O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

O‘RTA MAXSUS, KASB-HUNAR TA’LIMI MARKAZI

Abduxalil Meliqulov, Parda Qurbonov,
Parda Ismoilov

MATEMATIKA

I qism

Kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma

3-nashri

„O‘QITUVCHI“ NASHRIYOT-MATBAA IJODIY UYI
TOSHKENT – 2014

UO‘K: 51 (075)
KBK 22.1 ya 721

Taqrizchilar: **M.Mirsaburov** — fizika-matematika fanlari doktori, professor;

I. Allakov — fizika-matematika fanlari doktori, dotsent.

Ushbu o‘quv qo‘llanma O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tizimidagi akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun matematika fanidan tasdiqlangan o‘quv dasturi asosida yozilgan. Qo‘llanma kasb-hunar kollejlari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, unda nazariy materiallarni mustahkamlashga doir yetarlicha misol va masalalar berilgan. Ularning ko‘pchiligi sanoat va qishloq xo‘jaligi yo‘nalishidagi mutaxassisliklarga mos keladi.

Shuningdek, o‘quv qo‘llanmadan akademik litsey va umumta’lim maktablarining yuqori sinf o‘quvchilari hamda oliy o‘quv yurtlariga kiruvchilar ham foydalanishlari mumkin.

ISBN 978-9943-02-803-6

SO'ZBOSHI

Ushbu o'quv qo'llanma Kadrlar tayyorlash Milliy dasturiga muvofiq uzluksiz ta'lim tizimida o'quv adabiyotlari uchun tasdiqlangan Davlat ta'lim standartlari va matematika fani bo'yicha uzviy bog'langan o'quv dasturi asosida tayyorlangan bo'lib, kasb-hunar kollejlari talabalari uchun mo'ljallangan.

Qo'llanma ikki qismdan iborat bo'lib, uning ushbu birinchi qismi 7 bobdan iborat, har bir bob paragraflarga, paragraflar esa bandlarga bo'lingan. Nazariy materialni mustahkamlash maqsadida har bir bandda yetarlicha misol va masalalar yechimlari bilan keltirilgan. Har bir bob oxirida misol va masalalar javoblari bilan berilgan.

Qo'llanmaning bu qismida dasturda ko'rsatilgan quyidagi boblar to'liq yoritilgan:

— to'plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlari;

— haqiqiy sonlar;

— kompleks sonlar;

— ko'phadlar, ratsional ifodalar, bir noma'lumli tenglama va tengsizliklar, tenglama va tengsizliklar sistemalari;

— matematik induksiya usuli;

— funksiyalar;

— ko'rsatkichli, logarifmik tenglamalar va tengsizliklar.

Mazkur qo'llanmaning „To'plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlari" bobini tayyorlashda Termiz davlat universiteti „Matematik analiz" kafedrasining dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi I.Allakov yaqindan yordam berdi.

Ushbu qo'llanmani tayyorlashda o'zlarining qimmatli maslahat va ko'rsatmalari bilan yordam bergan M.Mirsaburov, I.Allakov va Q.Mengniyozovlarga o'z minnatdorchiligimizni bildiramiz.

Mualliflar

I BOB

TO‘PLAMLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

1- §. To‘plam tushunchasi va uning berilish usullari

To‘plam matematikaning dastlabki ta’riflanmaydigan boshlang‘ich tushunchalaridan biri bo‘lib, uni har xil misollar orqali tushuntirish mumkin. Masalan, sinf xonasidagi o‘quvchilar to‘plami, kutubxonadagi barcha kitoblar to‘plami, to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar to‘plami, natural sonlar to‘plami va hokazo. Demak, to‘plam deganda, predmetlarning aniq belgilari bo‘yicha yoki ular bo‘ysunadigan umumiy bir qonuniyatga asoslanib tuzilgan yig‘ini tushuniladi.

To‘plamni tashkil etuvchi obyektlar (uylar, kitoblar, mamlakatlar, geometrik shakllar, sonlar va hokazo) to‘plamning *elementlari* deyiladi. Yuqoridagi misollarda o‘quvchilar, kitoblar, nuqtalar, natural sonlar to‘plamning elementlari hisoblanadi.

Matematikada to‘plamlar lotin alifbosining bosh harflari — A, B, C, D, ... bilan, to‘plam elementlari esa kichik harflari — a, b, c, d, ... bilan belgilanadi. Agar A to‘plam a, b, c, d, e, f elementlardan tuzilgan bo‘lsa, $A=\{a, b, c, d, e, f\}$ ko‘rinishda va undagi har bir element alohida-alohida yoziladi. Masalan, natural sonlar to‘plami $N=\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ ko‘rinishda yoziladi. A va N to‘plamlarda har bir element alohida-alohida belgilangan. N to‘plamda uni tashkil qiluvchi elementlarning umumiy xossasi ham o‘z aksini topgan. Bu to‘plamda n natural sondan keyin faqat $n+1$ natural son keladi. 1 dan oldin keladigan natural son yo‘q.

Shunday qilib, natural sonlar to‘plamining eng kichik elementi mavjud va u 1 ga teng, eng katta elementi esa mavjud emas.

Umuman, elementlari soni chekli bo‘lgan to‘plamlarni yozishda, ularning elementlari natural sonlar to‘plamiga taqqoslanib sanab ko‘rsatiladi.

Ba’zan to‘plam simvolik ko‘rinishda ham beriladi. Bunday holda, M to‘plamning istalgan elementi x bo‘lsa, x qanday xossaga ega bo‘lishiga qarab, M to‘plamning tabiati aniqlanadi.

Ayrim hollarda elementlari ma’lum bir shartlarni qanoatlantiruvchi to‘plamning berilishini quyidagicha izohlash mumkin: katta qavs ichida oldin elementning belgisi yoziladi, undan keyin vertikal chiziq o‘tkaziladi, so‘ngra to‘plam elementlari qanoatlantiradigan xossa yoziladi. Masalan, 100 dan kichik bo‘lgan natural sonlar to‘plami quyidagicha yoziladi:

$$A = \{x \mid x - \text{natural son}, \ x < 100\}.$$

Keyinchalik quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: $x \in M$ yozuv x element M to‘plamga tegishli ekanligini, $x \overline{\in} M$ (yoki $x \notin M$) yozuv x element M to‘plamga tegishli emasligini bildiradi. Masalan, M toq sonlar to‘plami bo‘lsa, u holda $5 \in M$ bo‘lib, $2 \notin M$ bo‘ladi.

2- §. Bo‘sh to‘plam. To‘plamlarning tengligi. Qism to‘plamlar. O‘zaro bir qiymatli moslik. Universal to‘plam

To‘plamlar bilan ish ko‘rganda har xil to‘plamlar orasida bitta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plamlar uchraydi. Bunga kvadrati ikkiga teng bo‘lgan ratsional sonlar to‘plami va ushbu

$$\begin{cases} 6x + 6y = 25, \\ 3x + 3y = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimlari to‘plami misol bo‘la oladi, chunki kvadrati 2 ga teng bo‘lgan ratsional son mavjud emas, berilgan tenglamalar sistemasining ham yechimi yo‘q. Biror sinfdagi o‘quvchilardan shaxmat o‘ynovchilarning ro‘yxatini tuzish talab qilinsa-yu, lekin bu sinfda shaxmat o‘yinini biladigan o‘quvchilar bo‘lmasa, u holda bunday to‘plamlar *bo‘sh to‘plamlar* deb ataladi. Demak, bo‘sh to‘plam hech qanday elementga ega bo‘lmaydi va u $\varnothing$ ko‘rinishda belgilanadi.

A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. *Agar A to‘plam hech qanday elementga ega bo‘lmasa, u* ***bo‘sh to‘plam*** *deyiladi va $A=\varnothing$ ko‘rinishda yoziladi.*

2-ta’rif. *Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamning ham elementi bo‘lsa, u holda A to‘plam B to‘plamning* ***qism to‘plami*** *deyiladi va $A \subset B$ $(B \supset A)$ ko‘rinishda ($\subset$ — tegishlilik belgisi) yozilib,* ***B to‘plam A to‘plamni o‘z ichiga oladi*** *deb o‘qiladi.*

Masalan, $A=\{2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...\}$ juft musbat butun sonlar, $B=N=\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ natural sonlar to‘plami bo‘lsa, u holda $A \subset B$ bo‘ladi. Qism to‘plam haqidagi ta’rif A to‘plam B to‘plam bilan ustma-ust tushganda ham ma’noga ega bo‘ladi.

3-ta’rif. *A va B to‘plamlar bir xil elementlardan iborat bo‘lsa, ular* ***teng*** *deyiladi va $A=B$ ko‘rinishda yoziladi.*

Bu ta’rifni quyidagicha ham aytish mumkin: agar $A \subset B$ va $A \supset B$ bo‘lsa, A va B to‘plamlar teng deyiladi.

Masalan, $A=\{7, 1, 5, 3, 9\}$ va $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ to‘plamlar tengdir, chunki ular bir xil elementlardan tuzilgan. Shunday qilib, to‘plamda uning elementlarining o‘rinlarini almashtirsak, natijada berilgan to‘plamga teng to‘plam hosil bo‘lar ekan.

Endi biz kelgusida foydalanadigan muhim bir tushunchani keltiramiz.

Faraz qilaylik, A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. *Agar A to'plamning har bir elementiga B to'plamning bitta va faqat bitta elementi va, aksincha, B to'plamning har bir elementiga A to'plamning bitta va faqat bitta elementi mos qo'yilgan bo'lsa, u holda A va B to'plamlar orasida* ***o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan*** *deyiladi.*

Masalan, tomosha zalidagi stullar to'plami bilan tomoshabinlar to'plamini qaraylik. Agar bitta tomoshabinga bitta stul va, aksincha, bitta stulga bitta tomoshabin mos kelsa, ya'ni ortiqcha tomoshabinlar (bo'sh joylar) bo'lmasa, u holda stullar to'plami bilan tomoshabinlar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'ladi.

Keyinchalik, yuqoridagi ta'rifdan foydalanib, haqiqiy sonlar to'plami, to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plami va cheksiz o'nli kasrlar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli mosliklarni o'rnatamiz.

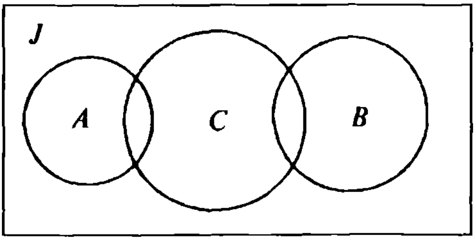
Endi universal to'plam tushunchasini kiritamiz. Aytaylik, A maktabdagi yuqori sinf o'g'il bolalari to'plami, B yuqori sinf qiz bolalari to'plami, C esa shu maktabdagi sportchilar to'plami bo'lsin. Barcha sanalgan to'plamlar maktabdagi hamma o'quvchilar to'plamining qism to'plamidir.

5-ta'rif. *Agar A, B va C to'plamlarning har biri bitta J to'plamning qism to'plamlaridan iborat bo'lsa, u holda J to'plam* ***universal to'plam*** *deyiladi.*

Agar J to'plam maktabning barcha o'quvchilari to'plamidan iborat bo'lsa, u holda $A \subset J, B \subset J, C \subset J$ bo'ladi.

Universal va uning qism to'plamlarini chizmada tasvirlash mumkin. Buning uchun **Eyler — Venn** diagrammasidan foydalanamiz.

Istalgan to'plamni yopiq chiziq bilan chegaralangan nuqtalar to'plami deb qarab, uni grafik ko'rinishda tasvirlash mumkin. To'plamning har bir elementi yopiq chiziqning ichki nuqtalari bilan tasvirlanadi. Rasmda nuqtalarni aniq ko'rsatish shart emas. Izohlanayotgan usulda nuqtalar to'plami biror tekis geometrik shakl bilan tasvirlanadi.



1- rasm.

Yuqorida qaralgan misolimizdagi J universal to'plam (maktab o'quvchilari to'plami)ni to'g'ri to'rtburchak ko'rinishida, uning qism to'plamlari A, B va C ni esa bu to'g'ri to'rtburchakda to'laligicha yotgan turli radiusli doiralar bilan tasvirlashni shartlashsak, u holda qaralgan A, B, C to'plamlar shaklda ko'rsatilganidek grafik tasvirlanadi (1- rasm).

V — IX sinflardan bizga ma'lum bo'lgan ba'zi bir sonli to'plamlarning vakillari quyidagilar:

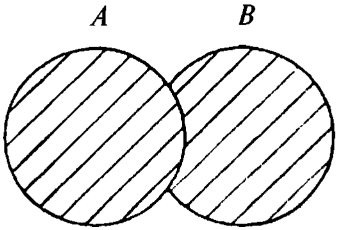
1) natural sonlar to'plami: $N=\{1, 2, 3, ...\}$;
2) juft va toq natural sonlar to'plami:
$G=\{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$; $T=\{1, 3, 5, ..., 2n-1, ...\}$;
3) kengaytirilgan natural sonlar to'plami:
$N_0=\{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$;
4) butun sonlar to'plami:
$Z=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

3- §. To'plamlar ustida amallar

1. To'plamlarning birlashmasi. Berilgan to'plamlardan yangi to'plamlar tuzish usullarini qaraymiz.

1-ta'rif. *A va B ikkita ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin. Agar C to'plam faqatgina A va B to'plamlarning elementlaridan tashkil topgan bo'lsa, bunday to'plam A va B to'plamlarning* ***birlashmasi*** *deyiladi.*

To'plamlar birlashmasi $\cup$ belgi orqali belgilanadi.



2- rasm.

Shuni ham qayd qilib o'tish kerakki, agar biror element A to'plamga ham, B to'plamga ham tegishli bo'lsa, bu element C to'plamda bir marta ishtirok etadi. Masalan, $A=\{2, 4, 6, 7, 8\}$ va $B=\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ to'plamlarning birlashmasi

$$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

to'plamdan iborat bo'ladi. Ikkala to'plam uchun umumiy hisoblangan 6 va 7 elementlar C yig'indi to'plamda bir marta ishtirok etadi.

A va B to'plamlarning birlashmasini Eyler — Venn diagrammasi yordamida tasvirlash mumkin (2- rasm).

Rasmda shtrixlangan soha $A \cup B$ to'plamni ifodalaydi.

To'plamlarning birlashmasini topish qator xossalarga ega.

1. Istalgan A va B to'plam uchun o'rin almashtirish qonuni bajariladi: $A \cup B = B \cup A$ $(A + B = B + A)$.

2. Istalgan A, B va C to'plamlar uchun guruhlash qonuni o'rinli: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. Bu xossa yordamida 3 va undan ortiq to'plamlarning birlashmasini topish mumkin.

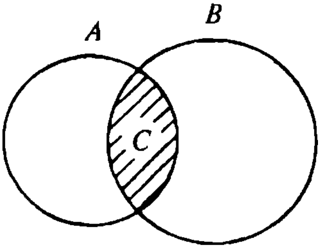
Masalan, $A=\{2, 3, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6\}$ va $C=\{5, 6, 7, 8\}$ bo'lsa, $A \cup (B \cup C) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bo'ladi.

3. Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $A \cup B = B$; xususiy holda $A \cup A = A$ bo'ladi.

4. Istalgan A to'plam uchun $A \cup \varnothing = A$ tenglik o'rinli. To'plamlar birlashmasining bu qonunlarini Eyler —Venn diagrammasi yordamida ko'rsatish mumkun, buni mustaqil bajaring.

2. To'plamlarning kesishmasi.

2-ta'rif. *Ikkita A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tuzilgan C to'plam A va B to'plamlarning*



3- rasm.

kesishmasi *(umumiy qismi) deyiladi va* $C = A \cap B$ *ko'rinishda yoziladi. Bu yerda* $\cap$ *— to'plamlar kesishmasining belgisi.*

Umumiy elementlarga ega bo'lgan A va B to'plamlarning kesishmasi shaklda shtrixlab ko'rsatilgan (3- rasm).

Agarda A va B to'plamlar umumiy elementlarga ega bo'lmasa, u holda ularning kesishmasi bo'sh to'plam bo'ladi, ya'ni $A \cap B = \varnothing$.

Misollar:

1. $A = \{3, 5, 7, 9\}$ va $B = \{1, 3, 8, 9, 10\}$ bo'lsa, $C = A \cap B = \{3, 9\}$ bo'ladi.

2. Agar $A = \{3, 6, 9, 12, ...\}$, $B = \{9, 18, 27, 36, ...\}$ bo'lsa, u holda $A \cap B = \{9, 18, ...\}$.

3. Agar $A = \{2, 3, 5, 6\}$ va $B = \{1, 4, 7, 8\}$ bo'lsa, u holda $A \cap B = \varnothing$ bo'ladi.

To'plamlarning kesishmasi quyidagi xossalarga ega:

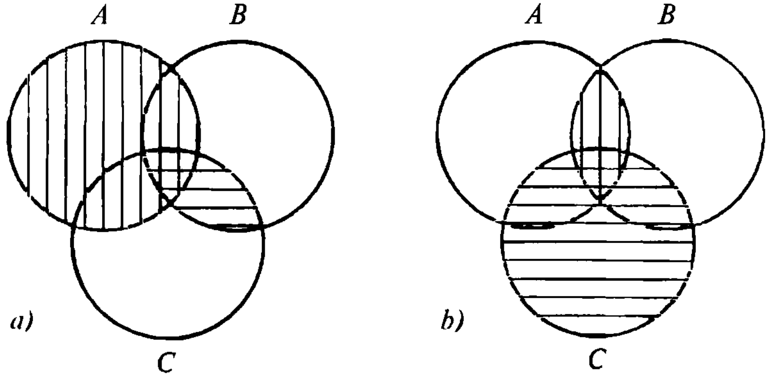
1. Istalgan ikkita A va B to'plam uchun o'rin almashtirish qonuni o'rinli: $A \cap B = B \cap A$.

