* ёки *олға интерполяцион формуласи* дейилади.

Энди (9.1) формулада интерполяциялаш тугунлари сифатида $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-n}$ тугунларни оламиз:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_{-1})(x - x_0) + f(x_0, x_{-1}, x_{-2})(x - x_0)(x - \\ - x_1) + \dots + f(x_0, \dots, x_{-n})(x - x_0)\dots(x - x_{-(n-1)}). \quad (9.4)$$

Бўлинган айирмалар ўз аргументининг симметрик функцияси бўлганлиги учун

$$f(x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k}) = f(x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0).$$

(9.4) формулада яна бўлинган айирмаларни чекли айирмалар билан алмаштириб ва $x = x_0 + th$ деб олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + f^1_{-1/2}t + f^2_{-1}\frac{t(t+1)}{2} + \dots + \\ + f^n_{-n/2}\frac{t(t+1)\dots[t+(n-1)]}{n!}. \qquad (9.5)$$

Бу формуланинг қолдиқ ҳади

$$\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, t(t+1\ \ldots\ (t+n)$$

кўринишда бўлади.

Мисол. 26- жадвалда *эҳтимоллик интеграли*

$$\Phi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

нинг қийматлари берилган. Ньютоннинг интерполяцион формулалари ёрдамида Ф (0,64) ва Ф (1,45) лар ҳисоблансин.

26- жадвал

x	Ф	$Ф^1$	$Ф^2$	$Ф^3$
0,5	0,5205			
		834		
0,6	0,6039		—95	
		739		—1
0,7	0,6778		—96	
		643		1
0,8	0,7421		—95	
		548		5
0,9	0,7969		—90	
		458		7
1,0	0,8427		—83	
		375		9
1,1	0,8802		—74	
		301		10
1,2	0,9103		—64	
		237		10
1,3	0,9340		—54	
		183		9
1,4	0,9523		—45	
		138		
1,5	0,9661			

Ечиш. x_0 сифатида жадвалдаги қийматларнинг $x=0{,}64$ га энг яқинини, яъни $x=0{,}6$ ни оламиз. Бу ерда $h=0{,}1$ бўлгани учун

$$t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{0{,}64-0{,}6}{0{,}1}=0{,}4.$$

(9.2) да $n=3$ деб олиб, бу қийматларни келтириб қўямиз:

$$Ф\ (0{,}64)\simeq 0{,}6039+0{,}4\cdot 0{,}0739+\frac{0{,}4\cdot(0{,}4-1)}{2}\,(-0{,}0096)+$$

$$+\frac{0{,}4(0{,}4-1)\ (0{,}4-2)}{3!}\cdot 0{,}0001=0{,}63462.$$

Жадвалдаги қиймати эса Ф (0,64) = 0,6346 ([50], 129 б. га қаранг).

Худди шунга ўхшаш, Ф (1,45) ни ҳисоблаш учун x_0 сифатида жадвалдаги қиймат 1,5 ни оламиз. У ҳолда

$$t=\frac{1{,}45-1{,}5}{0{,}1}=-0{,}5$$

бўлиб, (9.5) формулага кўра:

$$\Phi(1{,}45) \simeq 0{,}9661 + 0{,}0138(-0{,}5) - 0{,}0045 \cdot \frac{-0{,}5(-0{,}5+1)}{2} +$$

$$+ 0{,}0009 \cdot \frac{-0{,}5(-0{,}5+1)\ (-0{,}5+2)}{3!} = 0{,}959706.$$

Жадвалдаги қиймат эса $\Phi\ (1{,}45) = 0{,}9597$.

Энди қолдиқ ҳад тўғрисида бир оз тўхталиб ўтайлик. Айрим ҳолларда, хусусан f_i қийматлар тажриба йўли билан ҳосил қилинган бўлса, $f^{(n+1)}(\xi)$ ни баҳолаш анча мушкул бўлади. Шунинг учун қўпол бўлса ҳам, соддароқ йўл билан баҳолаш маъқулдир. Қаралаётган оралиқда ҳосила $f^{(n+1)}(x)$, демак, айирма f_i^{n+1} ҳам секин ўзгаради деб фараз қилиб, (9.3) формула билан берилган қолдиқ ҳадда қатнашувчи ҳосилани (8.4) формула ёрдамида айирма билан аламаштирамиз, натижада

$$R_n \approx \frac{t(t-1)\ \dots\ (t-n)}{(n+1)!} f^{n+1}_{\frac{n+1}{2}} \qquad (9.6)$$

ҳосил бўлади. Шунингдек (9.5) формула ўрнида, қуйидаги тақрибий, лекин қулай формулага эга бўламиз:

$$R_n \approx \frac{t(t+1)\ \dots\ (t+n)}{(n+1)!} f^{n+1}_{\frac{n+1}{2}}. \qquad (9.7)$$

Юқоридаги формулалар анча қўпол, улардан фойдаланишда ҳушёр бўлиш керак. Агар ҳосила секин ўзгармаса, у ҳолда маъносиз натижага эга бўламиз. Масалан,

$$f(x) = x + N\sin\pi x$$

функцияни олиб, интерполяция тугунлари сифатида бутун $x_i = 0$, ± 1, ± 2, ... қийматларни олайлик. Бу ҳолда иккинчисидан бошлаб барча айирмалар нолга тенг. Демак, қўпол тарзда $f(x)$ ни чизиқли функция деб олишимиз мумкин. Лекин, N етарлича катта бўлганда $x + N\sin\pi x$ функция чизиқли функциядан кескин фарқ қилади.

10- §. ГАУСС, СТИРЛИНГ, БЕССЕЛ ВА ЭВЕРЕТТ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАРИ

Интерполяция хатосини камайтириш мақсадида, x_i интерполяция тугунларини интерполяцияланувчи x нуқта атрофида олиш маъқулдир. Чунки бу ҳолда қолдиқ ҳадда қатнашадиган ξ нуқта ҳам x га яқин жойлашган бўлади ва демак, $f^{(n+1)}$ (ξ) ҳам айтарли даражада ўзгармайди. Натижада, қолдиқ ҳадга кескин таъсир этадиган миқдор фақатгина

$$|\omega_{n+1}(x)| = \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|$$

бўлиб қолади. Бу ифода x билан интерполяция тугунлари орасидаги масофаларнинг кўпайтмасидан иборатдир. Шунинг учун ҳам, $f(x)$ ни интерполяциялашда x га нисбатан энг яқин n та нуқтани олсак, $|\omega_{n+1}(x)|$ минимал қийматга эга бўлади. Кўриниб турибдики, $n=2k$ бўлса, x нинг чап ва ўнг томонларидан k тадан нуқта олиш керак. Агар $n=2k+1$ бўлса, у вақтда x га энг яқин бўлган тугунни олиб, сўнгра чап ва ўнг томонлардан k тадан нуқталар олиш керак.

Ҳозир интерполяцион формулаларни мана шу ғояга асосланган ҳолда тузиш билан шуғулланамиз. Бундай интерполяцион кўпҳадларнинг чизиқли комбинацияларини олиб, айрим ҳолларда аниқликни туширмасдан кўпҳаднинг даражасини пасайтириш мумкин. Биз дастлаб шу методга асосланган Гаусс интерполяцион формулаларини чиқарамиз. Агар функция $x \in \left(x_0,\ x_0+\frac{h}{2}\right)$ нуқтада интерполяцияланса, у ҳолда интерполяция тугунларини $x_0,\ x_0+h,$ $x_0-h,\ \ldots,\ x_0+kh,\ x_0-kh$ тартибда олиш маъқулдир. Чунки ихтиёрий n учун шу тугунларнинг аввалги n тасини олсак, улар x га энг яқин турган нуқталардан иборат бўлиб, шу нуқталар бўйича тузилган интерполяцион кўпҳаднинг хатоси, ихтиёрий бошқа тартибда олинган нуқталар бўйича тузилганидан кичик бўлади.

Гausснинг биринчи интерполяцион формуласини тузишда $2n+1$ та

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0-h,\ \ldots,\ x_0+nh,\ x_0-nh \tag{10.1}$$

нуқталар учун Ньютоннинг тенг бўлмаган оралиқлар учун интерполяцион формуласини ёзамиз:

$$\begin{aligned}L_{2n}(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)\ (x-x_0)+f(x_0,x_1,x_{-1})\ (x-x_0)\ (x-x_1)+\\ +f(x_0,x_1,x_{-1},x_2)\ (x-x_0)\ (x-x_1)\ (x-x_{-1})+\\ +f(x_0,x_1,x_{-1},x_2,x_{-2})\ (x-x_0)\ (x-x_1)\ (x-x_{-1})\ (x-x_2)+\ \ldots+\\ +f(x_0,x_1,x_{-1},\ \ldots\ x_n,x_{-n})(x-x_0)(x-x_1)\ \ldots\ (x-x_{-(n-1)})\ (x-x_n).\end{aligned} \tag{10.2}$$

Бунда $x=x_0+th$ деб, бўлинган айирмаларнинг чекли айирмалар орқали ифодасидан фойдалансак, у ҳолда

$$\begin{aligned}G_{2n}(x_0+th)=L_{2n}(x_0+th)=\\ =f_0+f_{1/2}t+f_0^2\frac{t(t-1)}{2}+f_{1/2}^3\ \frac{t(t^2-1)}{3!}+\ \ldots+\\ +f_{1/2}^{2n-1}\frac{t\ (t^2-1)\ \ldots\ [t^2-(n-1)^2\ ]}{(2n-1)!}+\\ +f_0^{2n}\frac{t(t^2-1)\ \ldots\ [t^2-(n-1)^2]\ (t+n)}{(2n)!}\end{aligned} \tag{10.3}$$

ҳосил бўлади. Бу *Гауссинг биринчи интерполяцион формуласи* ёки *Гаусснинг олға интерполяцион формуласи* дейилади. Бу формула (10.1) нуқталар учун тузилган Лагранж формууласининг ўзи бўлиб фақат бошқача тартибда ёзилганидир. Шунинг учун ҳам бу формуланинг қолдиқ ҳадини бевосита ёза оламиз:

$$R_{2n}=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)\,h^{2n+1}}{(2n+1)!}\;t(t^2-1)\,\ldots\,(t^2-n^2). \qquad (10.4)$$

(10.3) формулада қатнашадиган айирмалар 27-жадвалда стрелкаларнинг йўналиши бўйлаб пастки „синиқ сатрни“ ташкил этади. Агар биз (10.1) нуқталарни бошқача тартибда, яъни x_0, x_0-h, x_0+h, . , . , x_0-nh, x_0+nh каби олсак, у вақтда $x\in[x_0-\frac{h}{2}$, $x_0)$ нуқтада интерполяциялаш учун яхши натижа берадиган *Гауссниңг иккинчи интерполяцион формуласи* ёки *орқага интерполяциялаш формуласи*

$$G_{2n}(x_0+th)=L_{2n}(x_0^{'}+th)=f_0+f^1_{-\frac{1}{2}}\,t+f^1_0\frac{t(t+1)}{2!}+$$

$$+f^3_{-\frac{1}{2}}\,\frac{t(t^2-1)}{3!}+\ldots+f^{2n-1}_{-\frac{1}{2}}\,\frac{t(t^2-1)\,(t^2-2^2)\,\ldots\,[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}+$$

$$+f^{2n}_0\,\frac{t(t^2-1)\,(t^2-2^2)\,\ldots\,[t^2-(n-1)^2]\,(t+n)}{(2n)!} \qquad (10.5)$$

га эга бўламиз.

Бу формулада қатнашадиган чекли айирмалар 27-жадвалда устки „синиқ сатр“ни ташкил этади. Унинг қолдиқ ҳади эса

$$R_{2n}=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}\,h^{2n+1}t(t^2-1)\,(t^2-2^2)\,\ldots\,(t^2-n^2) \qquad (10.6)$$

га тенг. Гаусснинг ҳар иккала формуласини қўшиб ярмини олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$L_{2n}(x_0+th)=f_0+\mu f^1_0 t+f^2_0\,\frac{t^2}{2}+\ldots+$$

$$+\mu f^{2n-1}_0\,\frac{t(t^2-1)\,(t^2-2^2)\,\ldots\,[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}+$$

$$+f^{2n}_0\,\frac{t^2(t^2-1)\,\ldots\,[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\,, \qquad (10.7)$$

чунки

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{t(t^2-1)\,(t^2-2^2)\,\ldots\,[t^2-(n-1)^2]\,(t-n)}{(2n)!}+\right.$$

$$\left.+\frac{t(t^2-1)\,(t^2-2^2)\,\ldots\,[t^2-(n-1)^2]\,(t+n)}{(2n)!}\right\}=$$

$$=\frac{t^2(t^2-1)\,\ldots\,[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}$$

ва

$$\frac{1}{2}\left[\,f^{2n-1}_{{}^1\!/_2}+f^{2n-1}_{-{}^1\!/_2}\right]=\mu f^{2n-1}_0\,.$$

27- жадвал

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5	f^6
⋮							
x_{-4}	f_{-4}						
		$f^1_{-7/2}$					
x_{-3}	f_{-3}		f^2_{-3}				
		$f^1_{-5/2}$		$f^3_{-5/2}$			
x_{-2}	f_{-2}		f^2_{-2}		f^4_{-2}		
		$f^1_{-3/2}$		$f^3_{-3/2}$		$f^5_{-3/2}$	
x_{-1}	f_{-1}		f^2_{-1}		f^4_{-1}		f^6_{-1}
	↗	$f^1_{-1/2}$ ↘	↗	$f^3_{-1/2}$ ↘	↗	$f^5_{-1/2}$ ↘	
x_0	f_0		f^2_0		f^4_0		f^6_0
	↘	$f^1_{1/2}$ ↗	↘	$f^3_{1/2}$ ↗	↘	$f^5_{1/2}$ ↗	
x_1	f_1		f^2_1		f^4_1		f^6_1
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$		$f^5_{3/2}$	
x_2	f_2		f^2_2		f^4_2		
		$f^1_{5/2}$		$f^3_{5/2}$			
x_3	f_3		f^2_3				
		$f^1_{7/2}$					
x_4	f_4						
⋮							

Ҳосил қилинган (10.7) формула *Стирлинг интерполяцион формуласи* дейилади. Бу формулада 28- жадвалда кўрсатилганидек 0 индексли жуфт тартибли чекли айирмалар ва $^1/_2$ ҳамда $-^1/_2$ индексли тоқ тартибли чекли айирмаларнинг ўрта арифметиклари қатнашади.

28- жадвал

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_{-2}	f_{-2}				
		$f^1_{-3/2}$			
x_{-1}	f_{-1}		f^2_{-1}		
x_0	$\underline{f_0}$	$\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} f^1_{-1/2} \\ f^1_{1/2} \end{matrix}\right.$	$\underline{f^2_0}$	$\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} f^3_{-1/2} \\ f^3_{1/2} \end{matrix}\right.$	$\underline{f^4_0}$
x_1	f_1		f^2_1		
		$f_{3/2}$			
x_2	f_2				

Кўриниб турибдики, Стирлинг формуласининг қолдиқ ҳади

$$R_{2n}(x) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots(t^2-n^2) \qquad (10.8)$$

га тенг. Гausснинг иккинчи интерполяцион формуласини x_1 нуқта учун қўлланса, қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$L_{2n}(x_1+uh) = f_1 + f^1_{1/2}u + f^2_1 \frac{u(u+1)}{2} + f^3_{1/2}\frac{u(u^2-1)}{3!} + \ldots +$$
$$+ f^{2n-1}_{1/2}\frac{u(u^2-1)\ldots[u^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} +$$
$$+ f^{2n}_1 \frac{u(u^2-1)\ldots[u^2-(n-1)^2](u+n)}{(2n)!}. \qquad (10.9)$$

Бу формулада $u = \frac{x-x_1}{h}$ белгилаш киритсак ва буни $t = \frac{x-x_0}{h}$ орқали ифодаласак, $u = t-1$ бўлиб, (10.9) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$L_{2n}(x_0+th) = f_1 + f^1_{1/2}(t-1) + f^2_1 \cdot \frac{t(t-1)}{2!} + f^3_{1/2}\frac{t(t-1)(t-2)}{3!} +$$
$$+ \ldots + f^{2n-1}_{1/2}\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-2)^2](t-n+1)(t-n)}{(2n-1)!} +$$
$$+ f^{2n}_1 \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1^2](t-n)}{(2n)!}. \qquad (10.10)$$

Энди, бу формулани Гausснинг биринчи интерполяцион формуласи (10.3) билан қўшиб, ярмини олсак ҳамда қуйидаги

$$\frac{1}{2}(f^{2n}_0 + f^{2n}_1) = \mu f^{2n}_{1/2}$$

ва

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{t(t^2-1)\ldots(t^2-n^2)}{(2n+1)!} + \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)(t-n-1)}{(2n+1)!}\right\} =$$
$$= \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)(t-1/2)}{(2n+1)!}$$

муносабатлардан фойдалансак, у ҳолда *Бессел формуласи* ҳосил бўлади:

$$B_{2n}(x_0+th) = \mu f_{1/2} + f^1_{1/2}\left(t-\frac{1}{2}\right) + \mu f^2_{1/2}\frac{t(t-1)}{2!} +$$
$$+ \ldots + f^{2n-1}_{1/2}\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-2)^2](t-n+1)}{(2n-1)!} \cdot \left(t-\frac{1}{2}\right) +$$
$$+ \mu f^{2n}_{1/2}\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}. \qquad (10.11)$$

Бу формула, умуман айтганда, интерполяцион формула эмас, чунки у мос равишда

$$x_{-n}, \ldots, x_n \text{ ва } x_{-(n-1)}, \ldots, x_{n+1}$$

тугунларга эга бўлган иккита интерполяцион кўпҳадларнинг ўрта арифметигидир. Яъни у фақат $2n$ та $x_{-(n-1)}, \dots, x_n$ тугунларда $f(x)$ билан устма-уст тушади, лекин бу формулада функциянинг x_{-n} ва x_{n+1} нуқталардаги қийматлари қатнашган. (10.11) кўпҳад интерполяцион бўлиши учун, яъни унинг x_{-n} ва x_{n+1} нуқталарда ҳам $f(x)$ билан устма-уст тушиши учун, унга яна битта ҳад қўшиш керак:

$$B_{2n+1}(x_0+th)=L_{2n+1}(x_0+th)=$$
$$=\mu f_{1/2}+f^1_{1/2}\left(t-\frac{1}{2}\right)+\mu f^2_{1/2}\frac{t(t-1)}{2}+\dots+$$
$$+\mu f^{2n}_{1/2}\frac{t(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2]\,(t-n)}{(2n)!}+$$
$$+f^{2n+1}_{1/2}\frac{t(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2]\,(t-n)\,(t-1/2)}{(2n+1)!}\,. \quad (10.12)$$

Бу формула $x_{-n}, \dots, x_n, x_{n+1}$ нуқталар бўйича тузилган Лагранж интерполяцион кўпҳади билан устма-уст тушганлиги учун унинг қолдиқ ҳади

$$R_{2n+1}(x)=\frac{h^{2n+2}f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}t(t^2-1)\dots(t^2-n^2)\,[t-(n+1)]$$

бўлади. Демак, (10.11) формуланинг қолдиқ ҳади эса

$$R_{2n+2}(x)=f^{2n+1}_{1/2}\frac{t(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2]\,(t-n)\,(t-1/2)}{(2n+1)!}+$$
$$+\frac{h^{2n+2}f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}t(t^2-1)\dots(t^2-n^2)\,[t-(n+1)] \quad (10.13)$$

га тенг. Бессел формуласини оралиқ ўртасида, яъни $t=1/2$ да қўллаш қулайдир. Бу ҳолда барча тоқ тартибли айирмаларга эга бўлган ҳадлар нолга айланади. Бессел формуласида қуйидаги айирмалар қатнашади:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_{-2}	f_{-2}				
		$f^1_{-3/2}$			
x_{-1}	$\frac{1}{2}\begin{cases} f_{-1} \\ f_0 \end{cases}$		f^2_{-1}		
		$f^1_{-1/2}$		$f^3_{-1/2}$	
x_0			$\frac{1}{2}\begin{cases} f^2_0 \\ f^2_1 \end{cases}$		
		$\underline{f^1_{1/2}}$		$\underline{f^3_{1/2}}$	
x_1	f_1				$\frac{1}{2}\begin{cases} f^4_0 \\ f^4_1 \end{cases}$
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$	
x_2	f_2		f^2_2		

Ниҳоят, кенг қўлланиладиган формулаларнинг яна бирини тузамиз. Бунинг учун

$$f^{2k+1}_{1/2}=f^{2k}_1-f^{2k}_0$$

муносабат ёрдамида, Гаусснинг биринчи интерполяцион формуласи (10.3) дан тоқ тартибли айирмаларни йўқотамиз. У ҳолда f_1^{2k} айирма олдидаги коэффициент

$$\frac{t(t^2-1)\ \ldots\ (t^2-k^2)}{(2k+1)!}$$

га тенг бўлиб, f_0^{2k} айирманинг коэффициенти эса қуйидагига тенг:

$$\frac{t(t^2-1)\ \ldots\ [t^2-(k-1)^2]\ (t-k)}{(2k)!}-\frac{t(t^2-1)\ \ldots\ [t^2-(k-1)^2]\,(t^2-k^2)}{(2k+1)!}=$$

$$=\frac{t(t^2-1)\ \ldots\ [t^2-(k-1)^2]\ (t-k)\ (k+1-t)}{(2k+1)!}\ .$$

Охирги ифодада $t=1-u$ алмаштириш бажарамиз:

$$\frac{(1-u)(1-u-1)(1-u+1)\ \ldots\ (1-u-k+1)(1-u+k-1)(1-u-k)(k+1-1+u)}{(2k+1)!}=$$

$$=\frac{u(u^2-1)\ \ldots\ (u^2-k^2)}{(2k+1)!}\ .$$

Натижада, қуйидаги *Эверетт интерполяцион формуласи* ҳосил бўлади:

$$E_{2n+1}\ (x_0+th)=f_0t+f_1^2\frac{t(t^2-1)}{3!}+\ldots+f_1^{2n}\frac{t(t^2-1)\ \ldots\ (t^2-n^2)}{(2n+1)!}+$$

$$+f_0u+f_0^2\frac{u(u^2-1)}{3!}+\ldots+f_0^{2n}\frac{u(u^2-1^2)\ \ldots\ (u^2-n^2)}{(2n+1)!}\ .$$

Бу формуланинг қолдиқ ҳади $x_{-n}, \ldots , x_{n+1}$ тугунлар ёрдамида тузилган Гаусс формуласининг қолдиқ ҳади билан устма-уст тушади:

$$\frac{h^{2n+2}\,f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\,t(t^2-1)\ \ldots\ (t^2-n^2)\ [t-(n+1)].$$

Эверетт формуласи одатда жадвални зичлаштиришда қўлланилади, яъни x_0+kh тугунларда функция қийматларининг жадвали берилган бўлса, x_0+kh' тугунларда функция қийматлари жадвалини тузишда фойдаланилади, бу ерда $h'=\frac{h}{N}$ (N — бутун сон).

11- §. ТЕНГ ҚАДАМЛИ ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАРНИ ҚЎЛЛАШ УЧУН ТАВСИЯЛАР

Функциянинг жадвалдаги қийматлари одатда тақрибий бўлиб, уларнинг лимит абсолют хатолари охирги хона бирлигининг ярмига, биринчи тартибли айирманики охирги хонанинг бир бирлигига, иккинчи тартиблисиники охирги хонанинг икки бирлигига, учинчи тартиблисиники эса охирги хонанинг тўрт бирлигига тенг бўлиши мумкин ва ҳоказо. Силлиқ функцияларда одатда тартиби ортган сари айирма камая бориб, бирор тартибга етганда деярли ўзгармас ва ундан кейингилари кичик миқдор бўлиши керак. Лекин, функция қийматидаги хато ҳисобига, айирма нолга айланмасдан тартибсиз ишора билан ортиб кетиши ҳам мумкин. Бундай натижалар нотўғри бўлиб, улардан фойдаланиш мумкин эмас. Шунинг учун ҳам мунтазам ўзгарадиган айирмаларнинг энг юқори тартибини аниқлаш керак. Сўнгра эса интерполяциялаш учун интерполяцион формулани қуйидагиларга асосланиб танлаш керак. Агар функциянинг қиймати ҳисобланиши керак бўлган x нинг қиймати жадвал бошида ёки охирида бўлса, у ҳолда мос равишда Ньютоннинг биринчи ёки иккинчи формуласини қўллаш керак. Агар бу қиймат жадвалнинг ўртасида, масалан, $[x_i, x_{i+1}]$ оралиқда бўлса ҳамда x_i ва x_{i+1} тугунларга мос келадиган сатрда барча мунтазам ўзгарадиган айирмалар мавжуд бўлса, у ҳолда дастлабки тугун сифатида x_i ёки x_{i+1} ни қабул қилиб Стирлинг ёки Бессел формуласини қўллаш керак. Шуни таъкидлаш керакки, агар $|t| \leqslant \leqslant 0,25$ бўлса Стирлинг формуласини, $0 \leqslant 25 < |t| \leqslant 0,75$ бўлганда эса Бессел формуласини қўллаш керак. Бу ерда x нинг x_i ёки x_{i+1} тугунларнинг қайси бирига яқин туришига қараб, $t = \frac{x - x_i}{h}$ ёки $t = \frac{x - x_{i+1}}{h}$ деб олиш керак.

Юқорида айтганимиздек, Эверетт формуласи жадвални зичлаштириш учун фойдаланилади. Биз 9- § да Ньютон формулаларининг қўлланилишига доир мисоллар кўрган эдик.

Шунинг учун ҳам бу ерда Стирлинг ва Бессел формулаларини қўлланишга мисол келтириш билан кифояланамиз.

Мисол. 29- жадвалда

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

Френел интегралининг қийматлари $h = 0,1$ қадам билан келтирилган. $S(0,612)$ ва $S(0,65)$ топилсин.

29- жадвал

x	$S(x)$	$S^1(x)$	$S^2(x)$	$S^3(x)$	$S^4(x)$	$S^5(x)$	$S^6(x)$
0,3	0,0434						
		231					
0,4	0,0665		28				
		259		—6			
0,5	0,0924		22		2		
		281		—4		—1	
0,6	0,1205		18		1		3
		299		—3		2	
0,7	0,1504		15		—1		0
		314		—4		2	
0,8	0,1818		11		1		
		325		—3			
0,9	0,2143		8				
		333					
1,0	0,2476						

Ечиш. Жадвалда айирмаларнинг фақат маъноли рақамлари ёзилган. Жадвалдан кўриниб турибдики, 4- тартибли айирмаларни ноль деб олиш мумкин, чунки уларнинг энг каттаси $2\cdot 10^{-4}$ га тенг бўлиб, хатоларнинг энг каттаси эса $8\cdot 10^{-4}$ га етиши мумкин эди. Шунинг учун ҳам айирмаларнинг тўртинчидан юқори тартиблиларидан фойдаланиш маънога эга эмас. $S(0{,}612)$ ни ҳисоблаш учун $x_0=0{,}6$ ва $t=0{,}12$ деб олиб, Стирлинг формуласини қўллаймиз:

$$S(0{,}612) \simeq 0{,}1205 + 0{,}5(0{,}0281 + 0{,}0299)\cdot 0{,}12 + 0{,}0018\times$$
$$\times\, 0{,}5\cdot 0{,}0144 + 0{,}5\cdot(-0{,}0004 - 0{,}0003)\cdot\frac{1}{6}\cdot 0{,}12\times$$
$$\times\,(0{,}0144 - 1) + \frac{1}{24}\cdot 0{,}0001\cdot 0{,}0144\cdot(0{,}0144 - 1) = 0{,}12400.$$

$S\,(0{,}65)$ ни ҳисоблаш учун $x=0{,}6$ ва $t=0{,}5$ деб олиб, Бессел формуласини қўллаймиз:

$$S(0{,}65) \simeq 0{,}5(0{,}1205 + 0{,}1504) + 0{,}5(0{,}0018 + 0{,}0015)\times$$
$$\times\, 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot(0{,}5 - 1) = 0{,}13524.$$

12- §. ИНТЕРПОЛЯЦИОН ЖАРАЁННИНГ ЯҚИНЛАШИШИ

Интерполяция амалда қўлланилганда ҳар доим ҳам қолдиқ ҳадни баҳолаш мумкин бўлавермайди. Шунинг учун ҳам етарлича кўп тугунлар олинганда интерполяцион кўпҳаднинг интерполяцияланувчи функцияга етарлича яхши яқинлашишига ишонч ҳосил қилиш амалий интерполяциялашда катта аҳамиятга эга. Шу сабабдан ҳам интерполяцион жараённинг яқинлашиши масаласи туғилади.

Фараз қилайлик, бизга элементлари $[a,\ b]$ да ётувчи чексиз учбурчак матрица

$$\begin{bmatrix} x_0^{(0)} & & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{bmatrix} \qquad (12.1)$$

берилган бўлсин. $[a,\ b]$ оралиқда аниқланган бирор $f(x)$ функция учун Лагранж интерполяцион кўпҳадининг кетма-кетлиги $\{L_n(x)\}$ берилган бўлиб, $L_n(x)$ ни қуришда (12.1) матрицанинг n- сатридаги барча элементлар қатнашсин. Агар *ихтиёрий* $x\in[a,\ b]$ *учун*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x)$$

тенглик бажарилса, интерполяцион жараён яқинлашади дейилади. Агар (12.2) тенглик x га *нисбатан текис бажарилса, жараён текис яқинлашади* дейилади.

Шундай савол туғилади: $[a,\ b]$ оралиқда узлуксиз бўлган $f(x)$ функция учун интерполяцион жараён яқинлашадими? Бу саволга умуман ижобий жавоб бериб бўлмайди. Фабер томонидан қуйидаги теорема исбот қилинган: ҳар қандай (12.1) кўринишдаги тугунлар матрицаси учун шундай узлуксиз $f(x)$ **функция топиладики**, унинг учун бу тугунлар бўйича қурилган Лагранж интерполяцион кўпҳади $[a, b]$ оралиқда бу функцияга текис яқинлашмайди. Бундан ҳам кучлироқ натижани $[-1, 1]$ оралиғида тенг узоқликда жойлашган тугунлар $(x_0^{(n)} = -1, \ x_n^{(n)} = 1)$ бўйича $f(x) = |x|$ функция учун қурилган Лагранж интерполяцион кўпҳадлари $L_n(x)$ -1, 0, 1 нуқталардан ташқари бирорта нуқтада ҳам $f(x)$ га яқинлашмаслигини С. Н. Бернштейн кўрсатган эди.

Интерполяцион жараённинг яқинлашиши ҳақидаги жуда кўп тадқиқотларда ҳозирги замон математикасининг энг нозик методлари қўлланилади. Бу йўналишда олинган натижаларни келтириш имконига эга эмасмиз. Ҳозирча $f(x)$ бутун функция бўлган ҳол учун бир теоремани келтириш билан чекланамиз.

Таъриф. *Агар $f(x)$ функцияни x нинг барча чекли қийматларида*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

яқинлашувчи даражали қатор шаклида ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда $f(x)$ бутун функция дейилади.

Теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ бутун функция бўлсин. У ҳолда элементлари $[a, b]$ оралиқда ётувчи (12.1) кўринишдаги ихтиёрий учбурчак матрица бўйича $f(x)$ учун тузилган Лагранж интерполяцион кўпҳадлари $L_n(x)$ $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ функцияга текис яқинлашади.

Исбот. Бутун функция ихтиёрий тартибли ҳосилага эга бўлгани туфайли, интерполяцион формуланинг қолдиқ ҳади учун қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$|R_k(x)| = |f(x) - L_n(x)| < \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|.$$

Бу ерда

$$M_{n+1} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|, \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i^{(n)}).$$

Кўриниб турибдики,

$$|\omega_{n+1}(x)| < (b-a)^{n+1},$$

демак,

$$|R_n(x) < \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Агар бу тенгсизлик ўнг томонининг нолга интилишини кўрсатсак, теорема исбот бўлади. Биз $f(x)$ нинг $(n+1)$ - тартибли ҳосиласини топиб, баҳолаймиз:

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1) \dots (k-n)\, a_k (x-x_0)^{n-k-1},$$

$$|f^{(n+1)}(x) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)\,\dots\,(k-n)|a_k||x-x_0|^{n-k-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(n+k)^{n+1}|a_{n+k}||x-x_0|^{k-1}.$$

Маълумки, $x > 0$ бўлганда

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < e^x$$

бўлади, бундан

$$\left(\frac{n+k}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{k-1}{n+1}\right)^{n+1} < e^{k-1}.$$

Демак,

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|a_{n+k}|(e|x-x_0|)^{k-1}.$$

Энди L ихтиёрий мусбат, лекин муайян сон бўлсин. Охирги тенгсизликнинг ҳар иккала томонини L^{n+1} га кўпайтирамиз:

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}}L^{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|a_{n+k}|L^{n+1}(e|x-x_0|)^{k-1}.$$

Агар r орқали L ва $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}(e|x-x_0|)$ сонларнинг энг каттасини белгиласак, у ҳолда

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}}L^{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|r^k. \qquad (12.2)$$

Охирги тенгсизлик барча $x \in [a, b]$ учун ўринлидир. Демак,

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}L^{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|r^k. \qquad (12.3)$$

$f(x)$ бутун бўлганлиги учун, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|r^k$ қатор яқинлашади ва унинг қолдиқ ҳади $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|a_k|r^k$ билан биргаликда

$$M_{n+1}L^{n+1}(n+1)^{-n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad (12.4)$$

e^x нинг ёйилмаси

$$e^{n+1} = 1+(n+1)+\frac{(n+1)^2}{2!}+\dots+\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}+\dots$$

дан

$$e^{n+1} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

келиб чиқади. Демак,

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} <$$

$$< \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}[e(b-a)]^{n+1}.$$

Энди $L = e(b-a)$ деб олиб, (12.2) — (12.4) дан керакли лимит муносабатга эга бўламиз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = 0.$$

Шу билан теорема исбот бўлди.

Эслатма. Теорема шартида $f(x)$ нинг бутун функция бўлиши жуда муҳимдир. Ҳақиқатан ҳам, $[-1, 1]$ оралиқда

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{агар } x \geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ 0 & , \text{агар } x < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни олайлик, Бу функция сонлар ўқи бўйлаб барча тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга, лекин бутун эмас. Агар интерполяция тугунларини $[-1,0]$ оралиқда олсак, у ҳолда $L_n(x) \equiv 0$ бўлиб, у x нинг ҳеч бир мусбат қиймати учун $f(x)$ га интилмайди.

13- §. ҚАРРАЛИ ТУГУНЛАР БЎЙИЧА ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ. ЭРМИТ ФОРМУЛАСИ

Бу ерда интерполяцион масаланинг Эрмит томонидан кўрсатилган қуйидаги умумлашган ҳолини кўриб чиқамиз.

Фараз қилайлик, $[a, b]$ оралиқда интерполяциянинг $(m+1)$ та ҳар хил тугунлари берилган бўлсин. Шу оралиқда аниқланган функцияни олайлик ва $x = x_i$ $(i = \overline{0, m})$ нуқталарда $f(x)$ нинг ҳамда унинг кетма-кет ҳосилаларининг қийматлари $f(x_i)$, $f'(x_i)$, $\ldots$, $f^{(\alpha_i-1)}(x_i)$ $(i = \overline{0, m})$ берилган бўлсин. Бу ерда $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ мос равишдаги тугунларнинг *карра кўрсаткичлари* дейилади, $f(x)$ функция ҳақидаги барча дастлабки маълумотларнинг сонини $n+1$ орқали белгилаймиз: $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n+1$. Энди даражаси $(n+1)$ дан ортмайдиган

$$H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k) \quad (k = \overline{0, m}; \quad i = \overline{0, \alpha_k - 1}) \qquad (13.1)$$

шартларни қаноатлантирувчи

$$H_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (13.2)$$

кўпҳадни қурайлик. Бу шартлар a_i $(i = \overline{0, n})$ номаълумларни топиш учун $(n+1)$ та чизиқли тенгламалар системасини беради. Бу система ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини кўрсатиш учун

$$H_n^{(i)}(x_k) = 0 \quad (k = \overline{0, m}; \ i = \overline{0, \alpha_k - 1}) \qquad (13.3)$$

бир жинсли системанинг фақат тривал ечимга эга эканлигини кўрсатиш кифоядир. (13.3) система шуни кўрсатадики $x_0, x_1, \ldots,$

x_m тугунлар $H_n(x)$ кўпҳад учун мос равишда $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ лардан кичик бўлмаган тартибли каррали илдизлардир. Демак, $H_n(x)$ кўпҳад илдизларининг карра кўрсаткичлари йиғиндиси $\alpha_0 + \alpha_1 + + \ldots + \alpha_m = n + 1$ га тенг ёки ундан каттадир. Даражаси n дан ортмайдиган ва илдизлар карра кўрсатгичлари йиғиндиси n дан катта бўлган $H_n(x)$ кўпҳад фақат айнан нолга тенг бўлиши керак. Бундан эса унинг барча a_i коэффициентларининг нолга тенглиги ва бир жинсли системанинг фақат тривиал ечимга эгалиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, (13.3) даги $f^{(i)}(x_k)$ қийматларнинг қандай бўлишидан қатъи назар, қўйилган масала ягона ечимга эга. $H_n(x)$ кўпҳаднинг x_k тугунлар ва $f^{(i)}(x_k)$ қийматлар орқали ошкор кўринишини детерминантлар ёрдамида ифодалаш мумкин. Лекин бундай ифоданинг тузилиши жуда мураккабдир. Шунинг учун бу ерда ҳам Лагранж интерполяцион кўпҳадини тузгандек, бошқача йўл тутамиз. Бунинг учун фундаментал кўпҳадлар деб аталувчи n-даражали $Q_{ij}(x)$ $(i = \overline{0, m};\ j = \overline{0, \alpha_i - 1})$ кўпҳадларни, яъни

$$Q_{ij}(x_k) = Q'_{ij}(x_k) = \ldots = Q_{ij}^{(\alpha_k - 1)}(x_k) = 0, \quad k \neq i, \tag{13.4}$$

$$\left\{\begin{aligned} Q_{ij}(x_i) = Q'_{ij}(x_i) = \ldots = Q_{ij}^{(j-1)}(x_i) = Q_{ij}^{(j+1)}(x_i) = \\ = Q_{ij}^{(\alpha_i - 1)}(x_i) = 0, \\ Q_{ij}^{(j)}(x_j) = 1 \quad (i = \overline{0, m};\ j = \overline{0, \alpha_i - 1}) \end{aligned}\right. \tag{13.5}$$

шартларни қаноатлантирувчи кўпҳадларни тузамиз. У ҳолда изланаётган кўпҳадни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} f^{(j)}(x_i)\, Q_{ij}(x). \tag{13.6}$$

(13.4) тенгликлардан кўрамизки, $Q_{ij}(x)$ кўпҳад $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$ нуқталарда мос равишда $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ каррали нолларга эга бўлиб, (13.5) тенгликларга асосан x_i нуқтада j каррали нолга эга.

Демак,

$$\begin{aligned} Q_{ij}(x) = (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1} \ldots (x - x_{i-1})^{\alpha_{i-1}}(x - x_i)^j \times \\ \times (x - x_{i+1})^{\alpha_{i+1}} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m} q_{ij}(x). \end{aligned} \tag{13.7}$$

бу ерда $q_{ij}(x)$ $x = x_i$ нуқтада нолга айланмайдиган $n - (\alpha_0 + \ldots + + \alpha_{i-1} + j + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_m) = \alpha_i - j - 1$- даражали кўпҳаддир. Қуйидаги белгилашни киритайлик

$$\Omega(x) = (x - x_0)^{\alpha_0} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m}. \tag{13.8}$$

У ҳолда (13.7) — (13.8) дан ушбу

$$Q_{ij} = \frac{\Omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i - j}}\, q_{ij}(x) \tag{13.9}$$

формулага эга бўламиз. $q_{ij}(x)$ ни аниқлаш учун (13.5) шартларга мурожаат қиламиз. Булардан $Q_{ij}(x)$ нинг x_l нуқта атрофидаги Тейлор ёйилмаси қуйидаги кўринишга эга эканлиги келиб чиқади:

$$Q_{ij}(x)=\frac{1}{j!}(x-x_i)^j+a_{ij}^{(1)}(x-x_l)^{j+1}+\ \dots\ +a_{ij}^{(n-j)}(x-x_l)^n=$$
$$=\frac{(x-x_l)^j}{j!}\left[1+b_{ij}^{(1)}(x-x_i)+\ \dots\ +b_{ij}^{(n-j)}(x-x_i)^{n-j}\right]. \quad (13.10)$$

Бу ва (13.9) дан $q_{ij}(x)$ кўпҳад учун қуйидаги

$$q_{ij}(x)=\frac{(x-x_l)^{\alpha_l}}{j!\,\Omega(x)}+C_{ij}^{(1)}(x-x_i)^{\alpha_l-j}+\ \dots \quad (13.11)$$

ифодага эга бўламиз.

Ушбу $\frac{(x-x_l)^{\alpha_l}}{j!\,\Omega(x)}$ рационал функция x_l нуқта атрофида регуляр бўлганлиги учун $x-x_l$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйилади. Иккинчи томондан $q_{ij}(x)$ даражаси α_l-j-1 га тенг бўлган кўпҳад бўлганлиги учун у $\frac{1}{j!}\,\frac{(x-x_l)^{\alpha_l}}{\Omega(x)}$ функциянинг Тейлор қаторига ёйилмасининг даражаси α_l-j-1 дан ортмайдиган ҳадларининг йиғиндисига тенгдир:

$$q_{ij}(x)=\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{\alpha_l-j-1}\frac{1}{k!}\left[\frac{(x-x_l)^{\alpha_l}}{\Omega(x)}\right]_{x=x_l}^{(k)}(x-x_l)^k. \quad (13.12)$$

Аксинча, $q_{ij}(x)$ нинг шундай танланиши $Q_{ij}(x)$ учун (13.10) ёйилмани ва, демак, (13.4) — (13.5) шартларнинг бажарилишини таъминлайди. (13.12) ни (13.9) га қўйиб,

$$Q_{ij}(x)=\frac{\Omega(x)}{j!\,(x-x_l)^{\alpha_l-j}}\sum_{k=0}^{\alpha_l-j-1}\frac{1}{k!}\left[\frac{(x-x_l)^{\alpha_l}}{\Omega(x)}\right]_{x=x_l}^{(k)}(x-x_l)^k$$

ни ҳосил қиламиз ва ниҳоят, (13.6) дан

$$H_n(x)=\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=0}^{\alpha_l-1}\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{\alpha_l-j-1}\frac{1}{k!}f^{(j)}(x_l)\left[\frac{(x-x_l)^{\alpha_l}}{\Omega(x)}\right]_{x=x_l}^{(k)}\frac{\Omega(x)}{(x-x_l)^{\alpha_l-j-1}} \quad (13.13)$$

Эрмит формуласини ҳосил қиламиз. Бу формуланинг хусусий ҳоли сифатида Лагранж интерполяцион кўпҳади ҳамда кўпҳад учун Тейлор формуласини чиқариш мумкин (бобнинг охиридаги машқларга қаранг.) Ҳозир Эрмит формуласининг бошқа бир хусусий ҳолини кўриб чиқайлик. Барча α_l лар 2 га тенг бўлсин, яъни шундай n-даражали кўпҳадни топиш керакки, у

$$\left.\begin{aligned} H_n(x_l)&=f(x_l)\\ H_n'(x_l)&=f'(x_l)\end{aligned}\right\}\ (i=0,1,\ \dots\ ,m)$$

шартларни қаноатлантирсин. Бу шартларнинг геометрик маъноси қуйидагидан иборат: интерполяцион эгри чизиқ берилган $y=f(x)$

эгри чизиқ билан интерполяция тугунларида умумий уринмаларга эга. Бу ҳолда (13.13) қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$H_n(x)=\sum_{i=0}^{m}\left\{f(x_i)\left[\frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)}\right]_{x=x_i}\frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^2}+\right.$$
$$+f(x_i)\left[\frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)}\right]'_{x=x_i}\frac{\Omega(x)}{x-x_i}+$$
$$\left.+f'(x_i)\left[\frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)}\right]_{x=x_i}\frac{\Omega(x)}{x-x_i}\right\}. \qquad (13.14)$$

Одатдагидек

$$\omega_{m+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ \ldots\ (x-x_m)$$

белгилаш киритсак, у ҳолда

$$\Omega'(x)=\omega^2_{m+1}(x),\quad \frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)}=\left[\frac{(x-x_i)}{\omega_{m+1}(x)}\right]^2$$

га эга бўламиз. Энди (13.14) даги коэффициентларни топамиз:

$$\left[\frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)}\right]_{x=x_i}=\lim_{x\to x_i}\left[\frac{x-x_i}{\omega_{m+1}(x_i)}\right]^2=\frac{1}{\omega'^2(x_i)},$$
$$\left[\frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)}\right]'_{x=x_i}=\lim_{x\to x_i}\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-x_i)}{\omega_{m+1}(x)}\right]^2=$$
$$=\lim_{x\to x_i}2\left[\frac{x-x_i}{\omega_{m+1}(x)}\right]\frac{\omega_{m+1}(x)-(x-x_i)'\ \omega_{m+1}(x)}{\omega^2_{m+1}(x)}=$$
$$=\frac{2}{\omega'_{m+1}(x_i)}\lim_{x\to x_i}\frac{\omega_{m+1}(x)-(x-x_i)\,\omega'_{m+1}(x)}{\omega^2_{m+1}(x)}=-\frac{\omega''_{m+1}(x_i)}{\omega'^{3}_{m+1}(x_i)}.$$

Охирги лимитни топиш учун Лопиталь қоидасини қўлладик. Буларни ҳисобга олганда (13.14) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$H_n(x)=\sum_{i=0}^{m}\frac{\omega^2_{m+1}(x)}{\omega'^2_{m+1}(x_i)(x-x_i)^2}\left[f(x_i)\left(1-\frac{\omega''_{m+1}(x_i)}{\omega'_{m+1}(x_i)}(x-x_i)\right)+\right.$$
$$\left.+f'(x_i)(x-x_i)\right]. \qquad (13.15)$$

Мисол. Қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган бешинчи даражали $H_5(x)$ кўпҳад топилсин:

$$H_5(-1)=-1,\quad H_5(0)=0,\quad H_5(1)=1;$$
$$H'_5(-1)=0,\quad H'_5(0)=1,\quad H'_5(1)=0.$$

Бу ерда

$$\omega_3(x)=(x+1)\,x\,(x-1),\quad \omega'_3(x)=3x^2-1,\quad \omega''_3(x)=6x.$$

(13. 15) формуладан

$$H_5(x)=\frac{x^2(x-1)^2}{4}\left[-1\left(1-\frac{6\cdot(-1)}{2}(x+1)\right]+\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{1}1\cdot x+\right.$$

$$+\frac{x^2(x+1)^2}{4}\left[1\cdot\left(1-\frac{6\cdot 1}{1}(x-1)\right)\right]=\frac{1}{2}(-x^5+x^3+2x).$$

Энди Эрмит формуласининг қолдиқ ҳадини текширамиз.

Теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда $(n+1)$-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда Эрмит интерполяцион формуласининг қолдиқ ҳадини

$$R_n(x)=f(x)-H_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{\Omega(x)}{(n+1)!} \tag{13.16}$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу ерда ξ $[a, b]$ оралиққа тегишли нуқта бўлиб, умуман x нинг функциясидир.

Исбот. x нинг интерполяция тугунларидан фарқли бирор қийматини олиб, $K=\frac{R(x)}{\Omega(x)}$ деб белгилайлик. У ҳолда ушбу

$$\varphi(z)=R_n(z)-K\Omega(z) \tag{13.17}$$

функция x_0 нуқтада α_0 каррали нолга, x_1 нуқтада α_1 каррали ва ҳ. к. x_m нуқтада α_m каррали нолга эга. Бундан ташқари у x нуқтада ҳам нолга айланади. Демак, $\varphi(z)$ функция $[a, b]$ оралиғининг $m+2$ та $x_0, x_1, \ldots, x_m, x$ нуқталарида нолга айланиб, бу ноллар карраликларининг йиғиндиси $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_m+1=n+2$ га тенг. Шунинг учун ҳам Ролль теоремасига кўра $\varphi'(z)$ ҳосила x_0, $x_1, \ldots, x_m, x$ нуқталарни ўз ичига олган интервалда мос равишда $m+1$ та $\alpha_0-1, \alpha_1-1, \ldots, \alpha_m-1$ каррали илдизларга эга, яъни $[a, b]$ оралиқда

$$(\alpha_0-1)+(\alpha_1-1)+\ldots+(\alpha_m-1)+m+1=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+$$
$$+\alpha_m=n+1$$

та нолга эга. Худди шу мулоҳазаларни такрорлаб, иккинчи ҳосила $\varphi''(z)$ $[a, b]$ оралиқда камида n та нолга эга деган хулосага келамиз ва ҳоказо. Ниҳоят, $(n+1)$-тартибли ҳосила $\varphi^{(n+1)}(z)$ $[a, b]$ оралиқда камида битта нуқтада нолга айланади. Демак, $[a, b]$ оралиқда камида шундай битта ξ нуқта топиладики,

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=0 \tag{13.18}$$

бўлади. Лекин

$$\varphi^{(n+1)}(z)=f^{(n+1)}(z)-K(n+1)!, \tag{13.19}$$

чунки $H_n(z)$ — даражаси n дан ортмайдиган кўпҳад, демак, $H_n^{(n+1)}(z)=0$ ва $\Omega(x)$ бош ҳади 1 га тенг бўлган $(n+1)$-даражали кўпҳад, унинг $(n+1)$-тартибли ҳосиласи $(n+1)!$ га тенг. (13.18) — (13.19) дан

$$K=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Демак,

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Omega(x).$$

14- §. ЖАДВАЛ ТУЗИШДА ИНТЕРПОЛЯЦИЯНИ ҚЎЛЛАШ

Ушбу ва кейинги параграфларда интерполяциянинг турли хил масалаларга татбиқларини кўриб чиқамиз. Дастлаб қуйидаги масалани қарайлик: бирор функциянинг жадвали шундай тузилсинки, бу жадвал ёрдамида функцияни n- тартибли интерполяцион кўпҳад билан алмаштирилганда йўл қўйиладиган абсолют хато ε дан ортмасин. Бундай ҳолда *жадвал n- тартибли интерполяцияга ε хато билан йўл қўяди* дейилади. Биз бу ерда тенг қадамли жадвални қараймиз.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда $(n+1)$ та узлуксиз ҳосилага эга бўлиб, берилган жадвал $L_n(x)$ Лагранж интерполяцион кўпҳадига ε хато билан йўл қўйсин. Бунинг учун жадвал қадами h қуйидаги

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|t(t-1)\ldots(t-n)|\leqslant\varepsilon \qquad (14.1)$$

тенгсизликни қаноатлантириши керак, бу ерда

$$M_{n+1}=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_n}|f^{(n+1)}(x)|.$$

Одатда, кенг қўлланиладиган математик жадваллар шундай тузиладики, улар

$$f(x_0+th)=L_1(x_0+th)=f_0+f^1_{1/2}t \qquad (14.2)$$

чизиқли интерполяцияга йўл қўяди. Бу ҳолда (14.1) тенгсизлик қуйидаги

$$\frac{M_2}{2}h^2\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|t(t-1)|\leqslant\varepsilon \qquad (14.3)$$

кўринишни олади. Осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкинки: $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|t(t-1)|=\frac{1}{4}$.

Демак, h қадам

$$M_2\frac{h^2}{8}\leqslant\varepsilon \qquad (14.4)$$

тенгсизликни қаноатлантириши керак.

Мисол учун $[a, b]=[2, 3]$, $\varepsilon=0{,}5\cdot 10^{-5}$, $f(x)=e^x$ бўлсин. Бу ерда $M_2=e^3<20{,}1$ бўлганлиги учун (14.4) дан $h<0{,}001411$ келиб чиқади. Ҳосил бўлган сон 0,001411 яхлит бўлмаганлиги учун бундай қадам билан ишлаш ноқулай. Шунинг учун ҳам унга нисбатан „яхлитроқ“ $h=0{,}001$ қадамни олиш мумкин.

Кўпинча жадвалнинг чизиқли интерполяцияга йўл қўйишлигини талаб қилиш шарти анча оғир шарт ҳисобланади, унинг квадратик интерполяцияга йўл қўйилиши талаб қилинади. Квадратик интерполяциянинг энг соддаси учта энг яқин нуқталар бўйича тузилган Лагранж интерполяцион кўпҳадидир. Агар x_0 тугун x га энг яқин ва $x=x_0+th$ бўлса, у ҳолда

$$f(x_0+th)=L_2(x_0+th)=f_0+f^1_{1/2}t+f^2_1\frac{t(t-1)}{2}.$$

Жадвал $L_2\,(x_0+th)$ га йўл қўйиши учун h қадам

$$\frac{M_3 h^3}{6} \max_{|t| \leqslant 0,5} |t(t^2-1)| < \varepsilon$$

ёки

$$M_3 \frac{h^3}{16} < \varepsilon \tag{14.5}$$

тенгсизликни қаноатлантириши керак. Агар бу ерда ҳам $[a, b] = [2,3]$, $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$, $f(x) = e^x$ деб олсак, у ҳолда $h < 0,01585$ бўлиб, бу ерда $h = 0,01$ деб олиш мумкин, яъни қадам чизиқли интерполяциядагига нисбатан 10 марта катта.

Энди функцияни иккинчи тартибли Бессел интерполяцион кўпҳади билан алмаштирамиз. Агар $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ ва $x \leqslant x_0 + th$ бўлса, у ҳолда x_{-1}, x_0, x_1, x_2 нуқталар бўйича тузилган иккинчи тартибли Бессел кўпҳади

$$B_3(x_0+th) = \mu f_1/_2 + f^1_{1/_2}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \mu f^2_{1/_2} \frac{t(t-1)}{2} \tag{14.6}$$

кўринишга эга.

Бу ифоданинг қолдиқ ҳади (10.13) формулага кўра қуйидагига тенг:

$$R_2(x) = f^3_{1/_2} \frac{t(t-1)(t-{}^1/_2)}{6} + \frac{h^4 f^{\mathrm{IV}}(\xi)}{24} t(t^2-1)(t-2).$$

Маълумки, $f^3_{1/_2} = h^3 f'''(\breve{\xi})$. Шунинг учун ҳам жадвалнинг $B_3(x_0 + th)$ га йўл қўйиши учун h қадам

$$M_3 \frac{h^3}{3} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| t(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right)\right| + M_4 \frac{h^4}{24} \left| t(t^2-1)(t-2) \right| \leqslant \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантириши керак. Қуйидагига эса ишонч ҳосил қилиш қийин эмас:

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| t(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{12\sqrt{3}}, \quad \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t(t^2-1)(t-2)| = \frac{9}{128}.$$

Демак, h қадам

$$\frac{M_3 h^3}{72\sqrt{3}} + \frac{3M_4}{128} h^4 \leqslant \varepsilon \tag{14.7}$$

тенгсизликни қаноатлантириши керак.

Бу ерда h кичик бўлса, биринчи ҳад бош қисм бўлиб, у (14.5) тенгсизликнинг чап томонидан $4,5\sqrt{3} = 7,794 \ldots$ марта кичикдир. Демак, h кичик бўлганда (14.7) ни қаноатлантирадиган h (14.5) ни қаноатлантирадиган h га нисбатан $\sqrt[3]{4,5\sqrt{3}} \approx 1,98$ марта каттадир. Юқоридаги мисолда (14.5) тенгсизлик

$$20\left(\frac{h^3}{72\sqrt{3}} + \frac{3h^4}{128}\right) \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$$

кўринишда бўлиб, унинг ечими $h \leqslant h_0 \leqslant 0,0315 \ldots$ дир. Бу қадамга нисбатан „яхлитроқ“ $h = 0,03$ ни оламиз.

Агар бу қадам ҳам катталик қилса, у ҳолда интерполяцион кўпҳаднинг даражасини орттириб қадамни янада кичикроқ олиш мумкин.

Энди экстраполяция, яъни аргументнинг жадвалдаги қийматларидан ташқаридаги қийматларида функциянинг қийматини топиш масаласига тўхталиб ўтамиз. Экстраполяциялаш, одатда, жадвалнинг бир-икки қадами миқёсида бажарилади. Чунки аргументнинг жадвалдаги қийматидан узоқроқ қийматда экстраполяциялаганда хато ортиб кетади. Жадвал бошида экстраполяциялаш учун Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласи қўлланиб, жадвал охирида эса иккинчиси қўлланади. Интерполяцион кўпҳаднинг тартиби одатда жадвалнинг амалий ўзгармас айирмаларининг тартибига тенг қилиб олинади.