2. Istalgan A, B va C to'plamlar uchun guruhlash qonuni o'rinli:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \qquad (1)$$

Bu xossani quyidagicha isbotlash mumkin. (1) tenglikning chap qismiga tegishli bo'lgan istalgan elementning uning o'ng qismiga va, aksincha o'ng qismiga tegishli bo'lgan istalgan elementning uning chap qismiga tegishli bo'lishini ko'rsatish kifoya.

x — $A \cap (B \cap C)$ to'plamning istalgan elementi bo'lsa, u holda $x \in A$ va $x \in (B \cap C)$ bo'lib, $x \in B$ va $x \in C$ bo'ladi. Demak, $x \in (A \cap B) \cap C$. Endi y — $(A \cap B) \cap C$ to'plam-



4- rasm.

ning istalgan elementi bo‘lsin. Bunday holda $y \in (A \cap B)$ va $y \in C$ bo‘lib, $y \in A$ va $y \in B$ bo‘ladi. Bundan esa $y \in A \cap (B \cap C)$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bu xossaning o‘rinli ekanligiga Eyler — Venn diagrammasi yordamida ham ishonch hosil qilish mumkin (4- rasm).

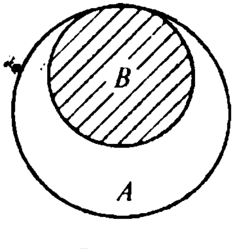
4- rasmda (1) tenglikning chap va o‘ng qismlari tasvirlangan:

a) rasmda A to‘plam vertikal shtrixlangan, $B \cap C$ to‘plam esa gorizontal shtrixlangan. Ikki marta shtrixlangan soha $A \cap (B \cap C)$ to‘plamga mos keladi;

b) rasmda esa $A \cap B$ to‘plam vertikal shtrixlangan, C to‘plam esa gorizontal shtrixlangan. Ikki marta shtrixlangan soha $(A \cap B) \cap C$ to‘plamga mos keladi.

Diagrammalarni taqqoslab, $A \cap (B \cap C)$ va $(A \cap B) \cap C$ to‘plamlar bir xil elementlardan tashkil topganligiga ishonch hosil qilamiz. Demak, bu to‘plamlar bir-biriga teng.

3. Agar $B \subset A$ bo‘lsa, u holda $A \cap B = B$ bo‘ladi. Haqiqatan, agar B to‘plam A to‘plamning qismi bo‘lsa, u holda bu to‘plamlar 5- rasmda ko‘rsatilganidek tasvirlanadi.



5- rasm.

Bir vaqtda A to‘plamga ham, B to‘plamga ham tegishli bo‘lgan element B to‘plamga tegishli bo‘ladi, ya’ni $A \cap B = B$.

4. Istalgan A to‘plam uchun: $A \cap \varnothing = \varnothing$ va $A \cap A = A$. Bu tengliklarning to‘g‘riligi 3- xossadan kelib chiqadi.

5. Istalgan A, B va C to‘plamlar uchun birlashmaga nisbatan to‘plamlarning kesishmasi tarqatish qonuniga bo‘ysunadi:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C). \qquad (2)$$

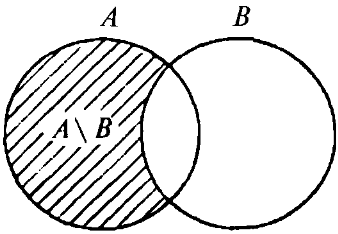
Bu tenglikning o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. $M_1 = (A \cup B) \cap C$, $M_2 = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ belgilash kiritib,

$$\left.\begin{matrix} M_1 \subset M_2 \\ M_2 \subset M_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M_1 = M_2$$

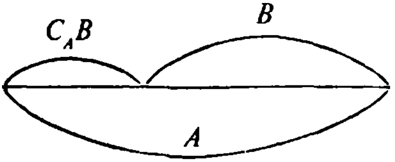
bo‘lishini isbotlaylik.

$x \in M_1$ yoki $x \in (A \cup B) \cap C$ bo‘lsa, u holda $x \in A \cup B$ va $x \in C$ bo‘lishi kelib chiqadi. $x \in A \cup B$ bo‘lishidan esa $x \in A$ yoki $x \in B$ bo‘lishi kelib chiqadi. Agar $x \in A$ bo‘lsa, u holda $x \in A \cap C$ bo‘lib, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, ya’ni $x \in M_2$. Agar $x \in B$ bo‘lsa, u holda $x \in M_2$ bo‘lib, $M_1 \subset M_2$ bo‘ladi.

Endi $x \in M_2$ yoki $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ bo‘lsin. Bunday holda $x \in A \cap C$ yoki $x \in B \cap C$ bo‘ladi. Agar $x \in A \cap C$ bo‘lsa, u holda $x \in A$ va $x \in C$ bo‘ladi. $x \in A$ bo‘lishidan $x \in A \cup B$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun x element $A \cup B$ va C to‘plamlar uchun umumiy element bo‘ladi. Demak, $x \in (A \cup B) \cap C$ yoki $x \in M_1$ bo‘ladi. Agar $x \in B \cap C$ bo‘lsa, u holda $x \in B$ va $x \in C$ bo‘ladi, $x \in B$ bo‘lishidan esa $x \in A \cup B$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $x \in (A \cup B) \cap C$ yoki $x \in M_1$.



6- rasm.



7- rasm.

Shunday qilib, $x \in M_2$ bo‘lsa, u holda $x \in M_1$ bo‘ladi, ya’ni $M_2 \subset M_1$ bo‘ladi. Olingan $M_1 \subset M_2$ va $M_2 \subset M_1$ munosabatlardan $M_1 = M_2$ bo‘lishi kelib chiqadi, (2) tenglik to‘la isbotlanadi.

3. To‘plamlarning ayirmasi.

3-ta’rif. *A to‘plamning B to‘plamga kirmagan barcha elementlaridan tuzilgan C to‘plam A va B to‘plamlarning* ***ayirmasi*** *deyiladi va u $C = A \backslash B$ ko‘rinishda yoziladi* (6-rasm).

Misollar:

1. Agar $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ bo‘lsa, $C = A \backslash B = \{2, 4\}$ bo‘ladi.

2. Agar $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ bo‘lsa, u holda $A \setminus B = \varnothing$ bo‘ladi.

3. Agar $A = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$, $B = \{1, 3, 5, ..., 2n-1, ...\}$ bo‘lsa, u holda $A \backslash B = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ bo‘ladi.

4-ta’rif. *Agar $A \supset B$ bo‘lsa, $A \backslash B$ ayirma B to‘plamning A to‘plamgacha to‘ldirmasi deyiladi va C_AB ko‘rinishda yoziladi* (7- rasm).

Misollar:

1. Agar $A = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, $B = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ bo‘lsa, u holda $C_AB = A \backslash B = \{1, 3, 5, ..., 2n-1, ...\}$ bo‘ladi.

2. Agar $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x \mid 5 \leq x \leq 7\}$ bo‘lsa, u holda $C_AB = \{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$ bo‘ladi.

4- §. Chekli va cheksiz to‘plamlar. To‘plamlarning to‘g‘ri (dekart) ko‘paytmasi

1. Chekli va cheksiz to‘plamlar. To‘plamlar chekli va cheksiz bo‘lishi mumkin. Chekli to‘plamlar chekli sondagi elementlarga ega bo‘ladi. Masalan, $A=\{a, b, c, d\}$ — chekli to‘plam bo‘lib, to‘rtta elementga ega.

Agar to‘plamning elementlari cheksiz ko‘p bo‘lib, uning elementlarini sanab tugata olmasak, bunday to‘plamlar cheksiz to‘plamlar bo‘ladi.

Masalan, $B=\{1, 3, 5, 7, ..., 2n-1, ...\}$ cheksiz to‘plam bo‘lib, elementlari barcha toq sonlardan iboratdir.

2. To‘plamlarning dekart ko‘paytmasi. Kundalik hayotimizda elementlari turli predmetlardan tuzilgan juftlar uchrab turadi. Masalan: o‘ynayotgan o‘yinchilar jufti, arava tortayotgan otlar jufti, oyoq kiyimlari jufti va hokazo.

To‘g‘ri burchakli dekart koordinatalari sistemasida tekislikdagi nuqtaning o‘rni uning *koordinatalari* deb ataluvchi bir juft sonlar bilan to‘liq aniqlanadi. Shuningdek, $\frac{q}{p}$ ko‘rinishdagi kasrni ham q va p sonlarning tartiblashgan $(q; p)$ ko‘rinishdagi jufti deb qarash mumkin. Faraz qilaylik, $x-y=5$ tenglama berilgan bo‘lsin. Bu tenglamaning yechimlari: (6; 1), (7; 2), (9; 4), ... tartiblashgan juftlardan iborat bo‘ladi.

A va B chekli to‘plamlarning elementlaridan ma’lum bir qoidaga ko‘ra tuzilgan juftlar to‘plami A va B to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi deyiladi. Umuman, A va B to‘plamlarning *dekart ko‘paytmasi* deb, $(x; y)$ juftlar to‘plamiga aytiladi, bu juftlarning birinchi elementi A to‘plamdan $(x \in A)$, ikkinchi elementi esa B to‘plamdan $(y \in B)$ olingan bo‘ladi.

A va B to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi $A \times B$, ya’ni $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A, y \in B\}$ ko‘rinishda belgilanadi.

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ va $B=\{a, b, c, d\}$ to‘plamlarning dekart ko‘paytmasini topaylik.

Qoidaga ko'ra, bu to'plamlarning dekart ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$A \times B = \{(1;\ a),\ (1;\ b),\ (1;\ c),\ (1;\ d),\ (2;\ a),\ (2;\ b),\ (2;\ c),\ (2;\ d),\ (3;\ a),\ (3;\ b),\ (3;\ c),\ (3;\ d),\ (4;\ a),\ (4;\ b),\ (4;\ c),\ (4;\ d),\ (5;\ a),\ (5;\ b),\ (5;\ c),\ (5;\ d)\}$.

Topilgan dekart ko'paytmalarini jadval ko'rinishida yozish juda qulay:

A \ B	a	b	c	d
1	(1; *a*)	(1; *b*)	(1; *c*)	(1; *d*)
2	(2; *a*)	(2; *b*)	(2; *c*)	(2; *d*)
3	(3; *a*)	(3; *b*)	(3; *c*)	(3; *d*)
4	(4; *a*)	(4; *b*)	(4; *c*)	(4; *d*)
5	(5; *a*)	(5; *b*)	(5; *c*)	(5; *d*)

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, $A \times B$ to'plamning har bir elementi satrlar va ustunlarning kesishgan joyida joylashgan bo'ladi. $A \times B$ to'plamning elementlari soni satrlar soni bilan ustunlar soni ko'paytmasiga teng bo'ladi $(5 \times 4 = 20)$.

5- §. Matematik mantiq elementlari

1. Mulohazalar. Asosiy mantiqiy bog'lanishlarning ta'riflari. Biz xat, insho yozayotganimizda, yig'ilishlarda so'zlayotganimizda o'z mulohazalarimizni so'zlar yordamida izohlaymiz. Mulohazalarimiz gaplar to'plami bilan izohlanadi va uzatiladi.

1. Toshkent — O'zbekiston Respublikasining poytaxti.
2. Amudaryo Orol dengiziga quyiladi.
3. Barcha odamlar mashinalarga ega.
4. Natural sonlar to'plami chekli.
5. Qushlar — bolalar do'sti.
6. Bo'sh to'plam elementga ega.

Bu barcha gaplar mazmun bo‘yicha har xil. Lekin ularda bir umumiylik bor. Bu umumiylik gaplarning barchasi chin (to‘g‘ri) yoki yolg‘on (noto‘g‘ri), yoki ba’zilari chin, ba’zilari yolg‘on bo‘lishi mumkin. Masalan: keltirilgan gaplardan 1, 2 va 5 — chin, 3, 4, 6 gaplar yolg‘on.

Mulohaza deganda, odatda, uning chinligi yoki yolg‘onligi haqida ayni vaqtda gapirish mumkin bo‘lgan da’vo tushuniladi. Mulohaza chin yoki yolg‘on bo‘ladi. U bir vaqtda ham chin, ham yolg‘on bo‘la olmaydi.

Mulohazalar algebrasida fikrning aniq ma’nosiga e’tibor berilmaydi, balki chinmi yoki yolg‘onmi degan savollar qiziqtiradi. Mulohazaning chinligi yoki yolg‘onligi uning chinlik qiymatini bildiradi. Biz ko‘pincha chinlikni *r* harfi, yolg‘onni esa *e* harfi bilan belgilaymiz. Shuning uchun mulohazalarga ikkita qiymatni, ya’ni chin va yolg‘on qiymatlarni qabul qiladigan miqdor sifatida qarash mumkin. Mulohazalarni belgilash uchun *A*, *B*, *C*, *D*, *X*, *Y*, *Z*, ... hafrlardan foydalanamiz. Ixtiyoriy mulohazani belgilash uchun ishlatiladigan harfni o‘zgaruvchi deb aytamiz.

Mulohazalar sodda va murakkab bo‘ladi. Agar mulohazani boshqa mulohazalarga tarqatish imkoniyati bo‘lmasa, bunday mulohaza *sodda mulohaza* deyiladi. Agar mulohazani boshqa sodda mulohazalarga tarqatish imkoniyati bo‘lsa, bunday mulohaza *murakkab mulohaza* deyiladi.

Sodda mulohazalardan foydalanib, murakkab mulohazalar tuzishda „va“, „yoki“, „emas“, „agar..., u holda...“ va hokazo so‘zlardan foydalanamiz. Bu so‘zlar har xil mulohazalarni o‘zaro bog‘lab, yangi murakkab mulohazalar tizishga imkon beradi. Masalan, „5 soni 15 ning bo‘luvchisi“ va „5 — tub son“ degan mulohazalar berilgan bo‘lsa, biz „5 tub son va 15 ning bo‘luvchisi“ degan yangi murakkab mulohazani tuzishimiz mumkin. „Berilgan to‘rtburchak romb yoki kvadrat“ degan mulohazani „yoki“ bog‘lovchisi yordamida „berilgan to‘rtburchak —romb“ yoki

„berilgan to‘rtburchak — kvadrat“ degan sodda mulohazalarga yoyish mumkin. Matematikada biz mulohazalarni bog‘lash uchun >, ≥, <, ≤, =, ≠ maxsus belgilardan foydalanamiz. Masalan: „3,14 soni 2,72 sonidan katta“ degan mulohazaning qisqa yozuvi $3,14 > 2,72$ bo‘ladi.

Mulohazalar nazariyasida sodda mulohazaning chin yoki yolg‘onligiga bog‘liq ravishda murakkab mulohazalarning chin yoki yolg‘on ekanligini aniqlash masalasi o‘rganiladi.

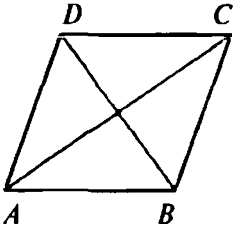
Endi berilgan mulohazalardan yangi mulohazalar hosil qilish usullarini qaraymiz.

2. Mulohazalarning inkori (⌉ — inkor belgisi). Berilgan har bir *A* mulohazadan uni inkor etish bilan, ya’ni *A* mulohaza rost emas, bajarilmaydi deb yangi mulohazani hosil qilamiz. Mulohazalarga *r* yoki *e* qiymatlar qabul qiladigan miqdorlar deb qarab, ular ustida funksional chinlik amallar kiritishimiz mumkin. Inkor amali mulohazalar ustidagi eng sodda amallardan biri hisoblanadi. So‘zlashuv tilida u yoki bu mulohazaning inkorini ko‘p usullarda ifodalash mumkin bo‘lsa-da, biz uni bir usul bilan — berilgan mulohaza oldiga ⌉ inkor belgisini qo‘yish bilan belgilaymiz. Demak, *A* mulohaza bo‘lsa, ⌉*A* ham mulohaza. Bu mulohazaning chin yoki yolg‘on bo‘lishi *A* mulohazaning chin yoki yolg‘on bo‘lishiga bog‘liq bo‘ladi. Inkor amalining chinlik xususiyati uning chinlik jadvalidan to‘la tushunarli bo‘ladi:

A	⌉*A*
r	*e*
e	*r*

A chin bo‘lganda ⌉*A* yolg‘on va *A* yolg‘on bo‘lganda ⌉*A* chin bo‘ladi. Masalan, „6 soni 3 soniga bo‘linadi“ degan *A* mulohazaning ⌉*A* inkori „6 soni 3 soniga bo‘linmaydi“ mulohazadan iborat bo‘ladi. *A* mulohaza chin, ⌉*A* mulohaza esa yolg‘on. *A* sifatida qandaydir yolg‘on mulohazani olsak, masalan, „4 soni 3 soniga bo‘linadi“ degan mulohazani olsak, uning inkori ⌉*A* „4 soni 3 soniga bo‘linmaydi“ degan chin mulohazadan iborat bo‘ladi.

A	B	$A \wedge B$
r	*r*	*r*
r	*e*	*e*
e	*r*	*e*
e	*e*	*e*



8- rasm.

3. Konyunksiya. Konyunksiya lotincha „conjunctio“ so‘zidan olingan bo‘lib, bog‘layapman degan ma’noni bildiradi ($\wedge$ — konyunksiya belgisi).

A va B mulohazalarning konyunksiyasi $A \wedge B$ orqali belgilanib, u quyidagi chinlik jadvaliga ega:

A va B mulohazalarning ikkalasi ham chin bo‘lgandagina va faqat shu holdagina $A \wedge B$ mulohaza chin bo‘ladi. Agar mulohazalardan birortasi yolg‘on bo‘lsa, u holda konyunksiya ham yolg‘on bo‘ladi. Konyunksiya amali inkor amalidan farq qilib, inkor bitta sodda mulohazaga bog‘liq bo‘lsa, konyunksiya kamida ikkita sodda mulohazaga bog‘liq bo‘ladi. 8- rasmda *ABCD* parallelogramm tasvirlangan. Bizga parallelogramm haqida quyidagi ikkita mulohaza ma’lum bo‘lsin.

1. *AD* tomon *BC* tomonga parallel va unga teng.
2. *ABCD* parallelogrammning diagonallari bir nuqtada kesishadi va ular shu nuqtada teng ikkiga bo‘linadi.

Bu murakkab mulohaza „va“ bog‘lovchisi yordamida ikkita sodda mulohazani birlashtirishdan hosil qilingan. Agar birinchi mulohazani A, ikkinchi mulohazani B orqali belgilasak, u holda berilgan mulohazalar (gaplar) qisqacha „A va B“ ko‘rinishda yoziladi, ya’ni har xil mazmunga ega bo‘lgan gaplar mantiqan bitta shaklga ega bo‘ladi.

Misollar:

1. „Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari parallel“, „Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari teng“ degan sodda mulohazalardan „Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari parallel va teng“ degan murakkab mulohazani olamiz. Ikkala mulohaza ham chin, shuning uchun ularning konyunksiyasi ham chin.

2. „$7 < 5$ va 7 — juft son“ degan mulohaza yolg‘on, chunki konyunksiyaga kiruvchi ikkala mulohaza ham yolg‘on.

3. Matematikada ikki mulohazaning konyunksiyasi qo‘sh tengsizlik bilan beriladi. Haqiqatan $3 < 6 < 11$ tengsizlik $3 < 6$ va $6 < 11$ ikkita mulohazaning konyunksiyasi, ya’ni $3 < 6 < 11$ tengsizlikni $3 < 6$ va $6 < 11$ ko‘rinishda yozish mumkin. Berilgan tengsizlik chin, chunki bu tengsizlikni tashkil etgan tengsizliklarning har biri chin.

Kiritilgan inkor va konyunksiya amallaridan foydalanib, elementar mulohazalardan $\rceil A$, $\rceil B$, $A \wedge B$ mulohazalar tuzish bilan bir qatorda, murakkabroq mulohazalar ham tuzish mumkin. Masalan: $\rceil A \wedge B$, $\rceil (A \wedge B)$, $A \wedge \rceil B$.

4. Dizyunksiya. Dizyunksiya lotincha *„disjunctio“* so‘zidan olingan bo‘lib, farqlayapman degan ma’noni bildiradi. A, B mulohazalarning dizyunksiyasi $A \vee B$ ko‘rinishda ($\vee$ — dizyunksiya belgisi) belgilanib, „A yoki B“ deb o‘qiladi. Bu amal quyidagi chinlik jadvaliga ega:

A	B	$A \vee B$
r	*r*	*r*
r	*e*	*r*
e	*r*	*r*
e	*e*	*e*

Agar A va B — mulohazalar bo‘lsa, u holda $A \vee B$ ham mulohaza bo‘ladi. A va B mulohazalarning ikkalasi ham yolg‘on bo‘lgandagina $A \vee B$ mulohaza yolg‘on bo‘ladi, qolgan hollarning barchasida dizyunksiya chin bo‘ladi. Shunday qilib, „$A \vee B$“ mulohaza A va B mulohazalarning *dizyunksiyasi* deyiladi.

Misollar:

1. „Yozda biz tog‘ga chiqamiz yoki dengizga boramiz“ dizyunksiyani qaraymiz. Bu mulohaza quyidagi hollarda chin bo‘ladi: biz tog‘ga chiqamiz, ammo dengizga bormaymiz; dengizga boramiz, lekin tog‘ga chiqmaymiz; biz tog‘ga ham chiqamiz, dengizga ham boramiz. Yangi mulohaza yolg‘on bo‘ladi: biz tog‘ga ham chiqmaymiz, dengizga ham bormaymiz.

2. $10 \geq 7$ mulohazaning chin yoki yolg‘on ekanligini aniqlaylik. $10 \geq 7$ yozuv „10 katta yoki teng 7 dan“. $10 \geq 7$ mulohaza dizyunksiya bo‘ladi. Bu dizyunksiya chin, chunki u $10 > 7$ chin mulohaza va $10 = 7$ yolg‘on mulohazadan tashkil topgan. Shuningdek, $10 \leq 10$ mulohaza ham chin, chunki bu mulohaza $10 = 10$ chin va $10 < 10$ yolg‘on mulohazalardan tuzilgan.

3. $11 \geq 12$ mulohaza yolg‘on, chunki bu mulohaza „$11 > 12$“ va „$11 = 12$“ yolg‘on mulohazalarning dizyunksiyasidan iborat.

Inkor, konyunksiya va dizyunksiya amallaridan foydalanib, *A*, *B*, *C*, ... mulohazalardan har xil murakkab mulohazalar tuzish mumkin.

Masalan: $A \vee B$, $(A \vee \urcorner B) \wedge C$, $(A \wedge B) \vee (\urcorner A \wedge \urcorner B)$.

5. Implikatsiya. Mantiqning yana bir amali implikatsiyadir. Implikatsiya lotincha „*implicatio*“ so‘zidan olingan bo‘lib, „mahkam bog‘layapman“ degan ma’noni bildiradi.

„Agar ... bo‘lsa, u holda ...“, „agar ... bo‘lsa, ... bo‘ladi“ so‘zlari yordamida elementar mulohazalardan murakkab mulohazalar tuzish mumkin. Masalan: „Agar o‘quvchi imtihondan ijobiy baho olgan bo‘lsa, u holda u bu imtihonni topshirgan bo‘ladi“, „Agar biror son 9 ga bo‘linsa, u holda bu son 3 ga ham bo‘linadi“. Agar elementar mulohazalarni *A* va *B* orqali belgilasak, bu elementar mulohazalardan tuzilgan murakkab mulohazalar mantiqiy bir umumiy shaklga ega bo‘ladi: „agar *A* bo‘lsa, u holda *B* bo‘ladi“. *A* mulohazaning *B* mulohazaga implikatsiyasi $A \Rightarrow B$ orqali belgilanib, uning qiymatlari quyidagi jadval bilan aniqlanadi:

A	B	$A \Rightarrow B$
r	*r*	*r*
r	*e*	*e*
e	*r*	*r*
e	*e*	*r*

Faqat *A* chin, *B* yolg‘on bo‘lganida $A \Rightarrow B$ mulohaza yolg‘on bo‘ladi, qolgan hollarning barchasida esa chin bo‘ladi. Agar *A* va *B* ma’nosi bo‘yicha bog‘liq bo‘lsa, u holda implikatsiya „Agar *A* bo‘lsa, u holda *B* bo‘ladi“

shakldagi shartli mulohazalarni hosil qilishga imkon beriladigan, „agar ... bo‘lsa, u holda ...bo‘ladi“ kabi so‘z birikmalariga mos keladi. Keltirilgan shartli mulohazalardan A asos (shart), B esa xulosa deyiladi. Implikatsiya xulosa chiqarishda muhim ahamiyatga ega. Implikatsiya yordamida matematikada teoremalar shakllantiriladi.

„Agar 72 soni 9 ga karrali bo‘lsa, u holda bu son 3 ga ham karrali bo‘ladi“ implikatsiyasini qaraylik.

A mulohaza: „agar 72 soni 9 ga karrali bo‘lsa“ implikatsiyaning sharti;

B mulohaza: „72 soni 3 ga ham karrali bo‘ladi“ implikatsiyaning xulosasi.

Bu implikatsiyada berilgan A shart ham, shuningdek, B xulosa ham chin, u holda berilgan implikatsiya chin bo‘ladi.

„Agar $-3 < -1$ bo‘lsa, u holda $9 < 8$ bo‘ladi“, implikatsiyasi yolg‘on, chunki bu mulohazaning $-3 < -1$ sharti chin, uning $9 < 8$ xulosasi yolg‘on.

6. Ekvivalensiya. Ikkita A va B mulohazalarning $A \Rightarrow B$ implikatsiyasiga ega bo‘laylik. Bu implikatsiyada uning shartini xulosasiga almashtirib, $B \Rightarrow A$ implikatsiyani olamiz. Bu implikatsiya berilgan $A \Rightarrow B$ implikatsiyaga teskari implikatsiya deyiladi. Masalan: „Agar natural son raqamlarining yig‘indisi 3 ga bo‘linsa, u holda bu sonning o‘zi ham 3 ga bo‘linadi“ implikatsiyasi berilgan bo‘lsa, u holda berilgan implikatsiyaga teskari implikatsiya „agar natural son 3 ga bo‘linsa, bu son raqamlarining yig‘indisi ham 3 ga bo‘linadi“ bo‘ladi. A va B mulohazalarning ekvivalensiyasi deb $A \Leftrightarrow B$ shaklda belgilanib, qiymatlari quyidagi jadvaldagidek aniqlanadigan mulohazaga aytiladi ($\Leftrightarrow$ — ekvivalensiya belgisi):

A	B	$A \Leftrightarrow B$
r	r	r
r	e	e
e	r	e
e	e	r

A va B mulohazalar bir xil qiymatlar qabul qilganda va faqat shu holdagina $A \Leftrightarrow B$ mulohaza chin qiymat qabul qiladi. Agar A va B mulohazalar ma’nosi bo‘yicha bog‘liq bo'lsa, u holda ekvivalensiya „... bo'lsa va faqat shu holda ... bo'ladi" degan mantiqiy bog'lanishlarga mos keladi. Shunday qilib, $A \Rightarrow B$ va $B \Rightarrow A$ o'zaro teskari ikkita implikatsiyadan konyunksiya tuziladi, ya'ni $A \Rightarrow B$ va $B \Rightarrow A$ ko'rinishdagi mulohaza A va B *mulohazalarning ekvivalensiyasi* deyiladi. A va B mulohazalarning ikkalasi ham chin yoki ikkalasi ham yolg'on bo'lganda, faqat va faqat shunday bo'lgandagina ekvivalensiya chin bo'ladi.

Masalan, agar A mulohaza: „972 soni 9 ga karrali", B mulohaza esa „972 soni raqamlarining yig'indisi 9 ga karrali" degan gaplardan iborat bo'lsa, u holda A va B mulohazalarning ekvivalensiyasi quyidagicha bo'ladi: „972 soni 9 ga karrali bo'ladi, faqat va faqat shu holda, qachonki, bu son raqamlarining yig'indisi 9 ga karrali bo'lsa", bu ekvivalensiya chin, chunki bu ekvivalensiyani tashkil qilgan ikkala mulohaza ham chin.

Kiritilgan beshta $\rceil$, $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ bog'lanishlar bilan chegaralanamiz. Bu bog'lanishlar yordamida ikki va undan ortiq elementar mulohazalardan murakkab mulohazalar tuzish mumkin. Yuqorida o'rganilgan bog'lanishlar bilan aniqlangan amallar *mantiq amallari* deyiladi. Bu amallarning jadvallaridan ko'rinadiki, A va B — mulohazalar bo'lsa, u holda $\rceil A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ va $A \Leftrightarrow B$ ham mulohazalar bo'ladi.

Shunday qilib, har bir tashkil etuvchisi mulohaza bo'lgan murakkab gapning o'zi ham mulohaza bo'lar ekan. Har bir tashkil etuvchisining chinlik qiymati ma'lum bo'lganda, murakkab mulohazaning chinlik qiymati jadvallar yordamida aniqlanadi. Masalan: murakkab mulohazaning simvolik yozilishi $(A \vee B) \Rightarrow (C \Rightarrow \rceil D)$ ko'rinishda berilgan bo'lsin hamda A, B, C va D mulohazalarning chinlik qiymatlari mos ravishda r, e, e va r bo'lsin. U holda $A \vee B$ mulohazaning qiymati r, $\rceil D$ ning qiymati e, $C \Rightarrow \rceil D$ ning qiymati r va, demak, berilgan mulohazaning chinlik qiymati r bo'ladi, chunki implikatsiyaning sharti va xulosasi chin.

Mulohazalar algebrasida mulohaza deb hisoblanadigan gaplar orasidagi mantiqiy bog'lanishlar tahlil qilinadi.

6- §. Predikatlar va kvantorlar

1. Predikat tushunchasi. Biz yuqorida mulohazalar algebrasi elementlari bilan tanishib chiqdik. Ko'pchilik hayotiy masalalarni tahlil qilib o'rganishda mulohazalar algebrasi apparatining o'zigina yetarli bo'lmas ekan. Masalan, faqat mulohazalar algebrasi elementlari yordamida berilgan to'plamdagi obyektlarning xossalari va ular orasidagi munosabatlarni o'rganib bo'lmaydi.

Shuning uchun ham mulohazalar algebrasining bevosita kengaytmasidan iborat bo'lgan predikatlar algebrasi qaraladi. Biz, avvalo, „Predikatning o'zi nima?" degan savolga javob beramiz.

Ushbu butun sonlar to'plami Z dagi

$$\text{„}x-\text{juft son“} \qquad (1)$$

degan darak gapni qaraylik. Bu gap mulohaza bo'la olmaydi, chunki uning chin yoki yolg'on ekanligini ayni vaqtning o'zida bir qiymatli aytib berib bo'lmaydi. Lekin, agar x ning o'rniga qaralayotgan to'plamdan tayin bir elementni, masalan, $x=5$ ni qo'ysak, u „5 — juft son" degan yolg'on mulohazaga aylanadi. Shuningdek, shahrimizdagi yoshlar to'plamida

$$\text{„}x-\text{talaba“} \qquad (2)$$

degan gapni qarasak, u ham mulohaza bo'lmasdan, balki o'zgaruvchi x ning o'rniga qaralayotgan to'plamdan aniq bir obyektni qo'ysakkina, chin yoki yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohazaga aylanadi. Masalan, „Salima —talaba".

Endi natural sonlar to'plami N dagi

$$\text{„}x \text{ katta } y \text{ dan“}, \qquad (3)$$

ya'ni „$x > y$" gapni qaraylik. Bu ham mulohaza bo'la olmaydi, lekin x va y o'zgaruvchilar o'rniga N to'plamdan aniq sonlarni keltirib qo'ysak, mulohazaga aylanadi.

Masalan, $x=2$, $y=5$ deb olsak, „$2>5$“ yolg‘on mulohaza, agarda $x=15$, $y=12$ deb olsak, „$15>12$“ chin mulohaza hosil bo‘ladi.

(1) va (2) misollar berilgan to‘plamdagi x obyektning xossasini ifodalasa, (3) misol esa x va y obyektlar orasidagi munosabatni ifodalaydi.

(1), (2), (3) singari darak gaplar umumiy mulohazalar yoki *predikatlar* (mantiqiy funksiyalar) deyiladi. Umuman, „predikat“ tushunchasiga quyidagicha ta’rif berish mumkin.

1-ta’rif. *Tarkibida o‘zgaruvchilar qatnashib, bu o‘zgaruvchilarning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarida mulohazaga aylanadigan darak gap* ***predikat*** *deyiladi.*

Predikatlar unda qatnashuvchi o‘zgaruvchilar soniga qarab, 1 joyli, 2 joyli, ..., n joyli bo‘lishi mumkin. Umumiylik uchun 0 joyli predikat ham qaraladi va 0 joyli predikat degan mulohaza tushuniladi.

Shunday qilib, 1 joyli predikat x obyektning xossasini, n $(n>1)$ joyli predikat esa $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchi obyektlar orasidagi munosabatlarni ifodalar ekan.

Bundan keyin x obyektning P xossaga ega bo‘lishini $P(x)$; x va y obyektlarning R munosabatda bo‘lishini $R(x;\ y)$ ko‘rinishda belgilaymiz. Bularga mos ravishda bir joyli predikatlarni $P(x)$, $R(y)$, $S(z)$, ..., ikki joyli predikatlarni $P(x;\ y)$, $R(x;\ y)$, $S(x;\ y)$, ..., ..., n joyli predikatlarni $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, $R(x_1, x_2, ..., x_n)$, $S(x_1, x_2, ..., x_n)$, ... ko‘rinishlarda belgilaymiz.

Endi A to‘plamdagi $P(x)$ predikat berilgan bo‘lsin va $E=\{e;\ r\}$ esa faqat 2 ta e va r elementlardan tuzilgan to‘plam bo‘lsin. U holda $P(x)$ predikat A to‘plamni E to‘plamga o‘tkazadi (akslantiradi), bu esa $P(x)\colon\ A \Rightarrow E$ ko‘rinishda belgilanadi. Bu yerda A to‘plam $P(x)$ predikatning *aniqlanish sohasi*, E esa *qiymatlari to‘plami* deyiladi.

1- misol. $A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to‘plamdagi $P(x) \equiv$ „x — tub son“ degan predikatni olsak, u holda x ning joyiga A dagi elementlarni ketma-ket qo‘yib,

$P(2) \equiv$ „2 tub son“ — r,
$P(3) \equiv$ „3 tub son“ — r,
$P(4) \equiv$ „4 tub son“ — e,
$P(5) \equiv$ „5 tub son“ — r,
$P(6) \equiv$ „6 tub son“ — e,
$P(7) \equiv$ „7 tub son“ — r,
$P(8) \equiv$ „8 tub son“ — e,
$P(9) \equiv$ „9 tub son“ — e

mulohazalarni hosil qilamiz. Bundan ko'rinadiki, A to‘plamdagi 2, 3, 5, 7 sonlarini $P(x)$ predikat E dagi r elementga, 4, 6, 8, 9 sonlarini esa e elementga o‘tkazadi.

Buni quyidagi chinlik jadvali ko‘rinishida ham yozish mumkin.