Мисол. 30- жадвалдан фойдаланиб $e^{1,78}$ ва $e^{2,18}$ топилсин.

30- жадвал

x	$f = e^x$	f^1	f^2	f^3	f^5
1,80	6,0496				
		3102			
1,85	6,3598		159		
		3261		8	
1,90	6,6859		167		1
		3428		9	
1,95	7,0287		176		—1
		3604		8	
2,00	7,3851		184		3
		3788		11	
2,05	7,7679		195		—2
		3983		9	
2,10	8,1662		204		
		4187			
2,15	8,5849				

Ечиш. 30- жадвалда учинчи тартибли айирма амалда ўзгармасдир. Шунинг учун ҳам учинчи тартибли интерполяцион формуладан фойдаланамиз. Жадвал бошида ва охирида экстраполяциялаш учун формулалар қуйидагича ёзилади:

$$L_3(x) = 6{,}0496 + 0{,}3102\,t + 0{,}0159\,\frac{t(t-1)}{2} + 0{,}0008\,\frac{t(t-1)(t-2)}{3!},$$

$$L_3(x) = 8{,}5849 + 0{,}4187\,t + 0{,}0204\,\frac{t(t-1)}{2!} + 0{,}0009\,\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}.$$

Биринчи формулага $t = \dfrac{1{,}178 - 1{,}80}{0{,}05} = -0{,}4$ қийматни қўйсак:

$$e^{1,78} \simeq 6{,}0496 + 0{,}3102\,(-0.4) + 0{,}0159\,\frac{0{,}4\cdot 1{,}4}{2} - 0{,}0008\,\frac{0{,}4\cdot 1{,}4\cdot 2{,}4}{3!} = 5{,}92996.$$

Шунга ўхшаш $t = \dfrac{2{,}18 - 2{,}15}{0{,}05} = 0{,}6$ ни иккинчи формулага қўйиб, ушбу

$$e^{2,18} = 8{,}5849 + 0{,}4187\cdot 0{,}6 + 0{,}0204\cdot\frac{0{,}6\cdot 1{,}6}{2} + 0{,}0009\cdot\frac{0{,}6\cdot 1{,}6\cdot 2{,}6}{3!} = 8{,}83629$$

натижани топамиз.

15- §. ТЕСКАРИ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ. СОНЛИ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ

Шу пайтгача $y=f(x)$ функциянинг жадвали берилган ҳолда аргументнинг берилган қиймати $\overline{x}^*$ да функциянинг тақрибий қийматини топиш масаласи билан шуғулландик. Тескари интерполяция масаласи қуйидагича қўйилади: $y=f(x)$ функциянинг жадвали берилган, функциянинг берилган $\overline{y}^*$ қиймати учун аргументнинг шундай $\overline{x}^*$ қийматини топиш керакки, $f(\overline{x}^*)=\overline{y}^*$ бўлсин. Фараз қилайлик, жадвалнинг қаралаётган оралиғида $f(x)$ функция монотон ва, демак, бир қийматли тескари функция $x=\varphi(y)$ $(f(\varphi(y))=y)$ мавжуд бўлсин. Бундай ҳолда тескари интерполяция $\varphi(y)$ функция учун одатдаги интерполяцияга келтирилади. Ушбу $\overline{x}^*=\varphi(\overline{y}^*)$ қийматни топиш учун Лагранж ёки Ньютоннинг тугунлари ҳар хил узоқликда жойлашган ҳолдаги формулаларидан фойдаланиш мумкин. Масалан, Лагранж интерполяцион формуласи қуйидаги

$$L_n(y)=\sum_{i=0}^{n} x_i \prod_{j\neq i} \frac{y-y_i}{y_i-y_j} \tag{15.1}$$

кўринишга эга бўлиб, қолдиқ ҳади

$$\varphi(y)-L_n(y)=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(y-y_i)$$

га тенг бўлади.

Агар $f(x)$ монотон бўлмаса, юқоридаги формула ярамайди. Бундай ҳолда у ёки бу интерполяцион формулани ёзиб, аргументнинг маълум қийматларидан фойдаланиб ва функцияни маълум деб ҳисоблаб, ҳосил бўлган тенглама у ёки бу метод билан аргументга нисбатан ечилади.

1- мисол, Функциянинг қуйидаги қийматлари

x	-1	0	$0,5$	2
y	-4	-2	1	4

жадвали берилган. x аргументнинг шундай қиймати топилсинки, $y=0,5$ бўлсин.

Ечиш. Жадвалдаги қийматларга кўра функция монотон, шунинг учун ҳам $n=3$ деб олиб, (15.1) формуладан фойдаланамиз:

$$L_3(y)=-1\cdot\frac{(y+2)(y-1)(y-4)}{(-4+2)(-4-1)(-4-4)}+0,5\frac{(y+4)(y+2)(y-4)}{(1+4)(1+2)(1-4)}+$$
$$+2\frac{(y+4)(y+2)(y+1)}{(4+4)(4+2)(4-1)}.$$

Бу ифодага $y=0,5$ ни қўйиб, $x=0,4142$ ни ҳосил қиламиз.

2- мисол. Функциянинг қуйидаги қийматлари

x	-2	0	1	2	3
y	-12	-4	-9	-12	23

жадвали берилган. x аргументнинг шундай қиймати топилсинки, $y = 3$ бўлсин.

Ечиш. Жадвалдан кўриниб турибдики, функция монотон эмас. Шунинг учун ҳам иккинчи усулни қўллаймиз:

$$L_n(x) = -12 \cdot \frac{(x-0)(x-1(x-2)(x-3)}{(-2-0)(-2-1)(-2-2)(-2-3)} -$$

$$-4\frac{(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)}{(0+2)(0-1)(0-2)(0-3)} - 9\frac{(x+2)(x-0)(x-2)(x-3)}{(1+2)(1-0)(1-2)(1-3)} -$$

$$-12\frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-3)}{(2+2)(2-0)(2-1)(2-3)} + 23\frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)}{(3+2)(3-0)(3-1)(3-2)} = x^4 - 6x^2 - 4.$$

Демак, $L_4(x) \equiv x^4 - 6x^2 - 4 = 3$ тенгламани ечиб, $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$ ни топамиз.

Энди тескари интерполяциялашда тенг оралиқлар учун чиқарилган формулаларни қўллаш масаласини кўрайлик. Айтайлик, $f(x)$ монотон бўлиб, унинг берилган y^* қиймати $y_0 = f(x_0)$ ва $y_1 = f(x_1)$ лар орасида жойлашган бўлсин. Бу ҳолда Ньютоннинг биринчи интерполяцион

$$f_t \approx L_n(x_0 + th) = f_0 + f^1_{1/2}\, t + t^2_1 \frac{t(t-1)}{2} + \ldots +$$

$$+ f^n_{n/2} \frac{t(t-1)\ldots[t-(n-1)]}{n!}$$

формуласидан фойдаланишимиз мумкин. Бу ерда f_t маълум бўлиб, t ни топиш талаб қилинади. Бунинг учун бу тенгламани ушбу

$$t = \frac{f_t - f_0}{f^1_{1/2}} - \frac{t(t-1)}{2} \cdot \frac{f^2_1}{f^1_{1/2}} - \ldots - \frac{t(t-1)\ldots[t-(n-1)]}{n!} \frac{f^n_{n/2}}{f^1_{1/2}} \quad (15.2)$$

кўринишда ёзамиз ва қуйидагича

$$\varphi(t) = \frac{f_t - f_0}{f^1_{1/2}} - \ldots - \frac{t(t-1)\ldots[t-(n-1]}{n!} \cdot \frac{f^n_{n/2}}{f^1_{1/2}}$$

белгилаш киритиб, (15.2) тенгламани

$$t = \varphi(t)$$

кўринишда ифодалаймиз. Дастлабки яқинлашиш сифатида

$$t_0 = \frac{f_t - f_0}{f^1_{1/2}}$$

ни олиб, итерация методини қўллайлик:

$$t_m = \varphi(t_{m-1}) \quad (m = 1,2, \ldots). \tag{15.3}$$

Агар интерполяциянинг барча тугунлари $[a, b]$ да ётса, ҳамда $f(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$ ва қадам h етарлича кичик бўлса, у ҳолда (15.3) итерацион жараён яқинлашади:

$$t = \lim_{m \to \infty} t_m.$$

Тескари интерполяцияни алгебраик ва трансцендент тенгламаларни ечиш учун ҳам қўллаш мумкин. Буни мисолларда кўрсатамиз.

3- **мисол.** Ушбу $x^3 - 3x + 1 = 0$ тенгламанинг 0 ва 1 орасидаги илдизи топилсин.

Ечиш. $y = x^3 - 3x + 1$ функция қийматлари жадвалини 0,1 қадам билан тузамиз:

31- жадвал

x	f	f^1	f^2	f^3
0	1,000			
		—299		
0,1	0,701		6	
		—293		6
0,2	0,408		12	
		—281		6
0,3	0,127		18	
		—263		6
0,4	—0,136		24	
		—239		6
0,5	—0,375		30	
		—209		6
0,6	—0,584		36	
		—173		6
0,7	—0,757		42	
		—131		6
0,8	—0,888		48	
		—83		6
0,9	—0,971		54	
		—29		
1	—1,000			

Бу жадвалдан кўриниб турибдики, функция 0,3 дан 0,4 га ўтишда ўз ишорасини ўзгартирмоқда. Шунинг учун ҳам $x_0 = 0{,}3$; $y_0 = 0{,}127$; $y = 0$ каби олиб, (15.3) итерацияни қўллаш мумкин:

$$\varphi(t) = -\frac{0,127}{-0,263} - \frac{t(t-1)}{2} \cdot \frac{0,024}{-0,263} - \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \cdot \frac{0,006}{-0,263}.$$

Дастлабки яқинлашиш

$$t_0 = -\frac{0,127}{-0,263} = 0,483$$

бўлиб, қолган яқинлашишлар қуйидагиларга тенг:

$$t_1 = 0,4729364249; \quad t_2 = 0,4729636375;$$
$$t_3 = 0,47296335308; \quad t_4 = 0,4729635333;$$
$$t_5 = 0,4729635333.$$

Бу ерда t_4 ва t_5 нинг қийматлари устма-уст тушади. Шунинг учун ҳам x сифатида $x = x_0 + th = 0,347296355333$ ни олиш мумкин.

4- мисол. Ушбу $e^{2x} - 4e^x - 1 = 0$ тенгламанинг илдизи топилсин.

Ечиш. Бу тенгламани $\operatorname{sh} x - 2 = 0$ шаклида ёзиб олиб, қуйидаги жадвални тузамиз:

32- жадвал

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
1,1	−0,6644				
		1739			
1,2	−0,4905		150		
		1889		20	
1,3	−0,3016		170		1
		2059		21	
1,4	−0,0957		191		1
		2250		22	
1,5	0,1293		213		2
		2463		24	
1,6	0,3756		237		5
		2700		29	
1,7	0,6456		266		
		2966			
1,8	0,9422				

Бу жадвалдан кўрамизки, тўртинчи тартибли айирма амалий ўзгармас бўлиб, илдиз 1,4 ва 1,5 лар орасидадир. Шунинг учун $n = 4$, $x_0 = 1,4$; $y_0 = -0,0957$; $y = 0$ каби олиб, (15,3) итерацияни қўллашимиз мумкин:

$$\varphi(t) = \frac{0,0957}{0,2250} - \frac{t(t-1)}{2} \cdot \frac{0,0213}{0,2250} - \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \times$$
$$\times \frac{0,0024}{0,2250} - \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{24} \cdot \frac{0,0005}{0,2250}.$$

Энди дастлабки яқинлашиш сифати $t_0 = 0,425$ ни олсак, қолган яқинлашишлар қуйидагиларга тенг:

$$t_1 = 0,436128069472; \quad t_2 = 0,4362022205039;$$
$$t_3 = 0,436202662457; \quad t_4 = 0,436202665278;$$
$$t_5 = 0,436202665296; \quad t_6 = 0,436202665296.$$

Бу ерда t_5 ва t_6 устма-уст тушяпти, демак, $x = x_0 + th = 1,4436202665296$.

16- §. СОНЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ

Умумий мулоҳазалар. Кўп амалий масалаларда функция ҳосилаларини айрим нуқталарда тақрибий ҳисоблашга тўғри келади. Бу масала *сонли дифференциаллаш масаласи* дейилади. Функциянинг аналитик кўриниши номаълум бўлиб унинг айрим нуқталардаги қийматлари маълум бўлса, масалан, тажрибадан топилган бўлса, у ҳолда унинг ҳосиласи сонли дифференциаллаш йўли билан топилади. Умуман айтганда, функцияни сонли дифференциаллаш масаласи доимо бир қийматли равишда ечилавермайди. Масалан, $f(x)$ функциянинг $x = x_0$ нуқтадаги ҳосиласини топиш учун $h > 0$ ни олиб,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{16.1}$$

ёки

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{k}, \tag{16.2}$$

ёки

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \tag{16.3}$$

каби олишимиз мумкин. Кўпинча (16.1) *ўнг ҳосила*, (16.2) *чап ҳосила* ва (16.3) *марказий ҳосила* дейилади.

Сонли дифференциаллаш усуллари одатда интерполяцион формулаларга асосланган. Фараз қилайлик, $[a, b]$ оралиқда $(n+1)$-тартибгача ҳосилалари узлуксиз бўлган $f(x)$ функция берилган бўлсин. Уни

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x) \tag{16.4}$$

кўринишда тасвирлаймиз. Бу ерда $L_n(x)$ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ тугунлар бўйича тузилган қандайдир интерполяцион кўпҳад бўлиб, унинг қолдиқ ҳади қуйидагига тенг:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x) \quad (a < \xi < b), \tag{16.5}$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ \ldots\ (x - x_n). \tag{16.6}$$

Одатда (16.4) тенгликни дифференциаллаб, тақрибий равишда

$$f'(x) \approx L'_n(x),\ f''(x) \approx L''_n(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x) \approx L_n^{(n)}(x) \tag{16.7}$$

деб олинади. Бу тақрибий тенгликларнинг абсолют хатолари мос равишда

$$R'_n(x),\ R''_n(x),\ \ldots,\ R_n^{(n)}(x)$$

ифодаларнинг абсолют қийматларига тенг бўлади. Лекин абсолют хатони амалда ҳар доим ҳам аниқлаш енгил иш эмас. Ҳақиқатан ҳам, (16.5) дан

$$\frac{dR_n(x)}{dx} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\frac{d}{dx}\omega_{n+1}(x) + \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{df^{(n+1)}(\xi)}{dx} \tag{16.8}$$

га эга бўламиз. Бу тенгликда ξ нинг x га қандай тарзда боғлиқлигини билмаганлигимиз учун, иккинчи ҳадни баҳолай олмаймиз. Бизга фақат шу нарса маълумки, интерполяция нуқталарида иккинчи ҳад нолга тенг.

Шундай қилиб,

$$f'(x) \approx L_n(x)$$

нинг абсолют хатосини фақат интерполяция тугунидагина аниқлай оламиз:

$$\left.\frac{dR_n(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega'_{n+1}(x_i). \tag{16.9}$$

Юқори тартибли ҳосилалар қолдиқ ҳадларининг кўриниши анча мураккабдир. Масалан, иккинчи тартибли

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} \tag{16.10}$$

ҳосиланинг қолдиқ ҳади қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{d^2 R_n(x)}{dx^2} = \frac{d^2 \omega_{n+1}(x)}{dx^2} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} + 2\frac{d\,\omega_{n+1}(x)}{dx} \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!} + 2\,\omega_{n+1}(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+3)!}. \tag{16.11}$$

Бунинг исботини, масалан, [4] дан қараш мумкин. Бу формулада ξ, ξ_1 ва ξ_2 лар, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталарни ўз ичига оладиган энг кичик оралиқнинг қандайдир нуқталаридир. Агар x нуқта $x_0, x_1, \ldots, x_n$ тугунларнинг бирортаси билан устма-уст тушса, у ҳолда (16.11) нинг ўнг томони соддалашади ва охирги ҳад нолга айланади.

Қуйидаги теоремани келтирамиз.

Теорема. Фараз қилайлик, x нуқта $x_0, x_1, \ldots, x_n$ тугунларни ўз ичига оладиган энг кичик $[\alpha, \beta]$ оралиқнинг ташқарисида ётсин. Агар $f(x)$ функция интерполяция тугунлари ва x нуқтани ўз ичига оладиган энг кичик $[a, b]$ оралиқда $(n+1)$-тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда шундай ξ $(a < \xi < b)$ нуқта мавжудки, ихтиёрий k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ учун

$$R_n^{(k)}(x) = \frac{\omega_{n+1}^{(k)}(x)\, f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{16.12}$$

тенглик ўринлидир.

Исбот. Ёрдамчи

$$\varphi(z) = R_n(z) - K\omega_{n+1}(z) \tag{16.13}$$

функция оламиз, бу ерда K ўзгармас бўлиб, уни кейинроқ аниқлаймиз. $\varphi(z)$ функция $[a, b]$ оралиқда $(n+1)$- тартибли узлуксиз ҳосилага эга ва $x_0, x_1, \ldots, x_n$ тугунларда нолга айланади, шунинг учун ҳам Ролль теоремасига кўра: (α, β) оралиқда $\varphi'(z)$ камида n та ҳар хил илдизларга, $\varphi''(z)$ камида $n-1$ та ва ҳоказо, $\varphi^{(k)}(z)$ эса камида $n+1-k$ та ҳар хил илдизларга эгадир. Энди доимий K ни шундай танлаймизки, $z = x$ да $\varphi^{(k)}(x) = 0$, яъни

$$\varphi^{(k)}(x) = R_n^{(k)}(x) - K\omega_{n+1}^{(k)}(x) = 0 \tag{16.14}$$

бўлсин. K ни шундай танлашга ҳақлимиз, чунки $\omega_{n+1}^{(k)}(z)$ нинг барча $n+1-k$ та илдизлари (α, β) оралиқда, x эса (α, β) дан ташқарида ётади ва демак, $\omega_{n+1}^{(k)}(x) \neq 0$. (16.14) дан K ни топамиз:

$$K = \frac{R_n^{(k)}(x)}{\omega_{n+1}^{(k)}(x)}. \tag{16.15}$$

K нинг бу қийматида $\varphi^{(k)}(z)$ ҳосила $[a, b]$ оралиқда камида $n+2-k$ та турли илдизларга эга. Ролль теоремасига кўра $[a, b]$

ичида $\varphi^{(k+1)}(z)$ камида $n+1-k$ та, $\varphi^{(k+2)}(z)$ камида $n-k$ та ва ҳоказо, $\varphi^{(n+1)}(z)$ эса $[a, b]$ да камида битта ξ илдизга эга: $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$, яъни

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\, K = 0.$$

Бундан эса

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

K нинг бу қийматини (16.15) билан солиштирсак, теореманинг тасдиғи келиб чиқади.

Лагранж интерполяцион кўпҳади ёрдамида сонли дифференциаллаш. Юқоридаги (16.4) тенгликдаги $L_n(x)$ сифатида Лагранж интерполяцион кўпҳадини олайлик:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x)} \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x - x_j), \qquad (16.16)$$

бу ерда

$$\omega'_{n+1}(x_k) = \frac{d}{dx}\omega_{n+1}(x)\Big|_{x=x_k}.$$

(16.16) тенгликдан

$$\frac{d L_n(x)}{dx}\Big|_{x=x_i} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)} \frac{d}{dx} \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} (x - x_j)\Big|_{x=x_i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)} \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \prod_{\substack{l=0\\ l\neq k,\ l\neq j}}^{n} (x_i - x_l). \qquad (16.17)$$

Охирги тенгликда фақат иккита ҳолда, яъни $k = i$ ва $j = i$ бўлгандагина

$$\prod_{\substack{l=0\\ l\neq k,\ k\neq j}}^{n} (x_i - x_l)$$

кўпайтма нолдан фарқлидир. Шунинг учун ҳам,

$$\frac{d L_n(x)}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)} \sum_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \prod_{l=0,\, l\neq j}^{n} (x_i - x_l) +$$

$$+ \sum_{k=0,\, k\neq i}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)} \cdot \frac{1}{x_i - x_k} \prod_{l=0,\, l\neq i}^{n} (x_i - x_l)$$

Демак,

$$\frac{d L_n(x)}{dx}\Big|_{x=x_i} = f(x_i) \sum_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} + \omega'_{n+1}(x_i) \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} \frac{f(x_k)}{(x_i - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}. \qquad (16.18)$$

Агар $x_i = x_0 + ih$ бўлса, $\omega'_{n+1}(x_i) = (-1)^{n-i}\, i!\, (n-i)!\, h^n$ бўлганлиги учун, $f_i = f(x_i)$ деб олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\frac{d\,L_n(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{f_i}{h} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{i-j} + \frac{(-1)^i}{h\,C_n^i} \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{i-k} f_k. \qquad (16.19)$$

Қолдиқ ҳад эса (16.9) формулага кўра

$$\left.\frac{d\,R_n(x)}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{(-1)^{n-i}}{(n+1)\,C_n^i} f^{(n+1)}(\xi)\, h^n\,. \qquad (16.20)$$

Энди (16.19) — (16.20) формулалар ёрдамида n нинг турли қийматларида ҳосила учун формулалар чиқарамиз.

$n = 2$ (тугунлар учта) бўлганда:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi),$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}(f_2 - f_0) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi),$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi).$$

$n = 3$ (тугунлар тўртта) бўлганда:

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3) - \frac{h^3}{4} f^{\text{IV}}(\xi),$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h}(-2f_0 - 3f_1 + 6f_2 - f_3) + \frac{h^3}{12} f^{\text{IV}}(\xi),$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{6h}(f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3) - \frac{h^3}{12} f^{\text{IV}}(\xi),$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{6h}(-2f_0 + 9f_1 - 18f_2 + 11f_3) + \frac{h^3}{4} f^{\text{IV}}(\xi).$$

$n = 4$ (тугунлар бешта) бўлганда:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}(-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4) + \frac{h^4}{5} f^{\text{V}}(\xi),$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{12h}(-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4) - \frac{h^4}{20} f^{\text{V}}(\xi),$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4) + \frac{h^4}{30} f^{\text{V}}(\xi),$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{12h}(-f_0 + 6f_1 - 18f_2 + 10f_3 + 3f_3) - \frac{h^3}{20} f^{\text{V}}(\xi),$$

$$f'(x_4) = \frac{1}{12h}(3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4) + \frac{h^4}{5} f^{\text{V}}(\xi).$$

Агар бу формулаларга эътибор берилса, n жуфт бўлганда ўрта нуқталардаги ҳосилалар ифодаларининг нисбатан содда эканликларини кўриш мумкин. Шу билан бирга қолдиқ ҳадлардаги ҳосила олдидаги коэффициентлари ҳам кичикдир. Шунинг учун ҳам амалда, мумкин қадар шу формулаларни қўллашга ҳаракат қилиш керак. Энди (16.10) — (16.11) дан $n=2$ да иккинчи ҳосилалар учун қуйидаги ифодаларни чиқарамиз:

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}(f_0-2f_1+f_2)-hf'''(\xi_1)+\frac{h^2}{6}f^{\mathrm{IV}}(\xi_2),$$

$$f''(x_1)=\frac{1}{h^2}(f_0-2f_1+f_2)-\frac{h^2}{12}f^{\mathrm{IV}}(\xi),$$

$$f''(x_2)=\frac{1}{h^2}(f_0-2f_1+f_2)+hf'''(\xi_1)-\frac{h^2}{6}f^{\mathrm{IV}}(\xi_2).$$

Бу ерда ҳам ўрта нуқталарда ҳосиланинг хатоси энг кичик бўлади.

Ньютон формуласи ёрдамида сонли дифференциаллаш. Интерполяция тугунлари тенг узоқликда жойлашган бўлса, у ҳолда сонли дифференциаллашда Ньютон, Бессел, Стирлинг, Эверетт формулаларидан фойдаланиш мумкин.

Ньютон биринчи интерполяцион формуласидан фойдаланайлик:

$$L_n(x)=L_n(x_0+th)=P(t)=f_0+tf^1_{1/2}+\frac{t(t-1)}{2}f^2_1+\ldots+$$
$$+\frac{t(t-1)\ldots[t-(n-1)]}{n!}f^n_{n/2}.$$

Бу кўпҳад ҳадларини группалаб, уни t нинг даражаси бўйича ёзиб чиқамиз:

$$P(t)=f_0+t[f^1_{1/2}-\frac{1}{2}f^2_1+\frac{1}{3}f^3_{3/2}-\frac{1}{4}f^4_2+\frac{1}{5}f^5_{5/2}+\ldots]+$$
$$+\frac{t^2}{2!}[f^2_1-f^3_{3/2}+\frac{11}{12}f^4_2-\frac{5}{6}f^5_{3/2}+\ldots]+\frac{t^3}{3!}[f^5_{3/2}-\frac{3}{2}f^4_2+$$
$$+\frac{7}{4}f^5_{5/2}-\ldots]+\ldots \tag{16.21}$$

Бу ерда қавс ичида фақат бешинчи тартиблигача чекли айирмалар қатнашадиганларигина ёзилди, амалиётда шу етарли бўлади. Иккинчи томондан $P(t)$ ни Тейлор формуласи бўйича ифодаласак:

$$P(t)=P(0)+P'(0)t+\frac{P''(0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}t^n. \tag{16.22}$$

Энди (16.22) ни (16.21) билан таққосласак:

$$P'(0)=f^1_{1/2}-\frac{1}{2}f^2_1+\frac{1}{3}f^3_{3/2}-\frac{1}{4}f^4_2+\frac{1}{5}f^5_{5/2}-\ldots,$$

$$P''(0)=f^2_1-f^3_{3/2}+\frac{11}{12}f^4_2-\frac{5}{6}f^5_{5/2}+\ldots;$$

$$P'''(0)=f^3_{3/2}-\frac{3}{2}f^4_2+\frac{7}{4}f^5_{5/2}-\ldots,$$

. . . .

Сўнгра $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ учун

$$L_{*}^{(k)}(x_0)=\frac{d^kP(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0}\cdot\frac{1}{h^k}=\frac{P^{(k)}(0)}{h^k}$$

ни ҳисобга олган ҳолда x_0 нуқтада сонли дифференциаллаш учун қуйидаги формулаларга эга бўламиз:

$$f'(x_0) = \frac{1}{n}(f^1_{1/2} - \frac{1}{2}f^2_1 + \frac{1}{3}f^3_{3/2} - \frac{1}{4}f^4_2 + \frac{1}{5}f^5_{5/2} - \ldots),$$
$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(f^2_1 - f^3_{3/2} + \frac{11}{12}f^4_2 - \frac{5}{6}f^5_{5/2} + \ldots),$$
$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3}(f^3_{3/2} - \frac{3}{2}f^4_2 + \frac{7}{4}f^5_{5/2} - \ldots),$$

Аниқмас коэффициентлар методи. Агар тугунлар ихтиёрий равишда жойлашган бўлса, Лагранж кўпҳадидан фойдаланмасдан, амалда анча қулай бўлган аниқмас коэффициентлар методидан фойдаланиш мумкин. Фараз қилайлик, $f(x)$ нинг ҳосилалари $f^{(k)}(x_i)$ ни x_i $(i = \overline{0, n})$ нуқталарда $f_0, f_1, \ldots, f_n$ лар орқали ифодалаш керак бўлсин. Бунинг учун изланаётган формулани

$$f^{(k)}(x_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i + R(f)$$

шаклда ёзамиз ва c_i ларни шундай танлаймизки, у n-даражали кўпҳад учун аниқ формулага айлансин, яъни

$$f(x) = 1,\ f(x) = x - x_i,\ f(x) = (x - x_i)^2, \ldots, f(x) = (x - x_i)^n$$

бўлганда $R(f) = 0$ бўлсин. Бу шартлар бизга c_i $(i = \overline{0, n})$ ларга нисбатан $n + 1$ та чизиқли алгебраик тенгламалар системасини беради.

Мисол. $f'(x_2)$ ни $f(x)$ нинг x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, $x_0 + 3h$, $x_0 + 4h$ нуқталардаги f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 қийматлари орқали ифодалаймиз.

Ечиш. Бунинг учун

$$f'(x_2) = c_0 f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4$$

тенгликка кетма-кет $f(x) = 1$, $f(x) = x - x_2$, $f(x) = (x - x_2)^2$, $f(x) = (x - x_2)^3$, $f(x) = (x - x_2)^4$ ларни қўямиз:

$$\begin{aligned} &c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0, \\ &-2hc_0 - hc_1 + hc_3 + 2hc_4 = 1, \\ &4h^2c_0 + h^2c_1 + h^2c_3 + 4h^2c_4 = 0, \\ &-8h^2c_0 - h^3c_1 + h^3c_3 + 8h^3c_4 = 0, \\ &16h^4c_0 + h^4c_1 + h^4c_3 + 16h^4c_4 = 0. \end{aligned}$$

Соддалаштирсак,

$$\begin{aligned} &(1)\quad c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0, \\ &(2)\quad -2c_0 - c_1 + c_3 + 2c_4 = \frac{1}{h}, \\ &(3)\quad 4c_0 + c_1 + c_3 + 4c_4 = 0, \\ &(4)\quad -8c_0 - c_1 + c_3 + 8c_4 = 0, \\ &(5)\quad 16c_0 + c_1 + c_3 + 16c_4 = 0 \end{aligned}$$

ҳосил бўлади.

Бу системани ечиш учун (3) тенгламани (5) тенгламадан айирамиз, унда $c_4 = -c_0$ га эга бўламиз, кейин $c_4 = -c_0$ ни (3) га қўйиб, $c_3 = -c_1$ ни топамиз. Буларни (1) ва (4) ларга қўйиб, $c_2 = 0$ ва $c_3 = 8c_4$ ларни аниқлаймиз. Ниҳоят, буларни иккинчи тенгламага қўйиб,

$$c_4 = -c_0 = \frac{1}{12h}, \quad c_3 = -c_1 = \frac{8}{12h}$$

ларни топамиз. Ниҳоят

$$f'(x_2) \simeq \frac{1}{12h}(f_0 - 8f_1 + 8f_2 - f_4)$$

келиб чиқади. Бу эса Лагранж формуласи ёрдамида аввал топилган ифода билан қолдиқ ҳадсиз устма-уст тушади.

МАШҚЛАР

1. Агар $Q_{in}(x) = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ бўлса, у ҳолда қуйидаги айниятларни исботланг:

а) $Q_{0n}(x) + Q_{1n}(x) + \ldots + Q_{nn}(x) = 1,$

б) $x_0^n\, Q_{0n}(x) + x_1^n Q_{1n}(x) + \ldots + x_n^n Q_{nn}(x) = x^n,$

в) $\sum_{i=0}^{n} (x_i - x)^k Q_{in}(x) = 0,\ k = 1,\ 2, \ldots, n,$

2. Айниятни исботланг:

$$\prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = 1 + \sum_{m=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \frac{x - x_{k-1}}{x_0 - x_k}.$$

3. Қуйидагини исботланг:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} \frac{i}{m}\, C_{m+n}^{m+i} = \frac{(m+n-2)!}{(n-1)!m!}.$$

Кўрсатма. Ушбу

$$f(x) = \frac{1}{m!}(m - x)(m - 1 - x) \ldots (2 - x)$$

функцияга Лагранж формуласини қўллаб, $x_0 = 0,\ h = 1,\ x = m + n$ деб олиш керак.

4. Лагранж интерполяцион кўпҳадидан фойдаланиб, қуйидаги формулаларни келтириб чиқаринг:

а) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{m-k}\, C_m^k\, C_n^k = \frac{1}{m-n}\ (m > n),$

б) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{k}{m-k}\, C_m^k\, C_n^k = \frac{m}{m-n}\ (m > n).$

5. Фараз қилайлик, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ва $S_0 = 0,\ S_m = \sum_{\nu=0}^{m-1} P(\nu)$ бўлсин.

Қуйидаги

$$S_m = mP(0) + C_m^2 \Delta P(0) + \ldots + C_m^{n+1} \Delta^n P(0)$$

тенгликни кўрсатинг.

(Эслатма. $\Delta^{n+1} S_m = \Delta^n P(m) = a_0 n!$ тенгликдан фойдаланинг.)

6. Олдинги масаладаги формуладан фойдаланиб,

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \nu, \quad \sum_{\nu=0}^{m-1} \nu^2, \quad \sum_{\nu=0}^{m-1} \nu^3$$

йиғиндилар учун формулалар чиқаринг.

7. Ихтиёрий $2n + 2$ та $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ва $c_0, c_1, \ldots, c_n$ сонлар берилган бўлсин. Даражаси n дан ортмайдиган ва қуйидаги

$$P(x_0) = c_0, \; P'(x_1) = c_1, \; \ldots, \; P^{(n)}(x_n) = c_n$$

шартларни қаноатлантирувчи ягона кўпҳад қуриш мумкинлигини исботланг ва $P(x)$ кўпҳаднинг ошкор кўринишини аниқланг.

8. Ушбу $\Delta \mathrm{arctg}\, x = \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{1 + x + x^2}$ тенгликдан фойдаланиб,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{arctg}\, \frac{1}{1 + n + n^2} = \frac{\pi}{2}$$

тенгликни исботланг.

9. Лагранж интерполяцион формуласидан фойдаланиб, иккинчи ҳосила учун қуйидаги 5 нуқтали

$$f''(x_2) = \frac{1}{24h^2}(-2f_0 + 32f_1 - 60f_2 + 32f_3 - 2f_4) + \frac{h^4}{90} f^{\mathrm{VI}}(\xi)$$

формулани келтириб чиқаринг.

10. Бессел формуласидан фойдаланиб, қуйидаги сонли дифференциаллаш формулаларини келтириб чиқаринг:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\mu f_0^1 - \frac{1}{3!} f_0^3 + \frac{(2!)^2}{3} \mu f_0^5 - \ldots\right),$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(f_0^2 - \frac{2}{4!} f_0^4 + \ldots\right),$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3}\left(\mu f_0^3 - \frac{3!(1^2 + 2^2)}{5!} \mu f_0^5 + \ldots\right).$$

11. Олдинги машқдаги формулани аниқмас коэффициентлар методи билан топинг.

12. Стирлинг формуласилан фойдаланиб, сонли дифференциаллаш учун қуйидаги формулаларни чиқаринг:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(f_{1/2}^1 - \frac{1}{2} \mu f_{1/2}^2 + \frac{1}{12} \mu f_{1/2}^3 + \frac{1}{12} \mu f_{1/2}^4 + \ldots\right),$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\mu f_{1/2}^2 - \frac{1}{2} f_{1/2}^3 - \frac{1}{12} \mu f_{1/2}^4 + \ldots\right),$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3}\left(f_{4/2}^3 - \frac{1}{2} \mu f_{1/2}^4 + \ldots\right).$$

6- БОБ. ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШИШИ

1- §. МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

Фараз қилайлик, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, . . . ,$\varphi_m(x)$ етарлича силлиқ ва ҳисоблаш учун қулай бўлган чизиқли эркли функциялар системаси бўлсин. Бу функциялардан тузилган

$$P_m(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x) \qquad (1.1)$$

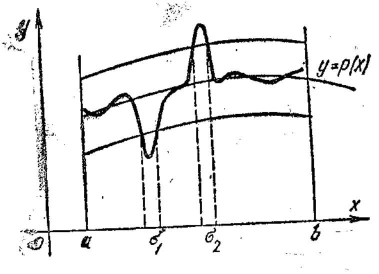
чизиқли комбинация (c_0, c_1, . . . , c_m — доимий сонлар) умумлашган кўпҳад дейилади. Олдинги бобда, берилган $f(x)$ функцияни интерполяциялаш йўли билан $P_m(x)$ орқали тақрибий равишда алмаштириш масаласини кўрган эдик. Аммо шуни ҳам таъкидлаб ўтиш лозимки, қатор масалаларда функциянинг бундай тақрибий тасвирланиши мақсадга мувофиқ бўлавермайди. Биринчидан, тугунлар сони кўп бўлса, у ҳолда интерполяцион кўпҳадларнинг ҳам даражаси ортиб боради, лекин бу яқинлашишнинг сифати, ҳар доим ҳам яхши бўлмаслиги мумкин. Иккинчидан, $f(x)$ функциянинг тугун нуқталардаги қиймати бирор тажрибадан аниқланган бўлиши ҳам мумкин, у ҳолда табиий равишда бу қийматлар тажриба хатосига эга бўлиб, у интерполяцион кўпҳадга ҳам таъсир қилади ва шу билан функциянинг ҳақиқий ҳолатини ҳам бузиб кўрсатади.

Қандайдир маънода бу камчиликлардан холи бўлган ўрта квадратик яқинлашувчи кўпҳадларни тузиш билан шуғулланиш мақсадга мувофиқдир. Шундай қилиб, биз функциялар учун ўрта квадратик маънода яқинлашиш масаласи қўйилишининг мақсадга мувофиқ эканлигига ишонч ҳосил қилдик. Бу масала қуйидагидан иборатдир: $[a, b]$ оралиқда аниқланган $f(x)$ функция учун (1.1) кўринишдаги яқинлашувчи шундай $P_m(x)$ кўпҳад топилсинки,

$$\int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx \qquad (1.2)$$

ифода мумкин қадар энг кичик қийматни қабул қилсин.

Агар (1.2) интеграл кичик қиймат қабул қилса, бу шуни билдирадики, $[a, b]$ оралиқнинг кўп қисмида $f(x)$ ва $P_m(x)$ бир-бирига яқин. Шунга қарамасдан айрим нуқталар атрофида ёки бу оралиқнинг баъзи кичик қисмларида $f(x) - P_m(x)$ айирма нисбатан етарлича катта бўлиши ҳам мумкин (18- чизма).



18-чизма.

Қуйидаги

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx} \qquad (1.3)$$

миқдор $P_m(x)$ нинг $f(x)$ дан *ўрта квадратик оғиши* дейилади ва $f(x)$ ни $P_m(x)$ билан яқинлашишда ўрта квадратик маънодаги хатони билдиради.

Агар $f(x)$ ни ўрта квадратик маънода $P_m(x)$ билан яқинлаштиришда қандайдир сабабга кўра қаралаётган оралиқнинг бирор қисмида унинг бошқа қисмига нисбатан аниқроқ яқинлаштириш керак бўлса, у ҳолда кўпинча қуйидагича иш тутилади: *вазн* деб аталувчи махсус равишда танлаб олинган манфий бўлмаган $\rho(x)$ функция олиниб, (1.2) ўрнига ушбу

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-P_m(x)]^2dx$$

интегралнинг энг кичик қиймат қабул қилиши талаб қилинади. Бу ерда $\rho(x)$ шундай танланган бўлиши керакки, агар оралиқнинг бирор x нуқтаси атрофига яқинлашиш аниқлиги бошқа нуқталарга нисбатан яхшироқ бўлиши талаб қилинса, $\rho(x)$ шу нуқта атрофида каттароқ қийматга эга бўлиши керак. Масалан, $[-1, 1]$ оралиқда $f(x)$ функцияни $P_m(x)$ функция билан яқинлаштиришда яқинлаштириш аниқлигининг оралиқнинг четки нуқталари $x=\pm 1$ атрофида юқори бўлишини истасак, $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ деб олиш мумкин.

Агар $f(x)$ функциянинг аналитик кўриниши ўрнига, унинг фақат $(n+1)$ та $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталардаги қийматларигина маълум бўлса, у ҳолда (1.2) интеграл ўрнига ушбу

$$\sum_{i=0}^{n}[f(x_i)-P_m(x_i)]^2 \tag{1.4}$$

йиғиндининг мумкин қадар кичик қиймат қабул қилишлиги талаб қилинади. Бу ҳолда

$$\delta_n=\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[f(x_i)-P_m(x_i)]^2}$$

миқдор *ўрта квадратик оғиш* дейилади. Ўрта квадратик яқинлаштириш уеули *энг кичик квадратлар усули* ҳам дейилади.

Агар бордию, $f(x_i)$ ларнинг аниқлиги бир хил бўлмаса, масалан, ҳар хил аниқликка эга бўлган турли асбоблар ёрдамида ҳисобланган бўлса, у ҳолда биз аниқлиги катта бўлган қийматларга кўпроқ ишонч билан каттароқ „вазн“ беришимиз керак. Бунинг учун x_i нуқтадаги вазн деб аталувчи махсус танланган $\rho_i>0$ сонларни олиб, (1.4) йиғинди ўрнига ушбу

$$\sum_{i=0}^{n}\rho_i[f(x_i)-P_m(x_i)]^2 \tag{1.5}$$

вазний йиғиндини минималлаштиришимиз керак. Бу вазнлар одатда уларнинг йиғиндиси бирга тенг бўладиган қилиб танланади:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1.$$

Агар (1.3) билан аниқланган ўрта квадратик оғиш δ кичик бўлса, $[a, b]$ оралиқнинг аксарият нуқталарида $|f(x) - P(x)|$ айирма қиймати кичик бўлади. Лекин шунга қарамасдан айрим кичик оралиқчаларда бу миқдор катта бўлиши ҳам мумкин. Аниқроғи, фараз қилайлик, $[a, b]$ оралиғида $|f(x) - P(x)|$ нинг экстремумлари сони чекли бўлиб, γ ихтиёрий мусбат сон бўлсин. Фараз қилайлик, $s_1, s_2 \ldots, s_k$ ўзаро кесишмайдиган $[a, b]$ дан олинган шундай оралиқчалар бўлсинки,

$$|f(x) - P(x)| \geqslant \gamma$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталар шу s_i ларга тегишли бўлиб, σ шу оралиқчалар узунликлари йиғиндиси бўлсин. Агар $\delta < \varepsilon$ (қ. (1.3)) бўлса, у ҳолда

$$\varepsilon^2(b - a) > \int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx \geqslant \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i} [f(x) - P(x)]^2 dx \geqslant \gamma^2 \sigma$$

бўлади. Бундан эса

$$\sigma < (b - a)\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^2.$$

Демак, агар ε етарлича кичик бўлса, σ исталганча кичик бўлади. Шундай қилиб, ε етарлича кичик бўлса, $[a, b]$ оралиқнинг ўлчови исталганча кичик σ дан ортмайдиган нуқталар тўпламидан ташқари бошқа ҳамма нуқталарда

$$|f(x) - P(x)| < \gamma$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Лекин айрим ҳолларда яқинлаштирилувчи кўпҳадга оғирроқ шарт қўйилади, чунончи, $[a, b]$ оралиқнинг барча нуқталарида $f(x)$ нинг $P(x)$ дан оғиши берилган миқдордан кичик бўлиши талаб қилинади. Биз $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз ва $P(x)$ алгебраик кўпҳад бўлган ҳолни кўрамиз.

Фараз қилайлик, $H_n(P)$ даражаси n дан ортмайдиган

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

алгебраик кўпҳадларнинг тўплами бўлсин. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз ва $P_n(x) \in H_n(P)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ нинг $P_n(x)$ дан $[a, b]$ оралиқда оғишини, яъни

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(x)|$$

ни $E_n(f, P_n)$ орқали белгилаймиз. Бу миқдор $P_n(x)$ кўпҳад коэффициентлари $a_0, a_1, \ldots, a_n$ нинг функцияси бўлиб, у манфий эмас ҳамда бу миқдор манфий бўлмаган аниқ қуйи чегарага эга бўлади:

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in H_n(P)} E_n(f, P_n).$$

Агар шундай $P_n^*(x)$ кўпҳад мавжуд бўлиб, $E_n(f, P_n^*) = E_n(f)$ тенглик бажарилса, у ҳолда $P_n^*(x)$ кўпҳад *энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад ва $E_n(f)$ энг кичик оғиш ёки f нинг n-даражали кўпҳад билан энг яхши яқинлашиши* дейилади.

ЭҲМ ларда функцияларни ҳисоблаш учун стандарт программалар тузишда берилган $f(x)$ учун $E_n(f)$ берилган ε дан кичик бўладиган $P_n^*(x)$ кўпҳадни топиш талаб қилинади. Биз бу бобда мана шундай яқинлашишларни кўриб чиқамиз.

Эллигинчи йиллардан бошлаб математикада *сплайн—яқинлашиш* ёки *бўлакли кўпҳадлар* билан яқинлашиш деб аталувчи янги типдаги яқинлашиш ўрганилмоқда. Бобнинг охирги параграфлари мана шу яқинлашишга бағишланади.

2-§. ОРАЛИҚДА АЛГЕБРАИК КЎПҲАДЛАР ОРҚАЛИ ЎРТА КВАДРАТИК ЯҚИНЛАШИШ

Агар чекли $[a, b]$ оралиқда $\rho(x) \geqslant 0$ бўлиб ва ундан олинган интеграл мусбат бўлса, яъни

$$0 < \int_a^b \rho(x)dx < \infty \qquad (2.1)$$

шарт бажарилса, у ҳолда $\rho(x)$ $[a, b]$ оралиқда *вазн функцияси* дейилади. Агар $[a, b]$ оралиқ чексиз бўлса, у ҳолда, бундан ташқари,

$$\int_a^b x^k\rho(x)dx \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

интеграллар абсолют яқинлашувчи бўлишлари керак.

Лемма. Агар $Q_n(x)$ $[a, b]$ оралиқда манфий бўлмаган n-даражали кўпҳад бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\rho(x)$ вазн функцияси учун

$$\int_a^b \rho(x)Q_n(x)dx > 0 \qquad (2.2)$$

тенгсизлик бажарилади.

Исбот. Аввало лемманинг тасдиғи бевосита кўриниб турган икки содда ҳолни кўрайлик. Биринчидан, агар $\rho(x)$ чекли сондаги махсус нуқталарга эга бўлса, у ҳолда $[a, b]$ оралиқнинг бу нуқталардан бошқа нуқталарида $\rho(x)$ $Q_n(x)$ мусбат ва узлуксиз, шунинг учун ҳам (2.2) даги интеграл мусбат. Иккинчидан $[a, b]$

оралиқда $Q_n(x)$ мусбат бўлса, у ҳолда m орқали унинг бу оралиқдаги минимумини белгилаб,

$$\int_a^b \rho(x)Q_n(x)dx > m\int_a^b \rho(x)dx > 0$$

тенгсизликка эга бўламиз ва лемманинг тасдиғи бу ҳол учун ҳам ўринли бўлади. Умумий ҳолда, фараз қилайлик, $Q_n(x)$ кўпҳад $[a, b]$ оралиқда $x_1, x_2, \ldots, x_s$ илдизларга эга бўлсин. У ҳолда (2.1) шартга кўра $\rho(x)$ вазндан $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_s, b]$ оралиқлар бўйича олинган интегралларнинг камида биттаси мусбат бўлиши керак. Бундай оралиқ учун:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_i+\varepsilon}^{x_{i+1}-\varepsilon} \rho(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x)dx > 0. \tag{2.3}$$

Демак, етарлича кичик ε учун $\rho(x)$ вазн $[x_i+\varepsilon, x_{i+1}-\varepsilon]$ оралиқ бўйича мусбат. Лекин бу оралиқда $Q_n(x)$ кўпҳад илдизга эга эмас, шунинг учун ҳам $m(\varepsilon)$ орқали $Q_n(x)$ нинг $[x_i+\varepsilon, x_{i+1}-\varepsilon]$ оралиқдаги минимумини белгилаб олсак, қуйидаги тенгсизликларга эга бўламиз:

$$\int_a^b \rho(x)Q_n(x)dx > \int_{x_i+\varepsilon}^{x_{i+1}-\varepsilon} \rho(x)Q_n(x)dx > m(\varepsilon)\int_{x_i+\varepsilon}^{x_{i+1}-\varepsilon} \rho(x)dx > 0.$$

Вазндан $[a, b]$ оралиқ бўйича олинган интеграл мавжуд ва $\rho(x) > 0$ бўлгани учун (2.3) интеграл мавжуддир.

Агар оралиқ чексиз, яъни $[x_s, \infty)$ бўлса, у ҳолда (2.3) ўрнига

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_s+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \rho(x)dx = \int_{x_s}^{\infty} \rho(x)dx > 0$$

лимитни қараш керак. Худди шунга ўхшаш $(-\infty, x_1]$ оралиқ учун

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} \rho(x)dx = \int_{-\infty}^{x_1} \rho(x)dx$$

лимит қаралади. Лемма исботланди.

Энди, фараз қилайлик, $f(x)$ функция $\rho(x)$ вазн билан $[a, b]$ оралиғида квадрати билан интегралланувчи бўлсин, яъни

$$\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx$$

мавжуд бўлсин. Бундай функцияларни $L^2_\rho[a, b]$ фазога тегишли деймиз. Бу функцияни

$$P_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

умумлашган кўпҳад билан ўрта квадратик маънода яқинлашиш масаласини кўрамиз, яъни $a_0, a_1, \dots, a_n$ коэффициентларни шундай танлашимиз керакки,

$$\delta_n = \int\limits_a^b \rho(x)[P_n(x) - f(x)]^2 dx = \int\limits_a^b \rho(x) \left[\sum_{i=0}^{n} a_i \, \varphi_i(x) - f(x)\right]^2 dx \tag{2.4}$$

ифода энг кичик қийматга эга бўлсин. Бу ерда $\delta_n = \delta_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ функция $a_0, a_1, \dots, a_n$ ларга нисбатан квадратик кўпҳад ва $\delta_n \geqslant 0$ бўлгани учун унинг минимуми мавжуд, бу минимумни топиш учун барча

$$\frac{\partial \delta_n}{\partial a_i} \quad (i = \overline{0, n})$$

хусусий ҳосилаларни топиб, уларни нолга тенглаштирамиз. Натижада, $a_0. a_1, \dots, a_n$ ларни аниқлаш учун қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \delta_n}{\partial a_n} = \int\limits_a^b \rho(x) \left[\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \, \varphi_i(x) - f(x)\right] \varphi_0(x) dx = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \delta_n}{\partial a_1} = \int\limits_a^b \rho(x) \left[\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \, \varphi_i(x) - f(x)\right] \varphi_1(x) dx = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \delta_n}{\partial a_n} = \int\limits_a^b \rho(x) \left[\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \, \varphi_i(x) - f(x)\right] \varphi_n(x) dx = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Агар $L^2_\rho[a, b]$ фазодан олинган икки $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функция скаляр кўпайтмасини (φ, ψ) орқали белгиласак:

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_a^b \rho(x) \, \varphi(x) \psi(x) dx, \tag{2.6}$$

у ҳолда (2.5) системани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_0) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_0) = (f, \varphi_0), \\ a_0(\varphi_0, \varphi_1) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_1) = (f, \varphi_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0(\varphi_0, \varphi_n) + a_1(\varphi_1, \varphi_n) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n). \end{cases} \tag{2.7}$$

Энди $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ чизиқли эркли функциялар системаси учун (2.7) система ягона ечимга эга эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ системанинг *Грам детерминанти* деб аталувчи, (2.7) системанинг ушбу детерминанти

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \ldots & (\varphi_n, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \ldots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\varphi_0, \varphi_n) & (\varphi_1, \varphi_n) & \ldots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

нинг нолдан фарқлилигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, аксинча, яъни $\Gamma_n = 0$ бўлсин. У ҳолда (2.7) системага мос келадиган бир жинсли чизиқли алгебраик тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_0) + \ldots + a_n(\varphi_n, \varphi_0) = 0, \\ a_0(\varphi_0, \varphi_1) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) + \ldots + a_n(\varphi_n, \varphi_1) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0(\varphi_0, \varphi_n) + a_1(\varphi_1, \varphi_n) + \ldots + a_n(\varphi_n, \varphi_n) = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

камида битта тривиал бўлмаган ечимга эга бўлиши керак, яъни шундай $a_0, a_1, \ldots, a_n$ сонлар топилиши керакки, уларнинг камида бирортаси нолдан фарқли бўлиб, (2.9) системани қаноатлантирсин. (2.9) системанинг тенгламаларини мос равишда $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ларга кўпайтирсак ва скаляр кўпайтманинг (2.6) кўринишини эътиборга олган ҳолда натижаларни қўшсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\int_a^b \rho(x)(a_0\varphi_0(x) + a_2\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x))^2 dx = 0.$$

Леммага кўра эса бундай бўлиши мумкин эмас, чунки $\{\varphi_n(x)\}$ система чизиқли эркли бўлиб, $a_0, a_1 \ldots, a_n$ ларнинг камида биттаси нолдан фарқлилиги сабабли $P(x) = (a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x))^2$ кўпҳад айнан нолга тенг эмас. Демак, Грам детерминанти Γ_n нолдан фарқли ва (2.7) система ягона ечимга эга.

1-мисол. Ушбу $f(x) = \sqrt{x}$ ни $[0, 1]$ оралиқда, $\rho(x) = 1$ бўлганда биринчи даражали кўпҳад билан ўрта квадратик маънода яқинлаштирилсин.

Ечиш. Бу ерда $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $\rho(x) = 1$ бўлгани учун

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1^2 dx = 1, \ (\varphi_1, \varphi_0) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \ (f, \varphi_0) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}, \ (f, \varphi_1) = \int_0^1 x\sqrt{x} dx = \frac{2}{5}.$$

Демак, (2.7) система

$$a_0 + \frac{1}{2} a_1 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{3} a_1 = \frac{2}{5}$$

кўринишдадир.

Бундан $a_0 = \frac{4}{15}$, $a_1 = \frac{4}{5}$ бўлиб, изланаётган кўпҳад $P_1(x) = \frac{4}{15}(1 + 3x)$ бўлади (19-чизма).

2- **мисол.** 1- мисол вазн $\rho(x) = 1 - x$ бўлган ҳол учун ечилсин.

Вазнга нисбатан шуни айтиш мумкинки, у ораліқнинг чап четида яхшироқ яқинлашишни таъминлайди. Бу ҳолда

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \frac{1}{2}, \ (\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{6},$$

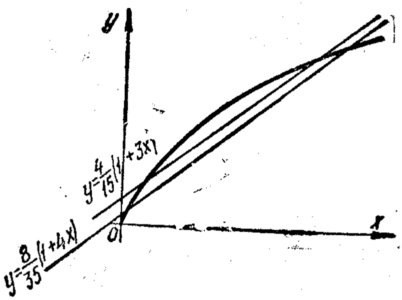
$$(\varphi_1, \varphi_1) = \frac{1}{12},$$

$$(f, \varphi_0) = \frac{4}{15}, \ (f, \varphi_1) = \frac{4}{35},$$

демак, (2.7) система қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1 = \frac{4}{15}$$

$$\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{12}a_1 = \frac{4}{35}.$$



19-чизма.

Бундан $a_0 = \frac{8}{35}$, $a_1 = \frac{32}{35}$, $P_1(x) = \frac{8}{35}(1 + 4x)$ (19- чизма).

3- §. ОРТОГОНАЛ КЎПҲАДЛАР СИСТЕМАСИ

Олдинги параграфдаги методнинг ноқулай томони шундан иборатки, яқинлашувчи умумлашган кўпҳаднинг коэффициентларини топиш учун (2.4) системани ечишга тўғри келади, бу эса катта n лар учун жуда кўп меҳнат талаб қилади. Агар биз ихтиёрий чизиқли эркли $\{\varphi_n(x)\}$ система ўрнида $\{\psi_n(x)\}$ ортогонал кўпҳадлар системасини қарасак, у ҳолда (2.4) система соддалашади.

Агар

$$(P, Q) = \int_a^b \rho(x)P(x)Q(x)dx = 0$$

бўлса, $P(x)$ ва $Q(x)$ *функциялар* $[a, b]$ *ораліқда* $\rho(x)$ *вазн билан ортогонал,* хусусий ҳолда $\rho(x) \equiv 1$ бўлса, $P(x)$ ва $Q(x)$ функциялар $[a, b]$ ораліқда ортогонал дейилади.

Агар ихтиёрий k, l $(l \neq k)$ индекслар учун

$$\int_a^b \rho(x)\psi_k(x)\psi_l(x)dx = 0 \tag{3.1}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $\{\psi_n(x)\}$ функциялар системаси $\rho(x)$ вазн билан $[a, b]$ ораліқда *ортогонал системани* ташкил этади дейилади.

Биз 3- бобда векторларни ортогоналлаштириш усулини кўриб ўтган эдик. Бу ерда ҳам ихтиёрий чизиқли эркли кўпҳадлар системаси $\{\varphi_n(x)\}$ дан, хусусий ҳолда $\{x^n\}$ системадан, $[a, b]$ ораліқда $\rho(x)$ вазн билан ортогонал система тузиш мумкин.