Bu jadvalning birinchi satri A to‘plamning elementlaridan, ikkinchi satri esa E to‘plamning elementlaridan iborat:

x	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(x)$	r	r	e	r	e	r	e	e

Agar A to‘plamda ikki joyli $P(x; y)$ predikat berilgan bo‘lsa, bu predikat $A^2 = A \times A$ („To‘plamlarning dekart ko'paytmasi“ mavzusiga qarang) to‘plamni E ga o‘tkazadi, ya’ni

$$P(x; y): \ A^2 \Rightarrow E.$$

Umuman, agar A to‘plamda n joyli $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ predikat berilgan bo‘lsa, u

$$A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n \text{ ta}}$$

to‘plamni E ga akslantiradi, ya’ni $P(x_1, x_2, ..., x_n)$: $A^n \Rightarrow E$.

2 - misol. $A = N$ natural sonlar to‘plamidagi $P(x; y) \equiv$ „$x > y$“ ikki joyli predikat uchun chinlik jadvalini tuzaylik:

x \ y	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	e	e	e	e	e	e	e	e	...
2	r	e	e	e	e	e	e	e	...
3	r	r	e	e	e	e	e	e	...
4	r	r	r	e	e	e	e	e	...
5	r	r	r	r	e	e	e	e	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Jadvaldan ko‘rinadiki, haqiqatan ham, qaralayotgan $P(x; y)$ predikat $N^2 = N \times N$ to‘plamni E to‘plamga akslantiradi: $P(x; y)$: $N^2 \Rightarrow E$.

A to‘plamda $P(x)$ predikat berilgan bo‘lsin. x ning $P(x)$ predikat chin qiymat qabul qiluvchi qiymatlari to‘plami A_1 ga $P(x)$ predikatning *chinlik to‘plami* deyiladi. Tushunarliki, $a \in A_1$ uchun $P(a) = r$ va $b \in A_2 = A \setminus A_1$ uchun esa $P(b) = e$ hamda $A = A_1 \cup A_2$, $A_2 = C_A A_1$ bo‘ladi.

2. Aynan chin, aynan yolg‘on va bajariluvchi predikatlar.

2-ta’rif. *Tarkibiga kiruvchi obyektlarning A to‘plamdagi barcha qiymatlarida chin bo‘lgan predikat A to‘plamdagi* ***aynan chin predikat*** *deyiladi.*

Masalan, natural sonlar to‘plami N dagi ikki joyli $P(x; y) \equiv$ „$x + y = y + x$“ predikat aynan chin predikat bo‘ladi, chunki uning chinlik jadvali quyidagi ko‘rinishda bo‘lib, $P(x; y)$ predikat x va y ning N to‘plamdagi barcha qiymatlarida chin qiymat qabul qiladi:

x \ y	1	2	3	4	5	...
1	r	r	r	r	r	...
2	r	r	r	r	r	...
3	r	r	r	r	r	...
...	...	...	...	...	...	...

3-ta'rif. *Obyektlarning A to'plamdagi barcha qiymatlarida yolg'on qiymat qabul qiluvchi predikat* ***aynan yolg'on predikat*** *deb ataladi.*

Masalan, natural sonlar to'plamidagi $P(x; y) \equiv$ „$x + y = y + x$“; o'simliklar to'plamidagi $P(x) \equiv$ „x — oziqlanmaydigan o'simlik“; ikkidan katta juft sonlar to'plami $A = \{4, 6, 8, 10, ..., 2n, ...\}$ dagi $P(x) \equiv$ „x — tub son“ predikatlarning har biri aynan yolg'on predikatlar.

4-ta'rif. *Obyektlarning P to'plamdagi kamida bitta qiymatlari majmuasida chin qiymat qabul qiluvchi predikat* ***bajariluvchi predikat*** *deyiladi.*

Misol uchun natural sonlar to'plamidagi $P(x; y) \equiv$ „$x + y = 5$“ predikat bajariluvchidir, chunki $P(x; y)$ predikat $(x; y)$ ning (1; 4), (2; 3), (3; 2) (4; 1) qiymatlari majmuasida chin, qolgan qiymatlarida esa yolg'on.

Shuningdek, $P(x) \equiv$ „$x^2 - 5x + 6 = 0$“ predikat ham haqiqiy sonlar to'plami R dagi bajariluvchi predikatdir, chunki $P(2) = r$, $P(3) = r$ bo'lib, x ning boshqa qiymatlarida $P(x)$ yolg'ondir.

3. Predikatlar ustida amallar. Predikatlar ustida ham mulohazalar algebrasidagi singari mantiqiy amallar bajarish mumkin. Biz bu yerda eng sodda bir joyli va bir xil rusumli (ya'ni bitta to'plamda aniqlangan va bir xil o'zgaruvchili) predikatlar ustida bajariladigan amallar bilan tanishib chiqamiz.

Inkor amali. A to'plamdagi $P(x)$ predikat berilgan bo'lib, uning chinlik to'plami A_1 dan iborat bo'lsin. U holda $P(x)$ predikat $A_2 = C_A A_1$ to'plamda yolg'on va $A = A_1 \cup A_2$ bo'lar edi.

A to'plamdagi x ning $P(x)$ chin bo'lgan qiymatlarida yolg'on qiymat qabul qiluvchi va, aksincha, $P(x)$ yolg'on bo'lgan qiymatlarida chin qiymat qabul qiluvchi $\rceil P(x)$ predikat A to'plamda berilgan $P(x)$ *predikatning inkori* deb ataladi.

Masalan, N natural sonlar to‘plamidagi $P(x) \equiv$ „x — tub son“ degan predikat berilgan bo‘lsa, uning inkori $\rceil P(x) \equiv$ „x — tub son emas“ degan predikat bo‘lib, u $P(x)$ chin bo‘lgan $N_1 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$ to‘plamda yolg‘on va $P(x)$ yolg‘on bo‘lgan $N = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, ...\}$ to‘plamda esa chin qiymat qabul qiladi.

Umuman, agar A to‘plamdagi $P(x)$ predikatning chinlik to‘plami A_1 dan iborat bo‘lsa, u holda $\rceil P(x)$ ning chinlik to‘plami $A_2 = C_A A_1 — A_1$ ni A gacha to‘ldiruvchi to‘plamdan iborat bo‘ladi.

Endi bizga A to‘plamda aniqlangan ikkita $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlar berilgan bo‘lib, $P(x)$ ning chinlik to‘plami $A_1 \subset A$, $Q(x)$ ning chinlik to‘plami esa $A_2 \subset A$ bo‘lsin.

Konyunksiya amali.

5-ta’rif. *A to‘plamdagi P(x) va Q(x) predikatlarning* ***konyunksiyasi*** *deb, x ning P(x) va Q(x) predikatlarning ikkalasi ham chin qiymat qabul qiluvchi qiymatlarida chin, qolgan barcha qiymatlarida esa yolg‘on qiymat qabul qiluvchi* $P(x) \wedge Q(x)$ *predikatga aytiladi.*

Ta’rifdan $P(x) \wedge Q(x)$ predikatning chinlik to‘plami $A_1 \cap B_1 \subset A$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Masalan, butun sonlar to‘plami $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$ da berilgan $P(x) \equiv$ „$x > 10$“ hamda $Q(x) \equiv$ „x — musbat son“ predikatlarning konyunksiyasi $P(x) \wedge Q(x) \equiv$ $\equiv$ „$x > 10$ va x — musbat son“ degan predikat bo‘ladi. $P(x)$ ning chinlik to‘plami $A_1 = \{11, 12, 13, ...\}$, $Q(x)$ niki esa $B_1 = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ bo‘lib, $P(x) \wedge Q(x)$ ning chinlik to‘plami $A_1 \cap B_1 = A_1$ dan iborat bo‘ladi.

Dizyunksiya amali.

6-ta’rif. *A to‘plamdagi x ning P(x) va Q(x) predikatlarining birortasi chin bo‘lgan qiymatlarida chin qiymat qabul qiluvchi* $P(x) \vee Q(x)$ *predikat P(x) va Q(x) predikatlarning* ***dizyunksiyasi*** *deyiladi.*

Demak, $P(x) \vee Q(x)$ predikat $x \in A$ ning *P(x)* va *Q(x)* predikatlarning ikkalasi ham yolg‘on qiymat qabul qiladigan qiymatlaridagina yolg‘on bo‘lar ekan.

Ta'rifdan $P(x) \vee Q(x)$ *predikatning chinlik to'plami* $A_1 \cup B_1 \subset A$ bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan, butun sonlar to'plami Z dagi $P(x) \equiv$ „$|x| < 5$" va $Q(x) \equiv$ „x — musbat juft son" degan predikatlarni qaraylik. Bu yerda $A_1 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $B_1 = \{2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...\}$.

U holda $P(x) \vee Q(x) \equiv$ „x ning moduli 5 dan kichik yoki x — musbat juft son" bo'lib, uning chinlik to'plami

$$A_1 \vee B_1 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, \\ 8, 10, ..., 2n, ...\}$$

bo'ladi.

Implikatsiya amali.

7- ta'rif. *A to'plamdagi x ning P(x) predikat chin, Q(x) esa yolg'on bo'lgan qiymatlaridagina yolg'on bo'lgan* $P(x) \Rightarrow Q(x)$ *predikat P(x) va Q(x) predikatlarning* ***implikatsiyasi*** *deyiladi.*

Ta'rifdan $P(x) \Rightarrow Q(x)$ predikatning chinlik to'plami $C_A(A_1 \cap C_A B_1) = C_A A_1 \cup B_1$ dan iborat ekanligini ko'rish qiyin emas (buni $A(x) \Rightarrow B(x) \equiv \rceil A(x) \vee B(x)$ ga asoslanib tekshirib ko'ring).

3- misol. Natural sonlar to'plamidagi $P(x) \equiv$ „$x > 5$" va $Q(x) \equiv$ „x uchga karrali" predikatlarni olsak, $P(x) \Rightarrow Q(x) \equiv$ „Agar $x > 5$ bo'lsa, u holda x uchga karrali bo'ladi" predikat hosil bo'ladi. Bunda $A_1 = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$, $B_1 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...\}$ bo'lib,

$$C_A A_1 \cup B_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...\}$$

dan iboratdir.

Ekvivalensiya amali.

8- ta'rif. *A to'plamdagi x ning P(x) va Q(x) predikatlarning ikkalasi ham bir xil qiymat qabul qiluvchi qiymatlaridagina chin qiymat qabul qiluvchi* $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ *predikat P(x) va Q(x) predikatlarning* ***ekvivalensiyasi*** *deb ataladi.*

$P(x) \Leftrightarrow Q(x) \equiv (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow P(x))$ bo‘lganligi sababli uning chinlik to‘plami $(C_A A_1 \cup B_1) \cap \cap (C_A B_1 \cup A_1)$ dan iboratdir.

4-misol. Natural sonlar to‘plami N dagi $P(x) \equiv$ ≡ „x kichik 10 dan“, $Q(x) \equiv$ „x soni 5 ga bo‘linadi“ predikatlarni olsak, $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B_1 = \{5, 10, 15, 20, 25, ..., 5n, ...\}$ bo‘ladi va bu holda $P(x) \Leftrightarrow Q(x) \equiv$ ≡ „ Agar x kichik 10 bo‘lsa, u holda x soni 5 ga bo‘linadi va, aksincha, agar x soni 5 ga bo‘linsa, x kichik 10 bo‘ladi“ degan predikat bo‘ladi. Uning chinlik to‘plami

$$C_N A_1 \cup B_1 = \{10, 11, 12, 13, ...\} \cup \{5, 10, 15, 20, ...\} =$$
$$= \{5, 10, 11, 12, 13, ..., n, ...\};$$
$$C_N B_1 \cup A_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, ...\} \cup$$
$$\cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$
$$8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...\}$$

bo‘lgani uchun

$$(C_N A_1 \cup B_1) \cap (C_N B_1 \cup A_1) = \{5, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, ...\}$$

to‘plamdan iborat bo‘ladi.

4. Tenglama va tengsizliklarni predikatlar orqali ifodalash. Har qanday algebraik tenglama yoki tengsizlik berilgan bo‘lsa, uni predikat sifatida qarash mumkin. Tenglamaning (tengsizlikning) yechimlari to‘plamini topish esa predikatning chinlik to‘plamini topish demakdir. Misol uchun $3x + 2 = 2x$ tenglamaning butun sonlardagi yechimlarini topish talab etilsin. Agar bu tenglamaning chap tomonini $P(x)$ bilan, o‘ng tomonini esa $Q(x)$ bilan belgilab olsak, $P(x) = Q(x)$ predikatga ega bo‘lamiz.

5-misol. Agar $P(x) \equiv$ „$x > 2$ va $x \in N$“ va $Q(x) \equiv$ „$4x - 1 = 3$ va $x \in N$“ bo‘lsa, u holda $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$ predikatlarning chinlik to‘plamlarini toping.

$P(x)$ predikatning chinlik to‘plami $A_1 = \{3, 4, 5, 6, 7, ..., n, ...\}$, $Q(x)$ ning chinlik to‘plami esa $B_1 = \{1\}$. Predikatlar konyunksiyasining ta’rifiga asosan, $P(x) \wedge Q(x)$ ning rostlik to‘plami $A_1 \cap B_1 = \varnothing$ bo‘lishi kerak. Haqiqatan ham, $P(x) \wedge Q(x) \equiv$ „$x > 2$ va $4x - 1 = 3$, $x \in N$“ bo‘ladi. $4x - 1 = 3$ tenglamaning yechimi $x = 1$ bo‘lib, $x > 2$ shartni qanoatlantirmaydi, demak, $P(x) \wedge Q(x)$ ning chinlik to‘plami bo‘sh to‘plamdir.

Bu yerda $P(x) \wedge Q(x)$ predikatni

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 4x - 1 = 3, \\ x \in N \end{cases}$$

sistema ko‘rinishida yozib olish ham mumkin. Bu sistemani yechsak,

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 4x = 4, \\ x \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x = 1, \\ x \in N. \end{cases}$$

Bu oxirgi sistema birgalikda bo‘lmagan sistema bo‘lgani uchun uning yechimlari to‘plami va, demak, $P(x) \wedge Q(x)$ predikatning chinlik to‘plami ham $\varnothing$ to‘plamdan iboratdir.

Endi $P(x) \vee Q(x)$ predikatning chinlik to‘plamini aniqlaylik. Ta’rifga ko‘ra $P(x) \vee Q(x) \equiv$ „$x \geq 2$ va $4x - 1 = 3$, $x \in N$“ bo‘lib, uning chinlik to‘plami $A_1 \cup B_1 = \{1, 2, 3, ..., n, ...\} = N$ dan iboratdir.

5. Kvantorlar. A to‘plamda $P(x)$ bir joyli predikat berilgan bo‘lsin. Ma’lumki bu $P(x)$ predikat o‘zgaruvchi obyekt x ning qandaydir xossasini ifodalaydi. Buni „x obyekt $P(x)$ xossaga ega“ deb belgilaylik. Yuqorida biz predikatdan mulohaza hosil qilishning o‘rniga qo‘yish usulini (bu usul retraksiya usuli deb ham yuritiladi) ko‘rib o‘tgan edik. Unga asosan, berilgan $P(x)$ predikatdagi o‘zgaruvchi x ning o‘rniga aniqlanish sohasi A to‘plamdan olingan aniq $x = a$ obyektni qo‘ysak, $P(a)$ chin yoki yolg‘on qiymat qabul qiluvchi mulohaza hosil bo‘lar edi. Endi predikatdan mulohaza hosil qilishning yana bir usuli bilan tanishib chiqamiz.

Avvalo, A to'plamda berilgan $P(x)$ predikat uchun ushbu gapni qaraylik:

„A to'plamdagi barcha x lar $P(x)$ xossaga ega". (4)

Bu tasdiq chin yoki yolg'on qiymat qabul qiluvchi mulohazadir, chunki u endi x ga bog'liq emas. (4) ko'rinishdagi fikr

$$\forall x P(x) \tag{5}$$

ko'rinishda belgilanadi, bunda $\forall$ *umumiylik kvantori* deb ataladi. Agar x ning biror A to'plamdagi qiymatlari uchun $P(x)$ ning o'rinli ekanligini ko'rsatib yozish kerak bo'lsa, (5) ning o'rniga $(\forall x \in A)\ P(x)$ yozuv ishlatiladi.

6- misol. Natural sonlar to'plamidagi ushbu mulohazalarni qaraylik. a) „Barcha x lar uchun x katta yoki teng 1 dan", ya'ni $\forall x \in N, x \geq 1$; b) „Barcha x lar uchun $2^x > 10$ ", ya'ni $\forall x \in N, 2^x > 10$.

Bularning birinchisi chin, ikkinchisi esa yolg'on mulohazadir.

Endi berilgan $P(x)$ predikat qatnashgan ushbu tasdiqni qaraylik:

„A to'plamda $P(x)$ xossaga ega bo'lgan
x obyekt mavjud". (6)

Bu tasdiq ham mulohaza bo'lib, u qisqacha

$$\exists x \in A,\ P(x) \tag{7}$$

yoki oddiygina qilib, $\exists x P(x)$ ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda $\exists$ *mavjudlik kvantori* deb yuritiladi.

7- misol. a) Natural sonlar to'plami N dagi „$x < 10$" predikatni olib, $\exists x \in N, x < 10$ mulohazani tuzsak, u chin mulohazadir, chunki 10 dan kichik natural son mavjud.

b) Agar shu N to'plamda „x kichik 1 dan" predikatni olib, $\exists x \in N, x < 1$ mulohazani tuzsak, bu yolg'on mulohazadir.

Endi (4) ning inkorini qarasak, „A to‘plamdagi barcha x lar uchun $P(x)$ xossa o‘rinli emas“, ya’ni „A to‘plamda $\rceil P(x)$ o‘rinli bo‘lgan x mavjud“ degan mulohaza hosil bo‘ladi. Demak,

$$\rceil(\forall x P(x)) \equiv \exists x \rceil P(x).$$

Shuningdek,

$$\rceil(\forall x P(x)) \equiv \forall x \rceil P(x)$$

tengkuchlilikning o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Kvantorlash (kvantor osish) amali yordamida ikki va undan ko‘p joyli predikatlardan ham mulohazalar hosil qilish mumkin.

Misol uchun, ikki joyli $Q(x;\ y)$ predikat berilgan bo‘lsa, undan kvantor osish yordamida ushbu mulohazalarni hosil qilish mumkin:

$$\forall x, \forall y\ Q(x;\ y); \qquad \exists x, \forall y\ Q(x;\ y);$$
$$\forall x, \exists y\ Q(x;\ y); \qquad \exists x, \exists y\ Q(x;\ y).$$

Masalan, haqiqiy sonlar to‘plami R dagi $Q(x;\ y) \equiv$ $\equiv$ „$x^2 + y^2 = 1$“ predikatni olsak,

$$\forall x, \forall y\ Q(x;\ y) \equiv e; \qquad \exists x, \forall y\ Q(x;\ y) \equiv e;$$
$$\forall x, \exists y\ Q(x;\ y) \equiv e; \qquad \exists x, \exists y\ Q(x;\ y) \equiv r$$

bo‘ladi.

6. Matematik jumlalarni matematik mantiq simvollari yordamida yozish. Kvantorlarning kiritilishi ko‘pgina tasdiqlarni matematik simvollar yordamida qisqa qilib ifodalash imkonini beradi.

Misollarga murojaat etaylik.

1. „Barcha x haqiqiy sonlar uchun $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ tenglik o‘rinli“ $\equiv \forall x \in R(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$.

2. „Oldindan berilgan ixtiyoriy musbat ε soni uchun shunday bir δ musbat soni mavjud bo‘lsaki, $|x - x_0| < \delta$ bo‘lganda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi“,

degan $f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi uzluksizlik ta'rifini matematik mantiq simvollari yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$(\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, |\, x - x_0 \,| < \delta \Rightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon).$$

3. „Barcha haqiqiy x, y sonlar uchun $x+y=y+x$ tenglik o'rinli“ $\equiv (\forall x \in R, \forall y \in R, x + y = y + x)$.

4. „$x^2 - 4x + 1 = 0$ kvadrat tenglama butun sonlarda yechimga ega“ $\equiv (\exists x \in Z, x^2 + 2x + 1 = 0)$.

5. „$x^2 + 1 = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi haqiqiy son mavjud emas“ $\equiv (\forall x \in R, \rceil(x^2 + 1 = 0) \equiv \forall x \in R, x^2 + 1 \neq 0)$.

I BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

1. Quyida keltirilgan to'plamlardan qaysilari chekli, qaysilari cheksiz:

a) kollejdagi talabalar to'plami;
b) manfiy butun sonlar to'plami;
d) 7 ga karrali natural sonlar to'plami;
e) yetishtirilgan g'alladagi donlar soni;
f) ko'phadning ildizlari to'plami;
g) berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami?

2. $A=\{a, b, c, d\}$ to'plamning mumkin bo'lgan barcha qism to'plamlarini toping. Bu to'plam qism to'plamlaridan tashkil topgan to'plamda nechta element bo'ladi?

3. $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$ va $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ to'plamlar berilgan. A to'plam B to'plamning qism to'plami bo'ladimi?

4. $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$ va $B=\{1, 2, 3, 5, 6\}$ to'plamlar berilgan. A to'plam B to'plamning qism to'plami bo'ladimi yoki B to'plam A to'plamning qism to'plami bo'ladimi?

5. A to‘plam teatrga tashrif buyurgan tomoshabinlar to‘plami, B — teatrdagi o‘rindiqlar to‘plami bo‘lsin. Bu to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatib bo‘ladimi?

6. $x^2 - x + a = 0$ tenglamaning yechimlari a ning qanday quymatlarida ikki elementli, qanday qiymatlarida bir elementli, qanday qiymatlarida bo‘sh to‘plam hosil qiladi?

7. $A = \{x \mid 3 \le x \le 5\}$ va $B = \{x \mid 2 \le x \le 4\}$ to‘plamlarning yig‘indisi va ko‘paytmasini toping.

8. a nuqtaning $|x - a| < 5$ atrofini to‘plam (interval) shaklida ifodalang. (Javob. $(a - 5;\ a + 5)$.)

9. $[-3;\ 5]$ kesmadan $(-3;\ 5)$ interval chiqarib tashlansa, nima qoladi?

10. $[2;\ 10]$ segmentdan $(3;\ 8)$ interval chiqarib tashlandi, qolgan nuqtalar to‘plamini oraliqlar yordamida qanday ifodalash mumkin? (Javob. $[2;\ 3]$ $[8;\ 10]$.)

11. $(-4;\ 5)$ intervaldan $[-2;\ 0]$ va $[1;\ 3]$ segmentlar chiqarib tashlandi. Qanday oraliqlar qolgan?

12. Quyidagi munosabatlarning o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating.

1) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

4) $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$;

5) $(A \setminus B) \cap C = A \cap C \setminus B \cap C$.

13. $\sin x = a$; $\cos x = a$ $(|a| \le 1)$ tenglamalarning yechimlari qanday to‘plamlar bo‘ladi? (Javob. $x = (-1)^n \arcsin a + nk$, $n \in Z$; $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$.)

14. Agar $A = \{\alpha,\ 0 \le \alpha \le 3{,}5\}$; $B = \{\beta,\ 0{,}5 \le \beta \le 4{,}5\}$ bo‘lsa, $A \cup B$, $A \cap B$ va $A \setminus B$ larni toping.

15. $y = a + (b - a)x$ formula $[0;\ 1]$ oraliqni qanday to‘plamga o‘tkazadi?

16. 96 va 256 sonlarining bo‘luvchilaridan tashkil topgan to‘plamlarni tuzing. (Javob. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96\}$, $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\}$).

17. $A = \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$, $B = \{x \mid x \in Z, -5 \leq x \leq 6\frac{4}{7}\}$, $C = \{y \mid y = 2n^2 - 1,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ to‘plamlar berilgan. Ko‘rsatilgan xossalarni qanoatlantiruvchi elementlar to‘plamini toping. (Javob. $\{3, 4\}$; $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\{1; 7; 17; 31; 49; 71\}$.)

18. $A = \{3; 7; 11; 15; 19\}$ to‘plam elementlari uchun xarakteristik xossani aniqlang. (Javob. $A = \{x \mid x = 4n - 1,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.)

19. $x^2 + y^2 \leq 25$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi tekislikdagi nuqtalar to‘plamini toping. (Javob. Markazi koordinatalar boshida yotgan $R = 5$ radiusli doiradagi nuqtalar.)

20. $9x^2 - 1 = 0$ tenglamaning butun sonlardagi yechimlari to‘plamini toping. (Javob. $\varnothing$.)

21. A to‘plam 4 ta elementdan iborat. Bu to‘plamning elementlaridan qancha qism to‘plam tuzish mumkin? (Javob. 2^4.)

22. A to‘plam $[0; 6]$, B to‘plam $[1; 8]$ va C to‘plam $[-1; 4]$ kesmadan iborat. Quyidagi to‘plamlarni toping:

1) $A \cap B$; 2) $A \cup C$; 3) $A \cap B \cap C$;

4) $A \cup B \cup C$; 5) $(A \cup B) \cap C$; 6) $A \cup (B \cap C)$.

23. $A = (a; b)$ va $B = (0; 1)$ to‘plamlar orasidagi o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatuvchi formulani toping.

(Javob. $y = \frac{x-a}{b-a}$.)

24. Quyidagi ta’riflarni $\forall$ umumiylik va $\exists$ mavjudlik belgilari yordamida ifodalang:

1. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ soni topilsaki, $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha

x lar uchun $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

(Javob. $f(x)$ — uzluksiz $\equiv \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0[\varepsilon>0\wedge\delta>0\wedge$ $\wedge\forall x(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon].)$

2. Agar shunday o'zgarmas M soni mavjud bo'lsaki, $\forall n\in N$ uchun $x_n\leq M(x_n\geq M)$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi. (Javob. $\exists M\in R, \forall n\in N; x_n\leq M(x_n\geq M)$.)

3. Agar shunday o'zgarmas $M>0$ soni mavjud bo'lsaki, $\forall n\in N$ uchun $|x_n|\leq M$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi. Javob. $\exists M>0, \forall n\in N, |x_n|\leq M.$

4. Agar berilgan $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $n_0=n_0(\varepsilon)$ natural son topilsaki, barcha $n>n_0$ natural sonlar uchun $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi, a soni esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deb ataladi va $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ kabi belgilanadi. (Javob. $\forall x$, $\varepsilon>0, \exists n_0>n_0(\varepsilon),\in N, \forall n_0>n_0 \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$.)

25. Quyidagi shartlarning mazmunini tushuntiring:

1) $\exists\varepsilon>0, \exists k\forall n>k\,|x_n-a|<\varepsilon$;

2) $\exists\varepsilon>0, \forall k\exists n>k\,|x_n-a|<\varepsilon$;

3) $\exists\varepsilon>0, \forall k\forall n>k\,|x_n-a|<\varepsilon$;

4) $\forall\varepsilon>0, \exists k\exists n>k\,|x_n-a|<\varepsilon$.

II BOB

HAQIQIY SONLAR

1-§. Sonli to‘plamlar. Natural, butun va ratsional sonlar

Son matematikaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Son tushunchasi ham jamiyat taraqqiyotining yuksalishi bilan rivojlanib borgan. Odamlar predmetlarni sanash tufayli sonlarning natural to‘plamini hosil qildi: $N=\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n,\ ...\}$. Son tushunchasini kengaytirishning ijodkorlaridan biri L.Kroneker natural sonlar to‘plamining ahamiyatini quyidagicha baholagan edi: „Natural sonlarni xudo bergan, qolganlarini insonning aql-zakovati yaratgan“. Bu fikrdan oddiy tushunchalarni yaratgan inson murakkab tushuncha va bog‘lanishlarni ham yaratadi, degan xulosa chiqadi.

Natural sonlar to‘plamida qo‘shish va ko‘paytirish amallari har doim bajariladi, ya’ni ikkita natural sonning yig‘indisi va ko‘paytmasi yana natural son bo‘ladi. Ayirish va bo‘lish amallari natural sonlar to‘plamida shartli bajariladi. Ikkita natural sonning ayirmasi va bo‘linmasi hamma vaqt natural son bo‘lavermaydi. Masalan, n va m — natural sonlar bo‘lsa, $x+n=m$ tenglama natural sonlar to‘plamida $m-n\geq 0$ bo‘lgandagina bajariladi. $m=n$ bo‘lganda $m-n=0$ bo‘ladi. Bu natija ham natural sonlar to‘plamiga tegishli emas: $0\notin N$.

Ayirish amalining bajarilish ehtiyoji natural sonlar to‘plamini kengaytirish zaruriyatini vujudga keltiradi.

Shunday qilib, natural sonlar to‘plamiga 0 sonini qo‘shib olsak, $Z_0=\{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$ manfiy bo‘lmagan butun sonlar to‘plamini hosil qilamiz. Shuningdek, turmushdagi ko‘pgina amaliy masalalarni hal qilish manfiy bo‘lmagan butun sonlar to‘plamini ham kengaytirish masalasini qo‘yadi. Z_0 manfiy bo‘lmagan butun sonlar to‘plami bilan manfiy butun sonlar to‘plamining birlashmasi $Z=\{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ butun sonlar to‘plamini tashkil qiladi. Z to‘plamda qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish amallari hamma vaqt bajariladi, ya’ni bu amallarning natijalari Z to‘plamga tegishli bo‘ladigan sonlar bo‘ladi. Lekin Z to‘plamda bo‘lish amali shartli bajariladi, ya’ni bu amalning natijalari Z to‘plamga tegishli bo‘lmagan sonlar bo‘lishi ham mumkin. Shunday ekan, Z butun sonlar to‘plamini ham kengaytirish zaruriyati paydo bo‘ladi.

Kesmalarni, yuz va hajmlarni o‘lchash masalalari ham yangi sonlarni, ya’ni kasr sonlarni kiritish masalasini zarur qilib qo‘yadi. Aytaylik, birlik CD kesma AB kesmaga butun son marta joylashmasin, ammo CD ni n ta teng bo‘lakka bo‘lib, hosil bo‘lgan yangi „mayda“ birlik kesmani AB kesmaga rappa-raso m marta joylashtirish mumkin bo‘lsin. Tabiiyki, u holda

$$|AB|=\frac{m}{n}|CD|$$

bo‘ladi.

$\frac{m}{n}$ ko‘rinishdagi sonlar ($m\in N,\ n\in N$) *ratsional sonlar* deb ataladi.

Shunday qilib, juda ko‘p masalalar Z butun sonlar to‘plamini barcha ratsional sonlar to‘plami $Q=\left\{\frac{m}{n},\ m\in Z,\ n\in N\right\}$ gacha kengaytirishni talab qiladi. Q to‘plamda qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish amallari har doim bajariladi (nolga bo‘lish ma’noga ega emas). Bo‘lish amalining xossasiga asosan: agar $a:b=q$ bo‘lsa, $a=b\cdot q$ bo‘ladi, agar $a\neq 0$, $b=0$ bo‘lsa, $a=b\cdot q$ tenglik bajarilmaydi.

Agar ikkita kesma umumiy o‘lchamga ega bo‘lsa, u holda bu kesmalarning uzunliklari ratsional sonlar bilan ifodalanadi va, aksincha, ikkita musbat ratsional son uchun umumiy o‘lchamga ega bo‘lgan shunday ikkita kesma mavjudki, bu ratsional sonlar shu kesmalarning uzunliklariga teng bo‘ladi.

Hosil qilingan sonli to'plamlar bir-biri bilan quyidagicha bog'langan: $N \subset Z_0 \subset Z \subset Q$.

2- §. Chekli va cheksiz o'nli kasrlar

Istalgan ratsional sonni juda ko'p usullar bilan oddiy kasr ko'rinishida tasvirlash mumkin. Masalan:

$$3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}=\ldots; \frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\ldots .$$

Ko'rinib turibdiki, ratsional sonlarni oddiy kasrlar yordamida ifodalash bir qiymatli emas. Bunday hol, ya'ni ratsional sonlarni oddiy kasrlar yordamida o'rganish noqulay. Ratsional sonlarni o'nli kasrlardan foydalanib o'rganish juda qulaydir. Chunki har bir ratsional sonni yagona bir o'nli kasr bilan ifodalash mumkin. Haqiqatan, istalgan manfiy bo'lmagan $\frac{a}{b}$ kasr sonning suratini maxrajga bo'lish yordamida uni yagona chekli yoki cheksiz o'nli kasr ko'rinishida ifodalash mumkin. Masalan:

$$\frac{1}{8}=0,125; \ \frac{1}{3}=0,333\ldots; \ \frac{1}{6}=0,1666\ldots .$$

Shuningdek, barcha chekli kasrlarni va butun sonlarni ham ularning o'ng qismiga nollar yozish bilan cheksiz o'nli kasr ko'rinishida ifodalash mumkin. Masalan:

$$\frac{1}{25}=0,04000\ldots; \ 21=21,000\ldots .$$

Bunday kelishuvni qabul qilib, istalgan r ratsional sonni yagona cheksiz o'nli kasr ko'rinishida ifodalash mumkin (bunday ifodalash usulini keyinroq ko'rsatamiz):

$$r=a_0,a_1a_2a_3\ldots,$$

bunda $r \in Q$, $0 \le a_k \le 9$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. a_0 son r ratsional sonning *butun qismi* deyiladi, $0,a_1a_2a_3\ldots$ son esa uning *kasr qismi* deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$[r]=a_0, \ \{r\}=0,a_1a_2a_3\ldots .$$

Demak, $[r]+\{r\}=r$, bunda $0<\{r\}<1$.

Misollar:

1. $r = -57,36$ sonning butun va kasr qismlarini toping.

$$[-57,36] = [-58 + 0,64] = -58;$$
$$\{-57,36\} = \{-57 + 0,64\} = 0,64.$$

2. $y = \{x\}$ davriy funksiyadir. Istalgan m butun son bu funksiyaning davri bo‘ladi: $\{x + m\} = \{x\}$.

Haqiqatan, $\{x + m\} = (x + m) - [x + m] = x + m - [x] - m = x - [x] = \{x\}$.

3- §. Davriy o‘nli kasrlar

Istalgan ratsional sonni cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida ifodalash mumkinligiga ishonch hosil qildik. Bu cheksiz o‘nli kasrlarda biror joyidan boshlab o‘nli ishorasidan bir yoki bir nechtasi takrorlana boshlaydi. Masalan:

$$2,3336000...;\quad 12,42282828...\ .$$

Bunday o‘nli kasrlar *cheksiz davriy o‘nli kasrlar* deyiladi.

Ta’rif. *Agar shunday N va m natural sonlar mavjud bo‘lib, barcha $n \geq N$ bo‘lgan hollar uchun $a_{m+n} = a_n$ tenglik bajarilsa, u holda a_0, $a_1a_2a_3$... cheksiz o‘nli kasr* ***davriy o‘nli kasr*** *deyiladi.*

Masalan, 16,45323232... soni davriy o‘nli kasrdir.