Теорема. Ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида ортогонал кўпҳадлар системаси ягонадир, бошқача айтганда, агар

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots$$
$$\chi_0(x),\ \chi_1(x),\ \ldots,\ \chi_n(x),\ \ldots$$

системалар $[a,\ b]$ оралиқда $\rho(x)$ вазн билан ортогонал бўлган иккита система бўлса, у ҳолда албатта

$$\psi_n(x) = c_n\chi_n(x) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

бўлиши керак.

Исбот. Аввало ҳар хил даражадаги ва турли системадаги кўпҳадларнинг ортогонал, яъни

$$\int_a^b \rho(x)\psi_k(x)\chi_l(x)dx = 0 \quad (k \neq l)$$

эканлигини кўрсатамиз. Аниқлик учун $k > l$ деб олайлик. $\chi_l(x)$ ни ягона усул билан

$$\chi_l(x) = \sum_{j=0}^{l} c_j\psi_j(x)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан (3.1) ни ҳисобга олган ҳолда

$$\int_a^b \rho(x)\psi_k(x)\chi_l(x)dx = \sum_{j=0}^{l} c_j \int_a^b \rho(x)\psi_j(x)\psi_k(x)dx = 0$$

га эга бўламиз, чунки $j \leqslant l < k$. Энди $\chi_l(x)$ нинг $\psi_j(x)$ орқали тасвирланишида номери $j < l$ бўлган барча c_j коэффициентларнинг нолга тенглигини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$\int_a^b \rho(x)\psi_i(x)\chi_l(x)dx$$

интегрални қараймиз, бу ерда $i < l$. Бир томондан, исботлаганимизга кўра бу интеграл нолга тенг, иккинчи томондан эса

$$\int_a^b \rho(x)\psi_i(x)\chi_l(x)dx = \sum_{j=0}^{l} c_j \int_a^b \rho(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx =$$
$$= c_i \int_a^b \rho(x)\psi_i^2(x)dx.$$

Ўнг томондаги интеграл нолдан фарқли, шунинг учун ҳам $c_i = 0$. Демак, барча $i < l$ учун $c_i = 0$, яъни

$$\chi_l(x) = c_l\psi_l(x).$$

Шу билан теорема исботланади.

Агар ортогонал кўпҳадларга яна бирор қўшимча талаб қўқилса, масалан, кўпҳаднинг бош коэффициенти бирга тенг бўлишини ёки бош коэффициенти мусбат бўлиб, нормаси

$$\|\psi_i\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x)\psi_i^2(x)dx}$$

бирга тенг бўлиши талаб қилинса, у ҳолда ортогонал кўпҳад ягона равишда аниқланади.

Ўзаро ортогонал ва нормалари бирга тенг бўлган кўпҳадлар системаси *ортонормал кўпҳадлар системаси* дейилади. Берилган $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\ldots$ $\psi_n(x)$ ортогонал системанинг ҳар бир кўпҳадини уларнинг нормаларига бўлсак,

$$P_0(x) = \frac{\psi_0(x)}{\|\psi_0\|},\ P_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|},\ \ldots, P_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|},\ \ldots$$

ортонормал система ҳосил бўлади. Юқорида айтганимизга кўра берилган $[a, b]$ оралиқ ва $\rho(x)$ вазн учун ортонормал кўпҳадлар системаси ягонадир.

Энди ўрта квадратик маънода $f(x)$ функцияга энг яхши яқинлашувчи $Q_n(x)$ кўпҳадни ортонормал кўпҳадларнинг чизиқли комбинацияси шаклида излаймиз:

$$Q_n(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \ldots + a_nP_n(x).$$

Бу кўпҳаднинг коэффициентлари a_k лар (2.7) системадан топилади. Лекин бизнинг ҳолда

$$(P_i\ ,\ P_j) = \delta_i^j$$

бўлгани учун

$$a_k = (f,\ P_k) = \int_a^b \rho(x)f(x)P_k(x)dx$$

бўлади ва энг кичик оғиш эса

$$\delta_n^2 = \int_a^b \rho(x)[f(x) - Q_n(x)]^2dx = \int_a^b \rho(x)f^2(x)dx -$$

$$-2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b \rho(x)f(x)\cdot P_k(x)dx + \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_ka_l \int_a^b \rho(x)P_k(x)P_l(x)dx =$$

$$= \int_a^b \rho(x)f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=0}^{n} a_k^2,$$

яъни

$$\delta_n^2 = \int_a^b \rho(x)f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} a_k^2$$

билан характерланади.

4-§. ОРТОГОНАЛ КЎПҲАДЛАРНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

Ортогонал кўпҳадлар учун рекуррент муносабатлар. Ортогонал кўпҳадларни тез аниқлашга имкон берадиган рекуррент муносабатни келтириб чиқарамиз.

1-теорема. Ортонормал кўпҳадлар системасининг ихтиёрий учта кетма-кет элементлари учун қуйидаги рекуррент муносабат

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}(x) \qquad (4.1)$$

ўринлидир, бу ерда μ_n $P_n(x)$ нинг бош коэффициенти бўлиб, α_n қандайдир ўзгармас сон.

Исбот. $xP_n(x)$ кўпҳаднинг даражаси $n+1$ га тенг бўлгани учун уни $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\ldots$, $P_{n+1}(x)$ чизиқли комбинацияси орқали ягона кўринишда ифодалаш мумкин:

$$xP_n(x) = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \ldots + \alpha_n P_n(x) + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(x). \quad (4.2)$$

Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини $\rho(x)P_j(x)$ $(j = 0, 1, \ldots, n-2)$ га кўпайтириб, $[a, b]$ оралиқ бўйича интеграллаймиз:

$$\int_a^b \rho(x)P_n(x)[xP_j(x)]dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \int_a^b \rho(x)P_j(x)P_i(x)dx +$$

$$+ \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \int_a^b \rho(x)P_j(x)P_{n+1}(x)dx.$$

Чап томондаги интеграл нолга тенг, чунки барча $j \leqslant n-2$ лар учун $xP_j(x)$ даражаси $n-1$ дан ортмайдиган кўпҳаддир, шунинг учун ҳам уни $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\ldots$, $P_{n-1}(x)$ ларнинг чизиқли комбинацияси ёрдамида ифодалаш мумкин. Ўнг томонда эса $i = j$ бўлгандагина фақат битта интеграл бирга, қолганлари нолга тенг:

$$\alpha_j \int_a^b \rho(x)P_j^2(x)dx = 0.$$

Демак, барча $j \leqslant n-2$ лар учун $\alpha_j = 0$. Шундай қилиб, (4.2) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$xP_n(x) = \alpha_{n-1}P_{n-1}(x) + \alpha_n P_n(x) + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(x). \qquad (4.3)$$

Бу ерда α_{n-1} ни аниқлаш учун (4.3) ни $\rho(x)P_{n-1}(x)$ га кўпайтириб, $[a, b]$ бўйича интеграллаймиз. Натижада

$$\alpha_{n-1} = \int_a^b \rho(x)xP_{n-1}(x)P_n(x)dx = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \int_a^b \rho(x)[\mu_n x^n + \ldots] \times$$

$$\times P_n(x)dx = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \int_a^b \rho(x)P^2{}_n(x)dx = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}.$$

Буни (4.3) га қўйсак, (4.1) келиб чиқади.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, $P_{-1}(x)=0$ деб олсак, (4.1) формула барча $n \geqslant 0$ учун ўринли бўлади.

Кристофел-Дарбу айнияти. Ортогонал кўпҳадлар назариясида муҳим аҳамиятга эга бўлган *Кристофел-Дарбу айниятини* чиқарамиз.

2-теорема. Ортонормал кўпҳадлар учун ушбу Кристофел-Дарбу айнияти ўринлидир

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \cdot \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}. \qquad (4.4)$$

Исбот. (4.1) тенгликни $P_n(y)$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(x)P_n(y) = (x-\alpha_n)P_n(x)P_n(y) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}(x)P_n(y),$$

бунда x ва y ларнинг ўринларини алмаштирамиз:

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(y)P_n(x) = (y-\alpha_n)P_n(x)P_n(y) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}(y)P_n(x)$$

ва биринчи тенгликдан иккинчисини айирамиз:

$$(x-y)P_n(x)P_n(y) = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\left[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)\right] -$$
$$- \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\left[P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)\right].$$

Бу тенглик барча $n \geqslant 0$ лар учун ўринли бўлганлиги сабабли, уни барча $n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$ номерлар учун қўшиб чиқсак, (4.4) тенглик келиб чиқади.

Ортогонал кўпҳадлар нолларининг хоссалари. Ортогонал кўпҳадлар ҳисоблаш жараёнлари—интерполяция, тақрибий дифференциаллаш ва тақрибий интеграллашда кенг қўлланилади. Бу эса, асосан, ортогонал кўпҳадларнинг ноллари ажойиб хоссаларга эга бўлганлиги туфайлидир.

3-теорема. (a, b) оралиқда ортогонал $P_n(x)$ кўпҳаднинг барча илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлиб, улар (a, b) интервалда ётади.

Исбот. $P_n(x)$ кўпҳаднинг тоқ каррали ва (a, b) да ётувчи илдизларини кўриб чиқайлик. Фараз қилайлик, бу илдизларнинг сони m бўлиб, улар $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ бўлсин. Теорема исботланиши учун $m=n$ эканлигини кўрсатиш кифоядир, чунки бундан $P_n(x)$ нинг бошқа илдизлари мавжуд эмаслиги ва уларнинг тублиги келиб чиқади. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $m<n$ бўлсин. Ушбу

$$q(x)=(x-x_1')\ldots(x-x_m')$$

кўпҳадни тузамиз. Унинг m даражаси n дан кичиклиги сабабли

$$\int_a^b \rho(x)P_n(x)q(x)dx = 0$$

бўлиши керак. Аммо бу тенглик бажарилмайди, чунки $q(x)$ ва $P_n(x)$ ларнинг - ишоралари бир хил нуқталарда алмашинади ва $q(x)P_n(x)$ кўпайтма $[a, b]$ да ўз ишорасини сақлайди. Бундан ташқари $q(x)P_n(x)$ фақат чекли сондаги нуқталардагина нолга айланади, шунинг учун ҳам юқоридаги ифода айнан ноль эмас. Демак, леммага кўра $\int\limits_a^b \rho(x)q(x)P_n(x)dx$ нолдан фарқли бўлиши керак. Шундай қилиб, қарама-қаршилик келиб чиқади. Теорема исботланди.

5-§. ЭНГ КЎП ҚЎЛЛАНИЛАДИГАН ОРТОГОНАЛ КЎПҲАДЛАР СИСТЕМАЛАРИ

Қуйида ҳисоблаш математикасида кўп қўлланиладиган ортогонал кўпҳадлар системаларини келтирамиз. Биз бу системаларнинг берилган вазн бўйича ортогонал системани ташкил этишларини исботлашни, рекуррент муносабатлар келтириб чиқаришни, шунингдек, уларнинг нормаларини топиш билан боғлиқ бўлган ҳисоблашларни бажаришни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз (шунингдек, [9, 37] дан ҳам қарашлари мумкин.)

Якоби кўпҳадлари. Қуйидаги

$$P_n^{(\alpha,\ \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\ n!}\ (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\ \frac{d^n}{dx^n}\,[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]$$

кўпҳадлар *Якоби кўпҳадлари* деб аталади. Булар $[-1,1]$ оралиқда

$$\rho(x) = (1-x)^\alpha\ (1+x)^\beta$$

вазн билан ортогонал кўпҳадлар системасини ташкил этади. Уларнинг нормалари:

$$\|P_n^{(\alpha,\ \beta)}\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^\alpha\ (1+x)^\beta\ [P_n^{(\alpha,\ \beta)}(x)]^2dx} =$$
$$= \left[\frac{2^{\alpha+\beta+1}\,\Gamma\,(\alpha+n+1)\,\Gamma\,(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma\,(\alpha+\beta+n+1)}\right]^{1/2}.$$

Улар қуйидаги рекуррент муносабатларни қаноатлантиради:

$$(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)xP_n^{(\alpha,\ \beta)}(x) =$$
$$= 2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)P_{n+1}^{(\alpha,\ \beta)}(x) + (\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+$$
$$+2n+1)P_n^{(\alpha,\ \beta)}(x) + 2(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)P_{n-1}^{(\alpha,\ \beta)}(x).$$

Лежандр кўпҳадлари. Якоби кўпҳадларининг $\alpha=\beta=0$ ва $\rho(x)\equiv 1$ бўлгандаги хусусий ҳоли *Лежандр кўпҳадлари* деб аталади ва улар *Родриг формуласи*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\ (x^2-1)^n$$

билан аниқланади. Унинг нормаси

$$\|L_n\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

бўлиб, тегишли рекуррент муносабат эса

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0 \qquad (5.1)$$

дан иборат.

Лежандр кўпҳадларидан фойдаланиб, $f(x) \in L^2[-1, 1]$ функция учун ўрта квадратик маънода энг яхши яқинлашувчи кўпҳад қуриш мумкин. Бу кўпҳад

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(x)$$

бўлиб, бу ерда

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)L_k(x)dx. \qquad (5.2)$$

Энг кичик оғишининг миқдори қуйидагига тенг:

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^{1} [f(x) - Q_n(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} a_k^2. \qquad (5.3)$$

Лежандр кўпҳадининг дастлабки еттитаси қуйидагилардан иборат:

$$L_0(x) = 1,$$
$$L_1(x) = x,$$
$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$
$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$L_5(x) = \frac{1}{8}(65x^5 - 70x^3 + 15x),$$
$$L_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

Мисол сифатида $f(x) = 1/(1 + x^2)$ функцияни $[-1, 1]$ оралиқда 4-даражали кўпҳад билан ўрта квадратик маънода яқинлаштирамиз.

Ечиш. Лежандрнинг тоқ индексли кўпҳадлари тоқ кўпҳад ва жуфт индекслилари жуфт кўпҳад бўлгани учун (5.2) формулага кўра

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0, \ a_0 = \frac{\pi}{4}, \ a_2 = \frac{5}{2}(3 - \pi), \ a_4 = \frac{9}{16}\left(34\pi - \frac{320}{3}\right).$$

Демак,

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k L_k(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{5}{2}(3-\pi)L_2(x) + \frac{9}{16}\left(34\pi - \frac{320}{3}\right)L_4(x) =$$

$$= \frac{1}{64}\,[455\pi - 1680 + 2(7560 - 2415\pi)x^2 + (5355\pi - 16800)x^4];$$

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)^2} - \left[2a_0^2 + \frac{2}{5}\,a_2^2 + \frac{2}{9}\,a_4^2\right] = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \left[\frac{\pi^2}{8} + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{2}(3-\pi)^2 + \frac{9}{128}\left(34\pi - \frac{320}{3}\right)^2\right].$$

Қуйидаги теорема ўринлидир.

1-теорема. Агар $f(x)$ функция $[-1, 1]$ оралиқда узлуксиз ва чегараланган $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг Лежандр кўпҳадлари бўйича Фурье қатори $[-1, 1]$ оралиқда унга текис яқинлашади.

Чебишевнинг биринчи тур кўпҳадлари. Биз 4-бобда танишган *Чебишевнинг биринчи тур кўпҳади*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \ |x| \leqslant 1,$$

$[-1, 1]$ оралиқда $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ вазн билан ортогонал системани ташкил этади. Бу кўпҳаднинг нормаси

$$\|T_n\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{T_n^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & \text{агар } n = 0 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{агар } n > 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

га тенг. 4-бобда қуйидаги

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

рекуррент муносабат келтириб чиқарилган эди. Чебишев биринчи тур кўпҳадларининг дастлабки еттитаси қуйидагилардир:

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \\ &T_1(x) = x, \\ &T_2(x) = 2x^2 - 1, \\ &T_3(x) = 4x^3 - 3x, \\ &T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ &T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ &T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1. \end{aligned}$$

Энди $[-1, 1]$ оралиқда $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ вазнда квадрати билан интегралланувчи $f(x)$ функция учун Чебишевнинг биринчи тур кўпҳадлари ёрдамида топилиши мумкин бўлган энг яхши яқинлашувчи

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$$

кўпҳаднинг коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ҳисобланишини эслатамиз:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(\cos\theta)d\theta,\quad a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\cos k\,\theta\,d\theta\quad (k\geqslant 1);$$

энг кичик оғишнинг миқдори δ_n эса

$$\delta_n^2=\int_{-1}^{1}[f(x)-Q_n(x)]^2\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{f^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}-$$

$$-\frac{\pi}{2}\left[2a_0^2+a_1^2+\ldots+a_n^2\right]$$

формула билан ифодаланади.

Мисол сифатида $f(x)=|x|$ функцияни $[-1,\ 1]$ оралиқда $\rho(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ вазн билан ўрта квадратик маънода энг яхши яқинлаштирадиган кўпҳадлар кетма-кетлигини топамиз. Бизнинг ҳолда

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos\theta|\cos n\,\theta\,d\theta$$

бўлгани учун

$$a_0=\frac{2}{\pi},\quad a_{2n+1}=0,$$

$$a_{2n}=\frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\cos 2n\,\theta\,d\theta=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\cdot\frac{4}{4n^2-1}\quad (n=1,\ 2,\ldots)$$

лар осонгина топилади. Шунинг учун ҳам

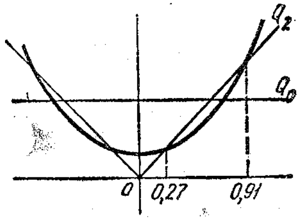
$$|x|\sim\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}T_{2n}(x)$$

бўлиб, 0, 2, 4-тартибли ўрта квадратик маънода энг яхши яқинлашувчи кўпҳадлар қуйидагилардан иборатдир:

$$Q_0(x)=\frac{2}{\pi},\quad Q_2(x)=\frac{2}{3\pi}(4x^2+1),\quad Q_4(x)=\frac{2}{15\pi}(-16x^4+36x^2+3)$$

(20-чизма).

2-теорема. Агар $[-1,\ 1]$ оралиқда $f(x)$ функция биринчи тартибли узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг Чебишев биринчи тур кўпҳадлари бўйича Фурье қатори $[-1,\ 1]$ оралиқда $f(x)$ функцияга текис яқинлашади.



20-чизма.

Чебишевнинг иккинчи тур кўпҳадлари. *Чебишевнинг иккинчи тур кўпҳади* деб аталувчи

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$= \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

кўпҳад $[-1,\ 1]$ оралиқда $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ вазн билан ортогонал системани ташкил этади. Унинг нормаси

$$\|U_n\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}U_n^2(x)dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

га тенг бўлиб, улар учун рекуррент муносабат

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

дан иборатдир. Чебишев иккинчи тур кўпҳадларининг дастлабки еттитаси қуйидагилардир:

$$\begin{aligned} &U_0(x) = 1, \\ &U_1(x) = 2x, \\ &U_2(x) = 4x^2 - 1, \\ &U_3(x) = 8x^3 - 4x, \\ &U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ &U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x, \\ &U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1. \end{aligned}$$

$[-1,\ 1]$ оралиқда $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ вазнда квадрати билан интегралланувчи $f(x)$ функция учун Чебишевнинг иккинчи тур кўпҳадлари ёрдамида тузилган энг яхши яқинлашувчи

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k U_k(x)$$

кўпҳаднинг коэффициентлари

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta)\sin\theta\cdot\sin(k+1)\theta\, d\theta$$

формула билан ҳисобланиб, энг кичик оғиш миқдори эса

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^{1} [f(x) - Q_n(x)]^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}f^2(x)dx - $$
$$- \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n} a_k^2$$

формула билан аниқланади.

Мисол сифатида $f(x) = |x|$ функцияни $[-1,\ 1]$ оралиқда $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ вазн билан ўрта квадратик маънода энг яхши яқинлаштирадиган кўпҳадлар кетма-кетлигини топамиз. Бу гал

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos\theta|\sin\theta\sin(n+1)\theta d\,\theta$$

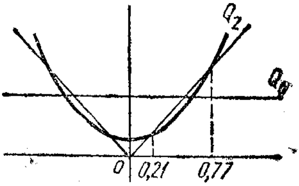
бўлиб,

$$a_{2k+1}=0,\ a_{2k}=\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\times$$

$$\times\frac{4}{(2k-1)(2k+3)}\ (k=0,\ 1,\ 2,\dots)$$

ларни топиш қийин эмас. Шунинг учун ҳам

$$|x|\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+3)}U_{2n}(x)$$



21-чизма,

бўлиб, 0, 2, 4-тартибли ўрта квадратик маънода энг яхши яқинлашувчи кўпҳадлар қуйидагилардир:

$$Q_0(x)=\frac{4}{3\pi},\ Q_2(x)=\frac{8}{15\pi}(6x^2+1),\ Q_4(x)=\frac{4}{105\pi}(-80x^4+144x^2+9)\quad \text{(21- чизма)}.$$

3-теорема. Агар $[-1,\ 1]$ оралиқда $f(x)$ функция учинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ нинг Чебишев иккинчи тур кўпҳадлари бўйича Фурье қатори ўша оралиқда $f(x)$ га текис яқинлашади.

Лагерр кўпҳадлари. Энди чексиз оралиқларда ортогонал бўлган кўпҳадларни қурамиз. *Лагерр кўпҳадлари* деб аталувчи

$$L_n^{(\alpha)}(x)=(-1)^n x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x})$$

кўпҳадлар $[0,\ \infty)$ оралиқда

$$\rho(x)=x^\alpha e^{-x}\ (x>0,\ \alpha>-1)$$

вазн билан ортогонал системани ташкил этади. Бунинг нормаси

$$\|L_n^{(\alpha)}\|=\sqrt{\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}[L_n^{(\alpha)}(x)]^2dx}=\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}$$

га тенг бўлиб, улар учун

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x)-(x-\alpha-2n-1)L_n^{(\alpha)}(x)+n(\alpha+n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)=0$$

рекуррент муносабат ўринлидир. Лагерр кўпҳадларининг биринчи 5 таси $\alpha=0$ бўлганда қуйидагилардан иборат:

$$\begin{aligned}&L_0(x)=1,\\&L_1(x)=-x+1,\\&L_2(x)=x^2-4x+2,\\&L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6,\\&L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+74.\end{aligned}$$

Агар $f(x)$ функция $[0,\ \infty)$ оралиқда $\rho(x)=x^\alpha e^{-x}$ вазнда квадрати билан интегралланувчи бўлса, даражаси n дан ортмайдиган кўпҳадлар орасида

$$Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kL_n^{(\alpha)}(x)$$

кўпҳад шу оралиқда ўрта квадратик маънода энг яхши яқинлашувчи кўпҳад бўлиб, бу ерда

$$a_k = \frac{1}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} f(x) L_n^{(\alpha)}(x)\,dx.$$

Қуйидаги теорема ўринлидир.

4-теорема. Агар $[0, \infty)$ оралиқда $f(x)$ бўлакли-силлиқ функция бўлиб,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} |f(x)|dx$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг Лагерр кўпҳадлари бўйича Фурье қатори $f(x)$ нинг узлуксизлик нуқталарида шу функциянинг ўзига, унинг узилиш нуқталарида эса $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ га яқинлашади.

Эрмит кўпҳадлари. *Эрмит кўпҳадлари* деб аталувчи

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

кўпҳад $(-\infty, \infty)$ оралиқда $\rho(x) = e^{-x^2}$ вазн билан ортогонал системани ташкил этади. Бу кўпҳаднинг нормаси

$$\|H_n\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx} = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

бўлиб, унинг учун

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

рекуррент муносабат ўринлидир. Эрмит кўпҳадларининг биринчи 6 таси қуйидагидан иборат:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad H_5(x) = 82x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Агар $f(x)$ функция $(-\infty, \infty)$ оралиқда $\rho(x) = e^{-x^2}$ вазнда квадрати билан интегралланувчи бўлса, у ҳолда даражаси n дан ортмайдиган кўпҳадлар орасида

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(x)$$

кўпҳад $(-\infty, \infty)$ оралиқда ўрта квадратик маънода энг яхши яқинлашувчи кўпҳад бўлиб, бу ерда

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x)dx.$$

Қуйидаги теорема ўринлидир.

5-теорема. Агар $f(x)$ функция $(-\infty, \infty)$ оралиқда бўлакли силлиқ бўлиб,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}f^2(x)dx$$

интеграл мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг Эрмит кўпҳадлари бўйича Фурье қатори $f(x)$ нинг узлуксизлик нуқталарида шу функциянинг ўзига, узилиш нуқталарида эса $\frac{1}{2}[f(x-0)+$ $+f(x+0)]$ га яқинлашади.

6-§. ТРИГОНОМЕТРИК КЎПҲАДЛАР БИЛАН ЎРТА КВАДРАТИК МАЪНОДА ЯҚИНЛАШИШ

Сонлар ўқининг барча нуқталарида аниқланган даврий функцияларни ўрта квадратик маънода яқинлашишда тригонометрик кўпҳадлардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

Фараз қилайлик, даври 2π бўлган узлуксиз $f(x)$ функция берилган бўлсин.

Яқинлашувчи кўпҳад $Q_n(x)$ ни қуйидаги кўринишда оламиз:

$$Q_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{6.1}$$

Агар a_k ва b_k ларни

$$\delta_n^2=\int_0^{2\pi}[f(x)-Q_n(x)]^2dx$$

нинг минимумга эришиш шартидан топадиган бўлсак, у ҳолда улар учун қуйидаги формулаларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kxdx, \\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kxdx. \end{cases} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{6.2}$$

Булар анализ курсидан маълум бўлиб, $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентларидир. Энг кичик оғишнинг миқдори эса қуйидагичадир:

$$\delta_n^2=\int_0^{2\pi}f^2(x)dx-\left[\frac{a_0^2}{4}+\sum_{k=0}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

Хусусий ҳолда, агар $f(x)$ жуфт функция бўлса,

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad b_k = 0 \quad (k = 0,\ 1, \ldots, n) \qquad (6.3)$$

ва $f(x)$ тоқ функция бўлса,

$$a_0 = 0, \ a_k = 0, \ b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx \quad (k = \overline{1,\ n})$$

бўлади.

(6.1) тригонометрик кўпҳаддаги

$$u_0 = \frac{a_0}{2}, \ u_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (k = 1,\ 2, \ldots)$$

ҳадлар одатда *гармоникалар* дейилади. Агар (6.2) формулаларни (6.1) га қўйиб, $n \to \infty$ да лимитга ўтсак, $f(x)$ функция учун унинг Фурье тригонометрик қатори

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

келиб чиқади. Функцияни Фурье тригонометрик кўпҳади ёки Фурье тригонометрик қатори шаклида ифодалаш *гармоник анализ* дейилади.

Агар $f(x)$ функция $[0,\ 2\pi]$ оралиқда квадрати билан интегралланувчи бўлса, унинг (6.3) Фурье қатори ҳар доим ўрта квадратик маънода унга яқинлашади. Агар $f(x)$ га баъзи қўшимча шартлар қўйилса, у ҳолда (6.3) қатор унга текис яқинлашади.

Мисол. $f(x)$ функция $[-\pi,\ \pi]$ оралиқда x^2 га тенг бўлиб, $(-\infty,\ \infty)$ оралиқда 2π давр билан давом эттирилган бўлсин. Шу функцияни бешинчи тартибли тригонометрик кўпҳад билан яқинлаштириш талаб қилинсин.

Функция жуфт бўлгани учун (6.3) формулага кўра $b_k = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{k\pi} x^2 \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx dx =$$

$$= \frac{4}{\pi k^2} x \cos kx \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{k^2\pi}\int_0^{\pi} \cos kx dx = \frac{4(-1)^k}{k^2}.$$

Демак, изланаётган тригонометрик кўпҳад қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$Q_5(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{25}\cos 5x\right].$$

7-§. ЖАДВАЛ БИЛАН БЕРИЛГАН ФУНКЦИЯЛАРНИ ЎРТА КВАДРАТИК МАЪНОДА ЯҚИНЛАШТИРИШ

Даражали кўпҳад билан ўрта квадратик яқинлаштириш. Фараз қилайлик, $y=f(x)$ функциянинг $x_0, x_1, \dots, x_n$ нуқталардаги аниқ ёки тақрибий $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ қийматлари берилган бўлсин. Даражаси $k (k<n)$ дан ортмайдиган

$$Q_k(x)=a_0+a_1(x)+\dots+a_kx^k$$

кўпҳадлар орасида шундай кўпҳадни топишимиз керакки,

$$\Delta_n^2=\sum_{i=0}^{n}\rho_i[f(x_i)-Q_k(x_i)]^2$$

йиғинди минимумга эришсин. Бу ерда ρ_i лар $\rho_i \geqslant 0$ ва $\sum\limits_{i=0}^{n}\rho_i=1$ шартни қаноатлантирадиган ихтиёрий сонлар.

Иккинчи параграфдагидек $\Delta_n^2=\Delta_n^2(a_0, a_1, \dots, a_n)$ дан a_j ларга нисбатан ҳосила олиб, уларни нолга тенглаштирсак, у ҳолда қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$a_0\sum_{i=0}^{n}\rho_i x_i^j+a_1\sum_{i=0}^{n}\rho_i x_i^{j+1}+\dots+a_k\sum_{i=0}^{n}\rho_i x_i^{j+k}=\sum_{i=0}^{n}\rho_i f(x_i)x_i^j$$

$$(j=0, 1, \dots, k).$$

Қуйидаги

$$s_j=\sum_{i=0}^{n}\rho_i x_i^j, \quad t_j=\sum_{i=0}^{n}\rho_i f(x_i)x_i^j$$

белгилашларни киритиб, бу системани ушбу кўринишда ёзиб олайлик:

$$\left\{\begin{array}{l} s_0a_0+s_1a_1+\dots+s_ka_k=t_0, \\ s_1a_0+s_2a_1+\dots+s_{k+1}a_k=t_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_ka_0+s_{k+1}a_1+\dots+s_{2k}a_k=t_k. \end{array}\right. \tag{7.1}$$

Бу система

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k} \end{vmatrix} \tag{7.2}$$

детерминантининг нолдан фарқлилигини ва, демак, (7.1) система ягона ечимга эга эканлигини кўрсатамиз. Дастлаб қуйидаги

$$Z_k^{(x)}=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & x^k \end{vmatrix}$$

тенглик билан аниқланган k-даражали кўпҳаднинг $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ тўпламда $\rho = \{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n\}$ вазн бўйича барча $j < k$ лар учун x^j билан ортогонал эканлигини, яъни

$$\sum_{j=0}^{n} \rho_i Z_k(x_i) x_i^j = 0 \quad (j = \overline{0, k-1}) \tag{7.3}$$

тенгликлар ўринли эканлигини кўрсатайлик. Ҳақиқатан ҳам, $j < k$ учун $Z_k(x_i)$ ни $\rho_i x_i^j$ га кўпайтириб, барча $i = 0, 1, \ldots, n$ лар бўйича йиғиб чиқсак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\sum_{i=0}^{n} \rho_i Z_k(x_i) x_i^j = \sum_{i=0}^{n} \rho_i \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} & x_i^j \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k & x_i^{j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-1} & x_i^{j+k} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} & \sum_{i=0}^{n} \rho_i x_i^j \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k & \sum_{i=0}^{n} \rho_i x_i^{j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-1} & \sum_{i=0}^{n} \rho_i x_i^{j+k} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} & s_j \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k & s_{j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-1} & s_{j+k} \end{vmatrix} = 0.$$

Иккинчи томондан $Z_k(x_i)$ ни $\rho_i x_i^k$ га кўпайтириб, қўшиб чиқсак,

$$\sum_{i=0}^{n} \rho_i Z_k(x_i) x_i^k = D_{k+1} \tag{7.4}$$

келиб чиқади. Энди (7.2), (7.3) тенгликлар ёрдамида

$$N_k = \sum_{i=0}^{n} \rho_i Z_k^2(x_i) = D_k D_{k+1} \tag{7.5}$$

тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{i=0}^{n} \rho_i Z_k^2(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \rho_i Z_k(x_i) \cdot \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k & x_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-1} & x_i^k \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots s_{k-1} & \sum\limits_{i=0}^{n} \rho_i Z_k(x_i) \\ s_1 & s_2 & \dots s_k & \sum\limits_{i=0}^{n} \rho_i Z_k(x_i) x_i \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \dots s_{2k-1} & \sum\limits_{i=0}^{n} \rho_i Z_k(x_i) x_i^k \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots s_{k-1} & 0 \\ s_1 & s_2 & \dots s_k & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \dots s_{2k-1} & D_{k+1} \end{vmatrix} = D_k D_{k+1}.$$

N_k квадратлар йиғиндиси бўлгани учун у фақат

$$Z_k(x_0) = Z_k(x_1) = \dots = Z_k(x_n) = 0$$

бўлган ҳолдагина нолга айланади. Лекин $k < n$ бўлгани учун фақат $Z_k(x) \equiv 0$ бўлгандагина $N_k = 0$ бўлади.

Агар $m = 1$ бўлса, у ҳолда (7.2) га кўра

$$Z_1(x) = \begin{vmatrix} s_0 & 1 \\ s_1 & x \end{vmatrix} = s_0 x - s_1 = 1 \cdot x - s_1 \neq 0.$$

Демак, $N_1 = D_1 D_2 > 0$. Бундан $D_1 = s_0 = 1 > 0$ ни ҳисобга олсак, $D_2 > 0$ келиб чиқади.

Энди (7.5) да $k = 2$ деб олсак, $N_2 = D_2 D_3$ бўлади. Аммо (7.2) га кўра $Z_k(x)$ да x^2 олдидаги коэффициент D_2 га тенг ва исботланганга кўра $D_2 \neq 0$, шунинг учун ҳам $N_2 > 0$; бундан эса $D_3 > > 0$. Бу мулоҳазани давом эттириб, $D_{k+1} \neq 0$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (7.1) система ягона ечимга эга, бу системани ечиб изланаётган кўпҳаднинг коэффициентларини топамиз.

Мисол. Қуйидаги

x_i	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
$f(x_i)$	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

маълумотлар учун $f(x)$ функцияга яқинлашувчи иккинчи даражали $Q_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ кўпҳад топилсин.

Ечиш. Керакли ҳисоблашларни 33-жадвалдаги схема бўйича олиб борамиз. Берилган мисолга тегишли ҳисоблашлар 34-жадвалда келтирилган, бу ерда битта эҳтиёт рақам олиниб, ҳисоблашлар вергулдан кейин учта ўнли рақамда олиб борилган.

Ўрта квадратик яқинлашиш схемаси

33- жадвал

x^0	x	x^2	x^3	x^4	$f(x)$	$xf(x)$	$x^2f(x)$
1	x_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	$f(x_0)$	$x_0 f(x_0)$	$x_0^2 f(x_0)$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	$f(x_1)$	$x_1 f(x_1)$	$x_1^2 f(x_1)$
1	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	$f(x_2)$	$x_2 f(x_2)$	$x_2^2 f(x_2)$
1	x_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	$f(x_3)$	$x_3 f(x_3)$	$x_3^2 f(x_3)$
1	x_4	x_4^2	x_4^3	x_4^4	$f(x_4)$	$x_4 f(x_4)$	$x_4^2 f(x_4)$
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	t_0	t_1	t_2

34- жадвал

x^0	x	x^2	x^3	x^4	$f(x)$	$xf(x)$	$x^2f(x)$
1	0,78	0,608	0,475	0,370	2,50	1,950	1,520
1	1,56	2,434	3,796	5,922	1,20	1,872	2,921
1	2,34	5,476	12,813	29,982	1,12	2,621	6,133
1	3,12	9,734	30,371	94,759	2,25	7,020	21,902
1	3,81	14,516	55,306	210,717	4,28	16,307	62,604
5	11,61	32,768	102,761	341,750	11,35	29,770	94,604

Бундан a_0, a_1, a_2 коэффициентлар аниқланадиган система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$5a_0 + 11{,}61a_1 + 32{,}768a_2 = 11{,}350,$$
$$11{,}61a_0 + 32{,}768a_1 + 102{,}761a_2 = 29{,}770,$$
$$32{,}768a_0 + 102{,}761a_1 + 341{,}750a_2 = 94{,}604.$$

Бу системанинг ечими

$$a_0 = 5{,}045; \quad a_1 = -4{,}073; \quad a_2 = 1{,}009$$

бўлиб, изланаётган кўпҳад:

$$Q_2(x) = 5{,}045 - 4{,}073x + 1{,}009x^2 \text{ дир.}$$

Энди $f(x)$ га тегишли дастлабки маълумотни $Q_2(x)$ нинг қийматлари билан солиштирайлик. Натижалар 35- жадвалда келтирилган.

Ўрта квадратик усул билан ҳисоблашнинг хатоси:

35- жадвал

x	$f(x)$	$Q_2(x)$	$Q_2(x) - f(x)$
0,78	2,50	2,505	+0,005
1,56	1,20	1,194	—0,006
2,34	1,12	1,110	—0,010
3,12	2,25	2,252	+0,002
3,81	4,28	4,288	+0,008

Тригонометрик кўпҳадлар ёрдамида ўрта квадратик яқинлашиш. Фараз қилайлик, даври 2π га тенг бўлган $f(x)$ функциянинг $[0, 2\pi]$ оралиқнинг тенг узоқликда жойлашган

$$x_j = \frac{2\pi j}{n} \quad (j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

n та нуқтадаги $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\ldots$, $f(x_{n-1})$ қийматлари берилган бўлсин. Тригонометрик кўпҳад $T_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} [a_m \cos mx + b_m \sin mx]$ даги a_m ва b_m коэффициентларни шундай танлайликки, $n > 2k$ бўлганда

$$\delta_n^2 = \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_j) - T_k(x_j)]^2$$

ифода энг кичик қийматга эришсин.

Одатдагидек, δ_n^2 дан барча a_l ва b_l лар бўйича ҳосила олиб, уларни нолга тенглаштирсак, қуйидаги тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{k} \Big[a_m \sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \cos lx_j + b_m \sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j \cos lx_j\Big] = \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \cos lx_j, \\
&\sum_{m=0}^{k} \Big[a_m \sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \sin lx_j + b_m \sum_{j=0}^{n-1} \sin kx_j \sin lx_j\Big] = \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \sin lx_j
\end{aligned}\right\} \qquad (7.6)$$

Бу системанинг коэффициентларини соддалаштириш мақсадида барча l, $m = 0,\ 1,\ \ldots,\ k$ лар учун қуйидаги тенгликларни исботлайлик:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j = 0; \qquad (7.7)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j = \begin{cases} 0, & \text{агар } m \neq 0 \text{ бўлса,} \\ n, & \text{агар } m = 0 \text{ бўлса;} \end{cases} \qquad (7.8)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \sin lx_j = 0; \qquad (7.9)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \cos lx_j = \begin{cases} 0, & \text{агар } m \neq l \text{ бўлса,} \\ \frac{n}{2}, & \text{агар } m = l \neq 0 \text{ бўлса,} \\ n, & \text{агар } m = l = 0 \text{ бўлса;} \end{cases} \qquad (7.10)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sin mx_j\sin lx_j=\begin{cases}0, & \text{агар } m\neq l \text{ бўлса},\\ \frac{n}{2}, & \text{агар } m=l\neq 0 \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } m=l=0 \text{ бўлса}.\end{cases}\qquad (7.11)$$

Ҳақиқатан ҳам, (7.7) — (7.8) тенгликлар $m=0$ бўлганда кўриниб турибди, $m\neq 0$ бўлганда уларга ишонч ҳосил қилиш учун қуйидаги

$$\sum_{j=0}^{n-1}\cos mx_j+i\sum_{j=0}^{n-1}\sin mx_j=\sum_{j=0}^{n-1}e^{imx_j}=\sum_{j=0}^{n-1}e^{im\frac{2\pi j}{n}}=$$

$$=\frac{1-e^{2\pi i m}}{1-e^{2\pi i\frac{m}{n}}}=0$$

тенгликда ҳақиқий ва мавҳум қисмларини нолга тенглаштириш кифоядир. (7.9) тенгликни кўрсатиш учун унинг чап томонини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\cos mx_j\sin lx_j=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}[\sin(l+m)x_j+\sin(l-m)x_j]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\sin(l+m)x_j+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\sin(l-m)x_j.$$

Охирги йиғиндилар (7.7) — (7.8) тенгликларга кўра нолга тенг. Қолган тенгликлар ҳам шу йўл билан келтириб чиқарилади.

Исбот қилинган (7.7) — (7.11) тенгликлардан фойдаланиб, a_m ва b_m лар учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases}a_0=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j),\\ a_m=\frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)\cos mx_j,\\ b_m=\frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)\sin mx_j.\end{cases}\qquad (7.12)$$

Бу формулалар *Бессел формулалари* дейилади.

Агар қаралаётган $f(x)$ функция жуфт бўлса, у ҳолда $b_m=0$ $(m=\overline{1,\ k})$ бўлиб, аксинча у тоқ бўлса, у ҳолда $a_m=0$ $(m=\overline{0,\ k})$ бўлади (бу ерда $f(0)=f(\pi)$ эканлиги назарда тутилади).

Бундай ҳолларда (7.12) даги нолдан фарқли коэффициентларни ҳисоблаётганда, йиғишни $[0,\ 2\pi]$ оралиқнинг ярми бўйича бажариб сўнгра натижани иккилантириш мумкиндир.

Мисол. $[0, 2\pi]$ оралиқда қуйидаги қийматлари берилган жуфт $f(x)$ функция учун унга яқинлашувчи учинчи тартибли тригонометрик кўпҳад топилсин:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	0	2	5	3	0

Ечиш. Бу ерда $n = 8$, $f(x)$ жуфт бўлгани учун $b_m = 0$ бўлиб, a_0 ва a_m лар қуйидагича топилади:

$$a_0 = \frac{1}{8}\sum_{j=0}^{7} f(x_j) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} f(x_j) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2},$$

$$a_m = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} f(x_j)\cos mx_j = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} f(x_j)\cos\frac{m\pi j}{4}.$$

Бундан $a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $a_2 = -\frac{5}{2}$, $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Демак, изланаётган кўпҳад қуйидагидан иборат:

$$T_3(x) = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cos x - \frac{5}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos 3x.$$

8- §. ЭНГ ЯХШИ ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИ АЛГЕБРАИК КЎПҲАДЛАР

Энди $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган $f(x)$ функция учун

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in H_n(P)} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - P_n(x)| \qquad (8.1)$$

тенгликни таъминловчи $P_n^*(x)$ алгебраик кўпҳаднинг мавжудлигини, ягоналигини ва қуриш мумкинлигини кўриб ўтамиз. Бу ерда $H_n(P)$ даражаси n дан ортмайдиган алгебраик кўпҳадлар тўплами.

1- теорема. $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган, ихтиёрий $f(x)$ функция учун энг яхши яқинлашувчи $P_n^*(x)$ алгебраик кўпҳад мавжуд.

Исбот. Ихтиёрий $f(x) \in C[a, b]$ учун қуйидагича аниқланган

$$\|f(x)\| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$$

сон норма таърифидаги ҳар уч шартни қаноатлантиради. Шунинг учун ҳам

$$|\,\|f_1\| - \|f_2\|\,| \leqslant \|f_1 - f_2\| \qquad (8.2)$$

тенгсизлик ўринлидир. Энди ихтиёрий $P_n(x) \in H_n(P)$ ва $f(x) \in C[a, b]$ учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\|P_n\| = \max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| = F_0(a_0, a_1, \ldots, a_n), \qquad (8.3)$$

$$\|f - P_n\| = \max_{a< x\leqslant b}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| = F_f(a_0, a_1, \ldots, a_n). \qquad (8.4)$$

Агар $f(x)$ ни қатъий белгилаб, $P_n(x)$ ни $H_n(P)$ тўплам бўйича ўзгартирсак, $(n+1)$ ўлчовли $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ фазода аниқланган F_0 ва F_f функцияларга эга бўламиз. Бу функциялар (8.2) тенгсизликка кўра $a_0, a_1, \dots, a_n$ коэффициентларнинг узлуксиз функцияларидир. Ҳақиқатан ҳам, берилган ε учун

$\delta = \varepsilon/\max\left(\sum_{k=0}^{n} |a|^k, \sum_{k=0}^{n} |b|^k\right)$ деб олсак, у ҳолда $|a_i - a_i^{(0)}| < \delta$ $(i = \overline{0, n})$ бўлганда

$$|F_0(a_0, a_1, \dots, a_n) - F_0(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)})| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k^{(0)} x^k \right| \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} \sum_{k=0}^{n} |a_k - a_k^{(0)}| |x|^k < \varepsilon$$

бўлади, яъни $F_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ узлуксиз экан. (8.4) дан кўринадики, худди шунингдек, $F_f(a_0, a_1, \dots, a_n)$ ҳам узлуксиздир. $F_f(a_0, a_1, \dots, a_n)$ манфий эмас. Унинг аниқ қуйи чегарасини m орқали белгилаймиз. Теоремани исботлаш учун F_f ўзининг қуйи чегарасига эришадиган шундай $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ нуқта топилишини кўрсатишимиз керак. Ҳақиқатан ҳам, $(n+1)$ ўлчовли Евклид фазосида $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 = 1$ бирлик сферада ётувчи нуқталар тўпламини олайлик. Бу тўплам — чегараланган ёпиқ тўпламдир. Демак, унда узлуксиз мусбат F_0 функция ўзининг аниқ қуйи чегараси μ га эришиши керак. Кўриниб турибдики, $\mu > 0$, акс ҳолда шундай

$$(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} [a_k^{(0)}]^2 = 1\right)$$

нуқта топилар эдики, унда

$$F_0(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k^{(0)} x^k \right| = 0$$

бўлар эди, бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки $1, x, \dots, x^n$ лар чизиқли эрклидир. Қуйидаги

$$r = \frac{m + 1 + \|f\|}{\mu}$$

сонни олиб, бутун $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ фазони икки қисм: R_1 ва R_2 га ажратамиз; $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leqslant r^2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча нуқталарни R_1 га киритиб, қолганларини R_2 га киритамиз. $F_f(a_0, a_1, \dots, a_n)$ функциянинг R_2 даги қийматларини қарайлик. Фараз қилайлик, $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in R_2$, у ҳолда $\sum_{k=0}^{n} b_k^2 = \rho^2 > r^2$, яъни

$\sum\limits_{k=0}^{n} b_k^2 \rho^{-2} = 1$ бўлиб, қуйидаги баҳо ўринли бўлади:

$$F_f(b_0, b_1, \ldots, b_n) = \| f(x) - P_n(x) \| \geqslant \Big| \, \| P_n(x) \| - \| f(x) \| \, \Big| =$$

$$= \left| \, |\rho| \; \| \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{|\rho|} x^k \| - \| f \| \right| \geqslant |\rho| \; \| \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{|\rho|} x^k \| -$$

$$- \| f \| \geqslant |\rho| \mu - \| f \| > r\mu - \| f \| = m + 1$$

(охирги тенглик r нинг танланишига кўра бажарилади). Демак, R_2 қисмда F_f нинг қуйи чегараси $m+1$ дан кичик эмас ва m сони F_f функция қийматларининг R_1 даги қуйи чегараси экан. Лекин бу тўплам чегараланган ва ёпиқдир. Бу тўпламда узлуксиз бўлган $F_f(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ функция ўзининг аниқ қуйи чегарасига эришиши керак. Агар бу нуқтани $(a_0^*\, a_1^*, \ldots, a_n^*)$ орқали белгилаб олсак, у ҳолда

$$m = F_f(a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*) = \| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k^* x^k \| = \| f(x) - P_n^*(x) \|$$

бўлади. Шундай қилиб, энг яхши яқинлашувчи $P_n^*(x)$ кўпҳад мавжуд.

Энди кўпҳаднинг узлуксиз функция учун энг яхши яқинлашувчи кўпҳад бўлишининг зарурий ва етарли шартларини келтирамиз.

Валле—Пуссен теоремаси. Фараз қилайлик, $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ $[a, b]$ оралиқнинг шундай $(n+2)$ та нуқтаси бўлсинки, улар учун

$$\operatorname{sign} \left[(-1)^l (f(x_l) - P_n(x_l)) \right] = \text{const} \tag{8.5}$$

бўлсин, яъни x_l нуқтадан навбатдаги x_{l+1} нуқтага ўтилганда $f(x) - P_n(x)$ миқдор ўз ишорасини ўзгартирсин. У ҳолда

$$E_n(f) \geqslant m = \min_{l=1, \ldots, n+2} |f(x_l) - P_n(x_l)|. \tag{8.6}$$

Исбот. Агар $m = 0$ бўлса, у ҳолда теорема тасдиғининг ўринлилиги кўриниб турибди. Энди $m > 0$ деб олиб, тескарисини фараз қиламиз, яъни энг яхши яқинлашувчи $P_n^*(x)$ кўпҳад учун

$$\| P_n^* - f \| = E_n(f) < m \tag{8.7}$$

бўлсин. Қуйидаги

$$\operatorname{sign} \left[P_n(x) - P_n^*(x) \right] = \operatorname{sign} \left[(P_n(x) - f(x)) - (P_n^*(x) - f(x)) \right],$$

$$| P_n(x_l) - f(x_l) | > | P_n^*(x_l) - f(x_l) |$$

муносабатлардан $\operatorname{sign} [P_n(x_l) - P_n^*(x_l)] = \operatorname{sign} [P_n(x_l) - f(x_l)]$ тенглик келиб чиқади. Демак, n- даражали $P_n(x) - P_n^*(x)$ кўпҳад ўз ишорасини $n+1$ марта алмаштиради, яъни $P_n(x) - P_n^*(x) \equiv 0$. Бу эса (8.7) фараз қилинган шартга қарама-қарши натижадир. Бу қарама-қаршилик теоремани исботлайди.

Чебишев теоремаси. $P_n^*(x)$ кўпҳад $[a, b]$ оралиқда узлуксиз $f(x)$ функциянинг энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳади бўлиши учун бу оралиқда камида $n+2$ та қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ нуқталарнинг мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир: $\varepsilon = 1$ ёки $\varepsilon = -1$ бўлганда барча $i = 1, 2, \ldots, n+2$ лар учун

$$f(x_i) - P_n^*(x_i) = \varepsilon(-1)^i \|f - P_n^*\|$$

тенгликлар ўринли бўлсин.

Теорема шартларини қаноатлантирадиган $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ нуқталар *Чебишев альтернансининг нуқталари* дейилади.

Исбот. Кифоялиги. $L = \|f - P_n^*\|$ деб белгилайлик. (8.6) тенгсизликка кўра $L = m \leqslant E_n(f)$, лекин $E_n(f)$ нинг таърифига кўра $E_n(f) \leqslant \|f - P_n^*\| = L$ бўлиши керак. Демак, $E_n(f) = L$ ва $P_n^*(x)$ энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад бўлади.

Зарурийлиги. Фараз қилайлик, $P(x) = P_n^*(x)$ энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад мавжуд бўлсин. Бу кўпҳад учун $\|P - f\| = E_n(f)$ бўлиб, ҳеч бўлмаганда битта шундай x_0 нуқта мавжудки, унинг учун $|P(x_0) - f(x_0)| = E_n(f)$. Бундай нуқта энг катта оғиш нуқтаси ёки қисқача (E)-нуқта дейилади. $P(x)$ кўпҳаднинг графиги $y = f(x) + E_n(f)$ ва $y = f(x) - E_n(f)$ чизиқлар орасида ётади, ҳамда x_0 нуқтада $P(x)$ нинг графиги ё юқори чизиққа, ёки пастки чизиққа уринади. Агар $P(x)$ нинг графиги бирор нуқтада юқори чизиққа уринса, бундай нуқта энг катта оғишнинг $(+)$ нуқтаси ёки қисқача $(+)$ нуқта ва кўпҳаднинг графиги пастки чизиққа уринадиган ҳар қандай нуқта $(-)$ нуқта дейилади.

Кўриниб турибдики, $(+)$ нуқта билан бир вақтда $(-)$ нуқта ҳам мавжуд бўлиши керак, чунки $(+)$ нуқта ёки $(-)$ нуқта мавжуд бўлмаса, у ҳолда бирор кичик мусбат сонни $P(x)$ дан айириб ёки унга қўшиб, шундай кўпҳад ҳосил қилиш мумкинки, унинг графиги $y = f(x)$ чизиқ атрофидаги торроқ йўлакда жойлашади. Бу эса $P(x)$ нинг энг яхши яқинлашувчи кўпҳадлигини инкор қилади.

Энди $[a, b]$ оралиқни

$$[a = t_0 < t_1 < \ldots < t_s = b$$

нуқталар билан шундай кичик қисмларга бўламизки, бу қисмларнинг ҳар бирида $P(x) - f(x)$ нинг тебраниши $^1/_2 E_n(f)$ дан кичик бўлсин. Ҳеч бўлмаганда битта (E) нуқтага эга бўлган ҳар бир (E) $t_k \leqslant x \leqslant t_{k+1}$ қисмни (E) сегмент деб атаймиз. Ҳар бир (E) сегментда $P(x) - f(x)$ нолга айланмайди (чунки унинг тебраниши $\frac{1}{2} E_n(f)$ дан кичик) ва ўз ишорасини сақлайди. Демак, ҳар бир (E) сегментда ё фақат $(+)$ нуқта ётади ва бу ерда $P(x) - f(x)$ мусбат, бундай сегментни $(+)$ сегмент деймиз ёки фақат $(-)$ нуқта ётади ва бу ерда $P(x) - f(x)$ манфий, бундай сегментни $(-)$

сегмент деймиз. (E) сегментларни чапдан ўнгга қараб номерлаб чиқамиз

$$d_1, d_2, \ldots, d_N,$$

кейин $P(x)-f(x)$ айирма энг камида неча марта ўз ишорасини алмаштириши мумкинлигини аниқлаш учун (E) сегментларни группаларга қуйидагича ажратамиз. Аниқлик учун d_1 ни ($+$) сегмент деб оламиз:

$$\begin{array}{ll} d_1, d_2, \ldots, d_{k_1} & [(+)\text{ сегментлар}], \\ d_{k_1+1}, d_{k_1+2}, \ldots, d_{k_2} & [(-)\text{ сегментлар}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{k_{m-1}+1}, \quad d_{k_{m-1}+2}, \ldots, d_{k_m} & [(-1)^{m-1}\text{ сегментлар}]. \end{array} \qquad (8.8)$$

Бу ерда m та группа кўрсатилди, буларнинг ҳар бири камида битта (E) сегментга эга. Агар $m \geqslant n+2$ бўлса, у ҳолда теореманинг тасдиғи келиб чиқади.

Тескариси $m < n+2$ ни фараз қилайлик ва бундай фараз $P(x)$ нинг энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад бўлишлигига зид эканлигини кўрсатамиз. Кўриниб турибдики, d_{k_j} ва d_{k_j+1} ($j=1, 2, \ldots, m-1$) сегментларда $P(x)-f(x)$ қарама-қарши ишораларга эга, шунинг учун ҳам бу сегментлар умумий четки нуқталарга эга эмас ва улар ўзаро (E) сегмент бўлмаган сегментлар билан ажралган бўлиши керак. Шунинг учун ҳам z_j ($j=1, 2, \ldots, m-1$) нуқталарни шундай танлаш мумкинки, улар d_{k_j} дан ўнгда ва d_{k_j+1} дан чапда ётади.

Қуйидаги

$$v(x)=(z_1-x)(z_2-x)\ \ldots\ (z_{m-1}-x)$$

$m-1$ ($\leqslant n$)- даражали кўпҳадни тузайлик. (8.8) сегментларнинг биринчи группасида $v(x)$ ҳамда $P(x)-f(x)$ айирма мусбат, иккинчи группада $v(x)$ ҳамда $P(x)-f(x)$ айирма манфий ва ҳоказо. Барча (E) сегментларда $\operatorname{sign} v(x)=\operatorname{sign}(P(x)-f(x))$, ($E$) сегмент бўлмаган барча сегментларда $|P(x)-f(x)|<E_n(f)$. Айтайлик, бу сегментларда $|P(x)-f(x)| \leqslant E' < E_n(f)$ бўлсин.