Bu yerda $N = 4$, $m = 2$ bo‘lib, $n \geq 4$ bo‘lganda $a_{n+2} = a_n$ bo‘ladi. n toq bo‘lganda $a_n = 3$, n juft bo‘lganda esa $a_n = 2$ bo‘ladi. 0,2358000... soni ham davriy o‘nli kasrdir. Bu son uchun $N = 5$, $m = 1$ bo‘lib, $a_{n+1} = a_n = 0$ bo‘ladi ($n \geq 5$). Davriy o‘nli kasrlarni qisqacha yozishda maxsus belgilashdan foydalaniladi. Masalan,

$$3,666... = 3,(6);\quad 16,45323232... = 16,45(32).$$

Qavs ichida yozilgan son berilgan davriy kasrning *davri* deyiladi. 3,(6) kasr bunday o‘qiladi; uch butun davrida olti; 16,45(32) — 16 butun yuzdan 45 davrida 32.

Har qanday ratsional sonni cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida ifodalash mumkin. Davrida 9 soni bo‘lmagan istalgan $a_0, a_1a_2a_3...$ cheksiz davriy o‘nli kasr esa qandaydir ratsional son bilan ifodalanadi.

Shunday qilib, ratsional sonlar to‘plami bilan cheksiz davriy o‘nli kasrlar to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslikni o‘rnatish mumkin.

Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig‘indisini hisoblashni o‘rganganimizdan keyin, har qanday cheksiz davriy o‘nli kasrning ratsional son orqali ifodalanishi yanada oydinlashadi.

4- §. Irratsional sonlar

Miqdorlarni o‘lchash butun sonlar to‘plamini kengaytirish zaruriyatini vujudga keltirdi. Q ratsional sonlar to‘plami ham matematikaning ko‘pgina amaliy va nazariy masalalarini hal etishdagi ehtiyojlarimizni qanoatlantira olmaydi. Q to‘plamni ham kengaytirish ehtiyojlari sezilib turadi. Masalan, amaliyotda kesma uzunligining taqribiy qiymatini ratsional sonlar yordamida yetarlicha aniqlikda o‘lchab topish mumkin. Lekin o‘lchanayotgan miqdorning qiymatlarini aniq ifoda qilish uchun ratsional sonlar to‘plami yetarli emas.

Har bir ratsional songa son to‘g‘ri chizig‘ida bitta aniq nuqta mos keladi. Shunday savol paydo bo‘lishi tabiiy: son o‘qining barcha nuqtalariga ratsional sonlar mos keladimi yoki son to‘g‘ri chizig‘ida ratsional sonlar mos kelmaydigan nuqtalar ham bormi?

Boshqacha aytganda, son to‘g‘ri chizig‘ida shunday bir A nuqtani tanlash mumkunmi, bu nuqta va O nuqta orasidagi $|OA|$ kesma $[0;\ 1]$ kesma bilan o‘lchanuvchi bo‘lmasin. Shunday nuqtaning mavjudligini ko‘rsatamiz.

Kvadrati 2 soniga teng bo‘lgan ratsional sonning mavjud emasligini ko‘rsatamiz. Boshqacha aytganda, soddagina $x^2 - 2 = 0$ tenglamani qanoatlantiradigan ratsional son mavjud emasligini ko‘rsatamiz.

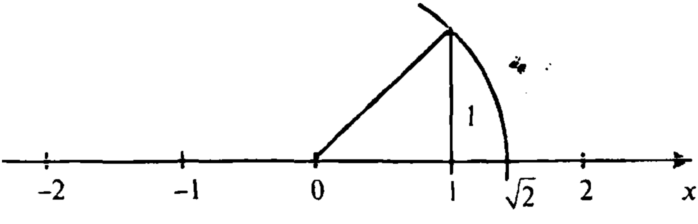
Qarama-qarshisini faraz qilish usulidan foydalanamiz. Aytaylik, kvadrati 2 ga teng bo‘lgan qisqarmas $\frac{m}{n}$ kasr mavjud bo‘lsin. Bunday holda $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2 \Rightarrow m^2=2n^2$ bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, m^2 — juft son ekan. Bunday holda m ham juft son bo‘ladi. Bordi-yu m toq son bo‘lsa, ya’ni $m=2k+1$ bo‘lsa, u holda $m^2=(4k^2+4k)+1$ son ham toq bo‘ladi. Agarda m juft son bo‘lsa, u holda

$$m=2k \Rightarrow m^2=4k^2 \Rightarrow 2n^2=4k^2 \Rightarrow n^2=2k^2.$$

Oxirgi tenglikdan n^2 ning juft son ekanligi kelib chiqadi. Demak, n ham juft son bo‘ladi. Bizning qilgan farazlarimizga ko‘ra $\frac{m}{n}$ kasri qisqarmas edi. Lekin bu kasr 2 ga qisqaradi. Biz chiqargan xulosa esa $\frac{m}{n}$ kasri qisqarmas degan da’voga ziddir.

Shunday qilib, kvadrati 2 ga teng bo‘lgan ratsional son mavjud degan farazimiz noto‘g‘ri ekan.

Son to‘g‘ri chizig‘ida $\sqrt{2}$ ning qiymatiga mos keluvchi nuqtani ham ko‘rsatish mumkin. 1 soniga mos keluvchi nuqtaga uzunligi 1 ga teng bo‘lgan perpendikularni tiklaymiz. Uning oxirgi nuqtasini 0 nuqta bilan tutashtiramiz. Natijada gipotenuzasi $\sqrt{2}$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchak olamiz. Bu to‘g‘ri burchakli uchburchakning har bir kateti 1 ga teng. Son to‘g‘ri chizig‘ida gipotenuzaga teng kesmani 0 nuqtadan boshlab qo‘yib, $\sqrt{2}$ ning qiymatiga mos keluvchi nuqtani topamiz (9-rasm).



9- rasm.

Shuningdek, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ va h.k sonlarga mos keluvchi nuqtalarni ham topamiz.

Shunday qilib, ratsional nuqtalar to'plami, ya'ni ratsional sonlarga mos keluvchi nuqtalar to'plami son to'g'ri chizig'ini to'laligicha qoplab olmaydi. Ratsional sonlar to'plami (cheksiz davriy o'nli kasrlar to'plami) va son to'g'ri chizig'idagi barcha nuqtalar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud emas. Ratsional sonlar to'plamida ildiz chiqarish amali hamma vaqt bajarilavermaydi.

Son to'g'ri chizig'idagi nuqtalar to'plami bilan ratsional sonlar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslikni o'rnatish uchun ratsional sonlar to'plamini boshqa sonlar to'plami bilan to'ldirish kerak ekan. Bunday sonlar to'plamining elementlari (sonlari) *irratsional sonlar* deyiladi. Irratsional sonlar to'plamini I orqali belgilaymiz.

Masalan, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ... sonlar irratsional sonlardir.

5-§. Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlarni cheksiz o'nli kasr ko'rinishida ifodalash

Ta'rif. *Q ratsional sonlar to'plami bilan I irratsional sonlar to'plamining birlashmasi (yig'indisi)* ***haqiqiy sonlar*** *deb ataladi.*

Haqiqiy sonlar to'plamini R orqali belgilaymiz:

$$R = Q \cup I.$$

Q ratsional sonlar to'plamida I irratsional sonlar to'plamini qo'shib, uni kengaytirsak, hosil bo'lgan R haqiqiy sonlar to'plami bilan son to'g'ri chizig'idagi nuqtalar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'ladi.

Yuqorida har bir ratsional son cheksiz davriy o'nli kasr bilan ifodalanishini ko'rdik. Har bir irratsional son esa cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr bilan ifodalanadi.

Shunday ekan, haqiqiy sonlar to'plamini quyidagicha ham ta'riflash mumkin: barcha cheksiz o'nli kasrlar to'plami haqiqiy sonlar deyiladi. Shunday qilib, R haqiqiy son, U cheksiz o'nli kasrlar va T to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plamlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud $((R \Leftrightarrow U, U \Leftrightarrow T) \Rightarrow R \Leftrightarrow T)$.

Endi musbat haqiqiy sonni cheksiz o'nli kasr ko'rinishida ifodalashni batafsil qaraymiz.

Agar $x \geq 1$ bo'lsa, u holda shunday n natural son topiladiki, $n \leq x < n+1$ tengsizlik bajariladi. n son x sonning butun qismi deyilishi ilgaridan ma'lum, ya'ni $n=[x]$. Agar $x<1$ bo'lsa, $[x]=0$ bo'ladi. Faraz qilaylik, $[x]=n$ bo'lsin.

$Z_0=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ to'plamga tegishli bo'lgan shunday n_1 son topiladiki, $n+\frac{n_1}{10} \leq x < n+\frac{n_1+1}{10}$ tengsizlik bajariladi. Z_0 to'plamda shunday n_2 son borki,

$$n+\frac{n_1}{10}+\frac{n_2}{10^2} \leq x < n+\frac{n_1}{10}+\frac{n_1+1}{10^2}$$

tengsizlik bajariladi. Bu tanlashni davom ettirib, istalgan k son uchun Z_0 to'plamdan olingan shunday n_k son topiladiki,

$$n+\frac{n_1}{10}+\frac{n_2}{10^2}+\ldots+\frac{n_k}{10^k} \leq x < n+\frac{n_1}{10}+\frac{n_2}{10^2}+\ldots+\frac{n_k+1}{10^k} \qquad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $n+\frac{n_1}{10}+\frac{n_2}{10^2}+\ldots+\frac{n_k}{10^k}$ yig'indini $n, n_1 n_2 \ldots n_k$ chekli o'nli kasr ko'rinishida yozish qabul qilingan. Bunday holda (1) quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$n, n_1 n_2 \ldots n_k \leq x < n, n_1 n_2 \ldots n_k + \frac{1}{10^k}. \qquad (2)$$

(2) tengsizliklarning cheksiz sistemasini

$$x = n, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots \qquad (3)$$

ko'rinishda yozish qabul qilingan. (3) ning o'ng qismi x sonning cheksiz o'nli kasr shaklidagi ifodasidir.

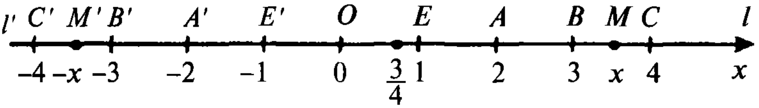
$x=\sqrt{2}$ sonini cheksiz o'nli kasr ko'rinishida ifodalaylik (yoki $x^2=2$ tenglamaning 1 gacha, 0, 1; 0,01; 0,001; ... aniqlikdagi taqribiy ildizlarini topaylik).

Ma'lumki, $1^2=1<2$, $2^2=4>2$. Demak, $1<\sqrt{2}<2$. Bu qadamda olingan 1 soni $\sqrt{2}$ sonining kami bilan olingan, 2 soni esa ortig'i bilan olingan 1 gacha aniqlikdagi taqribiy qiymatlari bo'ladi. Yo'l qo'yilgan xato $\Delta=2-1=1$. Navbatdagi yaqinlashishni bilish uchun oxirgi nuqtalari 1 va 2 bo'lgan kesmani teng 10 ta bo'lakka bo'lib, bo'linish nuqtalariga mos keluvchi 1,1; 1, 2; 1, 3; 1,4; 1, 5; ...; 1, 9 sonlarni navbat bilan kvadratga ko'tarib 1,21; 1,44; 1,89; 1,96; 2,25; ...; 3,24; 3,61 sonlarini topamiz. Demak, $1,4<\sqrt{2}<1,5$. Bu qadamda topilgan 1,4 soni $\sqrt{2}$ sonining kami bilan olingan, 1,5 soni esa ortig'i bilan olingan 0,1 aniqlikdagi taqribiy qiymati bo'ladi. Bu qadamda yo'l qo'yilgan xato o'n marta kamaydi, ya'ni $\Delta_1=1,5-1,4=0,1$. 0,01 aniqlikdagi yaqinlashishni olish uchun oxirlari 1,4 va 1,5 nuqtalarda bo'lgan kesmani teng 10 ta bo'lakka bo'lib, bo'linish nuqtalariga mos kelgan 1,41; 1,42; 1,43; 1,44; 1,45; ...; 1,49 sonlarni kvadratga ko'tarsak, $1,41^2=1,9881<2$; $1,42^2=2,0164>2$ va $1,41<\sqrt{2}<1,42$ bo'ladi. Yo'l qo'yilgan xato birinchi qadamga nisbatan 100 marta kamaydi, ya'ni $\Delta_2=1,42-1,41=0,01$.

0,001 aniqlikdagi yaqinlashishni olish uchun oxirlari 1,41 va 1,42 nuqtalarda bo'lgan kesmani teng 10 ta bo'lakka bo'lib, bo'linish nuqtalariga mos keluvchi 1, 411; 1,412; 1,413; 1,414; ...; 1,419 sonlarni kvadratga ko'tarib, olingan natijalarni taqqoslab, $1,414<\sqrt{2}<1,415$ bo'lishini topamiz. 4-qadamda $\sqrt{2}$ sonining taqribiy qiymatini 0,0001 aniqlikda topamiz. Bu qadamda yo'l qo'yilgan xato 1-qadamga nisbatan 1000 marta kamaygan bo'ladi. Yaqinlashishlarni cheksiz davom ettirib, $\sqrt{2}$ sonining taqribiy qiymatini istalgan aniqlikda ($x^2=2$ tenglamaning taqribiy ildizlarini istalgan aniqlikda) topish mumkin. Yuqoridagiga o'xshash $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ... sonlarining taqribiy qiymatlarini ($x^2=3$, $x^2=5$, $x^2=7$, ... tenglamalarning taqribiy ildizlarini) istalgan aniqlikda topish mumkin.

6- §. Haqiqiy sonlarni geometrik tasvirlash

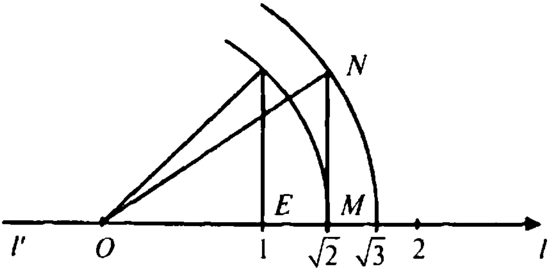
Tekislikda ixtiyoriy l to‘g‘ri chiziqni gorizontal joylashtiramiz va bu to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy O nuqtani tanlab, bu nuqtani sanoq boshi deb qabul qilib, unga nol sonini mos qo‘yamiz. Uzunligi 1 ga teng kesmani tanlaymiz. To‘g‘ri chiziqda O nuqtadan o‘ngroqda joylashgan E nuqtani shunday tanlaylikki, $|OE| = 1$ bo‘lsin. O nuqtadan o‘ngda 2, 3, 4, ... birlik masofada yotgan 2, 3, 4, ... sonlariga mos keluvchi A, B, C, ... nuqtalarni belgilaymiz. Shunday masofalarda O nuqtadan chapga –1, –2, –3, ... sonlariga mos keluvchi nuqtalarni ham topish mumkin. Shunga o‘xshash son o‘qida kasr sonlarni ham tasvirlash mumkin. Masalan, $\frac{3}{4}$ kasrni tasvirlash uchun OE kesmani teng to‘rt bo‘lakka bo‘lib, hosil bo‘lgan kesmalarning uchinchisining oxiriga $\frac{3}{4}$ ratsional son mos qo‘yiladi. Manfiy kasr sonlar ham son to‘g‘ri chizig‘ida O nuqtadan o‘ngdan chapga bo‘lgan yo‘nalishda tasvirlanadi (10- rasm).



10- rasm.

Son to‘g‘ri chizig‘ida manfiy va musbat irratsional sonlarni ham tasvirlash mumkin. $\sqrt{2}$ sonini oldinroq son to‘g‘ri chizig‘ida tasvirlagan edik. $\sqrt{3}$ sonining tasvirini topish uchun $\sqrt{2}$ sonining qiymatiga mos keluvchi nuqtaga uzunligi 1 ga teng bo‘lgan perpendikularni tiklab, bu perpendikular oxirgi nuqtasini O nuqta bilan tutashtirsak, ONM to‘g‘ri burchakli uchburchak hosil bo‘ladi (11-rasm).

ON kesmani radius qilib aylana chizsak, aylananing son o‘qini kesib o‘tgan nuqtasi $\sqrt{2}$ sonining tasviri bo‘ladi. Shunga o‘xshash $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ sonlarning tasvirlarini ham topish mumkin.



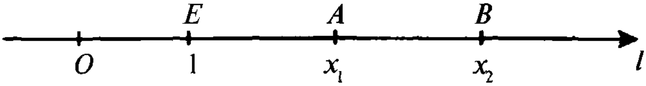
11- rasm.

Ol nurdagi har bir M nuqtaga manfiy bo'lmagan $x = |OM|$ son mos keladi. Ol nurdagi nuqtalar to'plami va R_0 manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plami orasida akslantirish mavjud. Bu akslantirishga teskari akslantirish ham ma'noga ega: har bir manfiy bo'lmagan x haqiqiy songa son o'qida bitta va faqat bitta M nuqta mos keladi. x soni $M(x)$ nuqtaning *koordinatasi* deyiladi. O nuqta son to'g'ri chizig'ini ikkita Ol va Ol' nurga ajratadi.

Bunday holda O nuqtaga nisbatan $M \in Ol$ nuqtaga simmetrik bo'lgan $M' \in Ol'$ nuqtaga $-x$ haqiqiy son mos keladi.

Shunday qilib, $f = M \Rightarrow x$ akslantirish l to'g'ri chiziqda aniqlangan bo'lib, u to'g'ri chiziqni R haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiradi.

A va B — l son to'g'ri chizig'ining istalgan 2 ta nuqtasi bo'lsin, bu nuqtalar mos ravishda x_1 va x_2 koordinatalarga ega bo'lsin. Bunday holda $|AB|$ masofa bu koordinatalar orqali $|AB| = |x_2 - x_1|$ formula bo'yicha ifodalanadi. Bu formulani A va B nuqtalar O nuqtadan o'ng tomonda yotgan hol uchun isbotlaymiz, ya'ni $0 < x_1 < x_2$ (12-rasm).