Энди $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |v(x)|=\rho$ деб олиб, λ мусбат сонини шундай танлаб оламизки,

$$\lambda\rho < E_n(f)-E' \qquad \text{ва} \qquad \lambda\rho < \frac{1}{2}E_n(f)$$

тенгсизликлар бажарилсин. Даражаси n дан ортмайдиган

$$Q(x)=P(x)-\lambda v(x)$$

кўпҳаднинг $f(x)$ дан оғиши $E_n(f)$ дан кичик эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, ҳар бир (E) сегмент бўлмаган сегментларда

$$|Q(x)-f(x)| \leqslant |P(x)-f(x)|+\lambda|v(x)| \leqslant E'+\lambda\rho <$$
$$< E'+(E_n(f)-E')=E_n(f).$$

Ҳар бир (E) сегментда $\operatorname{sign}(P(x)-f(x))=\operatorname{sign} v(x)$, $v(x)\neq 0$ ва $|P(x)-f(x)|>\frac{1}{2}E_n(f)$, $|\lambda v(x)|<\frac{1}{2}E_n(f)$ бўлгани учун

$$|Q(x)-f(x)|=|P(x)-\lambda v(x)-f(x)|=|P(x)-f(x)|-$$
$$-\lambda|v(x)|\leqslant E_n(f)-\lambda|v(x)|<E_n(f).$$

Шундай қилиб, $P(x)$ энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад эмас экан. Бу қарама-қаршилик $m\geqslant n+2$ эканини ва яна шу билан теореманинг ўринли эканини исботлайди.

Ягоналик теоремаси. Узлуксиз функция учун даражаси n дан ортмайдиган энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад ягонадир.

Исбот. Фараз қилайлик, даражаси n дан ортмайдиган энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳадлар иккита $P_n(x)$ ва $Q_n(x)$ бўлсин:

$$Q_n(x)\not\equiv P_n(x),\quad \|Q_n-f\|=\|P_n-f\|=E_n(f).$$

Бундан

$$\left\|f-\frac{P_n+Q_n}{2}\right\|\leqslant\left\|\frac{P_n-f}{2}\right\|+\left\|\frac{Q_n-f}{2}\right\|=E_n(f).$$

Демак, $\frac{1}{2}(P_n(x)+Q_n(x))$ кўпҳад ҳам энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад экан. Фараз қилайлик $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ шу кўпҳадга мос келувчи Чебишев альтернансининг нуқталари бўлсин. У ҳолда

$$\left|\frac{1}{2}\left[P_n(x_i)+Q_n(x_i)\right]-f(x_i)\right|=E_n(f)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+2)$$

ёки

$$|[P_n(x_i)-f(x_i)]+[Q_n(x_i)-f(x_i)]|=2E_n(f).\qquad (8.9)$$

Лекин

$$|P(x_i)-f(x_i)|\leqslant E_n(f),\ |Q_n(x_i)-f(x_i)|\leqslant E_n(f).$$

(8.9) тенглик фақат

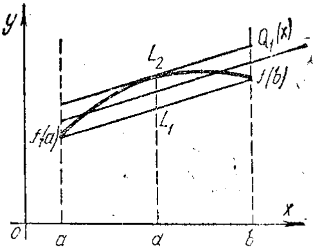
$$P_n(x_i)-f(x_i)=E_n(f),$$
$$Q_n(x_i)-f(x_i)=E_n(f)$$

бўлган ҳолдагина бажарилади. Бундан, $n+2$ нуқтада иккита n-даражали $P_n(x)$ ва $Q_n(x)$ кўпҳадлар қийматларининг ўзаро устма-уст тушишлари келиб чиқади, бу эса уларнинг айнан тенг эканликларини билдиради.

Энди бир неча мисоллар келтирамиз.

1-мисол (энг яхши яқинлашадиган ўзгармас). Фараз қилайлик, узлуксиз $f(x)$ функция учун унга энг яхши яқинлашадиган ўзгармасни, яъни нолинчи даражали кўпҳадни топиш талаб қилинган бўлсин.

Айтайлик, $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, $m=\min\limits_{a<x\leqslant b} f(x)$ бўлсин. У ҳолда $Q_0=\frac{1}{2}(M+m)$ изланаётган энг яхши яқинлашувчи нолинчи даражали кўпҳад ва шу билан бирга $E_0(f)=\frac{1}{2}(M-m)$ бўлади. Бунинг исботи шунга асосланганки, $f(x_1)=M$ ва $f(x_2)=m$ тенгликларни қаноатлантирувчи x_1 ва x_2 нуқталар Чебишев альтернансининг нуқталаридир.



22-чизма.

2- **мисол** (энг яхши чизиқли функция). $f(x)$ функция икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, $f''(x)$ ҳосила $[a, b]$ оралиқда ўз ишорасини сақласин деб фараз қилайлик. Аниқлик учун $f''(x) < 0$ деб ҳисоблайлик. Бу функцияга энг яхши яқинлашувчи биринчи даражали кўпҳадни топиш талаб қилинсин. Масаланинг ечилишини чизмада тушунтирамиз (22-чизма). Функция графигидаги $(a, f(a))$ ва $(b, f(b))$ нуқталарни L_1 кесма билан бирлаштирамиз — бу кесма чизиқли функция $l_1(x)$ нинг графигидир. $[a, b]$ оралиқда ягона d нуқта топиладики, у нуқтада графикка ўтказилган L_2 уринма L_1 га параллел бўлади (чунки $f''(x) < 0$); L_2 — чизиқли функция $l_2(x)$ нинг графигидир.

Энди равшанки, $Q_1(x) = 0{,}5\,(l_1(x) + l_2(x))$ изланаётган энг яхши яқинлашувчи чизиқли функциядир. Осонлик билан кўриш мумкинки, a, d, b нуқталар Чебишев альтернансининг нуқталаридир.

5- бобда Лагранж интерполяцион формуласининг қолдиқ ҳадини минималлаштириш мақсадида интерполяция тугунлари сифатида $(n+1)$- тартибли $\overline{T}_{n+1}^{[a,\,b]}(x)$ кўпҳаднинг

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2(n+1)} \qquad (k = \overline{1, n+1})$$

илдизларини олиб, қуйидаги

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \qquad (8.10)$$

баҳога эга бўлган эдик. Бундан

$$E_n(f) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}$$

келиб чиқади.

Фараз қилайлик, $P_n^*(x)$ кўпҳад $f(x)$ функция учун энг яхши, текис яқинлашувчи кўпҳад бўлсин. Чебишев теоремасига кўра $f(x) - P_n^*(x)$ айирма $(n+1)$ та $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ нуқталарда нолга айланади. Шунинг учун ҳам $P_n^*(x)$ ни тугунлари $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ лардан иборат бўлган интерполяцион кўпҳад деб қараш мумкин. 5- боб (4.1) формулага кўра интерполяция хатоси учун

$$f(x) - P_n^*(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!},$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_{n+1}), \quad \xi \in [a, b]$$

формула ўринлидир. Фараз қилайлик,

$$\max_{a < x \leqslant b} |\omega_{n+1}(x)| = |\omega_{n+1}(x_0)|$$

бўлсин. У ҳолда

$$E_n(f) = \|f - P_n^*\| \geqslant |f(x_0) - P_n^*(x_0)| =$$

$$= \left|f^{(n+1)}(\xi(x_0))\right| \frac{|\omega_{n+1}(x_0)|}{(n+1)!} \geqslant \min_{a < x < b} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \max_{a < x < b} \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!}.$$

Иккинчи томондан $\overline{T}_n^{[a,b]}(x)$ нолдан энг кам оғувчи кўпҳад бўлганлиги учун

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\omega_{n+1}(x)|\geqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\overline{T}_n^{[a,b]}(x)\right|\geqslant\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}},$$

Бундан қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$E_n(f)\geqslant\min_{a<x<b}|f^{(n+1)}(x)|\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}. \qquad (8.11)$$

Шундай қилиб, агар $f^{(n+1)}(x)$ ўз ишорасини сақласа ва секин ўзгарса у ҳолда энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳаднинг хатоси билан Чебишев кўпҳадларининг ноллари бўйича тузилган интерполяцион кўпҳад хатоси орасидаги фарқ айтарли катта бўлмайди. Айтилганларни қуйидаги масалага қўллаш мумкин.

3- мисол. Берилган $(n+1)$- даражали

$$f(x)=Q_{n+1}(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n+1}x^{n+1},\ a_{n+1}\neq 0$$

кўпҳад учун энг яхши текис яқинлашувчи $P_n^*(x)$ кўпҳад топилсин. Бу ҳолда $f^{(n+1)}(x)=a_{n+1}(n+1)!$ бўлганлиги туфайли $E_n(f)$ учун (8.10) ва (8. 11) баҳолар устма-уст тушади:

$$E_n(f)=\frac{|a_{n+1}|(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Шундай қилиб, бу ерда энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад Чебишев кўпҳадининг

$$x_k=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}\quad(k=\overline{1,n+1})$$

илдизлари бўйича тузилган интерполяцион кўпҳад билан бир хил бўлади.

Энг яхши яқинлашувчи кўпҳадни бошқа кўринишда ҳам тасвирлаш мумкин:

$$P_n^*(x)=Q_{n+1}(x)-a_{n+1}T_{n+1}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \qquad (8.12)$$

Ҳақиқатан ҳам, ўнг томондаги ифода n- даражали кўпҳаддир, чунки x^{n+1} олдидаги коэффициент нолга тенг. (8.12) дан кўрамизки, $|Q_{n+1}(x)-P_n^*(x)|$ максимумга эришадиган ушбу

$$x_j=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{\pi j}{n+1}\qquad(j=\overline{0,n+1})$$

нуқталар $[a,b]$ оралиғида Чебишев альтернансининг нуқталарини ташкил этади.

Чебишевнинг $T_n(x)$ кўпҳадлари яқинлашувчи кўпҳадлар даражасини пасайтириш учун ҳам қўлланилади. Буни қуйидаги мисолда кўрайлик. Фараз қилайлик, $f(x)=\cos x$ ни $[-1,1]$ оралиқда олтинчи даражали кўпҳад билан яқинлаштириш талаб қилинсин. Бу функциянинг Тейлор қаторида 6- даражали ҳадини сақласак:

$$Q_6(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!},$$

у ҳолда

$$\|f-Q_6\|<\frac{1}{8!}<25\cdot 10^{-6}$$

ва

$$\|f-Q_6\|\geqslant|f(1)-Q_6(1)|>\frac{1}{8!}-\frac{1}{10!}>24\cdot 10^{-6}.$$

Энди яқинлашувчи кўпҳад сифатида, $\cos x$ нинг Тейлор қаторида қуйидаги

$$Q_8(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$$

қисмий йиғиндини олиб, бу ердан $\widetilde{T}_8(x)=2^{-7}T_8(x)$ Чебишев кўпҳади ёрдамида x^8 ни йўқотамиз, натижада олтинчи даражали ушбу

$$P_6(x)=Q_8(x)-\frac{1}{8!}\widetilde{T}_8(x)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^7\cdot 8!}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4!8!}\right)x^2+\left(\frac{1}{4!}-\frac{5}{4!\,8!}\right)x^4-\left(\frac{1}{4!}-\frac{2}{8!}\right)x^6$$

кўпҳадга эга бўламиз. Шу билан бирга

$$\|f-P_6\|\leqslant\|f-Q_8\|+\frac{1}{8!}\|\widetilde{T}_8\|<\frac{1}{10!}+\frac{1}{2^7\cdot 8!}<47\cdot 10^{-8}.$$

Шундай қилиб, $P_6(x)$ кўпҳад $f(x)=\cos x$ функция учун олтинчи даражали Тейлор қаторига нисбатан 50 марта яхшироқ яқинлашишни беради.

9-§. СПЛАЙН-ФУНКЦИЯЛАР БИЛАН ЯҚИНЛАШИШ

Сплайн-функциянинг таърифи. Биз 4-бобда ва шу бобнинг олдинги параграфларида функцияни кўпҳадлар билан яқинлаштиришнинг турли усуллари билан танишдик. Силлиқлиги юқори бўлмаган функциялар учун кўпҳадлар яқинлашиш аппарати сифатида қатор ноқулайликларга эга. Булардан энг асосийси шундан иборатки, бундай функцияларнинг бирор нуқта атрофидаги ҳолати, уларнинг тўла ҳолати билан узвий боғлиқдир. Бундан ташқари интерполяцион кўпҳадларнинг нуқсони сифатида уларнинг ҳар доим ҳам интерполяцияланувчи функцияга яқинлашавермаслигидир. Энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳадларнинг камчилиги сифатида шуни кўрсатиш мумкинки, уларни қуриш жуда қийин ва одатда бундай кўпҳаднинг даражаси ортиши билан коэффициентлари ҳам тез ўсиб боради.

Охирги вақтларда шу нуқсондан ҳоли бўлган бошқа яқинлашиш аппаратлари ишлаб чиқилмоқда. Назарий тадқиқот ва татбиқларда яхши натижа берадиган аппарат — сплайн-функциялар аппаратидир. Сплайннинг таърифи билан танишайлик. Ҳақиқий ўқдаги $[a, b]$ оралиқда ушбу

$$\Delta_n: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

тўр берилган бўлсин. Фараз қилайлик, $H_m(P)$ даражаси m дан ортмайдиган кўпҳадлар тўплами, $C^{(k)}=C^{(k)}[a, b]$ ўзи ва k тартибгача ҳосилалари $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган функциялар тўплами бўлсин.

Таъриф. Қуйидаги иккита шартни қаноатлантирувчи ушбу

$$S_m(x)=S_m(x, \Delta_n)$$

функция дефекти 1 га тенг бўлган *m- даражали полиноминал сплайн* дейилади:

1) Ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=\overline{0, n})$ оралиқда $S_m(x) \in H_m(P)$;
2) $S_m(x) \in C^{(m-1)}[a, b]$.

Бу ердаги $\{x_i\}$ нуқталар *сплайн тугунлари* дейилади. $S_m(x)$ сплайннинг m- ҳосиласи $[a, b]$ оралиқда узилишга эга бўлиши ҳам мумкин.

Агар $k=0,1, \ldots, m$ лар учун

$$S_m^{(k)}(a+0)=S_m^{(k)}(b-a)$$

тенгликлар бажарилса, $S_m(x)$ сплайн *$b-a$ даврли даврий сплайн* дейилади.

Таърифни қаноатлантирувчи сплайнлар билан бир қаторда шундай сплайнлар ҳам қараладики, уларнинг силлиқлиги Δ_n тўрнинг турли қисмларида турличадир. Бундай сплайнлар $[a, b]$ оралиқнинг турли қисмларида турли силлиқликка эга бўлган функцияларни яқинлаштиришда фойдаланилади.

Одатда, сплайн ягона равишда аниқланиши учун $[a, b]$ оралиқнинг четки a ва b нуқталарида *чегаравий шартлар* деб аталувчи қўшимча шартлар қўйилади. Амалда учинчи даражали, яъни кубик сплайнлар кенг қўлланилади.

Сплайнларнинг ҳисоблаш математикасида кенг қўлланилаётганлиги сабабларидан яна бири уларнинг қийматларини ЭҲМларда ҳисоблашнинг қулайлиги ва улар ёрдамида интерполяциялаш каби жараёнларнинг кенг синфдаги тўрлар учун яхши яқинлашишлигидадир (юқорида айтилгандек кўпҳад билан интерполяциялаш бундай эмас).

Бундан буён биз интерполяцион кубик ва $S_3''(x)=S_3''(b)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи сплайнлар билан шуғулланамиз.

Интерполяцион кубик сплайнларни қуриш. Олдинги пунктда айтилгандан сўнг қуйидаги таърифни бера оламиз.

Таъриф. Қуйидаги тўрт шартни қаноатлантирувчи ушбу $S(f, x)=S_3(f, x, \Delta_n)$ функция *интерполяцион кубик сплайн* дейилади:

1. Ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=\overline{0, n})$ оралиқда $S(f, x) \in H_3(P)$;
2. $S(f, x) \in C^2[a, b]$;
3. Тўрнинг x_k $(k=\overline{0, n})$ тугунларида $S(f, x_k)=f_k$ тенглик ўринли;
4. $S''(f, x)$ учун

$$S''(f, a)=S''(f, b)=0 \qquad (9.1)$$

чегаравий шартлар бажарилади. Бу тўрт шартни қаноатлантирувчи ягона $S(f,x)$ сплайн мавжудлигини кўрсатамиз. Бунинг учун аввал қуйидаги ёрдамчи фактларни келтирамиз.

Лемма. Фараз қилайлик, $A=[a_{ij}]$ n- тартибли квадрат матрицанинг элементлари

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{|a_{ii}|-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\}=q>0 \qquad (9.2)$$

шартни қаноатлантирсин. У ҳолда $A\overline{x}=\overline{b}$ система ягона ечимга эга бўлиб, унинг ечими

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|\leqslant q^{-1}\max_{1<k\leqslant n}|b_k| \qquad (9.3)$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

Исбот. Агар $A\overline{x}=\overline{b}$ системанинг озод ҳадлари нолга тенг бўлса, у ҳолда (9.3) тенгсизликдан бу системанинг фақат тривиал ечимга эга эканлиги, демак, $\det A\neq 0$ бўлиши ва бу системанинг ихтиёрий озод ҳадлар учун ягона ечимга эгалиги келиб чиқади. Шунинг учун ҳам, леммани исбот қилиш учун (9.3) тенгсизликни келтириб чиқариш кифоядир. Фараз қилайлик, (9.2) шарт бажарилсин ва $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|=x_k$ бўлсин. У ҳолда $b_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ эканлигидан

$$\max_{1<i\leqslant n}|b_i|\geqslant|a_{kk}||x_k|-\sum_{j\neq k}|a_{kj}||x_k|=$$

$$=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|\{|a_{kk}|-\sum_{j\neq k}|a_{kj}|\}\geqslant q\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$$

бўлади. Шу билан (9.3) тенгсизлик ва демак лемма исботланди.

Агар матрицанинг элементлари (9.2) шартни қаноатлантирса, бундай *матрица салмоқли бош диагоналга эга* дейилади.

Энди сплайнни қуриш билан шуғулланамиз, $S(f,x)$ нинг иккинчи ҳосиласи тўрнинг ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$ оралиғида узлуксиз бўлганлиги туфайли $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$ да ушбу

$$S''(f,x)=M_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i} \qquad (9.4)$$

тенгликни ёза оламиз. Бу ерда $h_i=x_i-x_{i-1}$ ва $M_i=S''(f,x_i)$. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб қуйидагига эга бўламиз:

$$S(f,x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+A_i\frac{x_i-x}{h_i}+$$

$$+B_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i}, \qquad (9.5)$$

бунда A_i ва B_i интеграллаш доимийлари бўлиб, улар $S(f,x_{i-1})=$ $=f_{i-1}$ ва $S(f,x_i)=f_i$ шартлардан аниқланади. (9.5) да $x=x_{i-1}$, $x=x_i$ ларни ўрнига қўйиб мос равишда $M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}+A_i=f_{i-1}$ ва

$M_l \frac{h_l^2}{6} + B_l = f_l$ ларни ҳосил қиламиз. Бундан A_l ва B_l ларни топиб (9.4) га қўйсак, натижада

$$S(f, x) = M_{l-1} \frac{(x_l - x)^3}{6h_l} + M_l \frac{(x - x_{l-1})^3}{6h_l} + \\ + \left(f_{l-1} - \frac{M_{l-1} h_l^2}{6}\right) \frac{x_l - x}{h_l} + \left(f_l - \frac{M_l h_l^2}{6}\right) \frac{x - x_{l-1}}{h_l}, \tag{9.6}$$

$$S'(f, x) = - M_{l-1} \frac{(x_l - x)^2}{2h_l} + M_l \frac{(x - x_{l-1})^2}{2h_l} + \frac{f - f_{l-1}}{h_l} - \\ - \frac{M_l - M_{l-1}}{6} h_l \tag{9.7}$$

ларга эга бўламиз. Охирги тенглик $[x_i, x_{i+1}]$ оралиқ учун қуйидаги кўринишга эга:

$$S'(f,x) = - M_l \frac{(x_{l+1} - x)^2}{2h_{l+1}} + M_{l+1} \frac{(x - x_l)^2}{2h_{l+1}} + \frac{f_{l+1} - f_l}{h_{l+1}} - \\ - \frac{M_{l+1} - M_l}{6} h_{l+1}. \tag{9.8}$$

Энди (9.7) да x нинг x_i га чапдан ва (9.8) да x нинг x_i га ўнгдан интилгандаги, яъни $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ лар учун ҳосиланинг бир томонлама лимитларини ҳисоблайлик:

$$S'(x_l - 0) = \frac{h_l}{6} M_{l-1} + \frac{h_l}{3} M_l - \frac{f_l - f_{l-1}}{h_l},$$

$$(i = \overline{1, n-1})$$

$$S'(x_l + 0) = - \frac{h_{l+1}}{3} M_l - \frac{h_{l+1}}{6} M_{l+1} + \frac{f_{l+1} - f_l}{h_{l+1}}.$$

Таърифнинг 2) шартига кўра $S'(f, x)$ ва $S''(f, x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда узлуксиз. $S'(f, x)$ нинг $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ нуқталарда узлуксизлигидан фойдалансак, қуйидаги $n-1$ та тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{h_l}{6} M_{l-1} + \frac{h_l + h_{l+1}}{3} M_l + \frac{h_{l+1}}{6} M_{l+1} = \frac{f_{l+1} - f_l}{h_{l+1}} - \frac{f_l - f_{l-1}}{h_l}. \tag{9.9}$$

Бу тенгламаларни (9.1) чегаравий шартдан келиб чиқадиган

$$M_0 = M_n = 0 \tag{9.10}$$

тенгликлар билан тўлдириб,

$$a_l = \frac{h_l}{6}, b_l = \frac{h_l + h_{l+1}}{3}, c_l = \frac{h_{l+1}}{6}, d_l = \frac{f_{l+1} - f_l}{h_{l+1}} - \frac{f_l - f_{l-1}}{h_l} \tag{9.11}$$

белгилашларни киритсак, у ҳолда $M_1, M_2, \ldots, M_{n-2}$ номаълумларни топиш учун

$$\left.\begin{array}{r} b_1 M_1 + c_1 M_2 = d_1, \\ a_2 M_1 + b_2 M_2 + c_2 M_3 = d_2, \\ a_3 M_2 + b_3 M_3 + c_3 M_4 = d_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-2} M_{n-3} + b_{n-2} M_{n-2} + c_{n-2} M_{n-1} = d_{n-1}, \\ a_{n-1} M_{n-2} + b_{n-1} M_{n-1} = d_{n-1} \end{array}\right\} \tag{9.12}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. (9.11) га кўра (9.12) системанинг матрицаси салмоқли бош диагоналга эга бўлганлиги туфайли ихтиёрий $f_1, f_2, \ldots, f_n$ лар учун (9.12) система ягона ечимга эга. Шундай қилиб, 1)—4) шартларни қаноатлантирувчи ягона сплайн мавжуд экан. (9.12) системани ечишнинг жуда ҳам эффектив алгоритми мавжуд, уни қуйида келтириб ўтамиз. Бунинг учун барча $k = 1, 2, \ldots, n-1$ лар учун

$$p_k = a_k q_{k-1} + b_k \quad (q_0 = 0), \qquad (9.13)$$

$$q_k = -\frac{c_k}{p_k}, \quad u_k = \frac{d_k - a_k u_{k-1}}{p_k} (u_0 = 0)$$

ёрдамчи миқдорларни ҳосил қиламиз. Сўнгра (9.12) системанинг 2- , ..., $(n-1)$ -тенгламаларидан кетма-кет $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ ларни йўқотиб, ушбу

$$M_k = q_k M_{k+1} + u_k \qquad (k = \overline{1, n-2}) \qquad (9.14)$$

$$M_{n-1} = u_{n-1}$$

эквивалент системага эга бўламиз. Бундан эса кетма-кет M_{n-1}, $M_{n-2}, \ldots, M_1$ ларни аниқлаш мумкин.

Салмоқли бош диагоналга эга бўлган матрицалар учун бу ҳисоблаш схемаси шу маънода турғундирки, хато тез сўниб боради $(0 < -q_k < 1)$. Буни (9.13) ва (9.14) дан осонлик билан кўриш мумкин. Шуни ҳам таъкидлаш керакки, p_k ва q_k миқдорлар фақат Δ_n тўрга боғлиқ бўлиб, тўрнинг тугунларидаги ординаталарнинг қийматларига боғлиқ эмас. Бу эса муайян Δ_n тўр учун $\{p_k\}$ ва $\{q_k\}$ ларнинг қийматларини бир марта ҳисоблаб олиб, тўр тугунларидаги турли хил ординаталар билан сплайнлар қуришга имкон беради. Сплайнни қуришда ҳисоблаш натижаларини 36- жадвалдаги схема шаклида ёзиш маъқулдир.

36- жадвал

x_k	f_k	h_k	a_k	b_k	c_k	d_k	p_k	q_k	u_k	M_k
x_1	f_1	h_1	a_1	b_1	c_1	d_1	p_1	q_1	u_1	M_1
x_2	f_2	h_2	a_2	b_2	c_2	d_2	p_2	q_2	u_2	M_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n-1}	f_{n-1}	h_{n-1}	a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	p_{n-1}	q_{n-1}	u_{n-1}	M_{n-1}
x_n	f_n	h_n								

Агар Δ_n тўр текис, яъни тугунлар тенг узоқликда жойлашган бўлса, у ҳолда бу схема янада соддалашади: h_k, a_k, b_k, c_k устунларни ёзмаслик ҳам мумкин.

Шундай қилиб, функциянинг $f_0, f_1, \ldots, f_n$ қийматлари берилган бўлса, бу қийматлардан фойдаланиб (9.6) формула ёрдамида сплайн-функциялар билан $f(x)$ ни интерполяциялаш мумкин. (9.7) формула ёрдамида эса унинг ҳосиласини топиш мумкин.

Кубик сплайн-функциялар, юқорида айтиб ўтилганимиздек яхши яқинлашиш хоссасига эга. Агар интерполяцияланадиган $f(x)$ функция $C^k[a, b]$ $(k=0,\ 1,\ 2, 3, 4)$ синфга тегишли бўлса, у ҳолда унинг хатоси $r(x)=f(x)-S(f, x)$ учун қуйидаги баҳони кўрсатиш мумкин:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |r^{(p)}(x)| \leqslant ch^{k-p} \quad (k\geqslant p),$$

бу ерда c тўрга боғлиқ бўлмаган ўзгармас бўлиб, $h=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h_i$.

Эслатма. Кўпинча $x=a$ ва $x=b$ нуқталарда $f(x)$ функция ҳақида қўшимча маълумотга ҳам эга бўлишимиз мумкин. Масалан, сплайн тузишдан асосий мақсад

$$f(a)+\alpha f'(a)=A, \quad f(b)+\beta f'(b)=B$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи дифференциал тенгламани ечишдан иборат бўлиши мумкин. Бундай ҳолда, сплайн тузишда $M_0=M_n=0$ чегаравий шарт ўрнига юқоридаги шартни олиш керак.

Машқлар

1. Лежандр кўпҳадари бўйича қуйидаги ёйилмаларнинг ўринли эканлигини кўрсатинг:

$$\text{а)}\ \arcsin x=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(2k-1)!}{2^k k!}\right]^2\left[P_{2k+1}(x)-P_{2k-1}(x)\right] \quad (|x|<1),$$

$$\text{б)}\ (1-2px+p^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty} p^k P_k(x) \quad (|p|<\min|x\pm\sqrt{x^2-1}|),$$

$$\text{в)}\ \frac{1}{\sqrt{1-2px+p^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{k+1}}P_k(x) \quad (|p|>\max|x\pm\sqrt{x^2-1}|).$$

2. Чебишевнинг биринчи тур кўпҳадлари бўйича қуйидаги ёйилмаларнинг тўғри эканлигини кўрсатинг:

$$\text{а)}\ \arcsin x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{T_{2k-1}(x)}{(2k-1)^2} \qquad (|x|<1),$$

$$\text{б)}\ \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\sqrt{2}-1)^{2k+1}}{2k+1}T_{2k+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad (0\leqslant x<\infty),$$

$$\text{в)}\ \operatorname{arctg}\frac{x}{a}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1^k)\,p^{2k+1}}{2k+1}T_{2k+1}(x) \quad (p=\sqrt{1+a^2},\ |x|<1),$$

$$\text{г)}\ \frac{1}{1+x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(3-2\sqrt{2})^k\,T_k(2x-1)\right] \quad (0\leqslant x<1)$$

3. Иккинчи тур Чебишев кўпҳадлари бўйича қуйидаги ёйилманинг тўғри эканлигини кўрсатинг:

$$\frac{1}{(a-bx)^2}=\frac{2}{b\sqrt{a^2+b^2}}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)^k U^k(x).$$

4. Эрмит кўпҳадлари бўйича қуйидаги ёйилмаларнинг ўринли бўлишини кўрсатинг:

а) $$\operatorname{sh} 2x = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}H_{2k+1}(x),$$

б) $$\operatorname{ch} 2x = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}H_{2k}(x).$$

5. $f(x) = \cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ учун учинчи тартибли энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад $P_3^*(x) \equiv 0$ бўлишини кўрсатинг.

6. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ функция учун $[-1, 1]$ оралиқда иккинчи даражали энг яхши, текис яқинлашувчи кўпҳадни топинг.

Жавоб:

$$P_2^*(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{77}{80}\,.$$

7. Икки энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳадларнинг йиғиндиси энг яхши текис яқинлашувчи кўпҳад бўлмаслиги ҳам мумкинлигини мисолда кўрсатинг.

8. $R(x)$ кўпҳадлар орасида $-1 \leqslant x \leqslant 1$ оралиқда нолдан энг кам оғувчи ва бирор ξ $(\xi > 1$ ёки $\xi < -1)$ нуқтада η қиймат қабул қилувчи кўпҳадни аниқланг.

Жавоб:

$$R(x) = \eta\,\frac{T_n(x)}{T_n(\xi)} = \eta\,\frac{\cos n \arccos x}{\cos n \arccos \xi}\,.$$

9. Бош коэффициенти A га тенг бўлган n-даражали

$$R(x) = Ax^n + \dots$$

кўпҳадлар орасида $-1 \leqslant x \leqslant 1$ оралиқда нолдан энг кам оғувчисини топинг.

Жавоб:

$$R(x) = \frac{A}{2^{n-1}}T_n(x) = \frac{A}{2^{n-1}}\cos n \arccos x.$$

VII БОБ. ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

1-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ МАСАЛАСИ

Амалий ва назарий масалаларнинг кўпчилиги бирор $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган $f(x)$ функциядан олинган $\int_a^b f(x)dx$ аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилади. Аммо интеграл ҳисобининг асосий формуласи

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(бу ерда $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси) амалиётда кўпинча ишлатилмайди. Чунки кўп ҳолларда $F(x)$ ни элементар функцияларнинг чекли комбинацияси орқали ифодалаб бўлмайди. Бундан ташқари амалиётда $f(x)$ жадвал кўринишида берилган бўлиши ҳам мумкин, бундай ҳолда бошланғич функция тушунчасининг ўзи маънога эга бўлмай қолади.

Шунинг учун ҳам аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш методлари катта амалий аҳамиятга эга.

Биз бу бобда $f(x)$ функцияларнинг етарлича кенг синфи учун $\int\limits_a^b f(x)dx$ аниқ интегралнинг тақрибий қийматини интеграл остидаги $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқнинг чекли сонда олинган нуқталаридаги қийматларининг чизиқли комбинациясига келтирадиган методларни кўриб чиқамиз:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}). \tag{1.1}$$

Бу ерда $x_k^{(n)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *квадратур формуланинг тугунлари*, $A_k^{(n)}$ *квадратур формуланинг коэффициентлари* ва $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$ *квадратур йиғинди* дейилади. Агар интеграллаш чегаралари a ва b квадратур формуланинг тугунлари бўлса, у ҳолда квадратур формула *„ёпиқ типдаги“*, акс ҳолда эса *„очиқ типдаги“* дейилади. Квадратур формуланинг тугунлари $x_k^{(n)}$ ва коэффициентлари $A_k^{(n)}$ функциянинг танланишига боғлиқ бўлмаслиги талаб қилинади.

Ушбу

$$R_n(f) = \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \tag{1.2}$$

ифода эса (1.1) *квадратур формуланинг қолдиқ ҳади* ёки *хатоси* дейилади.

Одатда (1.1) формулага нисбатан умумийроқ квадратур формула қаралади. Фараз қилайлик, Ф чекли ёки чексиз $[a, b]$ оралиқда аниқланган $f(x)$ функцияларнинг бирор синфи бўлиб, $\rho(x)$ $[a, b]$ оралиқда вазн функцияси бўлсин (VI бобга қаранг). Энди қуйидаги

$$\int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \tag{1.3}$$

квадратур формула ва унинг қолдиқ ҳади

$$R_n(f) = \int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \tag{1.4}$$

ни қараймиз.

Қуйида $[a, b]$ оралиқни чекли деб фараз қилиб, биз квадратур формула тузишнинг айрим йўналишларини қисқача кўриб чиқамиз.

1. Кўпинча квадратур формула тузиш учун $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда n та $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ нуқталар ёрдамида интерполяцияланади:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1,\ j \neq k}^{n} \frac{x - x_j^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_j^{(n)}} f(x_k^{(n)}) + r_n(f, x).$$

Энди буни $\rho(x)$ га кўпайтириб интегралласак,

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + \int_a^b \rho(x) r_n,\ \ f(x) dx$$

келиб чиқади, бу ерда

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \rho(x) \sum_{j=1,}^{n} \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_j^{(n)}} dx.$$

Шу усулда тузилган квадратур формулалар *интерполяцион формулалар* дейилади.

2. Анализдан ва 6-бобдан маълумки, чекли оралиқда узлуксиз функцияларни алгебраик кўпҳадлар билан етарлича юқори аниқликда яқинлаштириш мумкин (Вейерштрасс теоремаси). Шу билан бирга, кўпҳад даражаси қанча юқори бўлса аниқлик ҳам шунча юқори бўлади. Шунинг учун ҳам (1.3) формулада $A_k^{(n)}$ ва $x_k^{(n)}$ параметрларни шундай танлашга ҳаракат қилинадики, бу тенглик етарлича юқори даражали алгебраик кўпҳадлар учун аниқ бўлсин. Шу усул билан тузилган (1.3) формула $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган кўп функцияларни интеграллашда аниқлик жиҳатидан яхши натижа беради. Одатда, (1.3) формула барча m-даражали кўпҳадлар учун аниқ бўлиб, $f(x) = x^{m+1}$ учун аниқ бўлмаса, у ҳолда унинг *алгебраик аниқлик даражаси m га тенг* дейилади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция даврий функция бўлиб, унинг даври 2π га тенг бўлсин ва $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ интегрални ҳисоблаш талаб қилинсин. У ҳолда (1.3) формулада $A_k^{(n)}$, $x_k^{(n)}$ параметрларни шундай танлашга ҳаракат қилинадики, у имкон борича юқори тартибли тригонометрик кўпҳадларни аниқ интегралласин.

Аниқлик даражаси (тартиби) энг юқори бўлган квадратур формулалар катта аҳамиятга эга. Бундай формулалар *Гаусс типидаги квадратур формулалар* дейилади.

3. Квадратур формулалар тузишда эллигинчи йилларнинг охирларидан бошлаб янги бир йўналиш ривожлана бошлади. Унинг моҳияти қуйидагидан иборат. Бизга $f(x)$ функцияларнинг бирор син-

фи Ф берилган бўлсин. Бутун Ф синф учун аниқликни тавсифлайдиган миқдор сифатида қуйидаги аниқ юқори чегара

$$R_n = \sup_{f\in\Phi} |R_n(f)| = \sup_{f\in\Phi} \left| \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^{N} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right|$$

олинади. Бу ерда $[a, b]$ да $x_k^{(n)}$ тугунларни ва $A_k^{(n)}$ коэффициентларни шундай танлаш талаб қилинадики, R_n ўзининг энг кичик қийматига эришсин. Бундай формулалар, табиий равишда, функцияларнинг Ф *синфида энг кичик хатога эга бўлган формулалар* дейилади.

Масалани бошқача тарзда ҳам қўйиш мумкин; яъни $A_k^{(n)}$ ёки $x_k^{(n)}$ ларга нисбатан айрим шартлар билан, масалан, коэффициентларнинг ўзаро тенг бўлишлиги $A_1^{(n)} = A_2^{(n)} = \ldots A_n^{(n)} = A^{(n)}$ ёки тугунларнинг бир хил узоқликда жойлашган бўлишлиги каби ва ҳ. к. Коэффициентлари ёки тугунлари мана шу шартларни қаноатлантирган ҳолда (1.3) формулани шундай тузиш талаб қилинадики, R_n қолдиқ Ф функциялар синфида энг кичик бўлсин.

Параграфни якунлашдан олдин умумий бир мулоҳазани айтиб ўтамиз. Интегралларни (1.3) формула ёрдамида ҳисоблашда, квадратур йиғинди умуман тақрибий равишда ҳисобланади. Одатда $f(x_k^{(n)})$ ўрнида бирор $\tilde{f}(x_k^{(n)})$ га эга бўламиз, демак

$$f(x_k^{(n)}) = \tilde{f}(x_k^{(n)}) + \varepsilon_k^{(n)},$$

бу ерда $\varepsilon_k^{(n)}$ — яхлитлаш хатоси. Фараз қилайлик, барча $k = 1, 2, \ldots, n$ учун $|\varepsilon_k^{(n)}| \leqslant \varepsilon$ бўлсин. Агар кўпайтмаларнинг йиғиндиси $\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} \tilde{f}(x_k^{(n)})$ аниқ ҳисобланса, у ҳолда квадратур йиғиндини ҳисоблашда яхлитлаш хатоси $\varepsilon \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}|$ дан ортмайди, хусусан тенг бўлиши ҳам мумкин. Бундан кўриниб турибдики, $\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}|$ қанча катта бўлса, квадратур йиғиндини ҳисоблашда ҳосил бўлган яхлитлаш хатоси шунча катта бўлади.

Фараз қилайлик, (1.3) формула $f(x) \equiv 1$ ни аниқ интегралласин, яъни

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Бундан, равшанки $\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}|$ энг кичик қийматни қабул қилиши учун барча $k = \overline{1, n}$ лар учун $A_k^{(n)} > 0$ бўлиши керак. Бу эса мусбат коэффициентли квадратур формулалар катта аҳамиятга эга эканлигини кўрсатади.

2-§. ИНТЕРПОЛЯЦИОН КВАДРАТУР ФОРМУЛАЛАР

1. Энг содда квадратур формулалар: тўғри тўртбурчак, трапеция ва Симпсон формулалари. Энг содда квадратур формулаларни оддий мулоҳазалар асосида қуриш мумкин. Айтайлик,

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегрални ҳисоблаш талаб қилинсин. Агар қаралаётган оралиқда $f(x) \approx \text{const}$ бўлса, у вақтда

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{2.1}$$

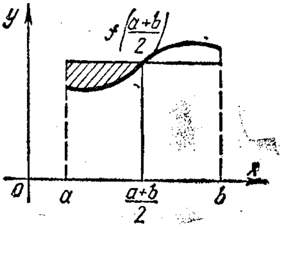
деб олишимиз мумкин (23-чизма). Бу формула *тўғри тўртбурчаклар формуласи* дейилади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция чизиқли функцияга яқин бўлсин, у ҳолда табиий равишда интегрални баландлиги $b-a$ га ва асослари $f(a)$ ва $f(b)$ га тенг бўлган трапеция юзи билан алмаштириш мумкин (24-чизма), у ҳолда

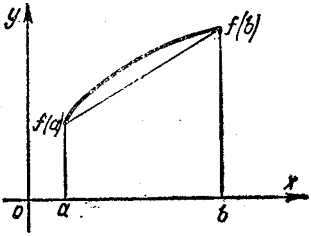
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \tag{2.2}$$

деб олишимиз мумкин. Бу формула *трапеция формуласи* дейилади. Ниҳоят, $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда квадратик функцияга яқин бўлсин, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ ни тақрибий равишда Ox ўқи ва $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар ҳамда $y=f(x)$ функция графигининг абсциссалари $x=a$, $x=\frac{a+b}{2}$ ва $x=b$ бўлган нуқталаридан ўтувчи иккинчи тартибли парабола орқали чегараланган юза билан алмаштириш мумкин (25-чизма), у ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

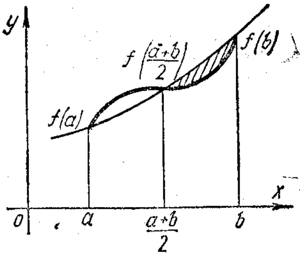
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}. \tag{2.3}$$



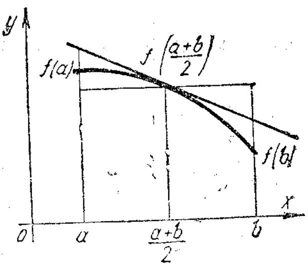
23-чизма.



24-чизма.



25-чизма.



26-чизма.

Бу формулани инглиз математиги Симпсон 1743 йилда таклиф этгэн эди.

Бу формуланинг ҳосил қилиниш усулидан кўриниб турибдики, у барча иккинчи даражали

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

кўпҳадлар учун аниқ формуладир. Шундай қилиб, биз учта энг содда квадратур формулаларга эга бўлдик. (2.1) формулани тузишда у ўзгармас сон $f(x) = c$ ни аниқ интеграллашини талаб қилган эдик. Лекин у $f(x) = a_0 + a_1x$ чизиқли функцияни ҳам аниқ интеграллайди, чунки $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ баландлиги $b-a$ ва ўрта чизиғи $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ бўлган ихтиёрий трапециянинг юзига тенг (26-чизма).

Шунга ўхшаш Симпсон формуласи ҳам биз кутгандан кўра ҳам яхшироқ формуладир. У учинчи даражали

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

кўпҳадларни ҳам аниқ интеграллайди.

Ҳақиқатан ҳам, учинчи даражали $P_3(x)$ кўпҳадни қуйидагича ёзамиз:

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P_2(x) + a_3x^3,$$

у вақтда

$$\int_a^b P_3(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx + a_3\int_a^b x^3dx = \int_a^b P_2(x)dx + \frac{a_3}{4}(b^4 - a^4). \quad (2.4)$$

Лекин бизга маълумки,

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b)\right]. \quad (2.5)$$

Иккинчи томондан,

$$\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{6}\left\{a_3a^3 + 4a_3\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + a_3b^3\right\} \quad (2.6)$$

айният ўринлидир. Энди (2.5)—(2.6) ни (2.4) га қўйиб,

$$\int_a^b P_3(x)dx = \frac{b-a}{6}\left\{ P_3(a) + 4P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_3(b)\right\}$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, биз учта квадратур формулани кўрдик. Улардан иккитаси тўғри тўртбурчак ва трапеция формулалари—биринчи даражали кўпҳад учун аниқ формула бўлиб, Симпсон формуласи учинчи даражали кўпҳад учун аниқ формуладир.

2. Тўғри тўртбурчак, трапеция ва Симпсон формулаларининг қолдиқ ҳадлари. Энди юқорида қурилган квадратур формулаларнинг қолдиқ ҳадларини аниқлаш билан шуғулланамиз. Тўғри тўртбурчак формуласининг қолдиқ ҳади

$$R_0(f) = \int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ни топиш учун $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда иккинчи тартибли узлуксиз $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин деб фараз қиламиз. У ҳолда Тейлор формуласига кўра:

$$f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\zeta),$$

бу ерда $x \leqslant \zeta = \zeta(x) \leqslant \frac{a+b}{2}$. Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини a дан b гача интеграллисак,

$$R_0(f) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\zeta)dx \qquad (2.7)$$

келиб чиқади, чунки $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx = 0$. Қуйидагича белгилаш киритайлик:

$$m = \min_{a \leqslant x \leqslant b} f''(x), \quad M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} f''(x).$$

Интеграл остидаги функция $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$ ўз ишорасини сақлайди, шунинг учун (2.7) интегралга умумлашган ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаш мумкин:

$$R_0(f) = L\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = L\frac{(b-a)^3}{24}, \qquad (2.8)$$

бунда $m \leqslant L \leqslant M$, $f''(x)$ узлуксиз бўлгани учун Коши теоремасига кўра шундай ξ, $a \leqslant \xi \leqslant b$ топиладики,

$$L = f''(\xi).$$

Энди (2.8) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$R_0(f)=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi). \qquad (2.9)$$

Бу эса қолдиқ ҳаднинг изланаётган кўринишидир.

Энди трапеция формуласининг қолдиқ ҳадини топайлик. Бунинг учун $f(x)$ функцияни $x=a$ ва $x=b$ нуқталардаги қийматлари ёрдамида интерполяциялаб, интерполяцион формулани қолдиқ ҳади билан ёзамиз:

$$f(x)-L_1(x)=\frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\zeta).$$

Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини a дан b гача интеграллаймиз, натижада

$$R_1(f)=\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(\zeta)dx$$

ҳосил бўлади. Бу ерда $[a, b]$ оралиқда $(x-a)(x-b)\leqslant 0$ бўлгани учун $R_1(f)$ интегралга ўрта қиймат ҳақидаги умумлашган теоремани қўллаш мумкин:

$$R_1(f)=\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b(x-a)(x-b)dx=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)\,(a\leqslant\xi\leqslant b). \qquad (2.10)$$

Ниҳоят, Симпсон формуласининг қолдиқ ҳадини аниқлайлик. Бунинг учун $c=0{,}5(a+b)$ деб олиб, қуйидаги

$$H(a)=f(a),\ H(c)=f(c),\ H'(c)=f'(c),\ H(b)=f(b)$$

шартларни қаноатлантирувчи Эрмит интерполяцион кўпҳадини тузамиз:

$$H(x)=\frac{4}{(a-b)^3}[(x-c)^2(x-b)f(a)-(x-a)(x-b)(a-b)f(c)-$$
$$-(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)f'(c)-(x-a)(x-c)^2f(b)].$$

Равшанки,

$$\int_a^b H(x)dx=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)].$$

Энди 5-бобнинг 13-§ га кўра $f(x)=H(x)+r(x)$ интерполяцион формуланинг қолдиқ ҳади

$$r(x)=\frac{1}{24}\Omega(x)f^{\mathrm{IV}}(\zeta)\quad(a<\zeta<b)$$

бўлиб, бу ерда

$$\Omega(x)=(x-a)(x-c)^2(x-b).$$

Демак, (2.3) формуланинг қолдиқ ҳади

$$R_2(f)=\frac{1}{24}\int_a^b\Omega(x)f^{\mathrm{IV}}(\zeta)dx$$

бўлиб, $\Omega(x)$ кўпҳад $[a, b]$ ораликда ўз ишорасини сақлайди ва умумлашган ўрта қиймат теоремасига кўра

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{\mathrm{IV}}(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b)$$

га эга бўламиз.

Қолдиқ ҳадлар учун чиқарилган формулалар яна бир бор шуни кўрсатадики, тўғри тўртбурчак ва трапеция формулалари биринчи даражали кўпҳадлар учун аниқ бўлиб, Симпсон формуласи учинчи даражали кўпҳадлар учун аниқ формуладир.

3. **Интерполяцион квадратур формулалар.** Бундан кейин қисқалик учун квадратур формуланинг $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}$ коэффициентлари ва $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ тугунларини юқори индекссиз $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ва $x_1, x_2, \ldots, x_n$ кўринишда ёзамиз. Фараз қилайлик, бизга $f(x)$ функциянинг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталардаги $f(x_4), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ қийматлари берилган бўлиб, мақсад шу қийматлар бўйича $\int\limits_a^b f(x)dx$ интегралнинг тақрибий қийматини мумкин қадар юқори аниқликда топишдан иборат бўлсин. Демак, A_k коэффициентлар аниқланиши керак. Бунинг учун $f(x)$ ни унинг берилган қийматларидан фойдаланиб, $(n-1)$-даражали кўпҳад билан интерполяциялаймиз:

$$f(x) = L_{n-1}(x) + r_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1,\ i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} f(x_k) + r_n(f, x). \quad (2.11)$$

Энди бу тенгликни $\rho(x)$ га кўпайтириб, a дан b гача интеграллайлик:

$$\int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx = \int\limits_a^b \rho(x)L_{n-1}(x)dx + \int\limits_a^b \rho(x)r_n(f, x)dx.$$

Агар бундаги

$$R_n(f) = \int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = \int\limits_a^b \rho(x)r_n(f, x)dx \quad (2.12)$$

қолдиқ ҳадни ташласак,

$$\int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \quad A_k = \int\limits_a^b \rho(x) \prod_{i=1,\ i\neq k} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} dx \quad (2.13)$$

квадратур формулага эга бўламиз. → Ч-Котесга

Бу формула қурилиш усулига кўра *интерполяцион квадратур формула* дейилади. Бундай формулалар учун ушбу теорема ўринлидир.

Теорема. Қуйидаги

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{2.14}$$

квадратур формуланинг интерполяцион бўлиши учун унинг барча $(n-1)$-даражали алгебраик кўпҳадларни аниқ интеграллаши зарур ва кифоядир.

Исбот. Зарурлиги. Агар $f(x)$ $(n-1)$-даражали кўпҳад бўлса, у ҳолда (2.11) тенгликда $r_n(f, x) \equiv 0$ бўлиб,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1,\ i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} f(x_k)$$

тенглик ўринли бўлади ва (2.14) қоида интерполяцион қоида бўлганидан (2.13) га кўра:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \int_a^b \rho(x) \prod_{i=1,\ i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k).$$

Демак, (2.14) формула $(n-1)$-даражали $f(x)$ кўпҳадни аниқ интеграллайди.

Кифоялиги.. (2.14) формула $(n-1)$-даражали ихтиёрий кўпҳад учун аниқ формуладир. Хусусий ҳолда, у $(n-1)$-даражали ушбу

$$\omega_m(x) = \prod_{i=1,\ i\neq m}^{n} \frac{x-x_i}{x_m-x_i} \quad (m=1, 2, \ldots, n)$$

кўпҳад учун ҳам аниқ бўлади. Агар $\omega_m(x_k) = 0$ $(k \neq m)$ ва $\omega_m(x_m) = 1$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\int_a^b \rho(x) \prod_{i=1,\ i\neq m}^{n} \frac{x-x_i}{x_m-x_i} dx = \int_a^b \rho(x)\omega_m(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \omega_m(x_k) = A_m$$

келиб чиқади. Демак, (2.14) қоида интерполяциондир, шу билан теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан кўринадики, n нуқтали интерполяцион квадратур формуланинг алгебраик аниқлик даражаси $n-1$ дан кичик бўлмаслиги керак.

Осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкинки, юқорида кўриб ўтилган тўғри тўртбурчак, трапеция ва Симпсон формулалари интерполяцион квадратур формулалардир. 5-бобдан маълумки, $f(x)$ $[a, b]$ оралиқда n-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда интерполяцион формуланинг қолдиқ ҳади $r_n(f, x)$ ни

$$r_k(f, x) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \omega(x), \quad (\omega(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k))$$

кўринишда ёзиш мумкин. Буни (2.12) га қўйиб, квадратур формула учун

$$R_n(f) = \frac{1}{n!}\int_a^b \rho(x)\omega(x)f^{(n)}(\zeta)dx \tag{2.15}$$

га эга бўламиз. Энди n-тартибли узлуксиз ҳосилага эга ва ҳосиласи

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M_n \tag{2.16}$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи функциялар синфини қараймиз. Бундай функциялар учун (2.15) дан

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_n}{n!}\int_a^b |\rho(x)\omega(x)|dx \tag{2.17}$$

га эга бўламиз. Агар $\omega(x)$ кўпҳад $[a, b]$ оралиқда ўз ишорасини сақласа, у ҳолда (2.17) баҳо аниқ бўлиб, ундаги тенгликка

$$f(x) = \frac{M_n}{n!}x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

кўпҳадда эришилади.

Энди интерполяцион квадратур формулаларнинг бир муҳим хоссасини кўриб ўтайлик. Аввал A_k ни аниқлайдиган интегралда $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ алмаштириш бажарамиз. Агар $\rho\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) = \bar{\rho}(t)$ деб белгиласак, у ҳолда A_k қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$A_k = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \bar{\rho}(t) \prod_{i=1,\ i\neq k}^{n} \frac{t-t_i}{t_k-t_i}dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \bar{\rho}(t)\frac{\omega(t)dt}{(t-t_k)\omega'(t_k)} = \frac{b-a}{2}B_k,$$

бу ерда

$$B_k = \int_{-1}^{1} \bar{\rho}(t)\frac{\omega(t)dt}{(t-t_k)\omega'(t_k)} \tag{2.18}$$

ва

$$t_k = \frac{2x_k - a - b}{b-a}.$$

Шундай қилиб, (2.13) формула қуйидаги

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} B_k\, f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k\right) \tag{2.19}$$

кўринишга келади.

Теорема. Фараз қилайлик, вазн функцияси $\rho(x)$ $[a, b]$ оралиқнинг ўрта нуқтасига нисбатан жуфт функция ва t_k тугунлар шу нуқтага нисбатан симметрик, яъни $t_k = -t_{n+1-k}$ бўлсин. У ҳолда симметрик тугунларга мос келадиган квадратур формуланинг коэффициентлари ўзаро тенг бўлади:

$$B_k = B_{n+1-k}\,. \tag{2.20}$$

Исбот. Агар n жуфт бўлса, у ҳолда

$$\omega(t) = (t - t_1)\ \ldots\ (t - t_n) = \omega(-t),$$

$$\omega'(t_k) = \prod_{j\neq k}^{n} (t_k - t_j) = -\prod_{j\neq k}^{n} (t_{n+1-k} - t_j) = -\omega'(t_{n+1-k})$$

тенгликлар ўринлидир. Агар n тоқ бўлса, у ҳолда, аксинча $\omega(t) = -\omega(-t)$, $\omega'(t_k) = \omega'(t_{n+1-k})$ бўлади. Ҳар иккала ҳолда ҳам (2.18) да $t = -\tau$ алмаштириш бажарсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$B_k = \int_{-1}^{1} \bar{\rho}(\tau)\,\frac{\omega(\tau)d\tau}{\omega'(t_{n+1-k})(\tau+t_k)} = \int_{-1}^{1} \bar{\rho}(\tau)\,\frac{\omega(\tau)d(\tau)}{\omega'(t_{n+1-k})(\tau-t_{n+1-k})} =$$
$$= B_{n+1-k}\,.$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди. Бундан кўринадики, t_i лар симметрик жойлашганда барча B_i ларни ҳисоблаш ўрнига B_1, $B_2, \ldots, B_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ ларни ҳисоблаш кифоядир.

Иккинчи томондан, бундай формулалар $[a, b]$ оралиқнинг ўртасига нисбатан тоқ бўлган ҳар қандай функция учун аниқ формуладир. Ҳақиқатан ҳам, $\rho(x)$ нинг жуфт эканлигини эътиборга олсак, бундай функциялар учун $\int_a^b \rho(x)f(x)dx = 0$ ва шу билан бирга (2.20) формулага кўра $\sum_{k=1}^{n} B_k f(x_k) = 0$. Демак, $R_n = 0$. Хусусий ҳолда, (2.19) формула $\mathrm{const}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2q+1}$ кўринишдаги кўпҳадни аниқ интеграллайди.

Энди худди шу квадратур формулани n тоқ бўлганда қарайлик. Бу формула $f(x) = \mathrm{const}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^n$ ни аниқ интеграллайди ва қурилиш усулига кўра ихтиёрий $(n-1)$-даражали кўпҳадни аниқ интеграллайди. Демак, бундай квадратур формула ихтиёрий n-даражали кўпҳадни аниқ интеграллайди. Шундай қилиб, тугунлари сони $2m-1$ ёки $2m$ бўлса, оралиқ ўртасига нисбатан симметрик жойлашган интерполяцион квадратур формулалар $2m-1$ даражали кўпҳадлар учун аниқ формуладир. Бунга тўғри тўртбурчак ва Симпсон формулалари мисол бўла олади.

Тоқ тугунли квадратур формуланинг қолдиқ ҳадини $f^{(n)}(x)$ орқали эмас, балки $f^{(n+1)}(x)$ орқали ифодалаш учун интеграл остидаги функцияни янада аниқроқ $\frac{a+b}{2}$ нуқтада икки каррали тугунга эга бўлган Эрмит интерполяцион кўпҳади билан алмаштириш керак. Биз юқорида тўғри тўртбурчак ва Симпсон формулаларининг қолдиқ ҳадларини баҳолашда худди шундай қилган эдик.

4. Ньютон — Котес квадратур формулалари. Ньютон—Котес формулалари энг дастлабки интерполяцион квадратур формулалардан ҳисобланади. Бу формулаларда оралиқ чекли, вазн функцияси $\rho(x)\equiv 1$ ва x_i тугунлар ўзаро тенг узоқликда жойлашгандир. Бу формула (2.13) формуланинг $\rho(x)\equiv 1$ бўлгандаги хусусий ҳолидир.

Лекин аксарият адабиётларда Ньютон—Котес формуласи (2.19) кўринишда эмас, балки бошқа кўринишда келтирилади. Биз ҳам шу кўринишда қараймиз.

Бунинг учун $[a, b]$ оралиқни

$$x_k^{(n)} = a + kh, \quad k = \overline{0, n}, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$(n+1)$ та нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўламиз ва $A_k^{(n)}$ коэффициентларни тегишли кўринишга келтириш учун

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} dx$$

интегралда $x = a + th$ алмаштириш бажарамиз,

$$x - x_i^{(n)} = (t-i)h, \quad x_k^{(n)} - x_i^{(n)} = (k-i)h$$

бўлганлиги учун

$$\prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{j\neq k,\ j=0}^{n} (t-j).$$

Демак,

$$A_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} h \int_0^n \prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (t-j)dt.$$

Энди

$$B_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{n\,k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (t-j)dt \qquad (2.21)$$

деб олсак, у ҳолда Ньютон—Котес формуласи қуйидагича ёзилади:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} f(a+kh). \qquad (2.22)$$

Бундаги $B_k^{(n)}$ коэффициентлар $[a, b]$ оралиққа боглиқ эмас.

Котес томонидан $B_k^{(n)}$ коэффициентлар $n = 1, 2, \ldots, 10$ учун ҳисобланган. Қуйида улар $n = 1, 2, \ldots, 5$ учун келтирилган:

$$n = 1: \quad B_0^{(1)} = B_1^{(1)} = \frac{1}{2};$$

$$n=2:\quad B_0^{(2)}=B_2^{(2)}=\frac{1}{6},\quad B_1^{(2)}=\frac{4}{6};$$

$$n=3:\quad B_0^{(3)}=B_3^{(3)}=\frac{1}{8},\quad B_1^{(3)}=B_2^{(3)}=\frac{3}{8};$$

$$n=4:\quad B_0^4=B_4^{(4)}=\frac{7}{90},\quad B_1^{(4)}=B_3^{(4)}=\frac{32}{90},\quad B_2^{(4)}=\frac{12}{90};$$

$$n=5:\quad B_0^{(5)}=B_5^{(5)}=\frac{19}{288},\quad B_1^{(5)}=B_4^{(5)}=\frac{75}{288},\quad B_2^{(5)}=B_3^{(5)}=$$
$$=\frac{50}{288}.$$

Р. О. Кузьмин $B_k^{(n)}$ лар учун $n\to\infty$да асимптотик формулаларни топган эди. Бу формулалардан, жумладан, $n\to\infty$ да $\sum\limits_{k=1}^{n}|B_k^{(n)}|\to\infty$ келиб чиқади. Энди $\sum\limits_{k=1}^{n}B_k^{(n)}=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b 1dx=1$ эканлигини ҳисобга олсак, бундан n етарлича катта бўлганда коэффициентлар орасида манфийлари ҳам, мусбатлари ҳам мавжудлиги равшан бўлиб қолади. Ҳатто, $n=8$ ва $n=10$ бўлганда ҳам $B_k^{(n)}$ лар орасида манфийлари мавжуддир. Шунинг учун ҳам (1- § га қаранг) Ньютон—Котес формулаларини катта n ларда қўллаш мақсадга мувофиқ эмас. Равшанки, $n=1$ ва $n=2$ бўлганда (2.22) формуладан мос равишда трапеция ва Симпсон формулалари келиб чиқади. Тўғри тўртбурчак формуласи эса $\rho(x)\equiv 1$ ва $n=1$ бўлганда (2.18) формуладан келиб чиқади. $n=3$ бўлганда (2.22) дан „Саккиздан уч қоидаси“ деб аталувчи Ньютон формуласига эга бўламиз:

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{8}\left[f(a)+3f\left(a+\frac{b-a}{3}\right)+3f\left(a+\frac{2}{3}(b-a)\right)+\right.$$
$$\left.+f(b)\right].$$

5. Умумлашган квадратур формулалар. Қаралаётган оралиқ етарлича катта бўлиб, бу оралиқда функция тўғри чизиқ ёки параболага етарлича яқин бўлмаса, у ҳолда тўғри тўртбурчак, трапеция ва Симпсон формулалари яхши натижа бермайди. У вақтда $f(x)$ ни юқори тартибли кўпҳад билан алмаштиришга тўғри келади, лекин юқори тартибли Ньютон—Котес формуласини қўллаш ҳам мақсадга мувофиқ эмас. Бундай ҳолда $[a, b]$ оралиқни қисмий оралиқларга бўлиб, ҳар бир қисмий оралиқда кичик n лар учун чиқарилган квадратур формулаларни қўллаш яхши натижага олиб келади.

Берилган $[a, b]$ оралиқни $x_k=a+kh$ $(k=\overline{0, N})$ нуқталар ёрдамида узунлиги $h=\frac{b-a}{N}$ бўлган N та бўлакка бўламиз. Ҳар бир қисмий оралиқ $[x_k, x_{k+1}]$ бўйича олинган интегралга (2.1) формулани қўллаймиз:

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx\approx hf\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)h\right)\quad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1).\qquad(2.23)$$

Қулайлик учун $f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)h\right)=y_{k+\frac{1}{2}}$ каби белгилаб (2.23) ни барча $k=0, 1, \dots, N-1$ лар бўйича йиғиб чиқсак, натижада умумлашган тўғри тўртбурчаклар („катта“ ёки „таркибий“ деб ҳам юритилади) формуласига эга бўламиз:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N}(y_{1/2}+y_{3/2}+\dots y_{N-1/2}). \qquad (2.24)$$

Бу формуланинг қолдиқ ҳади $R_N(f)$ ни топиш учун (2.23) нинг

$$R_0(f, k)=\frac{(b-a)^3}{24N^3}f''(\xi_k) \quad (x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}) \qquad (2.25)$$

қолдиқ ҳадини барча $k=0, 1, \dots, N-1$ лар бўйича йиғамиз, натижада

$$R_N^{(0)}(f)=\frac{(b-a)^3}{24N^3}\sum_{k=0}^{N-1}f''(\xi_k). \qquad (2.26)$$

Равшанки,

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b}f''(x)\leqslant\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f''(\xi_k)\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}f''(x).$$

Иккинчи ҳосиланинг узлуксизлигидан, Коши теоремасига кўра, шундай $\xi(a\leqslant x\leqslant b)$ мавжудки,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f''(\xi_k)=f''(\xi).$$

Буни (2.29) га олиб бориб қўйсак, умумлашган тўғри тўртбурчаклар формуласининг қолдиқ ҳади ҳосил бўлади:

$$R_N^{(1)}(f)=\frac{(b-a)^3}{24N^2}f''(\xi), \ (a\leqslant\xi\leqslant b). \qquad (2.27)$$

Шунингдек, умумлашган трапециялар формуласини ҳам чиқариш мумкин. Агар $f(a+kh)=y_k$ деб олсак, умумлашган трапециялар формуласи

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2N}[y_0+y_N+2(y_1+y_2+\dots+y_{N-1})] \qquad (2.28)$$

бўлиб, унинг қолдиқ ҳади эса

$$\boxed{R_N^{(1)}(f)=-\frac{(b-a)^3}{12N^2}f''(\xi) \quad (a\leqslant\xi\leqslant b)} \qquad (2.29)$$

кўринишга эга бўлади.

Умумлашган Симпсон формуласини чиқариш учун $[a, b]$ оралиқни узунлиги $h=\frac{b-a}{2N}$ га тенг бўлган $2N$ та оралиқчаларга бўламиз ва узунлиги $2h$ га тенг бўлган ҳар бир иккиланган

$[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ... , $[x_{2N-2}, x_{2N}]$ оралиқчаларга Симпсон формуласини қўллаймиз:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots +$$
$$+ \frac{h}{3}(y_{2N-2} + 4y_{2N-1} + y_{2N}).$$

Бундан эса *умумлашган Симпсон формуласи*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6N}[(y_0 + y_{2N}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2N-1}) +$$
$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2N-2})] \qquad (2.30)$$

келиб чиқади. Юқоридаги каби мулоҳазалар юритиб, $f(x)$ тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлганда, *умумлашган Симпсон формуласининг*

$$R_N^{(3)}(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880N^4}f^{\mathrm{IV}}(\xi)\ (a \leqslant \xi \leqslant b) \qquad (2.31)$$

қолдиқ ҳадини ҳосил қиламиз.

Мисол тариқасида

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0,\ 693147180\ldots$$

интегрални тақрибий ҳисоблайлик. Бунинг учун умумлашган тўғри тўртбурчак формуласи (2.24) да $R = 10$ деб олайлик. Бу ерда $h = \frac{b-a}{N} = 0,1$ бўлгани учун $y_{k/2} = \frac{1}{1 + (k + 0,5)\cdot 0,1}$ бўлиб,

$y_{0,5} = 0,95238$; $y_{1,5} = 0,86957$; $y_{2,5} = 0,80000$;
$y_{3,5} = 0,74074$; $y_{4,5} = 0,68966$; $y_{5,5} = 0,64516$;
$y_{6,5} = 0,60606$; $y_{7,5} = 0,57143$: $y_{8,5} = 0,54054$;
$y_{9,5} = 0,51282$.

Бундан эса умумлашган тўғри тўртбурчак формуласига кўра:

$$I \approx \frac{1}{10}(y_{0,5} + y_{1,5} + \ldots + y_{9,5}) = 0,692836.$$

Бу тақрибий қиймат билан аниқ қийматнинг фарқи $|\ln 2 - 0,692836| < < 0,00032$. Демак, $\ln 2 \approx 0,693$, бу рақамлар аниқдир.

Иккинчи мисол сифатида ушбу интеграл синуснинг

$$\mathrm{Si}\,x = \int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$$

$x = 1$ нуқтадаги қийматини умумлашган Симпсон формуласи билан олти хона аниқликда топиш масаласини қарайлик.

Бу ерда аниқлик берилган $\varepsilon = 0,5\cdot 10^{-6}$ бўлиб, сўнгра унга кўра умумлашган Симпсон формуласи учун тегишли N ни аниқлаш мумкин. Бунинг учун $\mathrm{Si}\,x$ нинг 4-тартибли ҳосиласини баҳолаш керак. Равшанки,

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos uxdu.$$

Бундан

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_0^1 u^4 \cos uxdu$$

ва

$$\left|\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| \leqslant \int_0^1 u^4 du = \frac{1}{5}.$$

Энди (2.31) формулага кўра N қуйидаги тенгсизликни қаноатлантириши керак:

$$\frac{1}{2880}\,\frac{1}{N^4}\cdot\frac{1}{5} \leqslant 0{,}5\cdot 10^{-6}.$$

Бундан эса $N \geqslant 5$ эканлигини топамиз. Шунинг учун ҳам $N = 5$ учун Si(1) ни умумлашган Симпсон формуласи бўйича ҳисоблаймиз. Жадвалдан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$y_0 = 1;\quad y_1 = 0{,}998330;\quad y_2 = 0{,}993345;\quad y_3 = 0{,}985067;$$
$$y_4 = 0{,}973545;\quad y_5 = 0{,}958852;\quad y_6 = 0{,}941070;$$
$$y_7 = 0{,}920311;\quad y_3 = 0{,}896695;\quad y_9 = 0{,}870363;$$
$$y_{10} = 0{,}841471.$$

Ниҳоят,

$$\mathrm{Si}\,(1) \cong \frac{1}{30}\left[(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_9) + 2(y_2 + y_4 + \right.$$
$$\left. + \ldots + y_8)\right] = 0{,}946082.$$

Аслида Si(1) нинг олти хона аниқликдаги қиймати Si(1) = 0,946083. Топилган қиймат билан аниқ қиймат орасидаги охирги хона бирлигидаги фарқ яхлитлаш хатоси ҳисобидан келиб чиққан.

3-§. АЛГЕБРАИК АНИҚЛИК ДАРАЖАСИ ЭНГ ЮҚОРИ БЎЛГАН ФОРМУЛАЛАР

1. Гаусс типидаги квадратур формулалар. Олдинги параграфда n нуқтали интерполяцион формула

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (3.1)$$

нинг тугун нуқталари $[a,\ b]$ ораликда қандай жойлашганликларидан қатъи назар, $(n - 1)$-даражали кўпҳадларни аниқ интеграллашлигини кўрган эдик. Чекли $[a,\ b]$ оралиқ ва $\rho(x) \equiv 1$ учун Гаусс қуйидаги масалани қараган эди: $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ тугунлар шундай танлансинки, (3.1) формула мумкин қадар даражаси энг юқори бўлган кўпҳадларни аниқ интегралласин. (3.1) формулада n та параметр-тугунларни махсус равишда танлаш йўли билан унинг аниқлик даражасини n бирликка орттиришини кутиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тугунларни махсус равишда танлаш орқали (3.1) формуланинг даражаси $2n-1$ дан ортмайдиган барча $f(x)$ кўпҳадлар учун аниқ бўлишига эришиш мумкинлигини Гаусс кўрсатди. Кейинчалик Гаусснинг натижаси ихтиёрий оралиқ ва вазн функциялари учун умумлаштирилди. Бундай формулалар *Гаусс типидаги квадратур формулалар* дейилади.

Қулайлик учун x_k тугунлар ўрнида $\omega_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ кўпҳад билан иш кўрамиз. Агар x_k лар маълум бўлса, у ҳолда $\omega_n(x)$ ҳам маълум бўлади ва аксинча. Лекин x_k ларни топишни $\omega_n(x)$ ни топиш билан алмаштирсак, у ҳолда биз $\omega_n(x)$ ни илдизлари ҳақиқий, ҳар хил ва уларнинг $[a, b]$ оралиқда ётишини кўрсатишимиз шарт.

1-теорема. (3.1) квадратур формула даражаси $2n-1$ дан ортмайдиган барча кўпҳадларни аниқ интеграллаши учун қуйидаги шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир: 1) у интерполяцион ва 2) $\omega_n(x)$ кўпҳад $[a, b]$ оралиқда $\rho(x)$ вазн билан даражаси n дан кичик бўлган барча $Q(x)$ кўпҳадларга ортогонал бўлиши керак:

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n(x)Q(x)dx = 0. \qquad (3.2)$$

Исбот. Зарурийлиги. Фараз қилайлик, (3.1) формула даражаси $2n-1$ дан ортмайдиган барча кўпҳадларни аниқ интеграллосин. У ҳолда 2-§ даги теоремага кўра у интерполяциондир. Энди даражаси n дан кичик бўлган ихтиёрий $Q(x)$ кўпҳадни олиб, $f(x)=\omega_n(x)Q(x)$ деб оламиз. Кўриниб турибдики, $f(x)$ даражаси $2n-1$ дан ортмайдиган кўпҳад. Шунинг учун ҳам уни (3.1) формула аниқ интеграллайди:

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n(x)Q(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\,\omega_n(x_k)Q(x_k).$$

Бу ердан, $\omega_n(x_k)=0$ $(k=\overline{1, n})$ ни ҳисобга олсак, (3.2) тенглик келиб чиқади.

Етарлилиги. Фараз қилайлик (3.1) формула интерполяцион ва $\omega_n(x)$ кўпҳад даражаси n дан кичик бўлган барча кўпҳадларга $\rho(x)$ вазн билан ортогонал бўлсин. Энди (3.1) формула даражаси $2n-1$ дан ортмайдиган барча $f(x)$ кўпҳадларни аниқ интеграллашини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ ни $\omega_n(x)$ га бўлиб

$$f(x)=\omega_n(x)Q(x)+r(x) \qquad (3.3)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $Q(x)$ ва $r(x)$ ларнинг даражалари n дан кичик. Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини $\rho(x)$ га кўпайтириб, a дан b гача интеграллаймиз:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)\,\omega_n(x)Q(x)dx + \int_a^b r(x)\rho(x)dx.$$

Теорема шартига кўра ўнг томондаги биринчи интеграл нолга тенг, иккинчи интеграл эса

$$\int_a^b \rho(x)r(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\, r(x_k),$$

чунки $r(x)$ даражаси n дан кичик кўпҳад ва (3.1) формула интерполяциондир. Демак,

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\, r(x_k).$$

Лекин, (3.3) га кўра $r(x_k) = f(x_k)$. Шунинг учун

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\, f(x_k).$$

Шу билан теореманинг етарли шарти ҳам исбот бўлди.

$\omega_n(x)$ кўпҳад $\rho(x)$ вазн билан $[a, b]$ оралиқда даражаси n дан кичик бўлган барча кўпҳадлар билан ортогонал ва бош коэффициенти бирга тенг бўлганлиги учун, 6-боб натижаларига кўра, бундай $\omega_n(x)$ кўпҳад ягона ҳамда унинг илдизлари ҳақиқий, ҳар хил ва $[a, b]$ оралиқда ётади.

Демак, агар $\rho(x)$ вазн $[a, b]$ оралиқда ўз ишорасини сақласа, у ҳолда ҳар бир $n = 1, 2, \ldots$ учун $2n-1$ даражали кўпҳадни аниқ интеграллайдиган ягона (3.1) квадратур формула мавжуд. Қуйидаги теорема (3.1) формуланинг энг юқори аниқлик даражаси $2n-1$ эканлигини кўрсатади.

2-теорема. Агар $\rho(x)$ вазн $[a, b]$ оралиқда ўз ишорасини сақласа, у ҳолда x_k ва A_k лар ҳар қандай танланганда ҳам (3.1) тенглик $2n$-даражали барча кўпҳадлар учун аниқ бўла олмайди.

Исбот. Квадратур формуланинг тугунларини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар орқали белгилаб, қуйидаги

$$f(x) = \omega_n^2(x) = [(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n)]^2$$

$2n$-даражали кўпҳадни қараймиз.

Кўриниб турибдики, (3.1) формула бу кўпҳад учун аниқ эмас, чунки

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)dx > 0$$

ва ихтиёрий A_k коэффициентлар учун

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\, \omega_n^2(x_k) = 0.$$

2. Гаусс типидаги квадратур формула коэффициентларининг хоссаси. Гаусс типидаги квадратур формуланинг барча коэффициентлари A_k мусбатдир. Ҳақиқатан ҳам, $2n-2$ даражали

$$f(x) = \varphi_{k,\,n}^2(x) = \left[\frac{\omega_n(x)}{x-x_k}\right]^2$$

кўпҳад учун қуйидаги

$$\varphi_{k,n}(x_j)=\begin{cases}0, & \text{агар } j\neq k,\\ \omega'_n(x_k), & \text{агар } j=k\end{cases}$$

тенгликлар бажарилиши аёндир. Бу кўпҳад учун Гаусс типидаги формула аниқдир:

$$\int_a^b \rho(x)\varphi^2_{k,n}(x)dx = A_k\,[\omega'_n(x_k)]^2.$$

Бундан:

$$A_k=\frac{\int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)dx}{[\omega'_n(x_k)]^2}. \qquad (3.4)$$

Ўз навбатида бундан барча A_k ларнинг мусбатлиги келиб чиқади.

3. Гаусс типидаги квадратур формуланинг қолдиқ ҳади.

3-теорема. Агар $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ функция $2n$-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай $\xi\in[a, b]$ нуқта топиладики, Гаусс типидаги квадратур формуланинг қолдиқ ҳади

$$R_n(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx-\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

учун қуйидаги тенглик ўринлидир:

$$R_n(f)=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)dx. \qquad (3.5)$$

Исбот. Ушбу

$$H(x_i)=f(x_i),\quad H'(x_i)=f'(x_i)\quad (i=\overline{1, n})$$

шартларни қаноатлантирувчи Эрмит интерполяцион кўпҳади $H(x)$ ни тузамиз. 5-боб 13-§ даги формулага кўра Эрмит интерполяцион формуласи қолдиқ ҳади билан бирга қуйидагича ёзилади:

$$f(x)=H(x)+\frac{\omega_n^2(x)}{(2n)!}f^{(2n)}(\eta), \qquad (3.6)$$

бу ерда η x га боғлиқ бўлиб, x ва интерполяция тугунлари x_1, x_2, . . . , x_n жойлашган оралиқда ётади. Агар $x\in[a, b]$ ни ҳисобга олсак, у ҳолда $\eta\in[a, b]$. Энди (3.6) нинг ҳар икки томонини $\rho(x)$ га кўпайтириб, a дан b гача интеграллаймиз:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx=\int_a^b \rho(x)H(x)dx+\frac{1}{(2n)!}\int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)f^{(2n)}(\eta)dx. \qquad (3.7)$$

Охирги интегралнинг мавжудлиги қолган икки интегралларнинг мавжудлигидан келиб чиқади. $H(x)$ кўпҳаднинг даражаси $2n-1$ бўлгани учун, ўнг томондаги биринчи интегрални

$$\sum_{k=1}^{n} A_k H(x_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

квадратур йиғинди билан алмаштириш мумкин:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\, f(x_k) + \frac{1}{(2n)!}\int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)f^{(2n)}(\eta)dx.$$

Бундан кўринадики,

$$R_n(f) = \frac{1}{(2n)!}\int_a^b \rho(x)\omega_n^2(x)f^{(2n)}(\eta)dx.$$

Энди $\rho(x)\omega_n^2(x) \geqslant 0$ эканлигини назарда тутиб, ўрта қиймат ҳақидаги умумлашган теоремани қўлласак, қолдиқ ҳад учун (3.5) формула келиб чиқади.

4. Гаусс типидаги квадратур формулаларнинг яқинлашиши. Юқорида, $\rho(x) \geqslant 0$ бўлса, барча $n = 1, 2 \ldots .$ учун Гаусс типидаги

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n(f)$$

квадратур формуланинг мавжуд бўлишини кўриб ўтдик.

Агар

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b \rho(x)f(x)dx$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция учун *квадратур формула яқинлашади* дейилади.

4-теорема. Агар $[a, b]$ оралиқ чекли ва $f(x)$ функция бу оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда Гаусс типидаги квадратур формула яқинлашади.

Исбот. $n \to \infty$ да

$$R_n(f) = \int_a^b \rho(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \to 0$$

эканлигини исботлаш керак. $[a, b]$ оралиқ чекли ва бу оралиқда $f(x)$ узлуксиз бўлганлигидан Вейерштрасс теоремасига кўра берилган ҳар бир $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $P(x)$ кўпҳад мавжудки, ихтиёрий $x \in [a, b]$ учун

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \tag{3.8}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $R_n(f)$ ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$R_n(f) = \int_a^b \rho(x)\ (f(x) - P(x)\,)dx + \Big[\int_a^b \rho(x)P(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} P(x_k^{(n)})\Big] + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}(P(x_k^{(n)}) - f(x_k^{(n)})\,). \tag{3.9}$$

Квадрат қавслардаги ифода $P(x)$ кўпҳад учун квадратур формуланинг $R_n(P)$ қолдиғидан иборатдир. Агар бу кўпҳаднинг даражасини N орқали белгиласак, у ҳолда $2n-1>N$ бўлганда $R_n(P)=$ $=0$ бўлади. Энди (3.9) даги қолган ифодалар (3.8) тенгсизликка кўра қуйидагича баҳоланади:

$$\left|\int_a^b \rho(x)\ (f(x)-P(x))dx\right| \leqslant \varepsilon\int_a^b \rho(x)dx,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}(P(x_k^{(n)})-f(x_k^{(n)}))\right| \leqslant \varepsilon\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} = \varepsilon\int_a^b \rho(x)dx.$$

Демак, $2n-1>N$ бўлганда

$$|R_n(f)| \leqslant 2\varepsilon\int_a^b \rho(x)dx$$

бўлади. Шу билан теорема исботланди.

Умумий кўринишдаги (Гаусс типидагина эмас) квадратур формулалар кетма-кетлигини

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}f(x_k^{(n)}) + R_n(f)$$

қараймиз. Бу ерда $[a, b]$ оралиқ чекли ва бу оралиқда $\rho(x)$ вазн интегралланувчи ихтиёрий функция бўлсин. Бу квадратур формула учун қуйидаги теорема ўринлидир.

5-теорема. $f(x)$ $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлган ихтиёрий функция бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}f(x_k^{(n)}) = \int_a^b \rho(x)f(x)dx \qquad (3.10)$$

тенгликнинг бажарилиши учун қуйидаги икки шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир:

1) $f(x)$ ихтиёрий кўпҳад бўлганда, (3.10) тенглик ўринли.

2) Шундай L сон мавжудки, унинг учун:

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant L \qquad (n=1,\ 2,\ 3\ \ldots).$$

Агар квадратур формула интерполяцион, унинг $A_k^{(n)}$ коэффициентлари барча k ва n лар учун мусбат бўлса, у ҳолда теорема шартлари бажарилади. Шундай қилиб, 4-теорема 5-теореманинг хусусий ҳолидир.

4- §. ДАВРИЙ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Бу параграфда 2π даврли $f(x)$ функцияларни тақрибий интеграллаш масаласини кўрамиз. Бу ерда табиийки, квадратур формуланинг аниқлик даражаси алгебраик кўпҳадга нисбатан эмас, балки тригонометрик кўпҳадга нисбатан қаралади.

Агар ушбу квадратур формула

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \qquad (x_k^{(n)} \in [0,2\pi]) \tag{4.1}$$

ихтиёрий $m—1$-тартибли тригонометрик кўпҳадлар учун аниқ бўлиб, бирорта m-тартибли тригонометрик кўпҳад учун аниқ бўлмаса, у ҳолда бу *формуланинг тригонометрик аниқлик тартиби* $m-1$ *га тенг* дейилади.

Теорема. n тугунли квадратур формулалар тўпламида $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}, \ldots x_n^{(n)}$ тугунлари $[0,2\pi]$ оралиқда текис жойлашган ва коэффициентлари ўзаро тенг бўлган квадратур формула энг юқори тригонометрик аниқлик тартибига эга бўлиб, бу тартиб $n—1$ га тенг.

Исбот. Аввало, (4.1) кўринишдаги ихтиёрий квадратур формуланинг аниқлик даражаси $n-1$ дан ортмаслигини кўрсатамиз. Квадратур формуланинг $x_k^{(n)}$ тугун нуқталаридан фойдаланиб,

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{x-x_k^{(n)}}{2}$$

функцияни тузайлик. Ҳар бир кўпаювчи

$$\sin^2 \frac{x-x_k^{(n)}}{2} = \frac{1}{2}\left[1-\cos x_k^{(n)}\cos x - \sin x_k^{(n)}\sin x\right]$$

биринчи тартибли тригонометрик кўпҳад бўлгани учун, $f(x)$ n-тартибли тригонометрик кўпҳаддир. Бу кўпҳад учун (4.1) формула аниқ эмас, чунки

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{x-x_k^{(n)}}{2}\,dx > 0$$

ва

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = 0.$$

Демак, n тугунли ихтиёрий квадратур формуланинг тригонометрик аниқлик тартиби $n—1$ дан ортмайди. Энди ихтиёрий $\alpha \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]$ учун ушбу

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \approx \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left[\alpha+(k-1)\frac{2\pi}{n}\right] \tag{4.2}$$

квадратур формуланинг барча

$$f(x)=\cos kx, \quad \sin kx \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

функциялар учун аниқ эканини кўрсатамиз. Бунинг учун унинг барча

$$f(x)=e^{ikx} \quad (k=0,\ 1,\ \dots,\ n-1)$$

функциялар учун аниқ эканини кўрсатиш кифоядир. Агар $k=0$ бўлса, $f(x)=1$ бўлиб, (4.2) формуланинг аниқ экани равшандир. Энди $0<k\leqslant n-1$ бўлсин. У ҳолда

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx=\frac{1}{k}\,e^{ikx}\Big|_0^{2\pi}=0.$$

Шу билан бир вақтда квадратур йиғинди ҳам нолга тенг:

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)=\sum_{j=1}^{n} e^{ik\left((\alpha+(j-1)\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{ik\alpha}\sum_{j=1}^{n} e^{ik(j-1)\frac{2\pi}{n}}=$$

$$=e^{ik\alpha}\frac{e^{ik\frac{2\pi}{n}\cdot n}-1}{e^{ik\frac{2\pi}{n}}-1}=e^{ik\alpha}\frac{e^{2\pi ik}-1}{e^{ik\frac{2\pi}{n}}-1}=0.$$

Шундай қилиб, (4.2) формуланинг тригонометрик аниқлик тартиби $n-1$ га тенг экан.

Ихтиёрий $\alpha\in\left[0,\ \frac{T}{n}\right]$ учун

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx\approx\frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\alpha+(k-1)\frac{T}{n}\right) \tag{4.3}$$

квадратур формуланинг $n-1$- тартибли ихтиёрий

$$T_{n-1}(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k\cos\frac{2\pi}{T}kx+b_k\sin\frac{2\pi}{T}kx\right)$$

тригонометрик кўпҳад учун аниқ тенгликка айланишини кўрсатиш қийин эмас.

Мисол сифатида ушбу

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

тўлиқ эллиптик интегралнинг $k=0,5$ даги қийматини тўрт хона аниқлигида ҳисоблайлик. Интеграл остидаги функция жуфт ва π даврли бўлгани сабабли K (0,5) ни

$$K(0,5)=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-0,25\sin^2\varphi}}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу интегрални ҳисоблаш учун (4.3) да $T=\pi$ деб оламиз. Энди $n=6$ деб олиб, тугунларни $\varphi=0$ нуқтага нисбатан симметрик равишда жойлаштирамиз:

$$\varphi_{\pm 1}=\pm\frac{\pi}{12},\quad \varphi_{\pm 2}=\pm\frac{\pi}{4},\quad \varphi_{\pm 3}=\pm\frac{5\pi}{12}.$$

У ҳолда

$$K(0{,}5)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot 2\left[f\left(\frac{\pi}{12}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left[\frac{1}{\sqrt{0{,}9983}}+\frac{1}{\sqrt{0{,}8750}}+\frac{1}{\sqrt{0{,}7668}}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{6}\,(1{,}0009+1{,}0691+1{,}1419)=1{,}6816.$$

K (0,5) нинг жадвалдаги қиймати 1,6858. Демак, хато 0,0042 га тенг.

5- §. ГАУСС ТИПИДАГИ КВАДРАТУР ФОРМУЛАНИНГ ХУСУСИЙ ҲОЛЛАРИ

1. Гаусс квадратур формуласи. Гаусс квадратур формуласи Гаусс типидаги квадратур формулаларнинг хусусий ҳоли бўлиб, бу ҳолда $\rho(x)\equiv 1$ ва $[a,\ b]$ оралиқ чеклидир. Ихтиёрий оралиқни чизиқли алмаштириш ёрдамида $[-1,\ 1]$ га келтириш мумкин, шунинг учун ҳам интеграл

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

кўринишга келтирилган деб фараз қиламиз.

Маълумки, $[-1,\ 1]$ оралиқда $\rho(x)\equiv 1$ вазн билан ортогонал бўлган функциялар системасини Лежандр кўпҳадлари

$$L_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n \qquad (5.1)$$

ташкил этади. Бу кўпҳадларнинг ортогонал система ташкил этиши 6- бобда таъкидланган эди. Лекин буни бевосита текшириш ҳам мумкин. Ихтиёрий $k\leqslant n$ учун, бўлаклаб интеграллаш йўли билан ушбуга эга бўламиз:

$$S_k=\int_{-1}^{1} x^k\,\frac{d^n\,(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx=\left[x^k\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\right]_{-1}^{1}-$$

$$-k\int_{-1}^{1} x^{k-1}\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx.$$

Ўнг томондаги биринчи ҳад нолга тенг, шунинг учун:

$$S_k=-k\int_{-1}^{1} x^{k-1}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx.$$

Шунга ўхшаш

$$S_k = (-k)\ (-k+1) \int\limits_{-1}^{1} x^{k-2}\ \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}}\, dx = \ldots =$$

$$= (-1)^k\ 1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ k \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}\, dx.$$

Бундан кўринадики, ихтиёрий $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ учун $S_k = 0$ бўлиб, $L_n(x)$ ортогонал системани ташкил этади. $L_n(x)$ кўпҳад $\omega_n(x)$ дан фақат доимий кўпайтувчи билан фарқ қилади. (5.1) формуладан:

$$L_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n - \ldots \tag{5.2}$$

Демак,

$$\omega_n(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\ L_n(x) \tag{5.3}$$

келиб чиқади. Энди (5.2) ни ҳисобга олиб, бўлаклаб интеграллаш йўли билан (S_k ни ҳисоблашдагидек)

$$\int\limits_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = (-1)^n\ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx =$$

$$= 2\cdot\ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int\limits_{0}^{1} (1-x^2)^n dx$$

ни ҳосил қиламиз. Маълумки,

$$I_n = \int\limits_{0}^{1} (1-x^2)^n dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\ .$$

Демак,

$$\int\limits_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}\ . \tag{5.4}$$

Бизга $L_n(1)$ ва $L_n(-1)$ нинг қийматлари керак бўлади. Буни топиш учун Лейбниц формуласидан фойдаланамиз:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\ \frac{d^n}{dx^n}\ [\,(x+1)^n\ (x-1)^n] =$$

$$= \frac{1}{2^n\cdot n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\ (x+1)^n\ \frac{d^k}{dx^k}\ (x-1)^n =$$

$$= \frac{1}{2^n\cdot n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{k!}\ (x+1)^k\ \frac{n!}{(n-k)!}\ (x-1)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} [C_n^k]^2\ (x+1)^k\ (x-1)^{n-k}.$$

Бундан эса хусусий ҳолда

$$L_n(1)=1,\quad L_n(-1)=(-1)^n \tag{5.5}$$

га эга бўламиз.

Энди Гаусс квадратур формуласининг

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{5.6}$$

тугунлари ва коэффициентларини аниқлашга ўтамиз. Тугунларни топиш учун

$$L_n(x)=0$$

алгебраик тенгламанинг барча илдизларини аниқлаш керак. Тугунлар аниқлангандан сўнг коэффициентларни

$$A_k=\int_{-1}^{1}\frac{L_n(x)}{(x-x_k)L_n'(x_k)}\,dx$$

ёрдамида аниқлаш мумкин. Лекин бу формула ҳисоблаш учун ноқулай, шунинг учун ҳам бошқа йўл тутамиз. Бунинг учун (5.6) формулани шундай кўпҳадга қўллаймизки, ўнг томонда фақат биргина ҳад қолсин.

Масалан,

$$f(x)=2L_{n,k}(x)\,L'_{n,k}(x)$$

каби олсак, бу ерда

$$L_{n,k}(x)=\frac{L_n(x)}{x-x_k}=C\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(x-x_j),$$

у ҳолда

$$\int_{-1}^{1}2L_{n,k}(x)\,L'_{n,k}(x)dx=L^2_{n,k}(x)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{L_n^2(1)}{(1-x_k)^2}-\frac{L_n^2(-1)}{(1+x_k)^2}=\frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2}L_n^2(1)=\frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2}, \tag{5.7}$$

чунки (5.5) га кўра $L_n^2(1)=L_n^2(-1)=1$. Иккинчи томондан, (5.6) га кўра

$$\int_{-1}^{1}2L_{n,k}(x)L'_{n,k}(x)dx=2A_k\,L_{n,k}(x_k)L'_{n,k}(x_k), \tag{5.8}$$

чунки (5.6) даги қолган ҳадлар нолга айланади. Қуйидаги тенгликни

$$(x-x_k)\;L_{n,k}(x)=L_n(x)$$

икки марта дифференциаллаб, $x=x_k$ деб олсак,

$$L_{n,k}(x_k)=L_n'(x_k),\quad 2L'_{n,k}(x_k)=L_n''(x_k)$$

га эга бўламиз. Бу қийматларни (5.8) га қўйиб, сўнгра уни (5.7) билан таққослаб, қуйидагини топамиз:

$$A_k = \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2} \cdot \frac{1}{L_n'(x_k)L_n''(x_k)} . \qquad (5.9)$$

Маълумки, Лежандр кўпҳади $L_n(x)$ ушбу

$$(x^2-1)\, L_n''(x) + 2xL_n'(x) - n(n+1)L_n(x) = 0$$

тенгламани қаноатлантиради. Буни бевосита текшириб кўриш мумкин. Бу тенгламада $x = x_k$ деб ва $L_n(x_k) = 0$ ни ҳисобга олсак

$$(x_k^2-1)\, L_n''(x_k) + 2x_kL_n'(x_k) = 0$$

келиб чиқади. Бундан эса

$$L_n''(x_k) = \frac{2x_kL_n'(x_k)}{1-x_k^2} .$$

Бу ифодани (5.9) га қўйиб, A_k учун керакли формулага эга бўламиз:

$$A_k = \frac{2}{(1-x_k^2)\,[L_n'(x_k)\,]^2} \qquad (k = \overline{1,n}).$$

Энди Гаусс формуласининг қолдиқ ҳадини аниқлайлик. Фараз қилайлик, $f(x)$ функцияси $[-1,\ 1]$ оралиқда $2n$- тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда 3- § даги 3- теоремага кўра

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} \omega_n^2(x)dx.$$

Бу ердан (5.3) ва (5.4) формулаларга кўра

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} \frac{2^{2n}(n!)^4}{[\,(2n)!\,]^2}\, L_n^2(x)dx =$$

$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^4}{[\,(2n)!\,]^2} \cdot \frac{2}{2n+1} .$$

Шундай қилиб, Гаусс формуласининг қолдиқ ҳади

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!\,]^3\,(2n+1)} f^{(2n)}(\xi)$$

бўлади.

Қуйида Гаусс формуласининг тугунлари, коэффициентлари ва қолдиқ ҳадлари $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ учун келтирилган:

$$n = 1$$

$$x_1 = 0, \quad A_1 = 2, \quad R_1 = \frac{1}{3} f''(\xi).$$

$$n = 2$$

$$-x_1 = x_2 = 0{,}5773502692, \quad A_1^{(2)} = A_2^{(2)} = 1,$$

$$R_2 = \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi);$$

$$n = 3$$

$$-x_1 = x_2 = 0{,}7745966692, \quad x_2 = 0,$$

$$A_1 = A_3 = \frac{5}{9}, \quad A_2 = \frac{8}{9}, \quad R_3 = \frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi);$$

$$n = 4$$

$$-x_1 = x_4 = 0{,}8611363116, \ -x_2 = x_3 = 0{,}3399810436;$$

$$A_2 = A_3 = 0{,}6521451549, \quad A_1 = A_4 = 0{,}3478548451,$$

$$R_4 = \frac{1}{3472875} f^{(8)}(\xi);$$

$$n = 5$$

$$-x_1 = x_5 = 0{,}9061798459,$$

$$-x_2 = x_4 = 0{,}5384693101, \qquad x_3 = 0,$$

$$A_1 = A_5 = 0{,}2369268851,$$

$$A_2 = A_4 = 0{,}4786286705,$$

$$A_3 = 0{,}5688888889,$$

$$R_3 = \frac{1}{1237732650} f^{(10)}(\xi);$$

$$n = 6$$

$$-x_1 = x_6 = 0{,}9324695142,$$

$$-x_2 = x_5 = 0{,}6612093865,$$

$$-x_3 = x_4 = 0{,}2386191861,$$

$$A_1 = A_6 = 0{,}1713244924,$$

$$A_2 = A_5 = 0{,}3607615730,$$

$$A_3 = A_4 = 0{,}4679139446,$$

$$R_6 = \frac{1}{648984486150} f^{(12)}(\xi).$$

В. И. Криловнинг [23] китобида Гаусс формуласининг тугунлари ва коэффициентлари $n = 1(1)16$ учун ўн бешта ўнли рақами билан берилган. Ихтиёрий $[a, b]$ оралиқ бўйича олинган

$$\int_a^b f(t)dt$$

интегрални

$$t = \frac{b-a}{2} x + \frac{a+b}{2}$$

алмаштириш ёрдамида $[-1, 1]$ сралиққа келтириш мумкин:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2} x + \frac{a+b}{2}\right) dx.$$

Бу интегралга Гаусс формуласини қўлласак,

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$t_k = \frac{b-a}{2}x_k + \frac{a+b}{2}.$$

x_k ва A_k лар $[-1, 1]$ учун қурилган Гаусс формуласининг тугунлари ва коэффициентларидир.

Мисол. Гаусс формуласи ёрдамида ушбу

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+t^2} = 0{,}78539816\ldots$$

интегрални ҳисоблайлик. Аввало $t = \frac{x+1}{2}$ алмаштириш ёрдамида

$$I = 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{4+(1+x)^2}$$

кўринишга келтирамиз, сўнгра $n = 4$ деб ҳисоблашларни олти хона аниқликда бажарамиз:

$$I = 2\left[0{,}347855\left(\frac{1}{4+0{,}138864^2} + \frac{1}{4+1{,}861136^2}\right) + \right.$$
$$\left. + 0{,}652145\left(\frac{1}{4+0{,}660019^2} + \frac{1}{4+1{,}339981^2}\right)\right] = 0{,}785403.$$

2. Мелер квадратур формуласи. Энди $[-1, 1]$ оралиқда

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5.10}$$

вазн билан квадратур формула қурайлик. $[-1, 1]$ оралиқда (5.10) вазн билан ортогонал бўлган кўпҳад

$$T_n(x) = \cos n \arccos x$$

Чебишев кўпҳадлари эканлиги маълумдир. Буни текшириш учун

$$I_m = \int_{-1}^{1} \frac{x^m \cos n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

интегралда $x = \cos\theta$ алмаштириш бажарамиз:

$$I_m = \int_0^{\pi} \cos^m\theta \cos n\theta d\theta.$$

Маълумки,

$$\cos^m\theta = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos k\theta$$

ва барча $k=0, 1, \ldots, n-1$ учун

$$\int_0^\pi \cos k\theta \cos n\theta d\theta = 0.$$

Булардан эса $I_m = 0$ келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

квадратур формуланинг тугунлари $T_n(x) = 0$ тенгламанинг

$$x_{n+1-k} = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

илдизларидан иборатдир. Бу формуланинг коэффициентларини эса

$$A_k = \frac{1}{T_n'(x_k)} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{T_n(x)}{x-x_k} dx$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу интегрални ҳисоблаш учун $x = \cos\theta$ алмаштириш бажарамиз:

$$A_k = \frac{1}{T_n'(x_k)} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - x_k} d\theta. \tag{5.11}$$

Интеграл ости функциясининг жуфтлиги туфайли:

$$A_k = \frac{1}{2T_n'(x_k)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - x_k} d\theta.$$

Интеграл остидаги функция $n-1$-тартибли тригонометрик кўпҳаддир. Биз 4-§ да бундай кўпҳадни $2n$ нуқтали тўғри тўртбурчаклар формуласи аниқ интеграллашини кўрсатган эдик. (5.11) интегрални ҳисоблаш учун тўғри тўртбурчаклар формуласида қуйидаги $2n$ нуқталарни

$$\theta_j = \frac{2j-1}{2n}\pi, \; j = -n+1, \; -n+2, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, n$$

олсак, A_k нинг аниқ қийматига эга бўламиз. Равшанки интеграл остидаги функция

$$f(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - x_k}$$

нинг $\theta = \theta_j$ $(j = \overline{1, n})$ нуқтадаги қиймати $j \neq k$ бўлганда нолга тенг бўлиб, $j = k$ бўлганда $T_n'(x_k)$ га тенг. Бундан ташқари $f(\theta)$ жуфт функция ва $\theta_{-j+1} = -\theta_j$, шунинг учун ҳам $f(\theta_{-j+1}) = f(\theta_j)$. Демак,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - x_k} d\theta = \frac{2\pi}{2n}\left[f\left(-\frac{2n-1}{2n}\pi\right) + f\left(-\frac{2n-3}{2n}\pi\right) + \ldots + \right.$$

$$+f\left(\frac{2n-3}{2n}\pi\right)+f\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{\pi}{n}\left[f\left(-\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+f\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right]=\frac{2\pi T'_n(x_k)}{n}.$$

Буни (5.11) га қўйиб,

$$A_k=\frac{1}{2T'_n(x_k)}\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot T'_n(x_k)=\frac{\pi}{n}$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, биз қуйидаги *Мелер квадратур формуласига* эга бўлдик:

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k),\quad x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi.$$

Бу формула баъзан *Эрмит формуласи* ҳам дейилади, бу формулани Эрмит ўзининг анализ курсига киритган эди.

Бу формуланинг қолдиқ ҳадини қарайлик. 4- бобда кўрган эдикки,

$$T_n(x)=2^{n-1}\,x^n+a\,x^{n-1}+\ldots$$

Шунинг учун ҳам $\omega_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\,T_n(x)$ ва

$$R_n(f)=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n!)}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\cdot T_n^2(x)dx.$$

Қуйидагига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Шундай қилиб,

$$R_n(f)=\frac{\pi}{(2n)!2^{2n-1}}f^{(2n)}(\xi),\quad -1\leqslant\xi\leqslant1.$$

Бошқа ҳар хил вазн функцияли Гаусс типидаги квадратур формулалар ҳақида бобнинг охиридаги машқлардан қаранг.

6- §. ЧЕБИШЕВ КВАДРАТУР ФОРМУЛАСИ

Биз олдинги параграфда Мелер квадратур формуласини ҳосил қилдик. Бу формула шу билан характерланадики, $f(x_k)$ олдидаги барча коэффициентлар ўзаро тенг. Агар $f(x_k)$ нинг қийматлари тасодифий хатоларга мойил бўлса, у ҳолда бундай формулалар катта аҳамиятга эга бўлади. Чунки белгиланган

$$c_1+c_2+\ldots+c_n \quad \text{учун}$$

$$c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\ldots+c_nf(x_n)$$

ифода $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$ бўлганда энг кичик тасодифий хатога эга бўлади. Шу муносабат билан П. Л. Чебишев тенг коэффициентли

$$\int_{-1}^{1} \rho(x) f(x) dx = c_n \sum_{k=1}^{n} f(x_k) + R_n(f) \tag{6.1}$$

квадратур формула тузиш масаласини қўйган эди. Бу квадратур формуланинг ўнг томонида $n+1$ та параметр: n та x_k тугунлар ва c_n коэффициент қатнашади. Бу параметрларни тегишли усулда танлаш йўли билан (6.1) формулани n-даражали $f(x)$ кўпҳадни аниқ интеграллайдиган қилиб қуришга имконият борлигига умид қилиш мумкин. Биз кейинчалик (6.1) формуланинг ҳар доим ҳам мавжуд бўлавермаслигини кўрамиз. 4-§ дагидек бу ерда ҳам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларни топиш ўрнига

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$$

кўпҳадни излаймиз. (6.1) формулада

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

деб оламиз, бу ерда $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — ихтиёрий ҳақиқий сонлар. Шартга кўра бу функция учун $R_n(f) = 0$, шунинг учун ҳам қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$a_0 \int_{-1}^{1} \rho(x) dx + a_1 \int_{-1}^{1} \rho(x) x dx + \ldots + a_n \int_{-1}^{1} \rho(x) x^n dx =$$
$$= c_n [n a_0 + a_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) +$$
$$+ \ldots + a_n(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n)]. \tag{6.2}$$

Қуйидагича белгилаш киритайлик:

$$m_k = \int_{-1}^{1} \rho(x) x^k \, dx.$$

(6.2) тенгликдан, a_i ларнинг ихтиёрийлигини ҳисобга олсак,

$$n c_n = m_0,$$
$$c_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = m_1,$$
$$c_n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = m_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_n(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n) = m_n$$

тенгликлар келиб чиқади. Биринчи тенгликдан $c_n = \frac{1}{n} m_0$ ни толамиз. Сўнг $S_k = \frac{m_k}{c_n}$ белгилаш киритиб, $x_1, x_2, \dots, x_n$ ларни топиш учун қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = S_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = S_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = S_n. \end{cases} \qquad (6.3).$$

Биз III бобда

$$\omega_n(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

кўпҳаднинг коэффициентлари билан унинг илдизларидан тузилган $S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ симметрик функцияларни ўзаро боғлайдиган

$$\begin{aligned} &S_1 + A_1 = 0, \\ &S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &S_n + A_1 S_{n-1} + A_2 S_{n-2} + \dots + nA_n = 0 \end{aligned}$$

Ньютон формулаларини чиқарган эдик. Бу формулалардан кетма-кет $A_1, A_2, \dots, A_n$ ларни аниқлаймиз.

Энди $\rho(x) \equiv 1$ бўлган Чебишев формуласининг хусусий ҳолини қараймиз. Бу ҳолда $c_n = \frac{1}{n} \int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{n}$,

$$S_k = \frac{n}{2} \int_{-1}^{1} x^k dx = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{2(k+1)} \cdot n \qquad (k = \overline{1, n})$$

бўлади. Чебишев $n = 1(1)7$ лар учун

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad (6.4)$$

квадратур формуланинг тугунларини топган эди. Кейинчалик маълум бўлдики, $n = 8$ бўлганда $\omega_n(x)$ кўпҳад илдизларининг орасида комплекслари ҳам мавжуд экан, $n = 9$ бўлганда барча илдизлар яна ҳақиқийдир. С. Н. Бернштейн $n \geqslant 10$ бўлганда $\omega_n(x)$ кўпҳаднинг илдизлари орасида доимо комплекслари мавжуд эканлигини кўрсатди. Демак, $n \geqslant 10$ бўлганда Чебишевнинг (6.4) квадратур формуласи мавжуд бўлмас экан.

Қуйида $n = 1(1)7$ ва $n = 9$ учун Чебишевнинг квадратур формуласининг тугунлари келтирилган:

$$n = 1$$
$$x_1 = 0;$$
$$n = 2$$
$$-x_1 = x_2 = 0{,}5773502691;$$
$$n = 3$$

$$-x_1 = x_3 = 0{,}7071067812, \quad x_2 = 0;$$

$$n = 4$$

$$-x_1 = x_4 = 0{,}7946544723, \quad -x_2 = x_3 = 0{,}1875924741;$$

$$n = 5$$

$$-x_1 = x_5 = 0{,}8324974870, \quad -x_2 = x_4 = 0{,}3745414096, \quad x_3 = 0;$$

$$n = 6$$

$$-x_1 = x_6 = 0{,}8662468181, \quad -x_2 = x_5 = 0{,}4225186538,$$

$$-x_3 = x_4 = 0{,}2666354015;$$

$$n = 7$$

$$-x_1 = x_7 = 0{,}8838617008, \quad -x_2 = x_6 = 0{,}5296567753,$$

$$-x_3 = x_5 = 0{,}3239118105, \quad x_4 = 0;$$

$$n = 9$$

$$-x_1 = x_9 = 0{,}9115893077, \quad -x_2 = x_8 = 0{,}6010186554,$$

$$-x_3 = x_7 = 0{,}5287617831, \quad -x_4 = x_6 = 0{,}1679061842, \quad x_5 = 0.$$

Мисол. Чебишев формуласи билан $n=7$ бўлганда

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+9x} = \frac{1}{9}\ln 10 = 0{,}25584279\ldots$$

интегрални ҳисоблайлик. Бу ерда $x = \frac{1}{2}(t+1)$ алмаштириш бажариб, интеграллаш оралиғини $[-1, 1]$ га келтирамиз:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{11+9t}.$$

Ҳисоблашларни олти хона аниқликда олиб борамиз:

$$f(x_1) = 0{,}328381, \quad f(x_2) = 0{,}160434, \quad f(x_3) = 0{,}123689,$$
$$f(x_4) = 0{,}090909, \quad f(x_5) = 0{,}071864, \quad f(x_6) = 0{,}063424,$$
$$f(x_7) = 0{,}052757.$$

Булардан, Чебишев квадратур формуласи ёрдамида берилган интегралнинг тақрибий қийматини топамиз:

$$I \approx 0{,}254702.$$

7- §. ОПТИМАЛ ҚВАДРАТУР ФОРМУЛАЛАР

Берилган $\int_a^b f(x)dx$ интегрални у ёки бу квадратур формула ёрдамида ҳисоблаш пайтида асосий меҳнат функциянинг квадратур формула тугунларидаги қийматларини ҳисоблашга сарфланади. Шундай экан интегрални ҳисоблашда керакли аниқликка, имкон борича кам меҳнат сарфлаб эришишга интилиш табиийдир, бошқача айтганда берилган интегрални тугунлари сони мумкин қадар кам бўлган формула бўйича ҳисоблаш мақсадга мувофиқдир. Агар интегралланувчи $f(x)$ ни даражаси юқори бўлмаган кўпҳадлар билан ҳам яқинлаштириш мумкин бўлса, у ҳолда олдинги параграфларда қурилган алгебраик даражаси энг юқори квадратур формулалар яхши натижа беради. Лекин унча силлиқ бўлмаган функциялар учун бу формулалар яхши натижа бермайди. Одатда бундай функциялар учун аниқлиги унча катта бўлмаган тўғри тўртбурчаклар, трапециялар формулалари яхши натижа беради. Шунинг учун ҳам, функцияларнинг муҳим синфлари учун шундай формулани топиш керакки, бу формула берилган синфнинг барча функциялари учун бошқа формулаларга нисбатан энг кичик қолдиққа эга бўлсин.

Аниқроқ айтганда, масала қуйидагича қўйилади. Бирор $[a, b]$ оралиқда аниқланган функциялар синфи H берилган бўлсин. *Бутун H синфда*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

квадратур формуланинг қолдиқ ҳади деб

$$R_n(H) = \sup_{f\in H}|R_n(f)| = \sup_{f\in H}\left|\int_0^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)\right|$$

ифодага айтилади. Унинг қуйи чегараси

$$W_n(H) = \inf_{A_k,\, x_k} R_n(H)$$

қаралаётган синфда квадратур формула хатосининг оптимал баҳоси дейилади.

Агар шундай квадратур формула мавжуд бўлсаки, унинг учун $R_n(H) = W_n(H)$ тенглик бажарилса, бундай формула қаралаётган синфда *оптимал ёки энг яхши формула* дейилади.

Иккита синф мисолида оптимал формула тузишни кўриб чиқамиз. Аввал $[0, 1]$ оралиқда узлуксиз ва биринчи ҳосиласи бўлакли узлуксиз ҳамда $|f'(x)| \leqslant L$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $C^1(L)$ функциялар синфини қараймиз.

Қаралаётган

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \quad (0 \leqslant x_1 < \ldots < x_n = 1) \tag{7.1}$$

квадратур формула $f(x) = \text{const}$ учун аниқ бўлишини, яъни

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = 1 \tag{7.2}$$

тенглик бажарилишини талаб қиламиз. Акс ҳолда $f(x) = C$ учун

$$R_n(f) = (1 - \sum_{k=1}^{n} A_k)C \neq 0$$

бўлиб, барча $f(x) = \mathrm{const}$ функциялар қаралаётган синфда ётади ва демак,

$$R_n(H) \geqslant \sup_c \left(\left| 1 - \sum_{k=1}^{n} A_k \right| |C| \right) = \infty.$$

Кўриниб турибдики, бундай квадратур формуланинг оптималлиги ҳақида гап бўлиши мумкин эмас. Равшанки, $f(x) \in C^1(L)$ ни

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt \tag{7.3}$$

кўринишда ёзиш мумкин ва аксинча, $f(0)$ ихтиёрий сон бўлиб, $f'(x)$ бўлакли-узлуксиз ва $|f'(x)| \leqslant L$ бўлса, у ҳолда (7.3) тенглик $f(x) \in C^1(L)$ функцияни аниқлайди. (7.1) — (7.2) квадратур формуланинг $f(x) = \mathrm{const}$ учун аниқлигини ҳисобга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$R_n(f) = \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = \int_0^1 \left[f(0) + \int_0^x f'(t)dt \right] dx -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} A_k \left[f(0) + \int_0^{x_k} f'(t)dt \right] = \int_0^1 \int_0^x f'(t)dtdx - \sum_{k=1}^{n} A_k \int_0^{x_k} f'(t)dt =$$

$$= \int_0^1 dt \int_t^1 f'(t)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k \int_0^1 f'(t) \overline{(x_k - t)}^0 \, dt,$$

бу ерда

$$\overline{(x_k - t)}^0 = \begin{cases} 1, \text{ агар } & 0 \leqslant t < x_k \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } & x_k \leqslant t \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Шундай қилиб,

$$R_n(f) = \int_0^1 f'(t) \left[1 - t - \sum_{k=1}^{n} A_k \overline{(x_k - t)}^0 \right] dt = \int_0^1 f'(t) K_n(t) dt,$$

бу ерда $K_n(t)$ функция $R_n(t)$ *қолдиқнинг ядроси* дейилади ва у қуйидагига тенг:

$$K_n(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^{n} A_k \overline{(x_k - t)}^0 =$$

$$= \begin{cases} -t, & \text{агар } \quad 0 \leqslant t < x_1 & \text{бўлса}. \\ -t + \sum\limits_{l=1}^{k} A_l, & \text{агар } \quad x_k \leqslant t < x_{k+1} \ (k = \overline{1, n-1}) & \text{бўлса}, \\ 1 - t, & \text{агар } \quad x_k \leqslant t \leqslant 1 & \text{бўлса}. \end{cases} \tag{7.4}$$

Шунингдек,

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \overline{(x_k - t)}^0 = \begin{cases} 1, & \text{агар } 0 \leqslant t < x_1 \text{ бўлса}, \\ q_k = \sum\limits_{l=k}^{n} A_l, & \text{агар } x_{k-1} \leqslant t < x_k (k = \overline{2, n}) \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } x_n \leqslant t \leqslant 1 \text{ бўлса}. \end{cases} \tag{7.5}$$

(7.4) дан кўринадики $K_n(t)$ ядро $f(x)$ функцияга боғлиқ бўлмай, балки фақат квадратур формуланинг тугунлари x_k ва коэффициентлари A_k ларгагина боғлиқдир. $K_n(t)$ нинг графиги бўлакли-чизиқли бўлиб, x_k тугунларда сакраши A_k га тенг бўлган биринчи жинс узилишга эга.