12- rasm.

Bunday holda $|AB| = |OB| - |OA| = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$. Nuqtalar O nuqtadan chapda yoki O nuqtaning turli tomonlarida yotgan hollarda ham $|AB|$ masofa yuqoridagiga o‘xshash isbotlanadi.

Shunday qilib, R haqiqiy sonlar to‘plami son to‘g‘ri chizig‘i, haqiqiy sonlar esa bu to‘g‘ri *chiziqning nuqtalari* deyiladi. Endi amaliyotda ko‘proq ishlatiladigan haqiqiy sonlarning ba’zi bir to‘plam ostilarini va ularning belgilanishlarini keltiramiz.

$a \leq x \leq b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x haqiqiy sonlar to‘plami *yopiq oraliq* yoki boshi a nuqtada, oxiri b nuqtada bo‘lgan *segment* (*kesma*) deyiladi va $[a;\ b]$ ko‘rinishda belgilanadi.

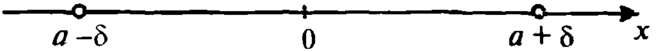
$a < x < b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x haqiqiy sonlar to‘plami *ochiq oraliq* yoki boshi a nuqtada, oxiri b nuqtada bo‘lgan *interval* deyiladi va $]a;\ b[$ ko‘rinishda belgilanadi.

$a \leq x < b$ $(a < x \leq b)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x haqiqiy sonlar to‘plami *yarimyopiq (yarimochiq) oraliq* deyiladi va $[a;\ b[$ $(]a;\ b])$ ko‘rinishda belgilanadi.

$x > a$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x haqiqiy sonlar to‘plami *cheksiz oraliq* deyiladi va $]a;\ \infty[$ ko‘rinishda belgilanadi. Shuningdek, $[a;\ +\infty[$, $]-\infty;\ b[$, $]-\infty;\ +\infty[$ oraliqlar ham aniqlanadi.

Agar a qandaydir haqiqiy son bo‘lsa, u holda $]a - \delta;\ a + \delta[$ interval *a nuqtaning atrofi* deyiladi. Bu yerda δ istalgan musbat haqiqiy son. Intervalning o‘rtasida yotadigan a nuqta intervalning markazi, δ soni esa *atrofning radiusi* deyiladi (13- rasm).

Umumiy holda $(a - \delta;\ a + \delta)$ atrof $|x - a| < \delta$ tengsizlik bilan belgilanadi. Masalan, $|x - 4| < 5$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to‘plami radiusi 5 ga teng $x = 4$ nuqta atrofini ifodalaydi.



13- rasm.

7- §. Haqiqiy sonlar ustida amallar

Haqiqiy sonlarning istalgan aniqlikdagi o‘nli yaqinlashishlarining kami va ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymatlari oldindan ma’lum qoidalarga ko‘ra aniqlanadi.

Agar α biror haqiqiy son, a — o‘sha α sonning kami bilan olingan biror taqribiy qiymati, b esa o‘sha α sonning ortig‘i bilan olingan biror taqribiy qiymati bo‘lsa, u holda

$$a < \alpha < b.$$

α sonning ortig‘i bilan olinadigan taqribiy qiymatlari shu sondagi o‘nli ishora raqamlarining oxirgisiga 1 ni qo‘shish vositasi bilan hosil bo‘ladi.

Masalan, $\alpha = \sqrt{3}$ sonning kami bilan olingan taqribiy qiymatlari: 1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; ... bo‘ladi. Ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymatlari 2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; ... bo‘ladi.

Umuman, $a = a_0,a_1a_2a_3...$ haqiqiy sonning 10^{-n} gacha aniqlikdagi kami bilan olingan taqribiy qiymati

$$a_n \approx a_0,a_1a_2a_3...a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a_n}{10^n},$$

ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymati esa

$$a_n' \approx a_0,a_1a_2a_3...a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} =$$

$$= a_n + \frac{1}{10^n}$$

bo‘ladi. Bu yerda a_n va a_n' – a sonining 10^{-n} gacha aniqlikdagi kami bilan va ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymatlaridir.

Masalan, $a = 36,3768$ soni uchun 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 gacha aniqlikda kami va ortig‘i bilan olingan taqribiy qiymatlarini hisoblaylik.

1 gacha aniqlikda: $a_0 = 36$; $a_0' = 37$;

0,1 gacha aniqlikda: $a_1 = 36,3$; $a_n' = 36,4$;

0,01 gacha aniqlikda: $a_2=36,37$; $a'_2=36,38$;

0,001 gacha aniqlikda: $a_3=36,376$; $a'_3=36,377$;

0,0001 gacha aniqlikda: $a_4=36,3768$; $a'_4=36,3769$.

Bu natijalarni jadval ko'rinishida ham berish mumkin:

$a=36,3768$	Aniqligi					
	1 gacha	0,1 gacha	0,01 gacha	0,001 gacha	0,0001 gacha	...
a_n	36	36,3	36,37	36,376	36,3768	...
a'_n	37	36,4	36,38	36,377	36,3769	...

Endi haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallarni aniqlaymiz.

1-ta'rif. *a va b sonlarining* ***yig'indisi*** *deb, ularning kami bilan olingan har qanday taqribiy qiymatlari yig'indisidan katta, lekin ortig'i bilan olingan har qanday taqribiy qiymatlari yig'indisidan kichik bo'lgan uchinchi bir c songa aytiladi.*

Bu ta'rifning mazmuniga ko'ra a va b haqiqiy sonlarning yig'indisi shunday bir uchinchi yagona c haqiqiy sondan iborat bo'ladiki, istalgan manfiy bo'lmagan n butun son uchun $a_n+b_n\le c<a'_n+b'_n$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

1-misol. $a=3,3173...$ va $b=1,1236...$ sonlarining yig'indisini toping.

Yechish. Berilgan sonlarning ifodasidan $a_4=3,3173$, $a'_4=3,3174$; $b_4=1,1236$, $a'_4=1,1237$ bo'lishi kelib chiqadi. Shuning uchun

$$a_4+b_4=3,3173+1,1236=4,4409\le a+b<a'_4+b'_4=$$
$$=3,3174+1,12337=4,4411.$$

Shunday qilib, 0,001 aniqlikkacha $a+b=4,441$ natijani olamiz.

2-misol. $a=\sqrt{2}$ va $b=\sqrt{3}$ sonlarning 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 aniqlikdagi yig'indilarini toping.

Yechish. Hisoblash natijalarini jadval tarzida beraylik:

0,1 gacha	0,01 gacha	0,001 gacha	0,0001 gacha
$a_1=1{,}4,$	$a_2=1{,}41,$	$a_3=1{,}414,$	$a_4=1{,}4142,$
$b_1=1{,}7,$	$b_2=1{,}73,$	$b_3=1{,}732,$	$b_4=1{,}7320,$
$a_1'=1{,}5,$	$a_2'=1{,}42,$	$a_3'=1{,}415,$	$a_4'=1{,}4143,$
$b_1'=1{,}8,$	$b_2'=1{,}74,$	$b_3'=1{,}733,$	$b_4'=1{,}7321,$
$a_1+b_1=3{,}1,$	$a_2+b_2=3{,}14,$	$a_3+b_3=3{,}146,$	$a_4+b_4=3{,}1462,$
$a_1'+b_1'=3{,}3$	$a_2'+b_2'=3{,}16$	$a_3'+b_3'=3{,}148$	$a_4'+b_4'=3{,}1464$

0,1 gacha aniqlikda $3{,}1 \leq a+b < 3{,}3$;

0,01 gacha aniqlikda $3{,}14 \leq a+b < 3{,}16$;

0,001 gacha aniqlikda $3{,}146 \leq a+b < 3{,}148$;

0,0001 gacha aniqlikda $3{,}1462 \leq a+b < 3{,}1464$.

2-ta'rif. *a va b manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlarning* ***ko'paytmasi*** *deb, n istalgan manfiy bo'lmagan butun son bo'lganda* $a_nb_n \leq c < a_n'b_n'$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi c songa aytiladi.*

Shunday qilib, a va b musbat haqiqiy sonlarni ko'paytirish degan so'z ularning kami bilan olingan har qanday taqribiy qiymatlari ko'paytmasidan katta, lekin ortig'i bilan olingan har qanday taqribiy qiymatlari ko'paytmasidan kichik bo'lgan uchinchi bir c haqiqiy sonni topish demakdir.

$a=\sqrt{2}$ va $b=\sqrt{3}$ sonlarining yuqorida ko'rsatilgan taqribiy qiymatlarini olib, shuni ayta olamizki, $a \cdot b$ ko'paytma shunday sonki, bu son:

ushbu ko'paytmalarning har biridan katta:	ushbu ko'paytmalarning har biridan kichik:
$1{,}4 \cdot 1{,}7 = 2{,}38$;	$1{,}5 \cdot 1{,}8 = 2{,}70$;
$1{,}41 \cdot 1{,}73 = 2{,}4393$;	$1{,}42 \cdot 1{,}74 = 2{,}4708$;
$1{,}414 \cdot 1{,}732 = 2{,}449048$;	$1{,}415 \cdot 1{,}733 = 2{,}452295$;
$1{,}4142 \cdot 1{,}7320 = 2{,}44939440$	$1{,}4143 \cdot 1{,}7321 = 2{,}44970903$
va hokazo.	va hokazo.

3-ta'rif. *a sonining* ***ikkinchi, uchinchi, to'rtinchi*** *va hokazo* ***darajasi*** *deb har biri a ga teng bo'lgan ikkita, uchta, to'rtta va hokazo ko'paytuvchilardan tuzilgan ko'paytmaga aytiladi.*

Natural darajaga ko'tarish amalining kami va ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatlari 2- qoidaga muvofiq aniqlanadi.

Haqiqiy (irratsional) sonlar uchun teskari amallar ham ratsional sonlar uchun bo'lgani kabi ta'riflanadi: chunonchi a sondan b sonni ayirish $b + x$ yig'indi a songa teng bo'ladigan x sonni topish degan so'zdir va h.k.

Agar a yoki b sonlardan biri ratsional son bo'lib, chekli o'nli kasr bilan ifoda etilsa, u holda ko'rsatilgan ta'riflarda bunday sonning taqribiy qiymatlari o'rniga uning aniq qiymatini olish kerak.

Manfiy irratsional sonlar ustidagi amallar ham ratsional manfiy sonlar uchun berilgan qoidalarga muvofiq bajariladi. Irratsional sonlar ustidagi amallarning xossalari ham ratsional sonlar ustidagi amallarning xossalariga ega ekanligini aniqlash mumkin. Masalan:

1) $a + b = b + a$ (qo'shishning o'rin almashtirish qonuni);

2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (qo'shishning guruhlash qonuni);

3) $a \cdot b = b \cdot a$ (ko'paytirishning o'rin almashtirish qonuni);

4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (ko'paytirishning guruhlash qonuni);

5) $a(b + c) = ab + ac$ (ko'paytirishning qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni);

6) $a \cdot 1 = a$.

Tengsizliklar bilan ifodalangan xossalar irratsional sonlar uchun ham o'z kuchini saqlaydi. Masalan, $a > b$ va $c > 0$ bo'lsa, u holda $a + c > b + c$, $ac > bc$ bo'ladi; agar $c < 0$ bo'lsa, u holda $ac < bc$ bo'ladi va hokazo.

8- §. Haqiqiy sonning moduli va uning xossalari. Yig'indi, ayirma, ko'paytma va bo'linmaning moduli

Absolut miqdor tushunchasi matematikaning muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi. Bu tushuncha tengsizliklar bilan uzviy bog'langandir.

Ta'rif. *a sonning* ***absolut qiymati (moduli)*** *deb, agar u son nomanfiy bo'lsa, a sonning o'ziga, agar u son manfiy bo'lsa, –a soniga aytiladi.*

a sonining absolut qiymati $|a|$ ko'rinishda belgilanadi. Bu kiritilgan belgilashdan foydalanib, a sonning absolut qiymatini quyidagicha yozish mumkin:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ agar } a \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -a, \text{ agar } a<0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Haqiqiy son absolut qiymatining ta'rifga ko'ra istalgan a haqiqiy son uchun

$$|a|=|-a| \text{ va } -|a| \leq a \leq |a| \qquad (1)$$

munosabat o'rinli.

Bu munosabatlarni tekshirib ko'ramiz. $a=0$ bo'lganda birinchi munosabatning bajarilishi ravshan. Agar $a>0$ bo'lsa, u holda $|a|=a, |-a|=-(-a)=a$. Birinchi tengsizlik bajariladi. Agar $a<0$ bo'lsa, u holda $|a|=-a, |-a|=-a$ bo'ladi. Birinchi tengsizlik yana bajariladi.

Ikkinchi tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz. Agar $a \geq 0$ bo'lsa, u holda $|a|=a$, ya'ni a soni $|a|$ bilan ustma-ust tushadi; agar $a<0$ bo'lsa, u holda $|a|=-a$ yoki $a=-|a|$, ya'ni a soni $-|a|$ bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, ikkinchi tengsizlik ham bajariladi.

Geometrik nuqtayi nazardan a haqiqiy sonning $|a|$ moduli son to'g'ri chizig'ida koordinata boshidan a nuqtagacha bo'lgan masofani ifodalaydi.

Absolut miqdor quyidagi muhim xossalarga ega.

1-teorema. ***$|x| < a$ tengsizlik $-a < x < a$ tengsizlikka teng kuchli.***

Isbot. Agar $|x| < a$ tengsizlik bajarilsa, u holda bu tengsizlik hamda (1) dan

$$x < a \tag{2}$$

va $-x < a$ oxirgi tengsizlikni -1 ga ko‘paytirib,

$$x > -a \tag{3}$$

ni olamiz. (2) va (3) tengsizliklardan isbotlanishi kerak bo‘lgan tengsizlik kelib chiqadi.

2-teorema. ***Ushbu***

$$|x| \leq a \tag{4}$$

tengsizlik

$$-a \leq x \leq a \tag{5}$$

tengsizlikka teng kuchli.

Isbot. (4) va (5) tengsizliklarning teng kuchliligi $<$ belgi uchun oldingi teoremada isbotlandi.

Agar endi $|x| = a$ bo‘lsa, u holda yo $x = a$, yoki $x = -a$ bo‘lib, (5) munosabat bajariladi.

3-teorema. ***Agar***

$$|x| > a \tag{6}$$

bo‘lsa, u holda $x > a$ yoki $x < -a$ bo‘ladi.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni $x \leq a$ bo‘lsa, $x \leq -a$ bo‘lishi aniq. Bunday holda (5) tengsizlik bajariladi, demak, (6) munosabat qilingan farazga zid. Bu zidlik teoremani isbotlaydi.

4-teorema. ***Agar $|x| \geq a$ bo‘lsa, u holda $x \geq a$ yoki $x \leq -a$ bo‘ladi.***

Bu teorema ham 3- teorema kabi isbotlanadi.

Natija. *Ushbu*

$$x^2 < a \tag{7}$$

va

$$|x| < \sqrt{a} \tag{8}$$

tengsizliklar teng kuchlidir.

Haqiqatan, (7) tengsizlikdan (8) tengsizlik kelib chiqadi. Aks holda esa $|x| \geq \sqrt{a}$ va $|x|^2 \geq a$ yoki $x^2 \geq a$ bo‘lib, zidlikka kelamiz. Bordi-yu (8) tengsizlik bajarilsa, u holda $|x|^2 < (\sqrt{a})^2$ yoki $x^2 < a$ bo‘lib, (7) tengsizlik bajariladi.

Misollar:

1. x ning $|x-5| = x-5$ tenglamani qanoatlantiradigan qiymatlarini aniqlang.

Yechish. a sonining absolut qiymati ta’rifiga ko‘ra $|a| = a$ tenglik faqat va faqat $a \geq 0$ bo‘lgandagina bajariladi. Shuning uchun berilgan tenglamada $x-5 \geq 0$ bo‘lishi kerak. Bundan $x \geq 5$ bo‘lishi kelib chiqadi.

2. $|x| = x+3$ tenglamani yeching.

Yechish. $x \geq 0$ bo‘lganda tenglama $x = x+3$ ko‘rinishni olib, yechimga ega bo‘lmaydi. $x < 0$ bo‘lganda $-x = x+3$ tenglamani olamiz. Demak, $x < 0$ bo‘lganda tenglama $x = -1\frac{1}{2}$ yechimga ega.

3. $|11-2x| \leq 17$ tengsizlikni yeching.

Yechish. 2-teoremaga ko‘ra $-17 < 11-2x < 17$ ikki qatlam tengsizlik olamiz. Bu keyingi tengsizlikdan

$$-28 \leq -2x \leq 6 \Rightarrow 14 \geq x \geq -3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 14.$$

4. $x^2 - 4x - 1 > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish.

$$x^2 - 4x - 1 > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 5 \Rightarrow (x-2)^2 > 5 \Rightarrow |x-2| > \sqrt{5}.$$

3-teoremaga ko‘ra: agar $x-2 > \sqrt{5}$ bo‘lsa, $x-2 > \sqrt{5} \Rightarrow x > 2+\sqrt{5}$ bo‘ladi yoki $x-2 < -\sqrt{5} \Rightarrow$ $\Rightarrow x < 2-\sqrt{5}$ bo‘ladi.

Absolut qiymatning xossalarini o‘rganishni davom ettiramiz.

5-teorema. ***Yig‘indining absolut qiymati qo‘shiluvchilar absolut qiymatlarining yig‘indisidan katta bo‘la olmaydi, ya’ni*** x_1 ***va*** x_2 ***haqiqiy sonlar uchun***

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \qquad (9)$$

tengsizlik o‘rinli.