$C^1(L)$ функциялар синфида $R_n(f)$ қолдиқ ҳад учун

$$|R_n(f)| \leqslant L \int_0^1 |K_n(t)|\, dt$$

баҳога эга бўламиз. Энди

$$R_n(C^1(L)) = L \int_0^1 |K_n(t)|\, dt$$

эканлигини кўрсатайлик. Қуйидаги

$$\varphi(x) = \int_0^x L \operatorname{sign} K_n(t)\, dt$$

функция бўлакли-узлуксиз ҳосила $\varphi'(x) = L \operatorname{sign} K_n(t)$ га эга, $|\varphi'(x)| = L \; (x \neq x_k)$, яъни у қаралаётган синфда ётади ва

$$|R_n(\varphi)| = \int_0^1 L \operatorname{sign} K_n(t) \cdot K_n(t)\, dt = L \int_0^1 |K_n(t)|\, dt.$$

Бундан маълум бўладики, қаралаётган синфда квадратур формула хатосини минималлаштириш қуйидаги $\|f\|_{L_1} \int_0^1 |f(x)|\, dx$ метрикада $1 - t$ функцияни (7.5) кўринишдаги функция билан энг яхши яқинлаштириш масаласига келтирилади. Энди

$$\int_0^1 |K_n(t)|\, dt \quad \text{ни} \quad V(q_2, \ldots, q_n; x_1, \ldots, x_n)$$

орқали белгилаб олиб, $V(q_2, \ldots, q_n; x_1, \ldots, x_n) =$

$$= \int_0^{x_1} |t|\, dt + \sum_{k=2}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |1 - t - q_k|\, dt + \int_{x_n}^{1} |1 - t|\, dt \qquad (7.6)$$

тенгликка эга бўламиз. Агар q_k ларни белгиланган деб олсак, у ҳолда йиғиндининг k- ҳади

$$V(q_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} |1 - t - q_k|\, dt$$

фақатгина q_k га боғлиқ ва бу интегрални ҳисобласак, қуйидагига эга бўламиз:

$$V(q_k)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})^2+(q_k-1+x_k)(x_k-x_{k-1}), & \text{агар } 1-x_{k-1}\leqslant q_k,\\ \frac{1}{2}[(1-q_k-x_k)^2+(1-q_k-x_{k-1})^2], & \\ & \text{агар } 1-x_k\leqslant q_k\leqslant 1-x_{k-1},\\ \frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})^2-(q_k-1+x_k)(x_k-x_{k-1}), & \text{агар } q_k\leqslant 1-x_k.\end{cases}$$

Бундан эса,

$$V'(q_k)=\begin{cases}x_k-x_{k-1}, & \text{агар } 1-x_{k-1}\leqslant q_k,\\ -2(1-q_k)+x_k+x_{k-1}, & \text{агар } 1-x_k\leqslant q_k < 1-x_{k-1},\\ -(x_k-x_{k-1}), & \text{агар } q_k\leqslant 1-x_k.\end{cases}$$

Охирги ифодадан фойдаланиб, $V(q_k)$ ни минималлаштиришни ҳисобга олсак олдинги ифодадан

$$\min_{q_k} V(q_k)=\frac{1}{4}(x_k-x_{k-1})^2 \qquad (7.7)$$

келиб чиқади. (7.6) нинг ўнг томонида $V\ (q_k)$ миқдорлардан ташқари яна ушбу ифода ҳам бор:

$$\int_0^{x_1}|t|\,dt+\int_{x_n}^{1}|1-t|\,dt=\frac{x_1^2+(1-x_n)^2}{2}\ .$$

Бундан ва (7.6) — (7.7) дан $\inf\limits_{q_2,\ \ldots,\ q_n} V(q_2,\ \ldots,\ q_n;x_1,\ \ldots,\ x_n)=$

$$=U(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\frac{x_1^2+(1-x_n)^2}{2}+\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})^2.$$

Шундай қилиб,

$$\inf_{q_2,\ \ldots,\ q_n;\ x_1,\ \ldots,\ x_n} V(q_2,\ \ldots,\ q_n;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)=$$
$$=\inf_{x_1,\ \ldots,\ x_n} U(x_1,\ \ldots,\ x_n).$$

Энди $\frac{\partial U}{\partial x_k}$ ҳосилаларни нолга тенглаштириб, қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\frac{3x_1-x_2}{2}=0,\quad \frac{3x_n-2-x_{n-1}}{2}=0,\quad \frac{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}{2}=0$$
$$(k=\overline{2,\ n-1}).$$

Бу системанинг ечими эса

$$x_k=\frac{2k-1}{2n}\qquad (k=\overline{1,n})$$

бўлиб,

$$\inf_{x_1,\ \ldots,\ x_n} U\ (x_1,\ \ldots,\ x_n)=\frac{1}{4n}\,.$$

Шундай қилиб, қаралаётган $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n - 1$ соҳа ичида $U(x_1, \ldots, x_n)$ нинг экстремал қийматини топдик, лекин $U(x_1, \ldots, x_n)$ ўзининг энг кичик қийматига бу соҳанинг чегарасида ҳам эришиши мумкин.

Бевосита текшириб кўриш мумкинки, $U(x_1, \ldots, x_n)$ нинг топилган қиймати унинг минимал қийматидир.

Бунинг учун

$$\left|\sum_{k=1}^{2n} b_k\right|^2 \leqslant 2n \sum_{k=1}^{2n} b_k^2$$

Коши — Буняковский тенгсизлигида $b_1 = x_1$, $b_2 = b_3 = \frac{x_2 - x_1}{2}$, $b_4 = b_5 = \frac{x_3 - x_2}{3}, \ldots, b_{2n-2} = b_{2n-1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{2}$, $b_{2n} = 1 - x_n$ деб олсак, у ҳолда $\sum\limits_{k=1}^{2n} b_k = 1$ бўлиб,

$$1 \leqslant 2n \sum_{k=1}^{2n} b_k^2$$

ёки

$$\frac{1}{4n} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} b_k^2 = U(x_1, \ldots, x_n)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $\int\limits_0^1 |K_n(t)|\, dt$ нинг минимал қиймати $\frac{1}{4n}$ бўлиб, бу қийматга

$$x_k = \frac{2k-1}{2n}, \quad q_k = 1 - \frac{x_k + x_{k-1}}{2} = 1 - \frac{k-1}{n}$$

бўлганда эришилади. Бу ва (7.2) дан квадратур формуланинг коэффициентлари учун мос равишдаги қуйидаги қийматларга эга бўламиз:

$$A_n = q_n = \frac{1}{n}, \quad A_j = q_j - q_{j+1} = \frac{1}{n} \quad (j = \overline{2, n-1}),$$

$$A_1 = 1 - \sum_{k=2}^{n} A_k = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Шундай қилиб, қаралаётган синфда оптимал квадратур формула умумлашган ўрта тўғри тўртбурчак формуласи

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{n}\right)$$

бўлиб, унинг хатолиги $\frac{L}{4n}$ дан иборатдир.

Айрим ҳолларда оптимал квадратур формула қуриш пайтида бу формула коэффициентлари ёки тугунларининг маълум шартларни қаноатлантириши, масалан тугунларининг мунтазам тақсимланиши талаб қилинади.

Энди $[0,1]$ оралиқда узлуксиз, биринчи ҳосиласи квадрати билан жамланувчи, ҳамда

$$\int_0^1 |f'(t)|^2\, dt \leqslant L^2$$

шартни қаноатлантирувчи функциялар синфи $C_2^1(L)$ ни қараймиз. Бу синфнинг ҳар бир функциясини

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt \tag{7.8}$$

кўринишда ёзиш мумкин, ва аксинча, агар $f(0)$ ихтиёрий сон бўлиб, $f'(x)$ ўлчанадиган $[0, 1]$ да квадрати билан жамланувчи бўлса ва $\int\limits_0^1 |f'(t)|^2\, dt \leqslant L^2$ шарт бажарилса, у ҳолда (7.8) билан аниқланган $f(x)$ функция $C_2^1(L)$ синфга қарашли бўлади. Энди $C_2^1(L)$ функциялар синфида қуйидаги кўринишдаги

$$\int_0^1 f(x)\, dt \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f\left(\frac{k}{n}\right), \quad \sum_{k=0}^{n} A_k = 1 \tag{7.9}$$

оптимал квадратур формулани тузиш масаласини кўриб чиқамиз. Бу ерда қолдиқ ҳад учун

$$R_n(f) = \int_0^1 f'(t)\; K_n^{(1)}(t)\, dt, \tag{7.10}$$

$$\left\{\begin{array}{l} K_n^{(1)}(t) = 1 - t - \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \overline{\left(\frac{k}{n} - t\right)}^0 = 1 - t - \sum\limits_{j=i}^{n} A_j \\ \qquad \frac{i-1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{i}{n} \qquad (i = \overline{1, n}) \end{array}\right. \tag{7.11}$$

формулаларга эга бўламиз. Коши — Буняковский тенгсизлигини қўллаб топамиз:

$$|R_n(f)| = \left|\int_0^1 f'(t)\, K_n^{(1)}(t)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_0^1 |f'(t)|^2\, dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2\, dt} \leqslant L \sqrt{\int_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2\, dt}.$$

Қуйидаги функция

$$\varphi'(t) = \frac{L\, |K_n^{(1)}(t)|\, \mathrm{sign}\, K_n^{(1)}(t)}{\sqrt{\int_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2\, dt}}$$

$[0,1]$ да ўлчанадиган, квадрати билан жамланувчи ва $\int\limits_0^1 |\varphi'(t)|^2 dt <$ $< L^2$, демак, $\varphi(x) = \varphi(0) + \int\limits_0^x \varphi'(t)\,dt \in C_2^1(L)$ ва унинг учун:

$$|R_n(\varphi)| = L\sqrt{\int\limits_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2\,dt}.$$

Шунинг учун ҳам

$$R_n(C_2^1(L)) = L\sqrt{\int\limits_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2\,dt}.$$

Шундай қилиб, $C_2^1(L)$ да оптимал квадратур формула тузиш учун $A_k \left(\sum\limits_{k=0}^n A_k = 1\right)$ коэффициентларни шундай танлашимиз керакки, ушбу

$$\sqrt{\int\limits_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2\,dt}$$

ифода минимал қийматга эга бўлсин. Равшанки,

$$V(q_1, \ldots, q_n) = \int\limits_0^1 [K_n^{(1)}(t)]^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{i}{n} - q_i\right)^3 - \left(\frac{i-1}{n} - q_i\right)^3\right],$$

бунда

$$q_i = \sum_{j=0}^{i-1} A_j \quad (i = \overline{1,n})$$

ўзининг минимал қиймати $\frac{1}{12n^2}$ га $q_i = \frac{2i-1}{2n}$ ларда эришишини пайқаш қийин эмас. Коэффициентлар учун

$$A_i = q_{i+1} - q_i = \frac{1}{n}\ (i = \overline{1, n-1}),\quad A_0 = q_1 = \frac{1}{2n},$$

$$A_n = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \frac{1}{2n}$$

қийматларга эга бўламиз. Шундай қилиб, $C_2^1(L)$ синфида (7.9) кўринишдаги квадратур формулалар орасида умумлашган трапеция формуласи

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{n}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

оптимал формула бўлиб, унинг хатоси $\frac{L}{2n\sqrt{3}}$ га тенг экан.

8-§. КВАДРАТУР ФОРМУЛАЛАРНИНГ АНИҚЛИГИНИ ОРТТИРИШ

Олдинги параграфда айтиб ўтилганидек силлиқлиги юқори бўлмаган функцияларни интеграллаш пайтида алгебраик аниқлик даражаси юқори бўлган формулаларни қўллаш яхши натижага олиб келмайди. Бундай функциялар учун трапециялар ёки тўғри тўртбурчаклар формуласини қўллаш маъқулдир.

Энди шундай савол туғилади: бундай формулаларнинг аниқликларини, уларнинг қолдиқ ҳадларидан бош қисмларини ажратиб олиш йўли билан орттириш мумкин эмасмикан? Маълум бўлишича шундай қилиш мумкин экан. Бу вазифани Эйлер — Маклорен формуласи ҳал қилади. Бу формулалар трапециялар катта формуласига ва даврий функциялар учун тўғри тўртбурчаклар формуласига тузатма киритади. Эйлер — Маклорен формуласи бундан ташқари функцияни қаторга ёйиш, қаторларнинг йиғиндисини топиш ва бошқа масалаларда ҳам қўлланилади.

Эйлер — Маклорен формуласини келтириб чиқаришда бизга Бернулли сонлари ва кўпҳадлари ҳақидаги айрим маълумотлар керак бўлади. Қуйида шу маълумотларни баён қиламиз.

1. Бернулли сонлари ва кўпҳадлари. Бу сонлар ва кўпҳадларни уларни ҳосил қилувчи функциялар ёрдамида аниқлаймиз. Бунинг учун

$$g(t)=\frac{t}{e^t-1}, \quad g(t, x)=\frac{te^{xt}}{e^t-1} \tag{8.1}$$

функцияларни киритамиз. Бу функциялар $|t|<2\pi$ доирада регуляр бўлганлиги учун уларни шу доирада даражали қаторга ёйиш мумкин:

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n, \tag{8.2}$$

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n. \tag{8.3}$$

Биринчи тенглик билан аниқланган B_n миқдорлар *Бернулли сонлари* дейилади. Бу сонларни аниқлайдиган рекуррент тенгликларни қуриш мумкин. Бунинг учун (8.2) нинг ҳар иккала томонини

$e^t-1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$ га кўпайтирамиз:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n=t.$$

Бу тенгликда $t, t^2, t^3, \ldots$ ҳадлар олдидаги коэффициентларни таққослаб,

$$B_0=1, \frac{B_0}{n!}+\frac{B_1}{(n-1)!\,1!}+\frac{B_2}{(n-2)!\,2!}+\ldots+\frac{B_{n-1}}{1!\,(n-1)!}=0$$
$$(n=2,3, \ldots)$$

ёки

$$B_0 = 1, \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0 \qquad (n \geqslant 2) \tag{8.4}$$

рекуррент муносабатларни ҳосил қиламиз. B_1 дан бошқа барча тоқ индексли Бернулли сонларининг нолга тенг эканликларини кўрсатиш мумкин. Бунинг учун (8.2) тенгликда t ни $-t$ га алмаштирамиз:

$$\frac{-t}{e^{-t}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n!} t^n.$$

Лекин

$$\frac{-t}{e^{-t}-1} = \frac{te^t}{e^t-1} = t + \frac{t}{e^t-1} = t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n,$$

демак,

$$t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{u!} t^n.$$

Бундан эса $n > 1$ бўлганда $B_n = (-1)^n B_n$ тенгликка эга бўламиз ва $n = 2k+1$ учун

$$B_{2k+1} = -B_{2k+1}, \ B_{2k+1} = 0 \qquad (k = 1,2, \ldots)$$

келиб чиқади. Қуйида Бернулли сонларининг дастлабки бир нечтасининг қийматлари келтирилган:

$$B_0 = 1, \ B_1 = -\frac{1}{2}, \ B_2 = \frac{1}{6}, \ B_4 = -\frac{1}{30}, \ B_6 = \frac{1}{42}, \ B_8 = -\frac{1}{30},$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \ B_{12} = -\frac{691}{2730}, \ B_{14} = -\frac{7}{6}, \ B_{16} = -\frac{3617}{510}, \ \ldots$$

Энди $B_n(x)$ *Бернулли кўпҳадларини* аниқлайдиган рекуррент муносабатларни тузайлик. Бунинг учун (8.3) тенгликда e^{xt} ва $\frac{t}{e^t-1}$ функцияларни уларнинг даражали қаторлардаги ёйилмалари билан алмаштирамиз:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k t^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} t^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n.$$

Бу ердан t^n олдидаги коэффициентларни таққослаб,

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \frac{x^n B_0}{n!} + \frac{x^{n-1} B_1}{(n-1)!\,1!} + \ldots + \frac{B_n}{n!}$$

ёки

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k} \tag{8.5}$$

ни ҳосил қиламиз. Бернулли кўпҳадларидан дастлабки бир нечтасини келтирамиз:

$$\begin{aligned}
&B_0(x) = 1,\\
&B_1(x) = x - \frac{1}{2},\\
&B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},\\
&B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,\\
&B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},\\
&B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,\\
&B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Энди Бернулли кўпҳадларининг айрим хоссалари билан танишайлик. Аввало (8.5) дан

$$B_n(0) = B_n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{8.7}$$

келиб чиқади. (8.2) тенгликнинг ҳар икки томонини x бўйича дифференциаллаб,

$$e^{xt}\frac{t^2}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n'(x)}{n!}t^n$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг чап томони $t \cdot g\ (t, x)$ га тенг бўлгани учун:

$$t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n'(x)}{n!}t^n.$$

Бунда t^n олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, Бернулли кўпҳадларини дифференциаллаш қоидасига эга бўламиз:

$$B_n'(x) = n\,B_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2,\ \ldots). \tag{8.8}$$

Бундан ва (8.7) дан интеграллаш қоидасини чиқарамиз:

$$B_n(x) = B_n + n\int_0^x B_{n-1}(t)\,dt. \tag{8.9}$$

Энди

$$B_n(1 - x) = (-1)^n B_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2,\ \ldots) \tag{8.10}$$

эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун қуйидаги

$$e^{(1-x)t}\,\frac{t}{e^t - 1} = e^{-xt}\,\frac{te^t}{e^t - 1} = e^{x(-t)}\frac{-t}{e^{-t} - 1}$$

алмаштиришларни бажариб,

$$g\,(t, 1 - x) = g\,(-t, x)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу муносабатга g нинг (8.3) даги ёйилмасини келтириб қўйсак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (-t)^n$$

тенглик келиб чиқади, бундан эса (8.10) ни ҳосил қиламиз.

Энди Бернулли кўпҳадларидан фақат озод ҳад билан фарқ қиладиган қуйидаги функцияларни киритамиз:

$$\varphi_n(x) = B_n(x) - B_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (8.11)$$

Бу функциялар, $\varphi_1(x)$ дан ташқари, $x=0$ ва $x=1$ нуқталарда нолга айланади. Ҳақиқатан ҳам, (8.7) га кўра $\varphi_n(0)=0$, (8.11) тенгликка кўра эса

$$\varphi_n(1) = B_n(1) - B_n = (-1)^n B_n - B_n = -B_n[1-(-1)^n] = 0,$$

чунки жуфт n лар учун квадрат қавс ичидаги ифода нолга тенг бўлиб, тоқ $n > 1$ лар учун B_n Бернулли сонлари нолга тенг.

Қуйидаги теорема ўринлидир.

1- теорема. $\varphi_2(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_6(x)$, ... кўпҳадлар $(0,1)$ оралиқда доимий, чунончи $\varphi_{2k}(x)$ $(-1)^k$ ишорага эга; $\varphi_3(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_7(x)$, ... кўпҳадлар $x=\frac{1}{2}$ нуқтада нолга айланади, шу билан бирга $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ва $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ оралиқларда $\varphi_{2k+1}(x)$ мос равишда $(-1)^{k-1}$ ва $(-1)^k$ ишораларга эга.

Исбот. Аввало (8.10) га кўра

$$B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ ёки } B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Шундай қилиб, $\varphi_{2k+1}(x)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ кўпҳадлар 0, $\frac{1}{2}$, 1 нуқталарда нолга айланади. Энди $(0,\ 1)$ оралиқда $\varphi_{2k+1}(x)$ нинг бошқа нолларга эга эмаслигини кўрсатамиз. Бунинг учун $\varphi_{2k+1}(x)$ кўпҳад $(0,\ 1)$ оралиғида иккита ҳар хил нуқтада нолга эга бўла олмаслигини кўрсатайлик. Тескарисини фараз қиламиз, яъни x_1 ва x_2 $(0 < x_1 < x_2 < 1)$ $\varphi_{2k+1}(x)$ нинг ноллари бўлсин. Бундан ташқари, $x=0$ ва $x=1$ нуқталар ҳам унинг ноллари бўлганлиги учун $(0,\ x_1)$, $(x_1,\ x_2)$ ва $(x_2,\ 1)$ оралиқларнинг ҳар бирида

$$\varphi'_{2k+1}(x) = B'_{2k+1}(x) = (2k+1)B_{2k}(x)$$

кўпҳад камида битта нолга эга, ва демак,

$$\varphi''_{2k+1}(x) = (2k+1)B'_{2k}(x) = (2k+1)2k\varphi_{2k-1}(x)$$

кўпҳад, яъни $\varphi_{2k-1}(x)$ $(0,\ 1)$ оралиқда камида иккита нолга эга. Бу мулоҳазаларни давом эттириб, шундай хулосага келамизки, $\varphi_3(x)$ кўпҳад $(0,\ 1)$ оралиқда камида иккита турли илдизларга эга. Бунга $x=0$ ва $x=1$ нолларни қўшсак, у ҳолда айнан ноль бўлмаган учинчи даражали кўпҳад камида тўртта илдизга эга деган, мумкин бўлмаган хулосага келамиз. Шунинг учун ҳам, $\varphi_{2k+1}(x)$ кўпҳад (0, 1) оралиқда иккита ҳар хил илдизга эга деган фаразимиз нотўғри экан. Ушбу

$$\operatorname{sign} B_{2k} = (-1)^{k-1} \tag{8.12}$$

тенгликдан фойдаланамиз. Бунинг тўғрилигини кейинчалик кўрсатамиз. (8.5) тенгликка кўра x нинг кичик қийматлари учун $\varphi_{2k+1}(x)$ нинг қийматлари ишораси B_{2k} нинг ишораси билан устма-уст тушади, (8.12) га кўра бу ишора $(-1)^{k-1}$ дан иборатдир. Демак, $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ оралиқда $\varphi_{2k+1}(x)$ нинг ишораси $(-1)^{k-1}$ дир ва $\varphi'_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ бўлганлиги учун $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ да унинг ишораси $(-1)^k$ бўлади.

Энди $\varphi_{2k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ нинг (0, 1) оралиқда нолга айланмаслигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, агар $\varphi_{2k}(x)$ кўпҳад (0,1) оралиқда нолга айланса, у ҳолда унинг ҳосиласи

$$\varphi'_{2k}(x) = B'_{2k}(x) = 2kB_{2k-1}(x) = 2k\varphi_{2k-1}(x),$$

яъни $\varphi_{2k-1}(x)$ кўпҳад, (0, 1) да камида иккита илдизга эга бўлар эди.

Шундай қилиб, $\varphi_{2k}(x)$ кўпҳад [0, 1] да ўз ишорасини сақлайди ва бу ишора

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(x)dx = \int_0^1 [B_{2k}(x) - B_{2k}]dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2k+1} B_{2k+1}(x) - B_{2k}\right] \Bigg|_0^1 = -B_{2k}$$

ишора билан устма-уст тушади, яъни $\varphi_{2k}(x)$ нинг ишораси $(-1)^k$ экан. Шу билан теорема исбот бўлди.

Энди *даврийлаштирилган* $B^*_n(x)$ *Бернулли кўпҳадларини* қуйидагича аниқлаймиз:

$$B^*_0(x) = 1, \; B^*_n(x) = B_n(x) \;\; (0 \leqslant x < 1) \text{ ва } B^*_n(x+1) = B^*_n(x)$$
$$(-\infty < x < \infty).$$

Маълумки, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, шунинг учун ҳам $B^*_1(x)$ узлукли функция бўлиб, бутун нуқталарда -1 сакрашга эга. Барча $n > 1$ лар учун $B_n(1) = B_n(0)$ бўлганлиги сабабли $B^*_n(x)$ узлуксиз даврий функциядир. Бу функцияларнинг [0, 1] оралиқдаги Фурье ёйилмаларини келтирамиз:

$$B^*_\nu(x) = \frac{1}{2} a_0^{(\nu)} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(\nu)} \cos 2\pi nx + b_n^{(\nu)} \sin 2\pi nx), \tag{8.13}$$

бу ерда

$$a_n^{(\nu)} = 2\int_0^1 B_\nu^*(x)\cos 2\pi nx dx = 2\int_0^1 B_\nu(x)\cos 2\pi nx dx,$$

$$b_n^{(\nu)} = 2\int_0^1 B_\nu^*(x)\sin 2\pi nx dx = 2\int_0^1 B_\nu(x)\sin 2\pi nx dx.$$

Фурье қаторлари назариясидаги маълум теоремаларга кўра, $\nu > 1$ бўлганда $B_n^*(x)$ узлуксиз бўлганлиги сабабли (8.13) тенглик барча x лар учун ўринлидир ва у барча бутун бўлмаган x лар учун $\nu = 1$ бўлганда ҳам ўринлидир, бутун x лар учун қатор йиғиндиси нолга тенг:

$$\frac{1}{2}\left[B_1^*(+0) + B_1^*(-0)\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Энди $\nu \geqslant 1$ деб фараз қилиб, $a_n^{(\nu)}$ ва $b_n^{(\nu)}$ коэффициетларини ҳисоблайлик:

$$a_0^{(\nu)} = 2\int_0^1 B_\nu(x)dx = \frac{2}{\nu+1} B_{\nu+1}(x)\Big|_0^1 = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Қолган коэффициентларни ҳисоблашда аввал $\nu = 2k$ $(k = 1, 2, \dots)$ ҳолни кўриб чиқамиз. Бўлаклаб интеграллаймиз:

$$a_n^{(2k)} = 2\int_0^1 B_{2k}(x)\cos 2\pi nx dx =$$

$$= 2\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n} B_{2k}(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n} 2kB_{2k-1}(x)dx.$$

Интегралланган ҳад нолга тенг. Бўлаклаб интеграллашни давом эттирамиз:

$$a_n^{(2k)} = \frac{2k}{\pi n}\cdot\frac{\cos 2\pi nx}{2\pi n} B_{2k-1}(x)\Big|_0^1 - \frac{k(2k-1)}{(\pi n)^2}\int_0^1 B_{2k-2}(x)\cos 2\pi nx dx.$$

Агар $k > 1$ бўлса, у ҳолда $B_{2k-1}(1) = B_{2k-1}(0)$ бўлганлиги учун интегралланган ҳад нолга тенг бўлиб,

$$a_n^{(2k)} = -\frac{2k(2k-1)}{(2\pi n)^2} a_n^{(2k-2)} \tag{8.14}$$

бўлади. Агар $k = 1$ бўлса, у ҳолда интеграл нолга тенг бўлиб,

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{(\pi n)^2} \tag{8.15}$$

бўлади. Энди (8.14) тенгликни k марта қўллаб, (8.15) ни ҳисобга олсак, натижада

$$a_n^{(2k)} = (-1)^{k-1}\frac{2(2k)!}{(2\pi n)^{2k}}$$

га эга бўламиз. (8.10) тенгликдан

$$B_{2k}(1-x)\sin 2\pi n(1-x) = -B_{2k}(x)\sin 2\pi nx$$

ва, демак,

$$b_n^{(2k)} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

келиб чиқади.

Энди (8.14) — (8.15) ни (8.13) га қўйиб, даврийлаштирилган Бернулли кўпҳадлари учун қуйидаги Фурье ёйилмасига эга бўламиз:

$$B_{2k}^*(x) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}\,\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^{2k}}. \tag{8.16}$$

Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини дифференциаллаб,

$$B_{2k-1}^*(x) = \frac{(-1)^k\,(2k-1)!}{2^{2k-2}\,\pi^{2k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n^{2k-1}}$$

ни ҳосил қиламиз. Агар (8.16) да $x = 0$ деб олсак, Бернулли сонлари учун қуйидаги формула келиб чиқади:

$$B_{2k} = B_{2k}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}\,\pi^{2k}}. \tag{8.17}$$

Бу ердан (8.12) формула келиб чиқади ва k ўсиши билан B_{2k} нинг модуль бўйича тез ўсиши кўринади.

2. Ихтиёрий функцияларни Бернулли кўпҳадлари орқали тасвирлаш. Қуйидаги теоремани исботлаймиз.

2-теорема. Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ оралиқда $m \geqslant 1$ тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $0 \leqslant x \leqslant 1$ учун қуйидаги формула ўринлидир:

$$f(x) = \int_0^1 f(t)dt + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{B_\nu(x)}{\nu!}\left[f^{(\nu-1)}(1) - f^{(\nu-1)}(0)\right] -$$

$$-\frac{1}{m!}\int_0^1 f^{(m)}(t)\left[B_m^*(x-t) - B_m^*(x)\right]dt. \tag{8.18}$$

Исбот. Ушбу

$$\rho_m(x) = \frac{1}{m!}\int_0^1 B_n^*(x-t)f^{(m)}(t)dt \tag{8.19}$$

интегралда $m > 1$ деб фараз қилиб, бу интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\rho_m(x) = \frac{B_m^*(x-t)}{m!} f^{(m-1)}(t)\Big|_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{m!}\int_0^1 f^{(m-1)}(t)\,\frac{d}{dt}B_m^*(x-t)dt.$$

Бернулли кўпҳадларининг юқорида кўрсатилган

$$B^*_m(x-1)=B^*_m(x)=B_m(x) \text{ ва } \frac{d}{dt}B^*_m(x-t)=-mB^*_{m-1}(x-t)$$

хоссаларидан фойдалансак, у ҳолда

$$\rho_m(x)=\frac{B_m(x)}{m!}\left[f^{(m-1)}(1)-f^{(m-1)}(0)\right]+\rho_{m-1}(x)$$

ва бу муносабатни $m-1$ марта қўллаб,

$$\rho_m(x)=\sum_{\nu=2}^{m}\frac{B_\nu(x)}{\nu!}\left[f^{(\nu-1)}(1)-f^{(\nu-1)}(0)\right]+\rho_1(x) \qquad (8.20)$$

формулага эга бўламиз.

Энди $\rho_1(x)$ ни ҳисоблаш учун $B^*_1(x)$ нинг бутун нуқталарда -1 сакрашга ва бутун бўлмаган нуқталарда эса $B^*_1(x)$ нинг ҳосиласи 1 га тенглигини эътиборга олиб ҳамда $0<x<1$ деб олиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\rho_1(x)=\int_0^x f'(t)B^*_1(x-t)dt+\int_x^1 f'(t)B^*_1(x-t)dt=B^*_1(+0)f(x)-$$

$$-B^*_1(x)f(0)+\int_0^x f(t)dt+B^*_1(x-1)f(1)-B^*_1(-0)f(x)+\int_x^1 f(t)dt=$$

$$=\left[B^*_1(+0)-B^*_1(-0)\right]f(x)+B_1(x)\,[f(1)-f(0)]+\int_0^1 f(t)dt.$$

Маълумки,

$$B^*_1(+0)=-\frac{1}{2}, \qquad B^*_1(-0)=\frac{1}{2},$$

шунинг учун ҳам

$$\rho_1(x)=-f(x)+B_1(x)\,[f(1)-f(0)]+\int_0^1 f(t)dt.$$

Буни (8.20) га қўйиб, (8.19) ни эътиборга олсак,

$$f(x)=\int_0^1 f(t)dt+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{B_\nu(x)}{\nu!}\left[f^{(\nu-1)}(1)-f^{(\nu-1)}(0)\right]-$$

$$-\frac{1}{m!}\int_0^1 B^*_m(x-t)f^{(m)}(t)dt$$

келиб чиқади ва бунда $\nu=m$ га мос келувчи ҳадини интеграл билан алмаштирсак:

$$\frac{f^{(m-1)}(1)-f^{(m-1)}(0)}{m!}B_m(x)=\frac{1}{m!}B^*_m(x)\int_0^1 f^{(m)}(t)dt,$$

у ҳолда (8.18) формулага эга бўламиз.

Биз (8.18) формулани $0 < x < 1$ учун исботладик, лекин у $0 \leqslant x \leqslant 1$ учун ҳам ўринлидир, чунки у формулада қатнашаётган барча функциялар x нинг узлуксиз функцияларидир.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция ихтиёрий $[a, a+h]$ $(h > 0)$ оралиқда $m \geqslant 2$- тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлсин. (8.18) формуланинг шу ҳол учун мос келган кўринишини келтирамиз. Янги ξ ўзгарувчини киритамиз: $x = a + h\xi$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ ва m марта узлуксиз дифференциалланувчи $\varphi(\xi) = f(a + h\xi)$ функцияга $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ учун (8.18) формулани қўллаймиз

$$\varphi(\xi) = \int_0^1 \varphi(\tau)d\tau + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{\varphi^{(\nu-1)}(1) - \varphi^{(\nu-1)}(0)}{\nu!} B_\nu(\xi) -$$

$$- \frac{1}{m!} \int_0^1 \varphi^{(m)}(\tau) \left[B_m^*(\xi - \tau) - B_m^*(\tau) \right] d\tau. \qquad (8.21)$$

Қуйидаги

$$\varphi^{(\nu)}(\xi) = h^\nu f^\nu (a + h\xi) = h^\nu f^{(\nu)}(x),$$

$$\varphi(\tau) = f(a + h\tau) = f(t), \quad t = a + h\tau, \quad dt = hd\tau$$

муносабатларни ҳисобга олиб, (8.21) формулада аввалги ўзгарувчи ва функцияларга ўтамиз, у ҳолда

$$f(x) = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t)dt + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{h^{\nu-1}}{\nu!} \left[f^{(\nu-1)}(a+h) - f^{(\nu-1)}(a) \right] \times$$

$$\times B_\nu \left(\frac{x-a}{h} \right) - \frac{h^m}{m!} \int_0^1 f^{(m)}(a + h\tau) \left[B_m^* \left(\frac{x-a}{h} - \tau \right) - \right.$$

$$\left. - B_m^* \left(\frac{x-a}{h} \right) \right] d\tau. \qquad (8.22)$$

3. Эйлер—Маклорен формуласи. Олдинги пунктдаги (8.22) формулада $x = a$ деб олиб, шу билан бирга $B_m(0) = B_m$ ва $B_m^*(\tau)$ ҳамда унинг ҳосиласининг даврийлигини

$$B_m^*(-\tau) = B_m^*(1 - \tau) = B_m(1 - \tau) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant 1)$$

ҳисобга олсак, у ҳолда

$$f(a) = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t)dt - \frac{1}{2} [f(a+h) - f(a)] + \sum_{\nu=2}^{m-1} \frac{h^{\nu-1} B_\nu}{\nu!} \times$$

$$\times \left[f^{(\nu-1)}(a+h) - f^{(\nu-1)}(a) \right] - \frac{h^m}{m!} \int_0^1 f^{(m)}(a+h\tau) [B_m(1-\tau) - B_m] d\tau$$

ёки

$$\int_a^{a+h} f(t)dt = \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)] -$$

$$-\sum_{\nu=2}^{m-1}\frac{h^{\nu}B_{\nu}}{\nu!}\left[f^{(\nu-1)}(a+h)-f^{(\nu-1)}(a)\right]+$$

$$+\frac{h^{m+1}}{m!}\int_{0}^{1}f^{(m)}(a+h\tau)\,\left[B_m(1-\tau)-B_m\right]d\tau \qquad (8.23)$$

формулага эга бўламиз.

Эйлер—Маклорен формуласини ҳосил қилиш учун $[a, b]$ оралиқни $h=\frac{b-a}{n}$ қадам билан n та

$$[a+jh,\ a+(j+1)h],\qquad j=\overline{0,\ n-1}$$

қисмий оралиқларга бўламиз ва бу қисмий оралиқ учун (8.23) формулани қўллаймиз:

$$\int_{a+jh}^{a+(j+1)h}f(x)dx=\frac{h}{2}\left[f(a+jh)+f(a+(j+1)h)\right]-$$

$$-\sum_{\nu=2}^{m-1}\frac{h^{\nu}B_{\nu}}{\nu!}\left[f^{(\nu-1)}(a+(j+1)h)-f^{(\nu-1)}(a+jh)\right]+$$

$$+\frac{h^{m+1}}{m!}\int_{0}^{1}f^{(m)}(a+jh+h\tau)\,\left[B_m(1-\tau)-B_m\right]d\tau. \qquad (8.24)$$

Қуйидаги

$$T_n=h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{j=1}^{n-1}f(a+jh)\right] \qquad (8.25)$$

белгилашни киритиб (8.24) формулани j бўйича 0 дан $n-1$ гача йиғиб чиқамиз:

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=T_n-\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{h^{\nu}B_{\nu}}{\nu!}\left[f^{(\nu-1)}(b)-f^{(\nu-1)}(a)\right]+\frac{h^{m+1}}{m!}\int_{0}^{1}[B_m(1-$$

$$-\tau)-B_m]\sum_{j=0}^{n-1}f^{(m)}(a+jh+h\tau)d\tau. \qquad (8.26)$$

Бу формула *Эйлер—Маклорен формуласи* дейилади. Одатда Эйлер—Маклорен формуласида жуфт $m=2k$ олинади. Бундай ҳолда $B_m(1-\tau)-B_m$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$B_{2k}(1-\tau)-B_{2k}=B_{2k}(\tau)-B_{2k}=\varphi_{2k}(\tau).$$

Бу функция $0\leqslant\tau\leqslant 1$ оралиқда ўз ишорасини сақлайди. Бундан ташқари, $j=3, 5, 7, \ldots$ бўлганда $B_j=0$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда Эйлер—Маклорен формуласини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=T_n-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{h^{2j}B_{2j}}{(2_j)!}\left[f^{(2j-1)}(b)-f^{(2j-1)}(a)\right]+R_{2k}(f), \quad (8.27)$$

бу ерда

$$R_{2k}(f)=\frac{h^{2k+1}}{(2k)!}\int_0^1 \varphi_{2k}(\tau)\sum_{j=0}^{n-1} f^{(2k)}(a+jh+h\tau)d\tau. \qquad (8.28)$$

Бу формуладан кўринадики,

$$-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{h^{2j}B_{2j}}{(2j)!}[f^{(2j-1)}(b)-f^{(2j-1)}(a)]$$

ҳад трапециянинг катта формуласига тузатмадан иборатдир. Энди фараз қилайлик $f(x)$ даврий функция бўлиб, даври $b-a$ га тенг бўлсин ҳамда ҳақиқий ўқнинг барча нуқталарида $2k$-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда барча $f^{(2j)}(x)$ ҳосилалар ҳам даврий бўлиб, (8.27) формула соддалашади:

$$\int_a^b f(x)dx=T_n+R_{2k}(f).$$

Функциянинг даврийлиги туфайли T_n тўгри тўртбурчаклар квадратур йиғиндиси билан устма-уст тушади, шунинг учун ҳам

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh)+R_{2k}(f).$$

Демак, қаралаётган ҳолда тўғри тўртбурчаклар формуласининг қолдиқ ҳади (8.28) кўринишга эга.

Энди (8.28) қолдиқ ҳадни текшириш билан шуғулланамиз.

3-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда $2k$-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$R_{2k}(f)=-\frac{h^{2k}}{(2k)!}(b-a)B_{2k}f^{(2k)}(\xi), \qquad (8.29)$$

бу ерда $a\leqslant\xi\leqslant b$.

Исбот. Биринчи пунктда $\varphi_{2m}(\tau)$ функциянинг $0<\tau<1$ да ўз ишорасини сақлашини кўрган эдик. Шунинг учун ҳам

$$I=\int_0^1 \varphi_{2k}(\tau)\sum_{j=0}^{n-1} f^{(2k)}(a+jh+h\tau)d\tau=\int_0^1 \varphi_{2k}(\tau)S_{2k}(\tau)d\tau$$

интегралда умумлашган ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаш мумкин:

$$I=S_{2k}(\eta)\int_0^1 \varphi_{2k}(\tau)d\tau=S_{2k}(\eta)\int_0^1 [B_{2k}(\tau)-B_{2k}]d\tau=-S_{2k}(\eta)B_{2k}. \qquad (8.30)$$

Бу ерда $0\leqslant\eta\leqslant1$. Агар M ва m орқали $f^{(2k)}(x)$ нинг $[a, b]$ даги энг катта ва энг кичик қийматларини белгиласак, у ҳолда кўриниб турибдики, $nm\leqslant S_{2k}(\eta)\leqslant nM$. Лекин $f^{(2k)}(\xi)$ функция узлуксиз бўлганлиги учун $[a, b]$ оралиқда шундай ξ нуқта топиладики, $S_{2k}(\eta)=nf^{(2k)}(\xi)$ тенглик бажарилади. Буни (8.30) га ва (8.30) ни (8.28) га қўйсак, (8.29) келиб чиқади ва шу билан теорема исбот бўлди.

Таъкидлаб ўтамизки, (8.29) да $k=1$ деб олсак, у ҳолда у трапециялар формуласининг қолдиқ ҳадига айланади.

4-теорема. Агар барча $x\in[a, b]$ учун

$$f^{(2k)}(x)\geqslant 0 \text{ ва } f^{(2k+2)}(x)\geqslant 0 \tag{8.31}$$

$$[\text{ёки } f^{(2k)}(x)\leqslant 0 \text{ ва } f^{(2k+2)}(x)\leqslant 0]$$

тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда Эйлер — Маклорен формуласи $R_{2k}(f)$ қолдиқ ҳадининг ишораси

$$-\frac{h^{2k}B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)] \tag{8.32}$$

соннинг ишораси билан устма-уст тушиб, $R_{2k}(f)$ нинг абсолют қиймати (8.32) нинг абсолют қийматидан ортмайди.

Исбот. Эйлер—Маклорен формуласидан

$$R_{2k}(f)-R_{2k+2}(f)=-\frac{h^{2k}B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)] \tag{8.33}$$

келиб чиқади. 1- теоремага кўра:

$$\text{sign}\,\varphi_{2k}(\tau)=(-1)^k.$$

Бундан ва (8.31) дан фойдаланган ҳолда, (8.28) дан маълум бўладики, $R_{2k}(f)$ ва $(-R_{2k+2}(f))$ бир хил ишорага эга. Бу ишора (8.33) га кўра (8.32) нинг ишораси билан бир хил бўлиши керак ва $R_{2k}(f)$ ҳамда $R_{2k+2}(f)$ абсолют қийматлари бўйича (8.32) нинг абсолют қийматидан ортмайди. Теорема исботланди.

Эслатма. k ўсиши билан B_{2k} Бернулли сонлари тез ўсиб боради. [(8.17) га қаранг.] Шунинг учун ҳам, (8.29) дан кўринадики k чексизликка интилганда $f(x)$ функцияларнинг жуда ҳам тор синфи учун $R_{2k}(f)$ нолга интилади. Одатда k чексизликка интилганда $R_{2k}(f)$ катта тезлик билан чексизликка интилади. Шунинг учун ҳам ҳисоблаш пайтида k ни шундай танлаш кераки, $|R_{2k}(f)|$ имкон борича кичик қиймат қабул қилсин.

Мисол. Эйлер — Маклорен формуласи ёрдамида

$$I=\int_1^2\left(\cos x-\frac{1}{x^2}+\text{sh}\,x\right)dx$$

интеграл вергулдан кейин 4 хона аниқликда ҳисоблансин.

Ечиш. [1, 2] оралиқни $h=0,2$ қадам билан 5 бўлакка бўламиз ва

$$x_i=1+0,2i \quad (i=\overline{0,5})$$

деб олиб, $f(x)=\cos x-\frac{1}{x^2}+\text{sh}x$ нинг қийматларини топамиз:

$$f(x_0)=0,71550,\ f(x_1)=1,17738,\ f(x_2)=1,56407,$$
$$f(x_3)=1,95577,\ f(x_4)=2,40636,\ f(x_5)=2,96077.$$

Бу ердан

$$\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_4)+\frac{1}{2}f(x_5)=8,94171.$$

Учинчи тартибли ҳосила билан чегараланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$f'(x)=-\sin x+\frac{2}{x^3}+\text{ch}\,x,\quad f'''(x)=\sin x+\frac{4!}{x^5}+\text{ch}\,x.$$

Бу ердан

$$f'(1) = 2{,}70161, \quad f'(2) = 3{,}10290,$$
$$f'''(1) = 26{,}38455, \quad f'''(2) = 5{,}42150.$$

Топилган қийматларни (8.27) формулага қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$I = 8{,}94171 \cdot 0{,}2 - \frac{(0{,}2)^2}{12}(3{,}10290 - 2{,}70161) + \frac{(0{,}2)^4}{720}(5{,}42150 - 26{,}38455) =
= 1{,}78696.$$

Бевосита интеграллаб,

$$I = \left[\sin x + \frac{1}{x} + \mathrm{c}h\, x\right]\Big|_1^2 = 1{,}78696$$

ни ҳосил қиламиз, яъни юқорида топилган рақамларнинг барчаси ишончли экан.

9-§. КВАДРАТУР ФОРМУЛАЛАРНИ ҚЎЛЛАШ ТЎҒРИСИДА АЙРИМ МУЛОҲАЗАЛАР. РУНГЕ ҚОИДАСИ

Биз олдинги параграфларда бир қанча квадратур формулалар қурдик. Конкрет функцияларни тақрибий интеграллаш пайтида конкрет квадратур формулани танлаш катта аҳамиятга эга. Бундай танлаш кўп жиҳатларга: интегралланувчи функциянинг хоссасига, унинг берилишига, ҳисобловчининг қўл остидаги ҳисоблаш қуролига, ғалаб қилинадиган аниқликка боғлиқ.

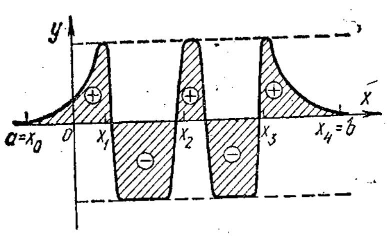
Агар интегралланувчи функция қийматлари жадвали билан берилган бўлса, у ҳолда шундай квадратур формулани қўллаш керакки, унда шу тугун нуқталардаги функциянинг қийматлари қатнашсин. Агар функция ўзининг графиги билан берилган бўлса, у ҳолда тенг коэффициентли квадратур формулани ишлатиш маъқулдир. Чунки функция қийматларидан тузилган чизиқли комбинация барча коэффициентлари ўзаро тенг бўлгандагина энг кичик тасодифий хатога эга бўлади.

Тез тебранувчи функцияларни интеграллаш катта қийинчиликлар туғдиради. Бундай функцияларни интеграллаш учун махсус формулалар яратилган. Айрим ҳолларда бўлаклаб интеграллаш ҳам яхши натижага олиб келиши мумкин. Масалан,

$$\int_0^1 f(x) \cos 2\pi N x dx$$

интегрални N етарлича катта бўлганда интеграллаш талаб қилинсин. У ҳолда $\cos 2\pi\ Nx$ ҳисобига интеграл остидаги функция тез тебранувчан бўлади. Бу ерда агар $f(x)$ интеграллаш оралиғида $2n$-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $2n$ марта бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int_0^1 f(x)\cos 2\pi\, Nxdx = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{(2\pi N)^{2i}}\left[f^{(2i-1)}(1) - f^{(2i-1)}(0)\right] +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{(2^n N)^{2n}} \int_0^1 f^{(2n)}(x) \cos 2\pi\, Nxdx.$$



27-чизма.

Агар N етарлича катта бўлса, у ҳолда иккинчи интеграл олдидаги кўпайтувчи етарлича кичик бўлади ва иккинчи интегрални берилган интегралга нисбатан кичикроқ аниқликда ҳам ҳисоблаш мумкин.

Интеграллаш оралиғида функциянинг хоссаларини ўрганиш катта аҳамиятга эга. Чунки функция хоссаларини ҳисобга олмасдан ҳар қандай квадратур формула қўлланила берилса, катта хатоларга дуч келиниши мумкин.

Агар тугунлар номувофиқ жойлашган бўлса, у ҳолда квадратур формула бемаъни натижага олиб келади.

Масалан, 27-чизмада тасвирланган $y = f(x)$ функцияни интеграллаш учун тенг узоқликда жойлашган $a = x_0$, x_1, x_2, x_3, $x_4 = b$ тугунларни олиб беш нуқтали Ньютон—Котес формуласидан фойдалансак, квадратур йиғиндининг қиймати мусбат чиқади. Кўриниб турибдики, интегралнинг қиймати манфий чиқиши керак. Иккинчи мисол, айтайлик, ихтиёрий

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

формула билан $f(x) = N[(x-x_1)\ldots(x-x_n)]^2$ функцияни интегралламоқчи бўлсак, кўриниб турибдики, N етарлича катта бўлганда интегралнинг қиймати етарлича катта бўлиб, квадратур йиғинди эса нолга тенг.

Функция хоссаларини ўрганиш яна шу томондан ҳам муҳимки, агар функциянинг силлиқлиги юқори бўлмаса, у ҳолда қолдиқ ҳадида юқори тартибли ҳосилалар қатнашадиган формулаларни қўллаш маънога эга эмас. Бундай ҳолда 7-§ да кўрсатилганидек соддароқ квадратур формулалардан фойдаланиш маъқулдир. Функция хоссалари текширилгандан кейин интеграллаш оралиғини мақбул равишда қисмларга бўлиб, ҳар бир қисм учун ўзига хос квадратур формуласини қўллаш маъқулдир. Функция тез ўзгарадиган оралиқчаларда тугунларни тиғизроқ олиб, секин ўзгарадиган қисмларида эса тугунларни сийрак олиш керак.

Бундан ташқари, интегралларни қўлда ҳисоблашда соддароқ квадратур формулалар ишлатилади. Чунки, Гаусс типидаги, коэффициентлари ва тугунлари кўп хонали рақамлар билан бериладиган формулаларни қўллаш анча қийинчилик туғдиради. Аксинча, бундай формулалар ЭҲМлар ёрдамида ҳисоблашда фойдаланилади. Шунинг учун ҳам, кўп ЭҲМларда стандарт программалар асосида юқори тартибли Гаусс формулалари олинади.

ЭҲМларни серияли ҳисоблашларда қўлланилиш шароитида ҳар бир функциянинг, индивидуал равишда текширилиши мумкин бўлмайди, одатда, унинг у ёки бу синфга тегишлилиги маълум бўлади. Шунинг учун турли синфлар функцияларини интеграллаш учун стандарт программалар тўплами мавжуд бўлиб, берилган синфдаги ҳар бир функциянинг индивидуал хусусиятини ҳисобга олиш программада қадамни автоматик равишда танлаш йўли билан олиб борилади.

Қадамни автоматик равишда танлаш *Рунге принципига* асосланган. Рунге принципига асосланиб, интегралларни тақрибий ҳисоблашларнинг ҳар хил процедуралари мавжуд, шулардан энг кенг тарқалганини кўриб чиқамиз. Бу бобда кўриб чиқилган барча

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R(f) \tag{9.1}$$

квадратур формулаларнинг қолдиқ ҳади

$$R(f) = c \cdot h^k f^{(k-1)}(\xi)$$

кўринишга эга бўлиб, бу ерда c—константа, h—интеграллаш оралиғининг ёки бир қисмининг узунлиги, ξ—интеграллаш оралиғининг қандайдир нуқтаси.

Агар интеграллаш оралиғида $f^{(k-1)}(\xi)$ секин ўзгарса, уни тақрибан ўзгармас $f^{(k-1)}(x) = M_1$ ҳамда $M_1 c = M$ деб белгилаб олиб, қолдиқ ҳадни

$$R(f) = Mh^k \tag{9.2}$$

кўринишда тасвирлаш мумкин ва агар интегралнинг аниқ қийматини I ва тақрибий қийматини $\sum$ орқали белгилаб олсак, у ҳолда

$$I = \sum + Mh^k.$$

$[a, b]$ оралиқни иккига бўлиб, ҳар бирига (9.1) квадратур формулани қўллаб, интегралларнинг тақрибий қийматларини қўшсак, $[a, b]$ оралиқ бўйича интегралнинг тақрибий қиймати $\sum_1$ ни ҳосил қиламиз ва натижада

$$I = \sum\nolimits_1 + M\left(\frac{h}{2}\right)^k + M\left(\frac{h}{2}\right)^k = \sum\nolimits_1 + 2^{1-k}Mh^k \tag{9.3}$$

тенглик ўринли бўлади. (9.2) ва (9.3) тенгликлардан қолдиқ ҳад учун

$$R(f) = ch^k f^{(k-1)}(\xi) = Mh^k = \frac{\Sigma_1 - \Sigma}{1 - 2^{1-k}} \tag{9.4}$$

баҳога эга бўламиз, бу баҳо *Рунге баҳоси* дейилади. Шундай қилиб, $[a, b]$ оралиқда $f^{(k-1)}(x)$ деярли ўзгармас деб фараз қилиб, қолдиқ ҳадни маълум миқдорлар ёрдамида ифодаладик, натижада интегралнинг аниқроқ қиймати қуйидагича ёзилади:

$$\tilde{I} = \sum\nolimits_1 + \frac{\Sigma_1 - \Sigma}{1 - 2^{1-k}} \tag{9.5}$$

Энди (9.4) формулага асосланиб, қадамни автоматик равишда танлаш йўли билан интегрални ҳисоблашни кўриб чиқамиз. Бунинг учун

$$I(f;\ [a,\ b]) = \int_a^b f(x)dx,\ \sum(f,\ [a,\ b]) = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

белгилашни киритамиз. Аниқлик $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 = 2^{-p}\varepsilon$ ва дастлабки қадам $h_0 = \frac{b-a}{m}$ берилган бўлсин. Қуйидаги

$$\sum\nolimits_0 = \sum(f;\ [a,\ a+h_0]),$$

$$\sum\nolimits_1 = \sum\left(f;\ \left[a,\ a+\frac{h_0}{2}\right]\right) + \sum\left(f;\ \left[a+\frac{h_0}{2},\ a+h_0\right]\right),$$

$$R_0 = \frac{\sum_1 - \sum}{1-2^{1-k}}$$

миқдорларни ҳисоблаб,

$$|R_0| \leqslant \varepsilon \tag{9.6}$$

шартни текширамиз. Агар бу шарт бажарилса, у ҳолда

$$|R_0| \leqslant \varepsilon_0 \tag{9.7}$$

шартни текширамиз. Агар (9.7) шарт ҳам бажарилса, у ҳолда қадам жуда ҳам кичик олинган бўлиб, h_0 нинг ўрнида $2h_0$ ни олиш керак. Сўнгра

$$\sum\nolimits_0^{(1)} = \sum(f;\ [a,\ a+2h_0]),$$

$$\sum\nolimits_1^{(1)} = \sum(f;\ [a,\ a+h_0]) + \sum(f,\ [a+h_0,\ a+2h_0]),$$

$$R_0^{(1)} = \frac{\sum_1^{(1)} - \sum_0^{(1)}}{1-2^{1-k}}$$

миқдорлар ҳисобланади ва

$$|R_0^{(1)}| \leqslant \varepsilon,\quad |R_0^{(1)}| \leqslant \varepsilon_0$$

шартлар текширилади. Агар ҳар иккала шарт ҳам бажарилса, у вақтда қадам яна иккиланади, яъни $4h_0$ қадам олинади ва бу жараён давом эттирилади.

Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин.

1) Қадамларнинг иккиланиши жараёнида $2^q h_0 = b - a$ га эга бўлиб, шу билан бирга $2^q h_0 = b - a$ қадамда

$$|R_0^{(q)}| \leqslant \frac{\left|\sum_1^{(q)} - \sum_0^{(q)}\right|}{1-2^{1-k}} \leqslant \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади, бу ерда

$$\sum\nolimits_0^{(q)} = \sum(f;\ [a,\ a+2^q h_0]),$$

$$\sum\nolimits_1^{(q)} = \sum(f;\ [a,\ a+2^{q-1}h_0]) + \sum(f,\ [a+2^{q-1}h_0,\ a+2^q h_0]).$$

У ҳолда $\int\limits_a^b f(x)dx$ интегралнинг тақрибий қиймати сифатида

$$\sum\nolimits_0^{(q)} + \frac{\sum_1^{(q)} - \sum_0^{(q)}}{1 - 2^{1-k}}$$

ни қабул қиламиз.

2) Қадамларнинг иккиланиши жараёнида шундай l топиладики, $h_1 = 2^l h_0 < b - a$ қадамда

$$|R_0^{(l)}| \leqslant \varepsilon, \ |R_0^{(l)}| > \varepsilon_0$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. У ҳолда $I(f;\ [a,\ a + 2^l h_0])$ интегралнинг тақрибий қиймати сифатида

$$\sum\nolimits_0^{(l)} + \frac{\sum_1^{(l)} - \sum_0^{(l)}}{1 - 2^{1-k}}$$

қабул қилинади ва $[a,\ b]$ оралиқнинг қолган қисми $[a + 2^l h_0,\ b]$ учун интегрални ҳисоблаш h_1 қадам билан давом эттирилади.

Агар (9.6) шарт бажарилмаса, у ҳолда берилган ε аниқликда дастлабки қадам h_0 катта бўлиб, h_0 ўрнига $\frac{h_0}{2}$ қадам олинади ва

$$\sum\nolimits_0^{(-1)} = \sum\left(f;\ \left[a,\ a + \frac{h_0}{2}\right]\right),$$

$$\sum\nolimits_1^{(-1)} = \sum\left(f;\ \left[a,\ a + \frac{h_0}{4}\right]\right) + \sum\left(f;\ \left[a + \frac{h_0}{4},\ a + \frac{h_0}{2}\right]\right),$$

$$R_0^{(-1)} = \frac{\sum_1^{(-1)} - \sum_0^{(-1)}}{1 - 2^{1-k}}$$

миқдорлар ҳисобланиб,

$$|R_0^{(-1)}| \leqslant \varepsilon$$

шарт текширилади. Агар бу шарт бажарилса, $I\left(f;\ \left[a,\ a + \frac{h_0}{2}\right]\right)$ нинг тақрибий қиймати сифатида $\sum_0^{(-1)} + R_0^{(-1)}$ олиниб, қолган $\left[a + \frac{h_0}{2},\ b\right]$ оралиқ бўйича интеграл $\frac{h_0}{2}$ қадам билан ҳисобланади.

Агар $|R_0^{(-1)}| \leqslant \varepsilon$ шарт бажарилмаса, қадам яна икки марта кичрайтирилади. Қадамни кичрайтириш жараёни

$$|R_0^{(-q)}| \leqslant \varepsilon$$

шартни қаноатлантирадиган q топилгунига қадар давом эттирилади. Сўнгра

$$I\left(f;\left[a,\ a + \frac{h_0}{2^q}\right]\right) \approx \sum\nolimits_0^{(-q)} + \frac{\sum_1^{(-q)} - \sum_0^{(-q)}}{1 - 2^{1-k}}$$

деб олинади, бу ерда

$$\sum\nolimits_0^{(-q)} = \sum\left(f;\left[a,\ a+\frac{h_0}{2}\right]\right),$$

$$\sum\nolimits_1^{(-q)} = \sum\left(f;\left[a,\ a+\frac{h_0}{2^{q+1}}\right]\right)+\sum\left(f;\left[a+\frac{h_0}{2^{q+1}},\ a+\frac{h}{2^q}\right]\right).$$

Ораликнинг қолган қисми бўйича интегрални ҳисоблаш учун шу жараённи $\frac{h_0}{2^q}$ қадам билан давом эттирамиз.

Шундай қилиб, интеграллаш оралиғи m қисмларга бўлинади ва ҳар бир ораликда интеграл ε аниқликда ҳисобланади. Бу интегралларнинг йиғиндиси $\int\limits_a^b f(x)dx$ нинг тақрибий қийматини $m\varepsilon$ хато билан аниқлайди.

10-§. ИНТЕГРАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯНИНГ МАХСУСЛИГИНИ СУСАЙТИРИШ

Практикада кўпинча хосмас интегралларни ҳисоблашга тўғри келади. Бундай интеграллар чексиз ораликқ бўйича олинган интеграллардан ёки чекли ораликқ бўйича олинган бўлиб, интеграл остидаги функция интеграллаш оралиғининг айрим нуқталарида чексизликка айланади.

Чексиз чегарали махсусмас интегралларни ўзгарувчиларни алмаштириш йўли билан чекли чегарали хосмас, ва ҳатто, хос интегралга келтириш мумкин.

Масалан,

$$I = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$$

интегралда $x = \frac{1}{y}$ алмаштириш бажарсак, у чекли чегарали хос интегралга келтирилади:

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{y}\,dy}{1+y^2}.$$

Чексиз чегарали интегрални ҳисоблаш учун уни чекли, лекин шундай етарлича катта чегарада олиш керакки, ташлаб юбориладиган қисми интегралнинг берилган ҳисоблаш хатосидан ортмасин. Масалан; интегрални ε хато билан ҳисобламоқчи бўлсак, уни

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_b^{\infty} f(x)dx$$

кўринишда ёзиб оламиз ва b ни шундай катта қилиб танлаймизки,

$$\left|\int\limits_b^{\infty} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилсин. Энди $\int\limits_a^b f(x)dx$ хос интегралнинг $\frac{\varepsilon}{2}$ аниқликдаги $\sum$ тақрибий қийматини бирор квадратур формула ёрдамида топамиз:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx - \sum\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Бу пайтда

$$\left|\int\limits_a^\infty f(x)dx - \sum\right| < \varepsilon$$

бўлади. Шундай қилиб, чексиз чегарали хосмас интегрални ҳар доим чекли чегарали интегралга келтириш мумкин. Шунинг учун ҳам, биз чекли чегарали хосмас интегралларнинг махсусликларини сусайтиришнинг айрим усулларини кўриб чиқамиз.

1. Вазн функциясини ажратиш. Фараз қилайлик,

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx \tag{10.1}$$

интегрални ҳисоблаш талаб қилинсин ва $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг бир ёки бир неча нуқталарида чексизликка айлансин. Бу функцияни

$$f(x) = \rho(x)\varphi(x)$$

кўринишда ёзиб оламиз, $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган ва етарлича узлуксиз ҳосилаларга эга ҳамда $\rho(x) > 0$ етарлича содда кўринишга эга. Бу ерда $\rho(x)$ ни вазн функцияси деб олиб, юқоридаги усуллар билан вазнли квадратур формула тузамиз.

Мисоллар кўрайлик. Айтайлик,

$$I = \int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

интегрални ҳисоблаш керак бўлсин. Интеграл остидаги функция ± 1 нуқталарда чексизга айланади. Бу функцияни

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

кўринишда ёзиб, $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ деб оламиз. У ҳолда Мелер квадратур формуласини қўллаш мумкин:

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+x^2_k}} \quad \left(x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right).$$

Бундан $n = 10$ деб олсак:

$$I \approx \frac{\pi}{10}\left[\frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 9^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 27^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 45^\circ}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 63^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 81^\circ}}\right] = 2{,}221428.$$

Интегралнинг қиймати вергулдан кейин олти хона аниқлик билан қуйидагига тенг:

$$I = 2{,}221441.$$

2. Аддитив усул. Л. В. Канторович махсусликни сусайтиришнинг қуйидаги усулини таклиф этган. Фараз қилайлик, интеграл остидаги функция

$$f(x) = (x - c)^{\alpha}\, \varphi(x) \tag{10.2}$$

кўринишга эга бўлиб, $c \in [a, b]$, $\alpha > -1$ ва $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда k-тартибли ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $f(x)$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!}(x - c)^{j+\alpha}$$

$$f_2(x) = (x - c)^{\alpha}\left[\varphi(x) - \varphi(c) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!}(x - c)^{j}\right].$$

Бу ерда $f_1(x)$ даражали функция бўлгани учун осон интегралланади. Квадрат қавс ичидаги ифода ва унинг k-тартибли ҳосиласигача $x = c$ нуқтада нолга айланади. Шунинг учун ҳам, $f_2(x)$ функция $x = c$ нуқтада махсусликка эга эмас. Бундан ташқари, $x = c$ нуқтада бу функция $k + [\alpha]$ тартибли узлуксиз ҳосилага эга. Шунинг учун ҳам, $\int\limits_a^b f_2(x)dx$ га бирор квадратур формулани қўллаб натижа олиш мумкин.

Мисол. Қуйидаги

$$I = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}} \left(= \frac{\pi}{2} = 1{,}5707963 \ldots \right)$$

интеграл тақрибий ҳисоблансин. Интеграл остидаги функция

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$$

интеграллаш оралиғида ягона $x = 0$ махсусликка эга, $\varphi(x) = (1 - x)^{-1/2}$ функцияни даражали қаторга ёйиб x^4 ҳадигача сақлаймиз, у ҳолда

$$f_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \right),$$

$$f_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - x}} - \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4\right)\right], f_2(0) = 0.$$

Берилган интегрални

$$I = \int\limits_0^{0,5} f_1(x)dx + \int\limits_0^{0,5} f_2(x)dx$$

кўринишда ёзиб оламиз. Биринчи интеграл аниқ ҳисобланади:

$$\int\limits_0^{0,5} f_1(x)dx = \frac{715801}{645120}\sqrt{2} = 1,5691585.$$

Иккинчи интегрални $n = 10$ ва қадам $h = 0,05$ деб олиб, Симпсон формуласи ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_0^{0,5} f_2(x)dx = 0,0006385.$$

Демак,

$$I = 1,5691585 + 0,0006385 = 1,570797.$$

Бу усулни, интеграллаш оралиғида бир неча махсус нуқта бўлган ҳолда ҳам қўллаш мумкин.

3. Бўлаклаб интеграллаш. Айрим ҳолларда интеграл остидаги функциянинг махсуслигини бўлаклаб интеграллаш йўли билан сусайтириш мумкин. Масалан, интеграл остидаги функция (10.2) кўринишга эга бўлсин. У ҳолда (10.1) интегрални

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

кўринишда ёзиб олиб, ҳар бирига бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаймиз, у ҳолда

$$\int\limits_a^b (x-c)^\alpha \varphi(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}\left[\varphi(b)(b-c)^{\alpha+1} - \varphi(a)(c-a)^{\alpha+1}\right] - \\ - \frac{1}{\alpha+1}\int\limits_a^b (x-c)^{\alpha+1}\varphi'(x)dx.$$

Бундан кўринишича, ўнг томондаги интеграл хос интегралга айланди. Бу ерда c нуқта оралиқнинг четки нуқталари билан устма-уст тушиши ҳам мумкин.

Мисол. Қуйидаги

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$I = \left.\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right|_0^1 + 2\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,\frac{dx}{(1+x)^2} = 1 + 2\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}.$$

Охирги интеграл хос интегралдир. Юқорида келтирилган усулларни қўллаб, интеграл остидаги функция

$$f(x) = (x-c)^\alpha \ln^n(x-c)\varphi(x)$$

кўринишда бўлганда ҳам махсусликни сусайтириш мумкин, бу ерда n—натурал сон бўлиб, c, α, $\varphi(x)$ юқоридаги шартларни қаноатлантиради.

Юқорида келтирилган усулларни фақат хосмас интегралларни ҳисоблаш учун эмас, балки интеграл остидаги функция чегараланган, лекин керакли тартибли ҳосилалари чегараланмаган ҳол учун ҳам қўллаш мумкин. Бундай ҳолда квадратур формулаларнинг катта хатога эга бўлишларини уларнинг қолдиқ ҳадларининг қийматларидан билиш мумкин. Махсусликни сусайтириш усуллари кўпинча интеграл остидаги функцияни аниқ интегралланувчи ва етарлича силлиқ функциялар йиғиндиси кўринишида ёзишга имкон беради.

11-§. ЧЕКЛИ-АЙИРМАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Дифференциал ва интеграл тенгламалар классик анализда қанчалик катта аҳамиятга эга бўлса, чекли-айирмали тенгламаларнинг роли ҳам дискрет анализда ана шундайдир. Бу параграфни чекли-айирмали тенгламаларга бағишлаймиз.

Фараз қилайлик, $y(x)$ функция бирор оралиқда берилган бўлсин. Аниқлик учун бу оралиқ $0 \leqslant x < \infty$ ярим ўқдан иборат бўлсин. Бирор $h > 0$ қадамли $x + kh$ тўрни олиб, $y(x)$ нинг чекли айирмаларини тузамиз:

$$\Delta y(x),\ \Delta^2 y(x),\ \ldots,\ \Delta^p y(x).$$

Ушбу

$$F(x,\ y(x),\ \Delta y(x),\ \ldots,\ \Delta^p y(x)) = 0 \qquad (11.1)$$

кўринишдаги тенглама p-тартибли чекли-айирмали тенглама дейилади.

Бу ерда $y(x)$ изланаётган функция бўлиб, $F(x,\ y_0,\ \ldots,\ y_p)$ ўз аргументлари $(x,\ y_0,\ \ldots,\ y_p)$ нинг ўзгариш соҳасида аниқланган функциядир.

Агар чекли айирмаларни функциянинг қийматлари орқали ифодаласак, (11.1) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\Phi(x,\ y(x),\ y(x+h),\ \ldots,\ y(x+ph)) = 0 \qquad (11.2)$$

Энди x нинг $x = nh$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ кўринишдаги қийматларини олиб, $y(kh) = y_k$ деб белгилаб олсак, (11.2) тенглама

$$Q(n,\ y_n,\ y_{n+1},\ \ldots,\ y_{n+p}) = 0\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (11.3)$$

кўринишга эга бўлади.

Биз (11.3) кўринишдаги тенгламанинг энг содда кўринишини, яъни y_k ларга нисбатан чизиқли бўлган

$$L(y) = a_0(n)y_{n+p} + a_1(n)y_{n-p+1} + \ldots + a_p(n)y_n = f(n) \qquad (11.4)$$

тенгламани қараймиз. Бу тенглама *р-тартибли чизиқли-айирмали* тенглама дейилади. Бу ерда a_i (n) коэффициентлар ва $f(n)$ озод ҳад n (бутун сонлар)нинг ихтиёрий функциялари. Озод ҳади нолга тенг бўлган $L(z)=0$ тенглама *бир жинсли* дейилади. Агар c_i ларга конкрет қийматлар бериб,

$$z = z(n,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)$$

формуладан қаралаётган тенгламанинг барча ечимларини топиш мумкин бўлса, бундай формула *умумий ечим* дейилади. Агар v ва y бир жинсли бўлмаган $L(v) = h$ тенгламанинг хусусий ва умумий ечими бўлса, у ҳолда $z = y - v$ бир жинсли тенгламанинг ечими бўлади: $L(y - v) = L(y) - L(v) = h - h = 0$. Шундай қилиб, бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими бир жинсли тенгламанинг умумий ечими билан бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимининг йиғиндисига тенг: $y = z + v$. Агар барчаси бирданига нолга тенг бўлмаган $c_1, c_2, \ldots, c_m$ лар мавжуд бўлиб,

$$c_1 u^{(1)} + c_2 u^{(2)} + \ldots + c_m u^{(m)} = 0 \qquad (11.5)$$

ўринли бўлса, у ҳолда бир жинсли тенглама $L(u) = 0$ нинг $u^{(1)}$, $u^{(2)}, \ldots, u^{(m)}$ ечимлари аргументнинг қаралаётган соҳасида чизиқли боғланган дейилади. Акс ҳолда, яъни (11.5) фақат $c_i = 0$ $(i = \overline{1, m})$ да бажарилса, бу ечимлар чизиқли эркли дейилади. Агар $z^{(i)}$ бир жинсли тенглама $L(z) = 0$ нинг ечими бўлса, у ҳолда уларнинг чизиқли комбинацияси $\sum\limits_i c_i z^{(i)}$ ҳам бу тенгламанинг ечими бўлади, чунки

$$L\left(\sum_i c_i z^{(i)}\right) = \sum_i c_i L(z^{(i)}) = 0.$$

Қулайлик учун (11.4) тенгламани $n \geqslant 0$ қийматлар учун қараймиз.

Теорема. Фараз қилайлик, барча $n \geqslant 0$ учун $a_0(n) \neq 0$ бўлиб, $a_i(n)$ лар чегараланган бўлсин. У ҳолда $L(z) = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$z = \sum_{i=1}^{p} c_i z^{(i)} \qquad (11.6)$$

бўлиб, $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$ функциялар $L(z) = 0$ нинг чизиқли эркли ечимларидир.

Исбот. (11.4) тенгламани қуйидаги ($f(n) = 0$ бўлганда)

$$z_{n+p} = -\sum_{i=0}^{p-1} \frac{a_i(n)}{a_0(n)} z_{n+i} \qquad (11.7)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Агар $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$ берилган бўлса, (11.4) дан кетма-кет $z_p, z_{p+1}, \ldots$ ларни топиб оламиз. Демак, ихтиёрий $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$ учун $L(z) = 0$ тенглама ечимга эга. Бу ечим ягона, чунки ҳар қандай ечимнинг қиймати (11.7) тенгламани қаноатлантиради, бу тенгламадан эса $z_p, z_{p+1}, \ldots$ ларнинг қийматлари ягона равишда аниқланади.

Энди $z_n^{(i)}$ орқали $L(z) = 0$ тенгламанинг $z_{j-1}^{(i)} = \delta_i^j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$ шартларни қаноатлантирувчи ечимларини белгилайлик.

Бу ечимлар чизиқли эркли системани ташкил этади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{i=1}^{p} c_i z_n^{(i)} \equiv 0 \tag{11.8}$$

бўлса, у ҳолда $j = 1, 2, \ldots, p$ учун

$$0 = \sum_{i=1}^{p} c_i z_{j-1}^{(i)} = \sum_{i=1}^{p} c_i \delta_i^j = c_j.$$

Демак, (11.8) тенглик фақат $c_i = 0$ $(i = \overline{1, p})$ бўлгандагина бажарилади ва шунинг учун ҳам $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$ функциялар чизиқли эрклидир.

Энди $L(z) = 0$ нинг ихтиёрий ечимини (11.6) кўринишда ёзиш мумкинлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, y_n $L(z) = 0$ нинг бирор ечими бўлсин. У ҳолда

$$y_n = \sum_{i=1}^{p} z_{i-1} z_n^{(i)}$$

функция бу тенгламанинг $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$ дастлабки шартларини қаноатлантирадиган ечими бўлади. $L(z)$ тенглама ечимининг ягоналигидан

$$z_n = \sum_{i=1}^{p} z_{i-1} z_n^{(i)} \tag{11.9}$$

келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Энди *ўзгармас коэффициентли чизиқли-айирмали тенгламани*

$$L(y) = \sum_{i=0}^{p} a_i y_{n+i} = f(n), \quad a_p \neq 0$$

ва унга мос келувчи *бир жинсли*

$$L(z) = \sum_{i=0}^{p} a_i z_{n+i} = 0 \tag{11.10}$$

тенгламани қараймиз. Охирги тенгламанинг хусусий ечимини λ^n кўринишда излаймиз, у ҳолда

$$\left(\sum_{i=0}^{p} a_i \lambda^i\right) \lambda^n = 0.$$

Демак, *характеристик тенглама* деб аталувчи

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \lambda^i = 0$$

тенгламанинг ҳар бир λ ечимига (11.10) тенгламанинг λ^n хусусий ечими мос келади.

Агар характеристик тенгламанинг барча илдизлари туб бўлса, у ҳолда p та ҳар хил ечимга эга бўламиз. Характеристик тенгламанинг ҳар бир k каррали илдизига (11.10) тенгламанинг k та ҳар хил

$$\lambda^n,\ C_n^1\lambda^{n-1},\ \ldots,\ C_n^{k-1}\lambda^{n-k+1} \tag{11.11}$$

ечимлари тўғри келишини кўрсатамиз. Буни каррали илдизлар ҳақиқий бўлган ҳол учун қараш билан кифояланамиз, чунки айтилган гаплар комплекс бўлган ҳол учун ҳам ўринлидир. Характеристик кўпҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\sum_{i=0}^{p} a_i\lambda^i = a_p\prod_{i=1}^{p}(\lambda-\lambda_i).$$

Ҳақиқий $\varepsilon > 0$, $\varepsilon\to 0$ параметрни олиб, қуйидаги икки шартни қаноатлантирувчи $\lambda_{i\varepsilon}$ ни оламиз:

1) барча $i = 1, 2, \ldots, k$ учун $\lambda_{i\varepsilon}$ лар ҳар хил;
2) барча $i \leqslant k$ учун $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_{i\varepsilon} = \lambda_i$.

Бу илдизларга мос келадиган характеристик тенгламани тузамиз:

$$0 = a_p\prod_{i=1}^{p}(\lambda-\lambda_{i\varepsilon}) = \sum_{i=0}^{p} a_{i\varepsilon}\lambda^i .$$

Кўриниб турибдики, $\lim\limits_{\lambda\to 0} a_{i\varepsilon} = a_i$. Бу характеристик тенгламага

$$\sum_{i=0}^{p} a_{i\varepsilon}z_{n+i} = 0 \tag{11.12}$$

айирмали тенглама мос келади. Энди фараз қилайлик, $\varepsilon > 0$ учун (11.12) тенгламанинг шундай $z_{\varepsilon n}$ ечимини кўрсата олайликки, ихтиёрий $n \geqslant 0$ учун

$$\lim_{\varepsilon\to 0} z_{\varepsilon n} = z_n$$

лимит мавжуд бўлсин. Агар $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_{i\varepsilon} = a_{i\varepsilon}$ ни ҳисобга олиб, (11.12) тенгламада лимитга ўтсак, у ҳолда z_n лимитдаги функция (11.10) тенгламанинг ечими эканлигини кўрамиз. Шундай $z_{\varepsilon n}$ кетма-кетликларни қурамизки, улар (11.10) тенгламанинг каррали илдизига мос келадиган хусусий ечимига яқинлашсин. Бундай қуришни амалга ошириш учун бўлинган айирмалардан фойдаланамиз. Аввал илдиз икки каррали бўлган ҳолни кўрамиз, бунинг учун $\varphi(\lambda) = \lambda^n$ деб белгилаб,

$$z_{2\varepsilon n} = \varphi(\lambda_{1\varepsilon};\ \lambda_{2\varepsilon}) = \frac{\lambda_{2\varepsilon}^n - \lambda_{1\varepsilon}^n}{\lambda_{2\varepsilon} - \lambda_{1\varepsilon}}$$

биринчи тартибли бўлинган айирмани оламиз. Кўриниб турибдики, бу функция (11.10) тенгламани қаноатлантиради. Энди $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_{1\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_{2\varepsilon} = \lambda_1$ ни ҳисобга олиб, лимитга ўтамиз:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} z_{2\varepsilon,n} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\lambda_{2\varepsilon}^{n-1} + \lambda_{2\varepsilon}^{n-2}\lambda_{1\varepsilon} + \ldots + \lambda_{1\varepsilon}^{n-1}) = n\lambda_1^{n-1}.$$

Шундай қилиб, биз икки каррали илдизга мос келадиган яна бир $n\lambda_1^{n-1}$ ечимга эга бўлдик. Энди λ_1 нинг карралиги иккидан катта бўлган ҳолни кўриб чиқамиз. Бунинг учун 5-бобдаги бўлинган айирмалар назариясига оид иккита формуладан фойдаланамиз:

$$\varphi(x_1; \ldots; x_q) = \sum_{j=1}^{q} \frac{\varphi(x_j)}{\prod\limits_{i \neq j}(x_j - x_i)} \tag{11.13}$$

ва

$$\varphi(x_1; \ldots; x_q) = \frac{\varphi^{(q-1)}(\xi)}{(q-1)!}, \tag{11.14}$$

бу ерда

$$\min(x_1, \ldots, x_q) \leqslant \xi \leqslant \max(x_1, \ldots, x_q).$$

Ихтиёрий $1 \leqslant q \leqslant k$ учун $z_{q\varepsilon, n}$ орқали $\varphi(\lambda) = \lambda^n$ нинг q тартибли бўлинган айирмасини белгилаймиз, (11. 13) га кўра:

$$z_{q\varepsilon, n} = \varphi(\lambda_{1\varepsilon}; \ldots; \lambda_{q\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{q} \frac{\lambda_{j\varepsilon}^n}{\prod\limits_{i \neq j}(\lambda_{j\varepsilon} - \lambda_{i\varepsilon})} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_{j\varepsilon} \lambda_{j\varepsilon}^n .$$

Кўриниб турибдики, $z_{q\varepsilon, n}$ (11. 12) тенгламани қаноатлантиради. Сўнгра, (11.14) дан фойдаланиб, $z_{q\varepsilon, n}$ ни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$z_{q\varepsilon, n} = C_n^{q-1} \lambda_\varepsilon^{n-q+1} .$$

Бу ерда $\min(\lambda_{1\varepsilon}, \ldots, \lambda_{q\varepsilon}) \leqslant \lambda_\varepsilon \leqslant \max(\lambda_{1\varepsilon}, \ldots, \lambda_{q\varepsilon})$ бўлгани учун $\varepsilon \to 0$ ҳолда лимитга ўтиб,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z_{q\varepsilon, n} = z_n = C_n^{q-1} \lambda_1^{n-q+1}$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, k каррали характеристик илдизга k та ҳар хил (11.11) функциялар мос келишини кўрсатдик. Энди фараз қилайлик,

$$a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_p\lambda^p = 0 \tag{11.15}$$

характеристик тенглама m та, карраликлари мос равишда k_1, k_2, $\ldots$, k_m ларга тенг бўлган ҳар хил $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ илдизларга эга бўлсин. Бу илдизларга (11.10) тенгламанинг қуйидаги хусусий ечимлари тўғри келади:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1^n,\ C_n^1 \lambda_1^{n-1},\ C_n^2 \lambda_1^{n-2},\ \ldots,\ C_n^{k_1-1} \lambda_1^{n-k_1+1}, \\ \lambda_2^n,\ C_n^1 \lambda_2^{n-1},\ C_n^2 \lambda_2^{n-2},\ \ldots,\ C_n^{k_2-1} \lambda_2^{n-k_2+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_m^n,\ C_n^1 \lambda_m^{n-1},\ C_n^2 \lambda_m^{n-2},\ \ldots,\ C_n^{k_m-1} \lambda_m^{n-k_m+1} . \end{array}\right\} \tag{11.16}$$

Бу ерда $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = p$ бўлгани учун (11.15) нинг ечимлари сони p га тенг.

Агар $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \ldots, z_n^{(p)}$ ўзаро чизиқли эркли бўлиб, $L(z)=0$ нинг ҳар қандай ечимини уларнинг чизиқли комбинацияси шаклида ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда бир жинсли тенгламанинг $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \ldots, z_n^{(p)}$ ечими *фундаментал система* ташкил этади дейилади.

2-теорема. (11.15) характеристик тенгламанинг илдизларига мос келадиган (11.16) ечимлар фундаментал системани ташкил этади.

Исбот. (11.16) функциялар системасини $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \ldots, z_n^{(p)}$ орқали белгилаб олиб, уларнинг дастлабки қийматларидан тузилган қуйидаги детерминантни қараймиз:

$$W_p = W_p(z_n^{(1)}, \ldots, z_n^{(p)}) = \begin{vmatrix} z_0^{(1)} & z_0^{(2)} & \ldots & z_0^{(p)} \\ z_1^{(1)} & z_1^{(2)} & \ldots & z_1^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{p-1}^{(1)} & z_{p-1}^{(2)} & \ldots & z_{p-1}^{(p)} \end{vmatrix}$$

Агар (11.15) характеристик тенгламанинг барча илдизлари туб бўлса, у ҳолда уларга мос келувчи (11.16) система $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_p^n$ бўлиб, $W_p(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_p^n)$ Вандермонд детерминанти бўлади ва шунинг учун ҳам $W_p(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_p^n) \neq 0$. Умумий ҳолда ҳам $W_p \neq 0$ эканини кўрсатиш мумкин. Бу принцип жиҳатдан қийин эмас, лекин катта ҳисоблашларни бажаришга тўғри келади. Биз бунга тўхталиб ўтирмаймиз. Энди $W_p \neq 0$ деб ҳисоблаб, $z_n^{(1)}, \ldots z_n^{(p)}$ нинг фундаментал система эканини кўрсатамиз. Аксинча, яъни бу системани чизиқли боғланган деб фараз қилайлик. У ҳолда барчаси бир вақтда нолга тенг бўлмаган шундай $c_1, \ldots, c_p$ топиладики,

$$\sum_{i=0}^{p} c_i z_n^{(i)} = 0$$

барча n лар, хусусий ҳолда $n = 0, 1, \ldots, p-1$ учун ўринли бўлади. Лекин $W_p \neq 0$ шартда система

$$\left.\begin{array}{l} c_1 z_0^{(1)} + c_2 z_0^{(2)} + \ldots + c_p z_0^{(p)} = 0, \\ c_1 z_1^{(1)} + c_2 z_1^{(2)} + \ldots + c_p z_1^{(p)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 z_{p-1}^{(1)} + c_2 z_{p-1}^{(2)} + \ldots + c_p z_{p-1}^{(p)} = 0 \end{array}\right\}$$

фақат $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 0$ тривиал ечимга эга бўлади. Шундай қилиб, $z_n^{(1)}, \ldots, z_n^{(p)}$ система чизиқли эркли экан. Энди (11.10) системанинг ҳар бир ечими бу системанинг чизиқли комбинацияси эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\left.\begin{array}{l} c_1 z_0^{(1)} + c_2 z_0^{(2)} + \ldots + c_p z_0^{(p)} = z_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 z_{p-1}^{(1)} + c_2 z_{p-1}^{(2)} + \ldots + c_p z_{p-1}^{(p)} = z_{p-1} \end{array}\right\}$$

система ихтиёрий $z_0, \dots, z_{p-1}$ учун ечимга эга. Демак, ихтиёрий ечим z_n учун шундай $c_1, \dots, c_p$ ларни кўрсатиш мумкинки, бир жинсли тенгламанинг ечими

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} c_i z_n^{(i)}$$

$n = 0, 1, \dots, p-1$ учун z_n билан устма-уст тушади. Айирмали тенгламанинг $z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$ дастлабки шартларни қаноатлантирадиган ечимининг ягоналигидан барча n лар учун $z_n = u_n$ лиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

3- теорема. Карралилиги k га тенг бўлган λ_1 илдизга мос келувчи (11.10) тенгламанинг хусусий ечимларидан тузилган

$$\sum_{q=1}^{k} A_q C_n^{q-1} \lambda_1^{n-q+1} \tag{11.17}$$

чизиқли комбинацияларнинг тўплами ихтиёрий $(k-1)$- даражали кўпҳадлар $P_{k-1}(n)$ учун

$$P_{k-1}(n)\lambda_1^n \tag{11.18}$$

функциялар тўплами билан устма-уст тушади.

Исбот. Ҳар бир $C_n^{q-1}\lambda_1^{1-q}$ функция n га нисбатан $q-1<k$ даражали кўпҳад бўлгани учун (11.17) кўринишдаги ҳар бир функцияни (11.18) кўринишда ёзиш мумкин. Иккинчи томондан, $P_{k-1}(n)$ ихтиёрий $(k-1)$- даражали кўпҳад бўлсин. Ихтиёрий k тугун учун $(k-1)$- даражали ҳар бир $P_{k-1}(n)$ кўпҳад ўзи учун интерполяцион кўпҳад бўлади. Шунинг учун ҳам Ньютон интерполяцион формуласида

$$L_n(x) = f(x_1) + f(x_1;\ x_2)\ (x-x_1) + \dots + \\ + f(x_1;\ \dots;\ x_n)\ (x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

$n = k$, $L_n = P_{k-1}$, $f = P_{k-1}$ деб олиш мумкин. Бундан ташқари, $x_j = j-1$ ва $x = n$ деб олсак, у ҳолда

$$P_{k-1}(n) = B_0 + B_1 n + B_2 n(n-1) + \dots + B_{k-1} n(n-1)\dots(n-k+2)$$

га эга бўламиз, бу ерда $B_j = P_{k-1}(0;\ \dots;\ j)$. Бу тенгликни қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$P_{k-1}(n) = \sum_{q=0}^{k-1} A_q\ C_n^{q-1}\lambda_1^{1-q}, \quad A_q = B_p(q-1)!\lambda_1^{q-1}.$$

Демак, (11.18) кўринишдаги ҳар бир функцияни (11.17) кўринишда ёзиш мумкин. Теорема исбот бўлди.

Шундай қилиб, (11.16) фундаментал система ўрнига ушбу

$$z_n^{(1)} = \lambda_1^n,\ z_n^{(2)} = n\lambda_1^n,\ \dots,\ z_n^{(k_1)} = n^{k_1-1}\lambda_1^n,\ z_n^{(k_1+1)} = \lambda_{k_1+1}^n,\ \dots$$

фундаментал системани олиш мумкин.

1- мисол. Қуйидаги

$$z_{n+1} + 4z_n - 5z_{n-1} = 0$$

бир жинсли чизиқли-айирмали тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Ечиш. Бу тенгламанинг характеристик кўпҳади

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

бўлиб, унинг илдизлари $\lambda_1 = 1$ ва $\lambda_2 = -5$ бўлгани учун умумий ечим

$$z_n = c_1 + (-1)^n c_2 5^n.$$

бўлади.

2- мисол. Ноль ва бирдан бошланиб, ҳар бир кейингиси иккита олдингиларининг йиғиндисига тенг бўлган Фибоначчи сонларини қарайлик: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . Умумий ҳадининг кўриниши топилсин.

Ечиш. Масала шартига кўра

$$z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$$

чекли-айирмали тенгламани $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ дастлабки шартларни қаноатлантирувчи ечими топилиши керак. Характеристик тенглама

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

нинг илдизлари $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ бўлгани учун умумий ечим

$$z_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

бўлади. Ўзгармас c_1 ва c_2 дастлабки шарт, яъни

$$c_1 + c_2 = 0, \ (c_1 + c_2) + \sqrt{5}(c_1 - c_2) = 2$$

тенгламадан топилади:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

демак,

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3- мисол. Ушбу

$$z_{n+4} + 2z_{n+3} + 3z_{n+2} + 2z_{n+1} + z_n = 0$$

тенгламанинг $z_0 = z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = -1$ дастлабки шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. Характеристик тенгламани

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$(\lambda^2 + \lambda + 1)^2 = 0$ каби ёзиб олиб, унинг

$$\lambda_1 = \lambda_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

илдизларини топамиз. Умумий ечим эса:

$$z_n = (c_1 + c_2 n)e^{\frac{2\pi i n}{3}} + (c_3 + c_4 n)e^{-\frac{2\pi i n}{3}} =$$

$$= (A_1 + A_2 n)\cos\frac{2\pi n}{3} + (A_3 + A_1 n)\sin\frac{2\pi n}{3},$$

бу ерда A_1, A_2, A_3, A_4 янги ихтиёрий ўзгармаслар.

Бу ўзгармасларни топиш учун дастлабки шартлардан фойдаланиб, қуйидаги тенгламаларни тузамиз:

$$z_0 = A_1 = 0,$$
$$z_1 = (A_1 + A_2)\cos\frac{2\pi}{3} + (A_3 + A_4)\sin\frac{2\pi}{3} = 0,$$
$$z_3 = A_1 + 3A_2 = 0,$$
$$z_2 = (A_1 + 2A_2)\cos\frac{4\pi}{3} + (A_3 + 2A_4)\sin\frac{4\pi}{3} = -1.$$

Бундан эса

$$A_1 = A_2 = 0,\ A_3 = -A_4 = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Шундай қилиб,

$$z_n = \frac{2(n-1)}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi n}{3}.$$

12- §. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШ*

1. Масаланинг қўйилиши. Агар $f(x)$ функция $[x_0, X]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда бошланғич функцияни қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{X} f(t)dt, \qquad x \in [x_0, X]. \tag{12.1}$$

Демак, бошланғич функцияни топиш $\int_{x_0}^{X} f(t)dt$ интегралнинг қийматларини топиш билан тенг кучлидир.

Вольтерра интеграл тенгламаси

$$f(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, t) f(t)dt$$

да ушбу

$$y(x) = \int_a^x K(x, t) f(t)\,dt \tag{12.2}$$

интеграл билан иш кўришга тўғри келади. Биз фақат бошлангич функцияни ҳисоблаш билан шуғулланамиз. Интегралнинг юқори чегараси ўзгарувчи бўлгани ва $y(x)$ нинг кўп нуқталардаги қийматларини топишга эҳтиёж туғилиши туфайли аниқмас интегралларни ҳисоблаш масаласи ўзига хос бўлиб, улар учун махсус методлар яратишга тўгри келади.

Фараз қилайлик, (12.1) интегралнинг қийматини аргументнинг $x = x_0, x_1, x_2, \ldots$ қийматлари учун ҳисоблаш талаб қилинсин. Айтайлик, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ топилган бўлиб, y_{n+1} ни топиш керак бўлсин. Бунинг учун $y(x)$ нинг аввал топилган мавжуд y_k $(k \leqslant n)$ қийматларидан фойдаланиш мумкин. Биз аввал $f(x)$ формула ёрда-

---

* Мазкур параграфни ёзишда [23] дан фойдаланилди.

мида (яъни унинг исталган қийматини топиш мумкин бўлган) аниқланган ҳолни қараймиз. Параграф охирида эса $f(x)$ жадвал билан берилган ҳолни кўриб ўтамиз. Кўпинча $f(x)$ нинг қийматини керакли x нуқталарда ҳисоблаб, y_{n+1} ни исталган аниқликда топиш мумкин бўлади. Бу ерда $y(x)$ нинг кўп қийматларини топиш лозим бўлгани учун f нинг ҳар бир қийматидан $y(x)$ нинг бир неча қийматларини топишда фойдаланиш мумкин. Буни қуйидаги мисолда кўриш мумкин: y_{n+1} ни ҳисоблашда

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt \qquad (12.3)$$

тенгликдан фойдаланиш мумкин. Ўнг томондаги интегрални ҳисоблашда аниқ интеграл учун қурилган формулаларнинг бирортасидан фойдаланиш мумкин. Лекин бу усул қуйидаги кўриниб турган нуқсонга эга: f нинг қийматлари, агар улар $[x_n, x_{n+1}]$ нинг четки нуқталарига мос келмаса, фақат y_{n+1} ни ҳисоблашда фойдаланиб, аввалги y_n, y_{n-1}, . . . ва кейинги y_{n+2}, y_{n+3}, . . . ларни ҳисоблашда қатнашмайди.

Келгусида f нинг қийматларини ҳисоблашнинг бир неча қадамларида ишлатишга имкон берадиган усуллар ҳақида сўз юритилади.

Аниқмас интегрални топишда фойдаланиладиган интеграллаш қоидаси муваффақиятсиз танланган бўлса, ҳисоблаш хатолари йиғилиб бир неча қадамдан кейин кераклисидан катта бўлиб кетиши мумкин. Худди шу ҳолни мисолда кўрайлик. Фараз қилайлик, y_{n+1} ни ҳисоблаш учун олдинги y_{n-1} ва y_n қийматлар ҳамда ҳосиланинг иккита $y'_{n-1} = f'_{n-1}$ ва $y'_n = f'_n$ қийматлари асосида интерполяциядан фойдаланайлик. Бу ерда иккита икки каррали тугунларга эга бўлганимиз учун Эрмит формуласидан фойдаланишимиз мумкин ва қолдиқ ҳадни ташлаб қуйидаги интеграллаш қоидасига эга бўламиз:

$$y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1} + h(4f_n + 2f_{n-1}). \qquad (12.4)$$

Бу тенглик барча учинчи тартибли кўпҳадлар учун аниқдир. Бу формула бир марта қўллашда яхши натижа беради, лекин кўп марта қўллаш учун эса хато тез ортиб бориши сабабли яроқсиздир.

Фараз қилайлик, f нинг барча қийматлари ва y_{n-1} аниқ ҳисобланган бўлиб, y_n ни ҳисоблашда ε хатога (масалан, яхлитлаш ҳисобидан) йўл қўйилган бўлсин. Биринчи бобда $y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1}$ ҳисоблаш жараёни учун кўрганимиздек, бу хато y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, . . . ларни топишда уларга мос равишда -4ε, 21ε, -104ε, . . . каби ўса бориб нотурғунлик юз беради. Кейинги пунктда y_{n+k} ни топишда бу хато $\frac{1+(-5)^k}{6}\varepsilon$ қонуният билан ўсишини кўрамиз. Бундан (12.4) формуланинг ҳисоблаш учун яроқсизлиги маълум бўлади. Унинг ўрнига, (12.3) интегрални трапеция формуласи билан ҳисобласак,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

формулага эга бўламиз. Бу формуланинг алгебраик аниқлик даражаси бирга тенг бўлса ҳам, кўп марталаб қўллаш учун қулайдир, чунки хато жамланмайди. Кўп марталаб қўлланиладиган қоидаларнинг турғунликларига катта эътибор бериш лозим. Бу масалаларни кейинги пунктда кўриб ўтамиз.

2. Ҳисоблаш хатоси ва яқинлашиш. Фараз қилайлик, (12.1) интегралнинг қийматини $h>0$ қадамли $x_k=x_0+kh$ $(x_0+Nh\leqslant X<x_0+Nh+h)$ тўрда ҳисоблаш учун

$$y_{n+1}=\sum_{i=0}^{p}A_i y_{n-i}+h\sum_{j=1}^{m}B_{nj}f(\xi_{nj}) \qquad (12.5)$$

формула танланган бўлсин. Бу формула билан ҳисоблашда y_{n+1} ни топиш учун $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p}$ ва f нинг $m=m(n)$ та ξ_{nj} $(j=\overline{1, m})$ қийматлари маълум деб қараймиз. Агар бу формулада тақрибий қиймат y_{n+1} ўрнига аниқ қиймат $y(x_{n+1})$ ни қўйсак, тенглик бажарилмайди ва тенглик ўринли бўлиши учун (12.5) нинг ўнг томонига формуланинг хатоси деб аталувчи қўшимча r_n ҳадни қўшиш керак:

$$y(x_{n+1})=\sum_{i=0}^{p}A_i y(x_{n-i})+\sum_{j=1}^{m}B_{nj}f(\xi_{nj})+r_n. \qquad (12.6)$$

Одатда ҳисоблашлар яхлитлаш билан бажарилади. Шунинг учун ҳам n- қадамдаги яхлитлаш хатосини $-\rho_n$ орқали белгиласак, (12.5) формула ўрнига ушбу

$$y_{n+1}=\sum_{i=0}^{p}A_i y_{n-i}+\sum_{j=1}^{m}B_{nj}f(\xi_{nj})-\rho_n \qquad (12.7)$$

ҳисоблаш формуласига эга бўламиз.

Бундан кейинги асосий вазифамиз y_k тақрибий қийматнинг

$$\varepsilon_k=y(x_k)-y_k$$

хатосини ўрганишдан иборатдир. Бунинг учун (12.7) ни (12.6) дан айириб, хато учун

$$\varepsilon_{n+1}=\sum_{i=0}^{p}A_i\,\varepsilon_{n-i}+r_n+\rho_n \qquad (12.8)$$

ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чекли-айирмали тенгламани ҳосил қиламиз. Биз бундаги y_k $(k=\overline{0, p})$ тақрибий қийматларнинг хатолари ε_k $(k=\overline{0, p})$ маълум деб қараймиз. Қолган барча ε_k $(k>p)$ кетма-кет равишда (12.8) формуладан аниқланади. (12.8) да $n=p$ деб олсак, ε_{p+1} дастлабки $\varepsilon_k(k=\overline{0, p})$ ва $r_p+\rho_p$ ларнинг чизиқли комбинацияси сифатида топилади. Бу натижадан фойдаланиб ва (12.8) да $n=p+1$ деб олиб, ε_{p+2} ни дастлабки ε_k $(k=\overline{0, p})$ ва $r_p+\rho_p$, $r_{p+1}+\rho_{p+1}$ ларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодаланади ва ҳоказо. Шундай қилиб, (12.8) тенглама ёрдамида $n > p$ учун ε_n дастлабки хатолар $\varepsilon_k (k \leqslant p)$ ва $r_p + \rho_p, \ldots r_{n-1} + \rho_{n-1}$ ларнинг бир жинсли функцияси каби ифодаланади:

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{p} \Gamma_n^{(i)} \varepsilon_i + \sum_{j=p}^{n-1} G_n^{(j)} (r_j + \rho_j). \qquad (12.9)$$

Кўриниб турибдики, $\Gamma_n^{(i)}$ функция (12.8) тенгламага мос

$$L(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1} - \sum_{i=0}^{p} A_i \varepsilon_{n-i} = 0 \qquad (12.10)$$

бир жинсли тенгламанинг $\varepsilon_k = \delta_k^i$ $(k = \overline{0, p})$ дастлабки шартларга мос келувчи хусусий ечимидир. Ҳақиқатан ҳам, (12.9) да барча $j = \overline{p, n-1}$ учун $r_j + \rho_j = 0$ деб олиб, бу дастлабки шартлардан фойдалансак $\varepsilon_n = \Gamma_n^{(i)}$ келиб чиқади. Шунинг учун ҳам $\Gamma_n^{(i)}$ функция ε_i нинг *таъсир ёки Грин функцияси* дейилади. Худди шунга ўхшаш $G_n^{(i)}$ нолли $\varepsilon_0 = \ldots = \varepsilon_p = 0$ дастлабки шартни қаноатлантирадиган

$$L(\varepsilon_n) = \delta_n^i \qquad (n,\ i \geqslant p) \qquad (12.11)$$

тенгламанинг ечимидир. Ҳақиқатан ҳам, (12.9) да $\varepsilon_0 = \ldots = \varepsilon_p = 0$, $r_j + \rho_j = \delta_j^i$ деб олсак, $\varepsilon_n = G_n^{(i)}$ келиб чиқади. $G_n^{(i)}$ функция $r_i + \rho_i$ озод ҳаднинг *таъсир функцияси* дейилади. Энди $G_n^{(i)} = \Gamma_{n+p-i-1}^{(p)}$ эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, (12.11) тенглама фақат $n = i$ бўлганда бир жинсли бўлмаган ҳамда $n < i$ ва $n > i$ учун бир жинсли тенглама бўлиб, $G_n^{(i)}$ қуйидаги

$$L(\varepsilon_n) = 0 \ (n > i), \quad \varepsilon_{i-p+1} = \varepsilon_{i-p+2} = \ldots = \varepsilon_i = 0, \quad \varepsilon_{i+1} = 1$$

масаланинг ечимидир. Бу масала $\Gamma_n^{(i)}$ ни аниқлайдиган масаладан фақат шу билан фарқ қиладики, бунда n ўқ бўйича $i - p + 1$ бирликка сурилгандир, демак, $G_n^{(i)} = \Gamma_{n+p-i-1}^{(n)}$.

Бундан фойдаланиб, ε_n ни қуйидагича ёзамиз:

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{p} \Gamma_n^{(i)} \varepsilon_i + \sum_{j=p}^{n-1} \Gamma_{n+p-j-1}^{(p)} (r_j + \rho_j) \qquad (12.12)$$

ёки

$$\varepsilon_n = E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + E_n^{(3)}, \qquad (12.13)$$

бу ерда

$$E_n^{(1)} = \sum_{i=0}^{p} \Gamma_n^{(i)} \varepsilon_i, \quad E_n^{(2)} = \sum_{j=p}^{n-1} \Gamma_{n+p-j-1}^{(p)} \rho_j, \quad E_n^{(3)} = \sum_{j=p}^{n-1} \Gamma_{n+p-j-1}^{(p)} r_j. \qquad (12.14)$$

Кўриниб турибдики, $E_n^{(i)}$ (12.10) бир жинсли тенгламанинг $E_n^{(1)} = \varepsilon_k (k = \overline{0, p})$ дастлабки шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлиб, $E_n^{(2)}$ ва $E_n^{(3)}$ лар мос равишда $L(E_n)=\rho_n$ ва $L(E_n)=r_n$ бир жинсли бўлмаган тенгламаларнинг нолли $E_k=0$ $(k=\overline{0,\ p})$ дастлабки шартларни қаноатлантирадиган ечимидир.

Энди $h\to 0$ да $y_n(n=\overline{0,\ N})$ тақрибий ечимларнинг $y(x_n)$ аниқ ечимга текис яқинлашиш шартини аниқлаймиз. Бунинг учун улар орасидаги масофа сифатида

$$\rho(y,\ y_n)=\max_n |\varepsilon_n|=\max_n |y(x_n)-y_n|$$

миқдорни оламиз. ε_n, ρ_n ва r_n лар ўзаро боғлиқ бўлмаганликлари сабабли, $h\to 0$ да $\rho(y,\ y_n)\to 0$ бажарилиши учун $h\to 0$ да $\max\limits_n E_n^{(k)}$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ лар нолга интилишлари керак.

Ишни E_n ни ўрганишдан бошлаймиз. Агар дастлабки хатолар ε_k $(k<p)$ абсолют қийматлари бўйича чегараланган $|\varepsilon_k|\leqslant\varepsilon$ бўлса, у ҳолда (12.14) га кўра

$$|E_n|\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{p}|\Gamma_n^{(i)}|$$

баҳо келиб чиқади.

Фараз қилайлик, (12.5) формула ўзгармас y ни аниқ интегралласин ва $f=0$ бўлсин. У ҳолда бу формуланинг коэффициентлари $\sum\limits_{i=0}^{p}A_i=1$ шартни қаноатлантиришлари керак. Бу эса $\varepsilon_n=1$ бир жинсли $L(\varepsilon_n)=0$ тенгламанинг ечими эканини кўрсатади. Бундан ташқари, y ўзгармас ва $f\equiv 0$ бўлгани учун $\rho_i=r_i=0$ бўлиб, (12.14) дан

$$\sum_{i=0}^{p}\Gamma_n^{(i)}=1$$

келиб чиқади. Демак, ихтиёрий n учун

$$\sum_{i=0}^{p}|\Gamma_n^{(i)}|\geqslant 1,$$

$n\to\infty$ да E_n нинг тартиби билан $\sum\limits_{i=0}^{p}|\Gamma_n^{(i)}|$ йиғиндининг чегараланганлиги узвий боғлиқдир.

Шу муносабат билан, қуйидаги таърифни киритамиз.

Таъриф. Агар шундай M сони топилсаки, $|\varepsilon_i|\leqslant\varepsilon$ $(i\leqslant p)$ бўлганда барча $n\geqslant p$ учун

$$|E_n|=|\sum_{i=0}^{p}\Gamma_n^{(i)}\varepsilon_i|\leqslant M\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда (12.5) *формула дастлабки қийматларнинг* ε_i $(i\leqslant p)$ *хатоларига нисбатан турғун* дейилади.

Энди турғунлик критерийсини келтирамиз.

1-теорема. (12.5) формула дастлабки хатолар ε_i $(i \leqslant p)$ га нисбатан турғун бўлиши учун қуйидаги шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир:

1) $\lambda^{p+1} - \sum\limits_{i=0}^{p} A_i \lambda^{p-i} = 0$

тенгламанинг λ_k илдизлари орасида модули бўйича бирдан каттаси мавжуд эмас;

2) модули бирга тенг бўлган илдизлар тубдир.

Исбот. Олдинги параграфдан маълумки (12.10) бир жинсли ўзгармас коэффициентли чизиқли айирмали тенгламанинг умумий ечими

$$\lambda^{p+1} - \sum_{i=0}^{p} A_i \lambda^{p-i} = 0$$

$(p+1)$-даражали алгебраик тенгламанинг илдизлари орқали аниқланади.

Тенгламанинг илдизларини $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ва уларнинг карраларини $k_1, k_2, \ldots, k_m$ орқали белгиласак, у ҳолда $\lambda_j^n n^j$ $(j = \overline{0, k-1};\ i = \overline{1, m})$ функциялар $L(\varepsilon_n) = 0$ бир жинсли тенглама ечимларининг фундаментал системасини ташкил этади. Тенгламанинг ихтиёрий ечими уларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади.

Иккинчи томондан, дастлабки қийматларнинг таъсир функцияси $\Gamma_n^{(i)}$ $(i = \overline{0, p})$ ҳам фундаментал системани ташкил этади ва бу система $\lambda_i^n n^j$ ечимлардан махсусмас матрицали чизиқли алмаштириш ёрдамида ҳосил бўлади.

Ушбу $\sum\limits_{i=0}^{p} |\Gamma_n^{(i)}|$ йиғиндининг чегараланганлиги $\Gamma_n^{(i)}$ $(i = \overline{0, p})$ функцияларнинг чегараланганликлари билан ва, демак, барча n учун $\lambda_i^n n^j (j = \overline{0, k_i - 1};\ i = \overline{1, m})$ ечимларнинг чегараланганликлари билан тенг кучлидир. Бу эса λ_i лар модуллари бўйича бирдан катта бўлмагандагина ёки $|\lambda_i| = 1$ ҳолда эса $k_i = 1$ бўлгандагина ўринлидир. Шу билан теорема исботланди.

Энди $E_n^{(2)}$ ни текширамиз. Агар ρ барча қадам учун ρ_n ларнинг юқори чегараси бўлса, яъни $|\rho_n| \leqslant \rho$, у ҳолда (12.14) га кўра

$$|E_n^{(2)}| \leqslant \rho \sum_{j=p}^{n-1} |\Gamma_{n+p-j-1}^{(p)}|,$$

$$\max_n |E_n^{(2)}| \leqslant \rho \sum_{j=p}^{N-1} |\Gamma_{N+p-j-1}^{(p)}| = \rho \sum_{j=p}^{N-1} |\Gamma_j^{(p)}| \qquad (12.15)$$

бўлади. Агар ρ_n, $|\rho_n| \leqslant \rho$ шартни қаноатлантирувчи барча қийматларни қабул қилади деб фараз қилсак, у ҳолда охирги баҳо аниқ бўлиб, $n=N$ ва $\rho_k = \rho \operatorname{sign} \Gamma^{(p)}_{N+p-k-1}$ бўлганда тенгликка эришилади.

Кўриниб турибдики, $h \to 0$ да N чексиз ортиб боради.

Энди $L(\varepsilon_n)=0$ бир жинсли тенгламанинг ечимлари бўлган ушбу

$$\Gamma^{(p)}_n,\ \Gamma^{(p)}_{n+1},\ \ldots,\ \Gamma^{(p)}_{n+p} \qquad (12.16)$$

системани қараймиз. Бу ерда $\Gamma^{(p)}_p = 1$ ни ҳисобга олсак, у ҳолда қуйидаги матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 \ldots & 0 & 1 & \Gamma^{(p)}_{p+1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1 & \Gamma^{(p)}_{p+1} \ldots & \Gamma^{(p)}_{2p-2} & \Gamma^{(p)}_{2p-1} & \Gamma^{(p)}_{2p} \end{bmatrix}$$

$n=1, 2, \ldots, p$ учун (12.16) системанинг қийматларини тасвирлайди. Бу матрицанинг детерминанти нолдан фарқли. Шунинг учун ҳам (12.16) система фундаментал система бўлиб, у $\Gamma^{(0)}_n, \Gamma^{(1)}_n, \ldots, \Gamma^{(p)}_n$ ва демак, $\lambda^n_i n^j$ ечимлардан махсусмас чизиқли алмаштириш ёрдамида ҳосил бўлади. Уларнинг чегараланганлиги $\Gamma^{(i)}_n$ $(i \leqslant p)$ ва $\lambda^n_i\ n^j$ $(j=\overline{0,\ k_i-1};\ i=\overline{0,\ m})$ функцияларнинг чегараланганлиги билан тенг кучлидир.

Таъриф. Агар h га боғлиқ бўлмаган шундай M_1 сони мавжуд бўлиб, барча $N > p$ учун

$$|E^{(2)}_n| \leqslant M_1 N \rho \qquad (n=\overline{p,\ N-1})$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда (12.5) ҳисоблаш формуласи ρ_n яхлитлаш хатоларига нисбатан турғун дейилади.

2-теорема. (12.5) ҳисоблаш формуласининг ρ_n яхлитлаш хатоларига нисбатан турғун бўлиши учун қуйидаги шартларнинг бажарилиши етарлидир:

1) $\lambda^{p+1} - \sum\limits_{i=0}^{p} A_i \lambda^{p-i} = 0$ тенглама модули бўйича бирдан катта илдизга эга эмас ва

2) модули бирга тенг бўлган илдизлар тубдир.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, теорема шартлари бажарилганда $\lambda^n_i\ n^j$ $(j=\overline{0,\ k_i-1};\ i=\overline{1,\ m})$ ечимлар, улар билан биргаликда эса $\Gamma^{(i)}_n$ $(i \leqslant p)$ таъсир функциялари чегараланган бўлади, хусусий ҳолда $|\Gamma^{(p)}_n| \leqslant M_1$. Бундан ва (12.15) тенгсизликдан теорема тасдиғи келиб чиқади.

Шундай қилиб, y_i $(i \leqslant p)$ дастлабки қийматларни аниқроқ ҳисоблаш ва ρ_n яхлитлаш хатоларини камайтириш йўли билан $h \to 0$ бўлганда доимо

$$\max_n |E^{(k)}_n| \to 0 \quad (k=1,\ 2)$$

бўлишига эришиш мумкин. Бундан биз қуйидагини айтишимиз мумкин: агар $h \to 0$ да $\max_n |E_n^{(3)}| \to 0$ бўлса, у ҳолда (12.5) формула шубҳасиз текис яқинлашувчи ҳисоблаш жараёнига йўл қўяди.

Фараз қилайлик, $r = r(h)$ барча $n \, (p \leqslant n \leqslant N-1)$ учун хато абсолют қийматининг юқори чегараси бўлсин: $|r_n| \leqslant r$. **У ҳолда**

$$|E_n^{(3)}| \leqslant r \sum_{i=p}^{n-1} |\Gamma_{n+p-i-1}^{(p)}| = r \sum_{k=p}^{n-1} |\Gamma_k^{(p)}|$$

ва

$$\max_n |E_n^{(3)}| \leqslant r \sum_{k=p}^{N-1} |\Gamma_k^{(p)}|. \qquad (12.17)$$

Бундан қуйидагига эга бўламиз.

3- теорема. Агар $h \to 0$ бўлганда

$$r(h) \sum_{k=p}^{N-1} |\Gamma_k^{(p)}| \to 0$$

бўлса, у ҳолда (12.5) формула текис яқинлашувчи ҳисоблаш жараёнига йўл қўяди.

4- теорема. Агар $\lambda^{p+1} - \sum_{r=0}^{p} A_i \lambda^{p-i} = 0$ тенгламанинг модули бўйича бирдан катта илдизи мавжуд бўлмаса ва модули бирга тенг бўлган илдизи туб бўлса, у ҳолда $h \to 0$ бўлганда

$$\frac{r(h)}{h} \to 0$$

бўлса, (12.5) формула текис яқинлашувчи ҳисоблаш жараёнига йўл қўяди.

Исбот. Биз юқорида кўрганимиздек, теорема шартлари бажарилганда, шундай M_1 сони топиладики, барча $k \geqslant p$ учун

$$|\Gamma_k^{(p)}| \leqslant M_1$$

бўлади. Бундан ва (12.17) дан қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$\max_n |E_n^{(3)}| \leqslant M_1(N-p)r \leqslant M_1 r N \leqslant M_1 \frac{r}{h} (X - x_0).$$

Бундан эса теорема тасдиғи келиб чиқади.

5- теорема. Агар $A_i \geqslant 0 \; (i = \overline{0, p})$ ва $\sum_{i=0}^{p} A_i = 1$ бўлса, у ҳолда (12.5) формула дастлабки хатоларга нисбатан турғун бўлади.

Исбот. (12.5) формулага мос келувчи бир жинсли

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{p} A_i y_{n-i}$$

тенгламани қараймиз. Бу ердан

$$|y_{n+1}| \leqslant \sum_{i=0}^{p} A_i |y_{n-i}| \leqslant \max_{n-p\leqslant k\leqslant n} |y_k| \sum_{i=0}^{p} A_i = \max_{n-p\leqslant k\leqslant n} |y_k| .$$

Бу баҳони бир неча марта қўллаш билан барча n лар учун $|y_n| \leqslant \max\limits_{0\leqslant k\leqslant p} |y_k|$ тенгсизликнинг ўринли эканлигини кўрамиз. Бошқача айтганда, бир жинсли тенглама ечимининг барча қийматлари y_0, $y_1, \dots, y_p$ дастлабки қийматларнинг модули бўйича энг каттасидан ортмайди. Бундан кўринадики, дастлабки қийматларнинг барча таъсир функциялари модуллари бўйича бирдан ортмайди:

$$|\Gamma_n^{(i)}| \leqslant 1 \quad (i = \overline{0, p}; \quad n = 0, 1, 2, \dots).$$

Бундан эса, юқорида кўрганимиздек,

$$\lambda^{p+1} - \sum_{i=0}^{p} A_i \lambda^{p-i} = 0$$

тенгламанинг илдизлари орасида модуллари бўйича бирдан каттаси мавжуд эмаслиги ва модуллари бўйича бирга тенгларининг туб эканликлари келиб чиқади. Бу ердан эса теорема тасдиғи 1- теоремадан келиб чиқади.

Энди (12.4) формулани текширамиз. Унга мос келувчи $y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1}$ бир жинсли тенгламани олайлик. Бунинг характеристик тенгламаси $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ бўлиб, илдизлари $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 1$. Демак,

$$E_{n+1} = -4E_n + 5E_{n-1}$$

тенгламанинг $E_0 = \varepsilon_0$ ва $E_1 = \varepsilon_1$ дастлабки шартларни қаноатлантирувчи ечими

$$E_n = \frac{1}{6}(\varepsilon_1 + 5\varepsilon_0) + \frac{(-1)^n}{6}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)5^n$$

бўлади. Агар $\varepsilon_0 - \varepsilon_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда n нинг ўсиши билан E_n жуда тез ўсади. Бундан эса 2- теоремага кўра (12.4) формуланинг дастлабки хатога нисбатан турғун эмаслиги келиб чиқади. Бу формуланинг яхлитлаш хатосига нисбатан ҳам турғун бўлмаслигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Аксинча,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

формула 5- теоремага кўра дастлабки хатога нисбатан турғун ҳисоблаш жараёнини беради.

3. Жадвал кўринишида берилган функцияларни интеграллаш. Фараз қилайлик, $[x_0, X]$ оралиқнинг тенг узоқликда жойлашган

$$x_n = x_0 + nh(n = \overline{0, N}; \; x_0 + Nh \leqslant X < x_0 + Nh + h)$$

нуқталарида $f(x)$ нинг қийматлари берилган бўлиб, шу қийматлар бўйича

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

ни ўша тенг узоқликда жойлашган $x_n = x_0 + nh$ нуқталарда ҳисоблаш талаб қилинсин.

Биз аввал дастлабки жадвални давом эттириш масаласини кўриб чиқамиз. Жадвалнинг бошланғич ва охирги қисмларини тузиш масалаларини кейинроқ кўрамиз. Фараз қилайлик, ҳисоблашлар $x_n = x_0 + nh$ тугунгача бажарилган бўлиб, $y(x)$ нинг охирги ҳисобланган қиймати $y(x_n)$ бўлсин. Кейинги $y(x_{n+1})$ қийматни топиш учун ихтиёрий маълум $y(x_k)$ $(k \leqslant n)$ қийматлардан ва f нинг жадвалдаги ихтиёрий қийматидан фойдаланиш мумкин. Биз фақат ҳисобланган битта $y(x_n)$ қийматдан фойдаланиб, $y(x_{n+1})$ ни ҳосил қиладиган усулларни кўриб ўтамиз. Маълумки, $y(x_{n+1})$ нинг аниқ қиймати

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$$

формула билан топилади. Бундан фойдаланиш учун $f(t)$ $[x_n, x_{n+1}]$ оралиқнинг барча нуқталарида маълум бўлиши керак. Лекин, бизга $f(t)$ нинг аниқ қиймати маълум эмас, $f(t)$ нинг $[x_n, x_{n+1}]$ даги тақрибий қиймати интерполяция йўли билан топилиши керак. Интерполяциялаш учун $[x_n, x_{n+1}]$ оралиққа яқинроқ жойлашган нуқталардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Шу мақсадда Бессел формуласидан фойдаланиш мумкин. Агар $[x_n - kh, x_n + kh + h]$ оралиқда $f(x)$ $2k + 2$ марта узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда Бессел формуласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(t) = f(x_n + uh) = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + \frac{u - 0{,}5}{1!} \Delta f_n +$$
$$+ \frac{u(u-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \frac{(u - 0{,}5)\ u(u-1)}{3!} \Delta^3 f_{n-1} + \ldots +$$
$$+ \frac{(u + k - 1)\ \ldots\ (u - k)}{(2k)!} \cdot \frac{\Delta^{2k} f_{n-k} + \Delta^{2k} f_{n-k+1}}{2} +$$
$$+ \frac{(u - 0{,}5)\ (u + k - 1)\ \ldots\ (u - k)}{(2k+1)!} \Delta^{2k+1} f_{n-k} + r(t),$$
$$r(t) = h^{2k+2} \frac{(u + k)\ (u + k - 1)\ \ldots\ (u - k - 1)}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(\xi),$$
$$[x_n - kh < \xi < x_n + kh + h].$$

Энди f нинг бу кўринишини

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt = h \int_0^1 f(x_n + uh)du$$

интегралга қўйиб, унча мураккаб бўлмаган амаллар бажаргандан сўнг $y(x_{n+1})$ учун қуйидаги ифода келиб чиқади:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\left[\frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12}\,\frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \right.$$
$$+ \frac{11}{720}\cdot\frac{\Delta^4 f_{n-2} + \Delta^4 f_{n-1}}{2} - \frac{191}{60480}\cdot\frac{\Delta^6 f_{n-3} + \Delta^6 f_{n-2}}{2} +$$
$$\left. + \ldots + B_k\,\frac{\Delta^{2k} f_{n-k} + \Delta^{2k} f_{n-k+1}}{2}\right] + R_{n,k}, \qquad (12.18)$$

$$B_k = \frac{1}{(2k)!}\int\limits_0^1 (u + k - 1)\ldots(u - k)du,$$

$$R_{n,k} = \frac{h^{2k+3}}{(2k+2)!}\int\limits_0^1 (u + k)\,(u + k - 1)\ldots(u - k - 1)f^{(2k+2)}(\xi)du.$$

Бундаги $(u + k)\,(u + k - 1)\ldots(u - k - 1)$ кўпайтма $[0, 1]$ оралиқда ўз ишорасини сақлагани учун ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаш мумкин, у ҳолда

$$R_{n,k} = h^{2k+3}\,B_{k+1}\,f^{(2k+2)}\,(\eta),$$
$$x_n + kh < \eta < x_n + kh + h.$$

Агар (12.18) формулада қолдиқ ҳад $R_{n,k}$ ни ташласак, y_{n+1} ни топиш учун тақрибий формулага эга бўламиз. Агар бу формулани $y_1, y_2, \ldots, y_n$ дастлабкиларни ҳисоблаш учун қўллайдиган бўлсак, у ҳолда $[x_0, X]$ оралиқдан чапга чиқишга, $f(x_0 - h)$, $f(x_0 - 2h), \ldots, f(x_0 - kh)$ ларни ҳисоблашга тўғри келади.

Агар бу қийматлар бизга маълум бўлмаса, у ҳолда дастлабки қийматларни ҳисоблаш учун бошқача йўл тутиш мумкин. Масалан, $y(x_1)$ ни

$$y(x_1) = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)dt$$

формула билан ҳисоблашда $f(t)$ ни $[x_0, x_1]$ оралиқда интерполяциялаш учун Ньютоннинг биринчи интерполяцион формуласидан фойдаланиш мумкин:

$$f(t) = f(x_0 + uh) = f_0 + \frac{u}{1!}\,\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2}\,\Delta^2 f_0 +$$
$$+ \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\,\Delta^3 f_0 + \ldots + \frac{u(u-1)\ldots(u-k+1)}{k!}\,\Delta^k f_0 + r(t),$$
$$r(t) = h^{k+1}\,\frac{u(u-1)\ldots(u-k)}{(k+1)!}\,f^{(k+1)}(\xi).$$

Буни интегралга қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y(x_1) = y(x_0) + h\left[\frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{1}{12}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{24}\,\Delta^3 f_0 - \frac{19}{720}\,\Delta^4 f_0 + \ldots + \right.$$
$$\left. + C_k\,\Delta^k f_0\right] + R_{n,k},$$

$$C_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 u(u-1)\ \ldots\ (u-k+1)du,$$

$$R_{n,\,k} = C_{k+1}h^{k+2}f^{(k+1)}(\xi),\quad x_0<\xi<x_k\,.$$

$R_{n,\,k}$ қолдиқ ҳадни ташлаб, $y(x_1)$ ни аниқлайдиган тақрибий формулага эга бўламиз. Бу ерда x_0 ни x_1 билан алмаштириб, $y(x_2)$ ни ҳосил қиламиз ва ҳ. к. Шунга ўхшаш $y(x_{N-k+1})$, . . . , $y(x_N)$ ларни ҳисоблаш учун Ньютоннинг иккинчи интерполяцион формуласидан фойдаланиб, қуйидаги формулани чиқариш мумкин:

$$y(x_N) = y(x_{N-1}) + h\left[\frac{f_N+f_{N-1}}{2} - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{n-2} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{n-3} - \right.$$
$$\left. - \frac{19}{720}\Delta^4 f_{N-4} - \ldots\ (-1)^{k-1}C_k\,\Delta^k f_{n-k}\right] + R_{N,k}.$$

13-§. КУБАТУР ФОРМУЛАЛАР

Математиканинг ўзида ва унинг татбиқларида кўпинча каррали интегралларни тақрибий ҳисоблашга эҳтиёж туғилади. Квадратур формулалар каби бу ерда ҳам каррали интегралнинг қийматини интеграл остидаги функциянинг чекли миқдордаги P_1, P_2, . . . , P_N нуқталардаги қийматларининг чизиқли комбинацияси ёрдамида аниқлайдиган ушбу

$$\int_{\Omega}\cdot\cdot\cdot\int f(x_1,\ \ldots,\ x_n)dx_1\ \ldots\ dx_n = \sum_{k=1}^{N} A_k f(P_k) + R(f)$$

формула *кубатур формула* дейилади. Бундаги

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_N\ \ (P_k = (x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)}) \in \Omega)$$

нуқталарнинг тўплами *интеграллаш тўри*, A_k $(k=\overline{1,\ N})$ *кубатур формуланинг коэффициентлари* ва $R(f)$ *қолдиқ ҳад* дейилади. Бу параграфда кубатур формулаларни тузишнинг айрим усулларини қисқача кўриб чиқамиз. Биз асосан икки каррали интегралларни қараймиз.

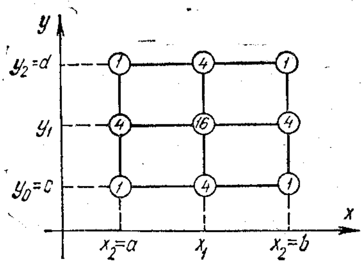
1. Квадратур формулаларни кетма-кет қўллаш. Кубатур формула тузишнинг энг содда усули, бу каррали интегрални такрорий интеграл шаклида тасвирлаб, бир каррали интеграллар учун қурилган квадратур формулаларни қўллашдан иборатдир.

Фараз қилайлик, интеграллаш соҳаси Ω тўғри бурчакли тўртбурчак $\{a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d\}$ бўлсин. Ушбу

$$I = \iint_{\Omega} f(x,\ y)dxdy \tag{13.1}$$

интегрални ҳисоблаш учун Симпсон формуласини икки марта қўллайлик. Бунинг учун $[a,\ b]$ ва $[c,\ d]$ оралиқларнинг ҳар бирини қуйидаги нуқталар билан иккига бўламиз:

$$x_0=a,\ x_1=a+h,\ x_2=a+2h=b;\ y_0=c,\ y_1=c+k,\ y_2=$$
$$=c+2k=d,$$



28-чизма.

бу ерда

$$h=\frac{b-a}{2}, \quad k=\frac{d-c}{2}.$$

Шундай қилиб, ҳаммаси бўлиб тўққизта $(x_i\ , y_j)$ $(i,\ j=0, 1, 2)$ нуқтага эга бўламиз (28-чизма).

Энди (13.1) интегралда

$$I=\int_a^b dx \int_c^d f(x,\ \ y)dy$$

ички интегрални ҳисоблаш учун Симпсон формуласини қўллаймиз:

$$I\approx\int_a^b \frac{k}{3}[f(x,\ y_0)+4f(x,\ y_1)+f(x,\ y_2)]dx=$$

$$=\frac{k}{3}\left[\int_a^b f(x,\ y_0)dx+4\int_a^b f(x,\ y_1)dx+\int_a^b f(x,\ y_2)dx\right].$$

Ҳар бир интегралга яна Симпсон формуласини қўлласак, у ҳолда

$$I=\frac{hk}{9}\ \{[f(x_0,\ \ y_0)+4f(x_1,\ \ y_0)+f(x_2,\ \ y_0)]+4[f(x_0,\ \ y_1)+$$
$$+4f(x_1,\ y_1)+f(x_2,\ y_1)]+[f(x_0,\ y_2)+4f(x_1,\ y_2)+f(x_2,\ y_1)]'\}$$

ёки

$$I\approx\frac{hk}{9}\{[f(x_0,\ y_0)+f(x_2,\ y_0)+f(x_0,\ y_2)+f(x_2,\ y_2)]+4[f\ (x_1,$$
$$y_0)+f(x_0,\ y_1)+f(x_2,\ y_1)+f(x_1,\ y_2)]+16f(x_1,\ y_1)\} \qquad (13.2)$$

ҳосил бўлади. Бу формулани қисқача қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$I\approx\frac{hk}{9}\sum_{i,\,j=0}^{2}\lambda_{ij}f(x_i\ , y_j\ ).$$

Бу ерда λ_{ij} қуйидаги учинчи тартибли

$$\Lambda=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

матрицанинг элементидир (28-чизма).

Кўрсатиш мумкинки, (13.2) формуланинг қолдиқ ҳади

$$R(f)=-\frac{h^5k}{45}\frac{\partial^4 f(\xi,\ \eta)}{\partial x^4}-\frac{hk^5}{45}\frac{\partial^4 f(\xi_1\ ,\eta_1)}{\partial y^4}-\frac{h^5k^5}{90^2}\frac{\partial^8 f(\xi_2,\ \eta_2)}{\partial x^4\partial y^4} \qquad (13.3)$$

$$(a<\xi_i<b;\ c<\eta_i<d)$$

кўринишга эга бўлади.

Қолдиқ ҳаднинг бу кўринишидан маълум бўладики, 9 нуқтали

(13.2) формула даражаси учдан ортмаган кўпҳадларни аниқ интеграллайди.

Мисол. Симпсон формуласи ёрдамида

$$I=\int_4^5\int_0^1\frac{dxdy}{(x+y)^2}$$

ҳисоблансин. Бу ерда

$$h=\frac{5-4}{2}=0{,}5;\quad k=\frac{1-0}{2}=0{,}5$$

деб оламиз. Интеграл остидаги функция $f(x,\ y)=(x+y)^{-2}$ қийматлари қуйидаги жадвалда келтирилган

y_j \ x_i	4	4,5	5
0	0,0625000	0,0493827	0,0400000
0,5	0,0493827	0,0400000	0,0330688
1	0,0400000	0,0330688	0,1666667

(13.2) кубатур формулани қўллаймиз:

$$I\approx\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{9}\,[0{,}0625000+0{,}0400000+0{,}0400000+0{,}1666667)+$$
$$+4(0{,}0493827+0{,}0493827+0{,}03300688+0{,}03300688)+16\cdot 0{,}0400000]=$$
$$=0{,}044688.$$

Бир ўлчовли ҳолдагидек бу ерда ҳам аниқликни орттириш мақсадида $\Omega=\{a\leqslant x\leqslant b;\ c\leqslant y\leqslant d\}$ тўғри тўртбурчакнинг томонларини мос равишда m ва n бўлакчаларга бўлиб, ҳосил бўлган mn та кичик тўғри тўртбурчакларнинг ҳар бирида Симпсон формуласини ҳосил қилиш мумкин. Фараз қилайлик,

$$h=\frac{b-a}{2m}\ \text{ва}\ k=\frac{d-c}{2n}$$

бўлсин, у ҳолда тугунларнинг тўри қуйидаги координаталарга эга бўлади:

$$x_i=x_0+ih,\ x_0=a,\ i=\overline{0,\ 2m};$$
$$y_j=y_0+jk,\ y_0=c,\ j=\overline{0,\ 2m}.$$

Қулайлик учун $f(x_i\ ,\ y_j)=f_{ij}$ деб олиб, ҳар бир кичик тўғри тўртбурчакка (13.2) формулани қўлласак, у ҳолда

$$\int_a^b\int_c^d f(x,\ y)dxdy\approx\frac{hk}{9}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}[(f_{2i,\ 2j}+f_{2i+2,2j}+f_{2i+2,\ 2j+2}+$$
$$+f_{2i,\ 2j+2})+4(f_{2i+1,\ 2j}+f_{2i+2,\ 2j+1}+f_{2i+1,\ 2j+2}+f_{2i,\ 2j+1})+$$
$$16f_{2i+1,\ 2j+1}]$$

га эга бўламиз ёки ўхшаш ҳадларни ихчамласак,

$$\int_a^b\int_c^d f(x,\ y)dxdy\approx\frac{hk}{9}\sum_{i=0}^{2m}\sum_{j=0}^{2n}\lambda_{ij}f_{ij},$$

бу ерда λ_{ij} қуйидаги матрицанинг элементидир:

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & 2\ldots4 & 2 & 4 & 1\\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8\ldots16 & 8 & 16 & 4\\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4\ldots8 & 4 & 8 & 2\\ . & . & . & . & . \quad . \quad . & . & . & .\\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4\ldots8 & 4 & 8 & 2\\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8\ldots16 & 8 & 16 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2\ldots4 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Биз ички ва ташқи интегралларнинг ҳар иккаласи учун ҳам Симпсон формуласини қўлладик. Ички интегрални бир квадратур формула билан ҳисоблаб, ташқи интегрални эса бошқа формула билан ҳам ҳисоблаш мумкин эди.

Агар Ω соҳа

$$a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$$

тенгсизликлар билан аниқланган бўлса (29- чизма), бу ҳолда ҳам (13.1) интегрални юқоридаги усул билан ҳисоблаш мумкин:

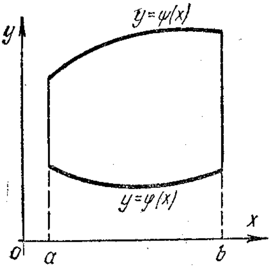
$$\iint\limits_{\Omega} f(x,\ y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)dy = \int\limits_a^b F(x)dx,$$

бу ерда

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)dx.$$

Бирор квадратур формулани қўллаб, $\int\limits_a^b F(x)dx$ ни ҳисоблаймиз:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,\ y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{n} A_i\ F(x_i\ ). \qquad (13.4)$$



29-чизма.

Ўз навбатида

$$F(x_i\ ) = \int\limits_{\psi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i\ ,\ y)dy$$

интегрални бошқа бирор квадратур формула билан ҳисоблаш мумкин:

$$F(x_i\ ) \cong \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i\ y_j\ ).$$

Буни (13.4) га қўйиб қуйидаги

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,\ y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} A_i\ B_{ij} f(x_i\ ,\ y_j\ , \qquad (13.5)$$

кубатур формулани ҳосил қиламиз. Биз қараган (13.4) ва (13.5) формулаларда кўп тугунлар қатнашади. Бу йўл билан борсак интеграл карраси ортган сари тугунлар сони ҳам тез ортиб боради. Агар интеграллаш соҳаси n ўлчовли куб бўлиб, ҳар бир ўзгарувчи бўйича интеграллаш учун m тадан нуқта олинса, у ҳолда тузилган кубатур формуланинг тугунлари сони $N=m^n$ та бўлади. Шунинг учун ҳам, кубатур формулалар назариясида энг юқори аниқликка эга бўлган формулалар тузишга ҳаракат қилинади.

2. Интерполяцион кубатур формулалар. Интеграл остидаги функцияни 2 ўлчовли интерполяцион кўпҳад билан алмаштирамиз.

Агар $L_i\,(x,\ y)$ кўпҳадларни қуйидагича

$$L_i\,(x_j,\ y_j) = \begin{cases} 1, \text{ агар } i=j, \\ 0, \text{ агар } i\neq j, \end{cases} \quad i,\ j=\overline{1,\ N}$$

аниқлаб олсак, у ҳолда

$$L(x,\ y) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i\ ,\ y_i\ ,)\ L_i\,(x,\ y) \qquad (13.6)$$

кўпҳад $(x_j,\ y_j)$ нуқтада $f(x_j.\ y_j)$ қийматни қабул қилади. Интеграл остидаги функцияни (13.6) билан алмаштирамиз:

$$\int\limits_{\Omega}\!\!\int f(x,\ y)dxdy \approx \int\limits_{\Omega}\!\!\int L(x,\ y)dxdy = \sum_{i=1}^{N} A_i\ f(x_i\ ,\ y_i\ ),$$

бу ерда $A_i = \int\limits_{\Omega}\!\!\int L_i\,(x,\ y)dxdy$

бўлиб, уни мураккаб бўлмаган соҳалар учун ҳисоблаш қийин эмас.

Фараз қилайлик, Ω соҳа тўғри тўртбурчак бўлсин: $\{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$. Интеграллаш тўри сифатида

$$x_i = a + ih,\ y_j = c + jk\ (i=\overline{0,\ m};\ j=\overline{0,\ n}),\ h=\frac{b-a}{m},\ k=\frac{d-c}{n}$$

тўғри чизиқларнинг кесишишларидан ҳосил бўлган нуқталар тўпламини оламиз, у ҳолда қуйидаги интерполяцион формулага эга бўламиз:

$$f(x,\ y) \approx \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f(x_i\ ,\ y_j)\ \prod_{\substack{t=0\\ t\neq i}}^{m}\frac{x-x_t}{x_i-x_t}\cdot\prod_{\substack{s=0\\ s\neq j}}^{n}\frac{y-y_s}{y_j-y_s}.$$

Буни тўғри тўртбурчак бўйлаб интегралласак,

$$\int\limits_a^b\!\int\limits_c^d f(x,\ y)\ dxdy \approx \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} A_{ij} f(x_i\ ,\ y_j)$$

ҳосил бўлади, бу ерда

$$A_{ij} = \int\limits_a^b \prod_{\substack{t=0\\ t\neq i}}^{m}\frac{x-x_t}{x_i-x_t}\ dx \int\limits_c^d \prod_{\substack{s=0\\ s\neq j}}^{n}\frac{y-y_s}{y_j-y_s}\ dy$$

ёки $A_{ij} = (b-a)\ (d-c)\, I_{i,\, m+1} \cdot I_{j,\, n+1}$
кўринишда ёзиш мумкин, $I_{i,\, m+1}$ ва $I_{j,\, n+1}$ лар эса Ньютон—Котес формуласининг коэффициентларидир.

14- §. СТАТИСТИҚ СИНОВ МЕТОДИ (МОНТЕ—ҚАРЛО МЕТОДИ)

Шу пайтгача тузилган квадратур (кубатур) формулалар учун функцияларнинг бирор синфида қолдиқ ҳаднинг аниқ баҳоси берилган эди ёки бериш мумкин эди. Масалан, 7- § да $C^1(L)$ синф учун тўғри тўртбурчаклар формуласининг хатоси учун $0{,}25\ L N^{-1}$ баҳони аниқлаган эдик, бу ерда N квадратур формула тугунларининг сони. Бу баҳо қаралаётган синфнинг барча функциялари учун ўринлидир. Айрим синфлар учун бундай баҳо жуда ҳам қўпол бўладики, интегрални етарлича аниқлик билан ҳисоблашнинг имкони бўлмайди. Масалан, n- ўлчовли бирлик кубда аниқланган, узлуксиз ва хусусий ҳосилалари бўлакли - узлуксиз ва $|f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant L$ шартни қаноатлантирадиган $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциялар синфи $C^{1,1,\ldots,1}(L)$ учун $dL N^{-\frac{d}{n}}$ (d — ўзгармас сон) дан яхшироқ баҳони таъминлайдиган баҳо мавжуд эмаслигини Н. С. Бахвалов [2,3,20] кўрсатган эди. 7- § да қаралган синф бу синфнинг $n=1$ бўлган ҳолидир.

Фараз қилайлик, шу синф функциялари учун интегралнинг қийматини $0{,}01\ dL$ дан ортмайдиган аниқлик билан ҳисоблаш керак бўлсин. У ҳолда кубатур формуланинг тугунлари $dL N^{-\frac{1}{n}} \leqslant 0{,}01\, dL$ тенгсизликни қаноатлантириши керак, яъни $N \geqslant 100^n$ бўлиши керак. Одатда кўп ўлчовчи функциянинг ҳар бир қийматини ҳисоблаш кўп меҳнат талаб қилади, шунинг учун ҳам ҳатто $n=6$ бўлганда бундай интегрални ҳисоблаш мумкин бўлмайди.

Бундай ҳолда, қатъий баҳони топишдан воз кечиб, бунинг ўрнига маълум даражада ишонч билан бўлса-да хатони баҳолашнинг бошқа методларини қидириш йўлига ўтиш керак. Бундай метод *статистик синов методи* ёки бошқача айтганда *Монте — Карло методидир.*

Таъриф. Агар X миқдор у ёки бу қийматларни бирор тасодифий ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслиги билан боғлиқ ҳолда қабул қилса, у ҳолда X *тасодифий миқдор* дейилади.

Тасодифий миқдор X тақсимот қонуни

$$P(X < x) = \Phi(x)$$

билан аниқланади, бу ерда x — ихтиёрий ҳақиқий сон ва $\Phi(x)$ — *тақсимот функцияси.* Тасодифий миқдорнинг қийматлари *тасодифий сонлар* дейилади.

Агар тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни аниқ бўлса (текис, нормал ва ҳ. к.), у ҳолда унга мос келадиган тасодифий сонлар шу қонун бўйича тақсимланган дейилади.

Агар тасодифий миқдор X нинг қийматлари $[0,1]$ оралиқда ётса ва қийматларининг ихтиёрий $(\alpha, \beta) \in [0,1]$ оралиқда ётиш эҳтимоллари $\beta - \alpha$ га тенг бўлса, X бу оралиқда *текис тақсимланган* дейилади.

Тасодифий сонларни ҳосил қилиш учун тасодифий физик жараёнлар масалан, ўйин соққасини ташлаш, рулеткани айлантириш, Гейгер счётчигидаги ёниш ва ҳ. к. натижаларидан фойдаланиш мумкин. Ҳозирги пайтда тасодифий сонларнинг тайёр жадваллари ҳам мавжуддир [5].

Фараз қилайлик, бирор усул билан [0,1] оралиқда бир-бирига боғлиқ бўлмаган ва текис тақсимланган тасодифий сонлар кетма-кетлигини ҳосил қилган бўлайлик:

$$\begin{array}{l} \xi_1^{(1)},\ \xi_2^{(1)},\ \ldots,\ \xi_k^{(1)},\ \ldots . \\ \xi_1^{(2)},\ \xi_2^{(2)},\ \ldots,\ \xi_k^{(2)},\ \ldots . \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \xi_1^{(n)},\ \xi_2^{(n)},\ \ldots,\ \xi_k^{(n)},\ \ldots . \end{array}$$

Координаталари шу сонлардан иборат бўлган бирлик кубнинг

$$P_k = (\xi_k^{(1)},\ \xi_k^{(2)},\ \ldots,\ \xi_k^{(n)}) \quad (k = \overline{1, N})$$

нуқталарини N та ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий нуқталар деб қарашимиз мумкин.

Элликинчи йиллардан бошлаб ҳисоблаш математикасида, шу жумладан каррали интегралларни ҳисоблашларда, Монте — Карло методи қўлланила бошланди.

Биз ҳозир шу методнинг икки вариантини қисқача кўриб чиқамиз.

Биринчи вариант. Фараз қилайлик, интеграллаш соҳаси қуйидаги

$$\begin{gathered} 0 \leqslant x_1 < 1 \\ 0 \leqslant \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}) \leqslant x_i < \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}) \\ (i = 2,3, \ldots, n) \end{gathered} \tag{14.1}$$

тенгсизликлар билан аниқлансин ва $f(P) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ функция бу соҳада

$$0 \leqslant f(P) < 1 \tag{14.2}$$

тенгсизликни қаноатлантирсин. Ушбу

$$I = \int_\Omega f(P)\, dP \tag{14.3}$$

каррали интегрални тақрибий ҳисоблаш учун юқорида айтилган N та $P_k = (\xi_k^{(1)},\ \xi_k^{(2)},\ \ldots\ \xi_k^{(n)})$ тасодифий нуқталар тўпламини оламиз. Агар $P_k \in \Omega$ бўлса, $f(P_k)$ ни ҳисоблаймиз, агар $P_k \notin \Omega$ бўлса, $f(P_k) = 0$ деб оламиз. Сўнгра, бу $f(P_k)$ миқдорларнинг ўрта арифметигини аниқлаймиз:

$S_N(f) = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} f(P_k)$ катта сонлар қонунига кўра катта N лар учун катта эҳтимоллик билан $I \simeq S_N(f)$ деб олиш мумкин. Аниқроғи, агар берилган $\alpha (0 < \alpha < 1)$ учун t_α қуйидаги

$$\Phi(t_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1+\alpha}{2} \tag{14.4}$$

тенгликдан (эҳтимолликлар интеграли жадвалидан фойдаланиб) аниқланса ва берилган $\varepsilon > 0$ учун N қуйидаги

$$N \geqslant \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon^2} \int\limits_\Omega [f(p) - I]^2 dp = \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon^2} \left[\int\limits_\Omega f^2(p)\, dp - I^2 \right] = \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon^2} D(f)$$

тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда Чебишев тенгсизлигига кўра

$$|I - S_N(f)| < \varepsilon$$

тенгсизлик α эҳтимоллик билан бажарилади. Агар $t_\alpha = 2$ бўлса, у ҳолда $\alpha = 0{,}997$ ва $t_\alpha = 5$ бўлса, у ҳолда $\alpha = 0{,}99999$ бўлади.

Бу ерда I нинг қиймати олдиндан маълум бўлмагани учун, $D(f)$ нинг қиймати номаълум, шунинг учун ҳам N нинг керакли кичик қийматини топиш мураккаблашади. Шу сабабга кўра практикада қуйидагича иш тутилади.

Ихтиёрий N_0 сонни олиб, $D(f)$ нинг тақрибий қийматини берадиган

$$\delta_{N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N_0} f^2(P_k) - S_{N_0}^2(f)$$

миқдорни ҳисоблаймиз, кейин N_1 ни аниқлаймиз:

$$N_1 = \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon^2} \left(1 + 4 \sqrt{\frac{2}{N_0}} \right) \delta_{N_0}(f).$$

Агар $N_1 > N_0$ бўлса, у ҳолда $[N_1] + 1$ та синов олинади ва

$$\delta_{N_1}(f) = \frac{1}{[N_1]+1} \sum_{k=1}^{[N_1]+1} f^2(P_k) - S_{N_1}^2(f),$$

$$N_2 = \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon^2} \left(1 + 4 \sqrt{\frac{2}{N_1}} \right) \delta_{N_1}(f)$$

миқдорлар ҳисобланади ҳамда N_2, N_1 билан таққосланади ва ҳ.к. Синовнинг керакли сони N_m аниқлангандан кейин бу жараён тўхтатилади.

$S_N(f)$ ва $\delta_N(f)$ ларни ҳисоблашда ЭҲМларнинг хотирасини банд қилмаслик мақсадида қуйидагича иш тутиш мумкин.

Фараз қилайлик, m та синов ўтказилиб,

$$S_m(f) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f(P_k), \quad \delta_m(f) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f^2(P_k) - S_m^2(f)$$

миқдорлар ҳисобланган бўлсин. Навбатдаги $m + 1$ - синов ўтказилгандан кейин $S_{m+1}(f)$ ва $\delta_{m+1}(f)$ лар

$$S_{m+1}(f) = \frac{1}{m+1} [m S_m(f) + f(P_{m+1})],$$

$$\delta_{m+1}(f) = \frac{1}{m+1} [m(\delta_m(f) + S_m^2(f)) + f^2(P_{m+1})] - S_{m+1}^2(f)$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади.

Иккинчи вариант. Бу ерда ҳам аввалгидек N та $Q_k =$

$= (\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(n)})$ ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий нуқталар орасидан

$$0 \leqslant \xi_k^{(1)} < 1$$
$$\varphi_2(\xi_k^{(1)}) \leqslant \xi_k^{(2)} < \psi_2(\xi_k^{(1)}),$$
$$\varphi_3(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}) \leqslant \xi_k^{(3)} < \psi_3(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n(\xi_k^{(1)}, \ldots, \xi_k^{(n-1)}) \leqslant \xi_k^{(n)} < \psi_n(\xi_k^{(1)}, \ldots, \xi_k^{(n-1)}),$$
$$0 \leqslant \xi_k < f(\xi_k^{(1)}, \ldots, \xi_k^{(n)})$$

тенгсизликларни қаноатлантирадиганларнинг сони ν аниқланади. Етарлича катта N лар учун

$$I \approx \frac{\nu}{N}$$

деб олиш мумкин. Аниқроғи, агар берилган α учун t_α (14.4) тенгликдан аниқланса ва синовлар сони N берилган $\varepsilon > 0$ орқали

$$N \geqslant \frac{I(1-I)}{\varepsilon^2} t_\alpha^2 \tag{14.5}$$

тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда α эҳтимоллик билан

$$\left| I - \frac{\nu}{N} \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Агар ЭҲМ $[0, 1]$ да текис тақсимланган тасодифий миқдорларни ҳосил қилувчи программага эга бўлса, у ҳолда бу вариант олдинги вариантга нисбатан анча қулайдир.

Бу ерда (14.5) тенгсизликни қаноатлантирувчи N ни аниқлаш учун аввал ихтиёрий N_0 олиниб, юқоридаги усул билан интегралнинг тақрибий қиймати I_0 ҳисобланади ва

$$N_1 = \frac{I_0(1-I_0)}{\varepsilon^2} t_\alpha^2$$

топилади. Агар $N_1 > N_0$ бўлса, у ҳолда синовлар сони $[N_1] + 1$ га етказилади, I_1 ҳисобланади ва

$$N_2 = \frac{I_1(1-I_1)}{\varepsilon^2} t_\alpha^2$$

топилади. Бу жараён керакли N_k топилгунга қадар давом эттирилади.

Шуни ҳам айтиш керакки, бу метод N та синов нуқта олинганда α эҳтимоллик билан $O(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ хатоликни беради.

15- §. СИНГУЛЯР ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

1. Сингуляр интеграл тушунчаси. Биз 10- § да

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{|x-c|^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

кўринишдаги махсусликка эга бўлган интегралларни ҳисоблаш масаласини кўрган эдик.

Кўп татбиқий масалаларда, жумладан аэродинамикада, шундай интеграллар учрайдики, уларда $\alpha=1$ бўлади. Бундай ҳолда интегрални Коши бўйича бош қиймат маъносида тушуниш керак.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқнинг c нуқтаси атрофида чегараланмаган бўлиб,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(t)dt+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(t)dt\right]$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $[a, b]$ оралиқ бўйича $f(x)$ функциядан олинган хосмас *интегралнинг Коши бўйича бош қиймати* дейилади ва

$$V.\ p.\int_a^b f(x)dx \quad \text{ёки} \quad \int_a^{*b} f(x)dx$$

каби белгиланади. (Бу ерда v. p. „valeur principale“ сўзларнинг бош ҳарфлари бўлиб, французча „бош қиймат“ни билдиради).

Бош қиймат маъносидаги интегралларни кўпинча *махсус* ёки *сингуляр интеграллар* деб аташади.

Мисол. Фараз қилайлик, $f(x)=\frac{1}{x-c}$, $c\in(a, b)$ бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^{c-\varepsilon_1}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon_2}^{b}\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (15.1)$$

Кўриниб турибдики, ε_1 ва ε_2 ихтиёрий равишда нолга интилса, бу йиғиндининг лимити мавжуд бўлмайди, яъни $\int_a^b\frac{dx}{x-c}$ хосмас интеграл мавжуд бўлмайди. Бу ерда $\varepsilon_2=\varepsilon_2=\varepsilon$ деб оламиз. У ҳолда $\varepsilon\to 0$ да (15.1) ифоданинг лимити мавжуд бўлиб, таърифга кўра $\int_a^b\frac{dx}{x-c}$ интегралнинг бош қийматини беради:

$$\text{V. p.}\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}. \qquad (15.2)$$

Таъриф. Агар ихтиёрий $x_1, x_2\in[a, b]$ нуқталар учун

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L\,|x_1-x_2|^{\alpha}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда *Гельдер шартини қаноатлантиради* дейилади, бу ерда L ва α — қандайдир мусбат миқдорлар. Агар $\alpha=1$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ *Липшиц шартини қаноатлантиради* дейилади. Биз доим $0<\alpha\leqslant 1$ деб оламиз. Кўриниб турибдики, $[a, b]$ да Гельдер шартини қаноатлантирадиган функция шу оралиқда узлуксиздир.

Фараз қилайлик, $y\in(a, b)$ ихтиёрий нуқта бўлсин, $\int_a^b\frac{f(x)}{x-y}dx$ интегралда $K(x, y)=\frac{1}{x-y}$ *Коши ядроси* дейилади ва интегралнинг ўзи *Кошининг сингуляр интеграли* дейилади.

1-теорема. Агар $f(x)$ функция $[a, \ b]$ оралиқда Гельдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда Кошининг сингуляр интеграли бош қиймат маъносида мавжуддир.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам,

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-y}\,dx = \int_a^b \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\,dx + f(y)\int_a^b \frac{dx}{x-y}\,. \tag{15.3}$$

Гельдер шартига кўра $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant \dfrac{L}{|x-y|^{1-\alpha}}$ $(\alpha > 0)$, шунинг учун ҳам, (15.3) нинг ўнг томонидаги интеграл хосмас, интеграл сифатида мавжуд ва (15.2) формулага кўра иккинчи интеграл ҳам мавжуддир. Бундан эса $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)dx}{x-y}$ интегралнинг бош қиймат маъносида мавжудлиги келиб чиқади:

$$\int_a^{*b} \frac{f(x)}{x-y}\,dx = \int_a^b \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\,dx + f(y)\ln\frac{b-y}{y-a}\,.$$

Яна сингуляр интегралга мисол сифатида Гильберт алмаштиришларини олишимиз мумкин:

$$\psi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{*\pi} \varphi(x)\mathrm{ctg}\,\frac{x-y}{2}\,dx,$$

$$\varphi(y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{*\pi} \psi(x)\mathrm{ctg}\,\frac{x-y}{2}\,dx,$$

бу ерда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар $[-\pi, \ \pi]$ да Гельдер шартини қаноатлантиради ва шу билан бирга:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)dx = 0.$$

Кўрсатиш мумкинки, $\sin kx$ ва $\cos kx$ барча $k=1, \ 2, \ \ldots$ учун Гильберт алмаштиришлари бўлади [42]:

$$\left.\begin{aligned} \cos ky &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{*\pi} \sin kx\,\mathrm{ctg}\,\frac{x-y}{2}\,dx,\\ \sin ky &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{*\pi} \cos kx\,\mathrm{ctg}\,\frac{x-y}{2}\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

Бу параграфда сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

2. Гильберт ядроли сингуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш. Қулайлик учун Гильберт интегралини алмаштириш ёрдамида қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$If(y) = \int_0^{*1} f(x)\mathrm{ctg}\pi(x-y)dx. \tag{15.5}$$

Одатда Гильберт интегралида $f(x)$ функцияни Гёльдер шартларини қаноатлантиришидан ташқари, уни даврий функция деб қаралади. Биз бу ерда $f(x)$- функциянинг Фурье коэффициентлари

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n x} \qquad (15.6)$$

қуйидаги

$$|C_n| \leqslant \frac{C}{n^{\alpha}} \quad (n \neq 0) \qquad (15.7)$$

шартни қаноатлантиради ва $\alpha > 1$ деб фараз қилиб, (15.5) интеграл учун квадратур формула тузамиз [15, 19].

Бунинг учун $P_N(x)$ тригонометрик кўпҳадни қуйидагича киритамиз:

$$P_N(x) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} \tilde{c}_m e^{2\pi i m x}, \qquad (15.8)$$

$$\tilde{c}_m = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} f\left(\frac{k}{2N}\right) e^{-2\pi i \frac{km}{2N}}. \qquad (15.9)$$

Энди (15.9) ни (15.8) га қўйсак,

$$P_N(x) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} f\left(\frac{k}{2N}\right) \psi_k(x)$$

га эга бўламиз, бу ерда

$$\psi_k(x) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} e^{2\pi i m \left(x - \frac{m}{2N}\right)} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \cos 2\pi m \left(x - \frac{k}{2N}\right).$$

(15.4) формула ёрдамида

$$I\psi_k(y) = -2 \sum_{m=1}^{N-1} \sin 2\pi m \left(y - \frac{k}{2N}\right) = \varphi_k(y)$$

ни ҳосил қиламиз. Энди

$$f(x) = P_N(x) + r_N(x) \qquad (15.10)$$

деб олиб, буни (15.5) интегралга қўйсак,

$$If(y) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} f\left(\frac{k}{2N}\right) \varphi_k(y) + R_N(y) \qquad (15.11)$$

квадратур формулани ҳосил қиламиз.

2- теорема. Агар $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари (15.7) шартни қаноатлантирса ва $\alpha > 1$ бўлса, у ҳолда (15.11) квадратур формуланинг қолдиқ ҳади учун

$$\max_{0 \leqslant y \leqslant 1} |R_N(y)| \leqslant \frac{4C}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{N^{\alpha-1}} \qquad (15.12)$$

баҳо ўринлидир. Бу ерда C ўзгармас сон.

Исбот. Шартга кўра $\alpha > 1$, шунинг учун ҳам (15.7) дан кўрамизки,

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \qquad (15.13)$$

Фурье қатори абсолют яқинлашади. Фараз қилайлик, $R_N(y)$ нинг Фурье ёйилмаси

$$R_N(y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m^* e^{2\pi i m y} \qquad (15.14)$$

бўлсин. (15.4) формулалардан

$$Ie^{2\pi i m y}=i\operatorname{sign} m\cdot e^{2\pi i m y} \qquad (15.15)$$

эканлиги равшан. Энди (15.9), (15.10), (15.13) ва (15.15) дан коэффициентларнинг қуйидагига тенглигини кўрамиз:

$$c_m^*=\begin{cases}(c_m-\tilde{c}_m)i\operatorname{sign} m, & |m|<N \text{ бўлса,}\\ c_m\cdot i\operatorname{sign} m, & |m|\geqslant N \text{ бўлса.}\end{cases} \qquad (15.16)$$

Ушбу бевосита кўриниб турган

$$\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{2N} e^{2\pi i\frac{nk}{2N}}=\begin{cases}1, \text{ агар } n\ 2N \text{ га бўлинса,}\\ 0, \text{ агар } n\ 2N \text{ га бўлинмаса,}\end{cases}$$

тенгликлар ва

$$f(x)e^{-2\pi i m x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i(n+m)x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n+m}\, e^{2\pi i n x}$$

дан фойдаланиб, $\tilde{c}_m$ учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\tilde{c}_m=\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{2N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n+m}\, e^{2\pi i\frac{nk}{2N}}=$$

$$=c_m+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} c_{n+m}\left(\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{2N} e^{2\pi i\frac{nk}{2N}}\right)=c_m+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} c_{2nN+m}\,.$$

Демак,

$$|c_m-\tilde{c}_m|=\left|\sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{\infty} c_{2nN+m}\right|. \qquad (15.17)$$

Энди (15.4), (15.15) ва (15.17) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$|R_N(y)|\leqslant\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_m^*|=\sum_{|m|<N}|c_m-\tilde{c}_m|+\sum_{|m|\geqslant N}|c_m|=$$

$$=\sum_{|m|<N}\left|\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} c_{2nN+m}\right|+\sum_{|m|\geqslant N}|c_m|=4\sum_{m=N}^{\infty}|c_m|-2\sum_{m=1}^{\infty}|c_{(2m+1)N}|.$$

Демак,

$$|R_N(y)|\leqslant 4\sum_{m=N}^{\infty}|c_m|.$$

Бундан ва (15.7) дан теореманинг тасдиғи келиб чиқади.

МАШҚЛАР.

1. Қуйидаги интегралларни трапеция, тўғри тўртбурчак, Симпсон, Гаусс, Чебишев формулалари ёрдамида $\varepsilon=10^{-4}$ аниқликда ҳисобланг:

$$\text{а)} \int_0^1 \sin x^2 dx, \qquad \text{б)} \int_{0,5}^{1,5} \ln(1+x^2)dx, \qquad \text{в)} \int_{0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\text{г)} \int_{0,2}^{1} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x} dx, \qquad \text{д)} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx, \qquad \text{е)} \int_1^2 x\ln x dx.$$

2. Қуйидаги квадратур формулаларни келтириб чиқаринг:

$$\text{а)} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} f(x)dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos \frac{k\pi}{n+1}\right) + R_n,$$

$$R_n = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1;$$

$$\text{б)} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x)dx = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right) + R_n,$$

$$R_n = \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), -1 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

3. Бешинчи даражали кўпҳадни аниқ интеграллайдиган қуйидаги кўринишдаги квадратур формулани қуринг:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0[f(0)+f(1)] + A_1[f'(1)-f'(0)] + Bf(x_1).$$

4. Ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6}\left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

квадратур формуланинг бешинчи даражали кўпҳадни аниқ интеграллашини кўрсатинг.

5. Учинчи даражали кўпҳадни аниқ интеграллайдиган

$$\int_0^1 f(x)dx \approx C_0 f(0) + C_1 f(1) + C_2 f'(0) + C_3 f'(1)$$

кўринишдаги квадратур формулани топинг.

6. Учинчи даражали кўпҳадни аниқ интеграллайдиган

$$\int_{-1}^{1} f(x) \sin \frac{\pi}{2} x dx = C_{-1} f(-1) + C_0 f(0) + C_1 f(1)$$

квадратур формулани топинг.

7. Интеграл остидаги функциянинг махсуслигини сусайтириш йўли билан қуйидаги интегралларни $\varepsilon = 10^{-5}$ аниқлик билан ҳисобланг:

$$\text{а)} \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \qquad \text{б)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \qquad \text{в)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2(1-x)^3}}$$

АДАБИЁТ

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972.

2. Бахвалов Н. С. Численные методы, т. I, М., «Наука», 1973.

3. Бахвалов Н. С. Об оптимальных оценках скорости сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте — Карло на классных функций, Сб. «Численные методы решения дифф. и интегральных уравнений и квадратурные формулы». М., «Наука», 1964 (5—63- бетлар).

4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1., изд. 3-е. М., «Наука», 1966.

5. Бусленко Н. П. и др. Методы статистических испытаний (метод Монте — Карло). М., Физматгиз, 1962.

6. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М., «Мир», 1974.

7. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. М., «Наука», 1966.

8. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей, 3-е исправ. изд. М., «Наука», 1967.

9. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций, 2-е переработанное изд. М., Гостехиздат, 1954.

10. Даугавет И. К. Введение в теорию приближений функций, изд. ЛГУ, Ленинград, 1977.

11. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1970.

12. Ермаков С. М. Метод Монте — Карло и смежные вопросы. 2-е доп. изд. М., «Наука», 1975.

13. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование, М. «Наука», 1982.

14. Исраилов М. И., Джуракулов Р. Построение весовых квадратурных формул для интегралов типа Коши и сингулярных интегралов с помощью эрмитовых сплайнов, Сб. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», 47. Ташкент, «Фан», 1977.

15. Исраилов М. И., Максудов Т. С. Квадратурные и кубатурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Гильберта на классе функций $E_n^\alpha(c)$ Сб. «Вопросы вычисл. и прикл. матем», 28. Ташкент, «Фан», 1974.

16. Калиткин Н. Н. Численные методы. М., «Наука», 1978.

17. Канторович Л. В. О методе Ньютона. Труды матем. ин-та АН СССР, 28, 104—144, 1949.

18. Қобулов В. Қ. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси, «Ўқитувчи», Тошкент, 1976.

19. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, Сб. «Численные методы решения дифф. и интегральных уравнений и квадратурные формулы». М., «Наука», 1964.

20. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., Физматгиз, 1963.

21. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М., «Наука», 1972.

22. Крылов А. И. Лекции о приближенных вычислениях. М., Гостехиздат, 1954.

23. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., «Наука», 1967.

24. Крылов В. И. Бобков В. В., Монастырный П. Н. Вычислительные методы высшей математики, I. Минск. «Вышэйшая школа», 1972.

25. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., «Наука», 1966.

26. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., ИЛ, 1962.

27. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.

28. Милн В. Э. Численный анализ, М., ИЛ, 1951.

29. Лоран П. Ж. Аппроксимация и оптимизация. М., «Мир», 1975.

30. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., «Наука», 1977.

31. Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений. М., Физматгиз, 1962.

32. Никольский С. М. Квадратурные формулы. 2-е изд. М., «Наука», 1972.

33. Положий П. С., Пахарева Н. А., Степаненко И. З., Бондаренко П. С., Великоиваненко И. М. Математический практикум, М., Физматгиз, 1960.

34. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. М., ИЛ, 1963.

35. Ремез Б. Я. Основы численных методов Чебышевского приближения. Киев, «Наукова думка», 1968.

36. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. М., Физматгиз, 1962.

37. Сегё Г. Ортогональные многочлены. ФМ, 1962.

38. Самарский А. А. Введение в численные методы. М., Наука, 1987.

39. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., «Наука», 1974.

40. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М., «Наука», 1976.

41. Суетин С. Б. Классические ортогональные многочлены. М., «Наука», 1976.

42. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., ИЛ, 1960.

43. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., «Наука», 1970.

44. Фаддеев Д. К., Фаддеев В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.

45. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем алгебраических уравнений. М., «Мир», 1969.

46. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., ИЛ, 1951.

47. Хаусхолдер А. С. Основы численного анализа. М., ИЛ, 1956.

48. Хемминг Р. В. Численные методы. М., «Наука», 1972.

49. Черкасова М. П. Сборник задач по численным методам. Минск, «Вышэйшая школа», 1967.

50. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.

51. Wegstein J. H. Accelerating conveergence of iterative processe. Comm. Assoc. Comput. Math. 1, № 6, 1958, 9—14.

АДАБИЕТНИНГ БОБЛАР БЎЙИЧА ТАҚСИМОТИ

I бобга тааллуқли адабиёт:	[2],]4], [11], [21], [22], [34], [47].
II бобга тааллуқли адабиёт:	[2], [4], [11], [16], [17], [21], [22], [26], [31], [33], [34], [36], [51].
III бобга тааллуқли адабиёт:	[2], [4], [7], [11], [16], [21], [24], [27], [30] [34], [42],]44], [45].
IV бобга тааллуқли адабиёт:	[2], [4], [7], [11], [16], [24],
V бобга тааллуқли адабиёт:	[2], [4], [9] ,[11], [16], [21], [24], [27], [31], [34], [36], [50].
VI бобга тааллуқли адабиёт:	[1], [2], [4], [6], [9], [10], [16], [24], [28], [30], [37].
VII бобга тааллуқли адабиёт:	[2], [3], [4], [5], [8], [12], [13], [14], [15], [16], [19], [20], [21], [23], [24], [25], [27], [31], [32], [39], [42], [46], [48].

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

МАРУФ ИСРАИЛОВИЧ ИСРАИЛОВ

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

I часть

Учебное пособие для университетов и ВТУЗов

Ташкент — «Ўқитувчи» — 1988

Редакторлар: *Х. Алимов, Х. Пўлатхўжаев*
Расмлар редактори *С. Соин.*
Тех. редактор *Т. Грешникова*
Корректорлар: *З. Содиқова, М. Маҳмудхўжаева*

ИБ № 3893

Теришга берилди 12. 05. 87. Босишга рухсат этилди 9. 01. 88. Формати $60\times90/_{16}$. Тип. қоғози № 2. Литературная гарн. Кегли 10, 8 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 25,0. Шартли кр.-отт.25,0. Нашр. л. 19,85. Тиражи 6000. Зак. 2105. Баҳоси 1 с.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент — 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09—211—86.

Узбекистон ССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети **Тошкент** «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасига қарашли 1-босмахонаси. Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21. 1988.

Типография № 1 ТППО «Матбуот» Государственного комитета УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ташкент, ул. Хамзы, 21.