Isbot. x_1 va x_2 haqiqiy sonlar uchun (1) munosabatlarning ikkinchisi o'rinli:

$$-|x_1|\leq x_1 \leq |x_1|, -|x_2|\leq x_2 \leq |x_2|.$$

Bu tengsizliklarni hadlab qo'shib,

$$-(|x_1|+|x_2|)\leq x_1+x_2\leq |x_1|+|x_2|$$

tengsizlikni olamiz. 2- teoremaga ko'ra bu tengsizlikdan talab qilingan (9) tengsizlikni olamiz.

5- teoremani umumlashtirish ham mumkin. Bir qancha sonlar yig'indisining absolut qiymati qo'shiluvchilar absolut qiymatlarining yig'indisidan katta bo'la olmaydi, ya'ni istalgan $n\in N$ uchun

$$|x_1+x_2+...+x_n|\leq|x_1|+|x_2|+...+|x_n| \qquad (10)$$

tengsizlik o'rinli.

6-teorema. ***Ikkita son ayirmasining absolut qiymati bu sonlar absolut qiymatlarining ayirmasidan katta yoki teng.***

Isbot. $|x_1-x_2|\geq|x_1|-|x_2|$ tengsizlikni isbotlashimiz kerak. Istalgan x_1 va x_2 sonlar uchun

$$x_1=(x_1-x_2)+x_2$$

tenglik o'rinli. (9) tengsizlikdan

$$|x_1|=|(x_1-x_2)+x_2|\leq|x_1-x_2|+|x_2|$$

tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlikdan talab qilingan tengsizlik kelib chiqadi: $|x_1-x_2|\geq|x_1|-|x_2|$.

7-teorema. ***Ko'paytmaning absolut qiymati ko'paytuvchilar absolut qiymatlarining ko'paytmasiga teng.***

Isbot. Teoremani ikkita ko'paytuvchi uchun isbotlaymiz, ya'ni $|x_1x_2|=|x_1|\cdot|x_2|$ tenglik o'rinli ekanini ko'rsatamiz.

Absolut qiymatning ta'rifiga ko'ra

$$|x_1x_2|\geq 0, |x_1|\geq 0, |x_2|\geq 0.$$

Bundan barcha hollar uchun $|x_1x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bu teorema istalgan sondagi ko‘paytuvchilar uchun ham o‘rinli:

$$|x_1x_2 \ldots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_n|, n \in N.$$

Agar $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$ bo‘lsa, u holda

$$|x^n| = |x|^n.$$

n butun musbat ko‘rsatkichli darajaning absolut qiymati asos absolut qiymatining *n*- darajasiga teng.

8-teorema. ***Ikki son bo‘linmasining absolut qiymati bo‘linuvchi absolut qiymatining bo‘luvchi absolut qiymatiga bo‘linganiga teng, ya’ni***

$$\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|}.$$

Isbot. $\frac{x_1}{x_2} = Z$ almashtirish bajaramiz, $x_1 = x_2Z$ bo‘ladi. Bu tenglikka 7- teoremani qo‘llasak, $|x_1| = |x_2Z| = |x_2||Z|$ bo‘ladi. Bundan

$$|Z| = \frac{|x_1|}{|x_2|} \Rightarrow \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|}$$

kelib chiqadi.

II BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

1. a) 2,(32); b) 52(375); d) 1,37(9); e) $\sqrt{3}$; f) *e*; g) π; h) lg 2 sonlardan qaysilari irratsional son, qaysilari ratsional son?

2. $r = \sqrt{3}$ tenglikni qanoatlantiradigan ratsional son mavjud emasligini isbotlang.

3. Yig‘indisi ratsional son bo‘ladigan qandaydir ikkita irratsional sonni ko‘rsating.

4. Ko‘paytmasi va bo‘linmasi ratsional son bo‘ladigan irratsional sonlardan bir nechtasini toping.

5. $\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{10}$ sonlarni cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida 0,0001 aniqlikda ifodalang.

6. Quyidagi tengsizliklarni yeching:

a) $|x-2|<3$; b) $|x+3|>2$;
d) $|x|<x+1$; e) $|x^2-5|>2$;
f) $|x^2-2x-3|>x^2-2x-3$; g) $|x+3|-|x+1|<2$.

7. Tenglamalarni yeching:

a) $|2x+5|=x^2$; b) $\frac{|x-1|}{|x+1|}=\frac{x-1}{x+1}$;

d) $|x^2-5x+6|=-(x^2-5x+6)$.

8. $|x-2|<3$ va $|x-6|<4$ tengsizliklarni bir vaqtda x ning qanday qiymatlari qanoatlantiradi?
(Javob. $2<x<5$.)

9. $x_0=3$ nuqtadan masofasi 10 dan oshmaydigan x nuqtalar to‘plamini toping. (Javob. $-7\leq x\leq 13$.)

10. t temperaturaning t_0 normal temperaturadan og‘ishi 0,3 °C dan oshmaydi. Bu og‘ishni absolut miqdor belgisi bilan yozing.

11. $\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ va $\sqrt{11}$ sonlarni son to‘g‘ri chizig‘ida tasvirlang.

12. $M_1\left(-2\frac{1}{7}\right)$ va $M_2\left(4\frac{1}{2}\right)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

13. a) 17,2 ... va $\frac{87}{5}$; b) $\frac{3}{7}$ va 0,428... sonlarni taqqoslang.

14. a) 1,4978; b) $\sqrt{5}$; d) $\frac{15}{7}$ sonlarining 0,001 aniqlikdagi ortig‘i va kami bilan olingan o‘nli yaqinlashishlarini toping.

15. $-1{,}7322$ va $-1{,}7321$ sonlari $-\sqrt{3}$ sonining 0,0001 aniqlikdagi kami va ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatlari bo'lishini ko'rsating.

16. To'g'ri to'rtburchakning a va b tomonlari uchun $a = (10 \pm 0{,}1)$ m, $b = (100 \pm 0{,}5)$ m taqribiy natijalar o'lchab topiladi. Uning perimetrining taqribiy qiymatini toping. Absolut va nisbiy xatoning chegaralarini toping. (Javob. $P = (220 \pm 1{,}2)$ m; $h_P = 1{,}2$ m; $\delta h_P = 0{,}06$.)

17. Sinf xonasining eni va bo'yini o'lchash natijasi $a = (8{,}3 \pm 0{,}02)$ m, $b = (12{,}2 \pm 0{,}03)$ ekani aniqlandi. Sinf xonasining yuzini toping. Yo'l qo'yilgan xatolarni baholang. (Javob. $S = (101{,}25 \pm 0{,}5)$ m^2; $h_s \approx 0{,}49$ m^2; $\delta h_s = 0{,}0048$.)

18. $r = (2{,}1 \pm 0{,}02)$ sm radiusli sferik shakldagi detalni tayyorlash uchun buyurtma berildi. Detalning hajmini aniqlang va xatolarni baholang. (Javob. $V = (38{,}8 \pm 1{,}6)$ sm^3; $h_V \approx 1{,}56$ sm^3; $\delta h_V = 0{,}03$.)

19. Kub qirrasining uzunligi uchun 16 sm natija topildi. Bu kub hajmini hisoblashda nisbiy xato 3% dan oshmasligi uchun uning qirrasi uzunligini qanday aniqlikda o'lchash kerak? (Javob. $a = (16 \pm 0{,}16)$ sm.)

III BOB

KOMPLEKS SONLAR

1-§. Algebraik shakldagi kompleks sonlar

Kompleks sonlar to‘plami. Shu vaqtga qadar biz faqat haqiqiy sonlar bilan ish ko‘rdik. Istalgan o‘lchash natijalarini musbat haqiqiy sonlar yordamida ifodalash mumkinligiga ishonch hosil qildik. Lekin istalgan miqdorning o‘zgarishini har doim ham haqiqiy sonlar bilan ifoda qilish mumkin bo‘lavermaydi. Haqiqiy sonlar ustida bajarilgan arifmetik amallar (qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va noldan farqli songa bo‘lish) natijalari yana haqiqiy sonlarni beradi. Bu yerdan xususiy holda barcha haqiqiy koeffitsiyentli ratsional funksiyalar o‘z aniqlanish sohalaridagi argumentning haqiqiy qiymatlarida haqiqiy qiymatlar qabul qiladi, degan xulosani chiqarish mumkin.

Kvadrat ildiz chiqarish amali barcha haqiqiy sonlar uchun aniqlanmagan. Bu amal faqatgina manfiy bo‘lmagan haqiqiy sonlar uchun ma’noga ega bo‘lib, manfiy haqiqiy sonlardan ildiz chiqarish ma’noga ega emas, ya’ni manfiy haqiqiy sonning kvadrat ildizi haqiqiy son bo‘lmasligi mumkin. Shuning uchun ham kvadrat tenglamalar nazariyasida uchta hol alohida-alohida qaraladi: agar $D=b^2-4ac>0$ bo‘lsa, u holda $ax^2+bx+c=0$ tenglama ikkita har xil haqiqiy ildizlarga ega, $D=0$ bo‘lganda bu tenglama ikkita bir-biriga teng haqiqiy ildizga ega, $D<0$ bo‘lganda esa u tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo‘lmaydi.

Shunday qilib, yuqori darajali tenglamalarni, ya’ni ikkinchi, uchinchi, to‘rtinchi va h.k. darajali tenglamalarni yechish uchun matematik olimlarning urinishlari haqiqiy sonlar to‘plamini kengaytirish muammosini vujudga keltirdi. Bu urinishlar haqiqiy sonlar to‘plamiga kvadrati -1 ga teng ($i^2=-1$) bo‘lgan yangi i sonini qo‘shib olish bilan uni kengaytirish imkoniyatini berdi. Lekin haqiqiy sonlar uchun bunday xossa mavjud emas, ya'ni kvadrati -1 ga teng bo'lgan haqiqiy son mavjud emas. Yangi son „mavhum birlik" degan nom olgan bo'lib, bu son bironbir o'lchashning natijasi ham emas. Yangi i sonining kiritilishi sonlar to'plamini kengaytirishning imkoniyatlarini ochdi. Sonlar to'plamiga bi ($b \in R$) ko'rinishdagi ko'paytmani va $a+ib$ ($a \in R$) ko'rinishdagi yig'indini kiritish imkoniyatiga ega bo'ldik.

1-ta'rif. *$a+ib$ ko'rinishdagi ifoda (bu yerda a va b — haqiqiy sonlar, i — mavhum birlik)* ***kompleks son*** *deyiladi.*

a soni kompleks sonning haqiqiy qismi, bi esa uning mavhum qismi deyilib, quyidagicha belgilanadi:

$$\mathrm{Re}(a+ib)=a, \quad \mathrm{Im}(a+bi)=bi.$$

Bu yerda Re belgisi fransuzcha *realle* — haqiqiy so'zining birinchi bo'g'ini, Im ham fransuzcha *imaginail* — mavhum sozining birinchi bo'g'ini.

2-ta'rif. *Ikkita $a+ib$ va $c+di$ kompleks sonlar faqat va faqatgina $a=c$ va $b=d$ bo'lgandagina* ***bir-biriga teng*** *deyiladi.*

Bu ta'rifdan $a+bi$ kompleks sonning, agar $a=0$ va $b=0$ bo'lsa va faqat shunday bo'lgandagina nolga teng bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, faqat va faqat $a=0$ va $b=0$ bo'lgandagina $a+bi=0$ bo'ladi. Bu sonni soddagina 0 orqali belgilaymiz. Bu son odatdagi haqiqiy son — 0 soni bilan ustma-ust tushadi.

Kompleks sonlar to'plamini C orqali belgilaymiz. R haqiqiy sonlar to'plami C kompleks sonlar to'plamiga tegishli bo'lishini ($R \in C$) sezish mumkin. Haqiqatan, har qanday a haqiqiy sonni $a+0i$ ko'rinishdagi kompleks son deyish mumkin.

3-ta'rif. *$a+ib$ va $a-ib$ ko'rinishdagi kompleks sonlar* ***o'zaro qo'shma kompleks sonlar*** *deyiladi.*

Qo‘shmalik o‘zarolik tushunchasidir. Masalan, $3+4i$ kompleks son $3-4i$ kompleks sonning qo‘shmasi bo‘lsa, u holda $3-4i$ kompleks son ham $3+4i$ kompleks sonning qo‘shmasi hisoblanadi.

4-ta’rif. *$-a-bi$ soni $a+ib$ soniga qarama-qarshi son deyiladi.*

2- §. Algebraik shakldagi kompleks sonlar ustida amallar

1. Qo‘shish.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$

$$(a+bi)+(c+di)+(m+ni)=(a+c+m)+(b+d+n)i.$$

Bundan kompleks sonlar yig‘indisi ham haqiqiy sonlar yig‘indisiga tegishli bo‘lgan o‘rin almashtirish va guruhlash xossalariga ega ekanligini ko‘rish oson.

Qo‘shma va qarama-qarshi kompleks sonlarning yig‘indisi haqiqiy son bo‘ladi:

$$(a+bi)+(a-bi)=2a; \quad (a+bi)+(-a-bi)=0.$$

2. Ayirish. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$

3. Ko‘paytirish.

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi-bd=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

Shunga o‘xshash uch va undan ortiq kompleks sonlarning ham ko‘paytmasini topish mumkin.

Nolga teng bo‘lmagan ikkita qo‘shma kompleks sonning $(a+bi)(a-bi)$ ko‘paytmasi musbat haqiqiy a^2+b^2 songa teng. Haqiqatan $(a+bi)(a-bi)=a^2+abi-abi-b^2i^2$.

$i^2=-1$ bo‘lishini e’tiborga olsak, talab qilingan

$$(a+bi)+(a-bi)=a^2+b^2$$

natijani olamiz.

Misollar:

1) $(3+2i)(4-5i)=12+8i-15i-10i^2=$
$=12-7i+10=22-7i;$

2) $(6+i)(6-i)=36-i^2=36+1=37;$

3) $(7+6i)(7-6i)=49-36i^2=49+36=85.$

4. Bo‘lish. $a+bi$ kompleks sonni $c+di$ kompleks songa bo‘lish deb, shunday uchinchi bir $x+yi$ kompleks songa aytiladiki, bu son uchun $\frac{a+bi}{c+di}=x+yi$ bo‘lsa, $(x+yi)(c+di)=a+bi$ bo‘ladi.

Oxirgi tenglikning ikkala qismini $c-di$ ga ko‘paytirib,

$$(a+bi)(c-di)=(x+yi)(c^2+d^2)$$

ekanligini topamiz.

Bu tenglikning ikkala qismini $\frac{1}{c^2+d^2}$ $(c^2+d^2\neq 0)$ ga ko‘paytirib,

$$\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=x+yi \Rightarrow \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i=x+yi$$

munosabatni olamiz. Oxirgi tenglikdan ikkita kompleks sonning tenglik shartiga ko‘ra x va y uchun $x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$ ifodalarni topamiz.

Misollar:

1) $\frac{7-8i}{9+10i}=\frac{(7-8i)(9-10i)}{(9+10i)(9-10i)}=\frac{63-72i+70i-80i^2}{81+100}=\frac{143-2i}{181}=\frac{143}{181}-\frac{2}{181}i;$

2) $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i}=\frac{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)}=\frac{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\frac{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)}{\frac{13}{36}}=\frac{48}{13}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right).$

Kompleks sonlar uchun ham haqiqiy sonlarning asosiy qonunlari o‘z kuchida qoladi:

a) qo‘shishning o‘rin almashtirish qonuni:

$$(a+bi)+(c+di)=(c+di)+(a+bi);$$

b) qo‘shishning guruhlash qonuni:

$$(a+bi)+(c+di)+(m+ni)=$$
$$=(a+bi)+[(c+di)+(m+ni)];$$

d) ko‘paytirishning o‘rin almashtirish qonuni:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(c+di)(a+bi);$$

e) ko‘paytirishning guruhlash qonuni:

$$(a+bi)\cdot(c+di)\cdot(m+ni)=(a+bi)[(c+di)\cdot(m+ni)];$$

f) ko‘paytirishning qo‘shishga nisbatan taqsimot qonuni:

$$[(a+bi)\cdot(c+di)]\,(m+ni)=(a+bi)\,(m+ni)+(c+di)\,(m+ni).$$

5. Darajaga ko‘tarish. $z=a+bi$ kompleks sonni n-darajaga ($n\in N$) ko‘tarish kompleks sonlarni ko‘paytirishning xususiy holi sifatida bajariladi:

$$z^n=\underbrace{zz\ldots z}_{n\text{ marta}}$$

Masalan,

$$z=a+bi,\ z^2=(a+bi)^2=(a+bi)(a+bi)=(a^2+b^2)+2abi.$$

i mavhum birlikning natural darajalarini hisoblaymiz. Agar $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(cb+ad)i$ da $a=c=0$, $b=d=1$ bo‘lsa, $i^2=-1$ bo‘lishi kelib chiqadi. $i^3=i^2i=-i$; $i^4=i^2i^2=(-1)(-1)=1$; $i^5=i^4i=i$; $i^6=i^4i^2=-1$; $i^7=i^4i^3=-i$; $i^8=i^4i^4=1$ va hokazo. Umuman, $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, bunda n — natural son.

Misollar:

1) $i^{59}=i^{4\cdot 14+3}=i^{4\cdot 14}i^3=(i^4)^{14}i^3=1i^3=1\,(-i)=-i$;

2) $i^{96}=i^{4\cdot 24}=(i^4)^{24}=1^{24}=1.$

3- §. Kompleks sondan kvadrat ildiz chiqarish va kompleks koeffitsiyentli kvadrat tenglamalarni yechish

$z=a+bi$ kompleks sonning kvadrat ildizi $x+yi$ ko‘rinishdagi kompleks son bo‘lsin, ya’ni $\sqrt{a+bi}=x+yi$.

Bu tenglikning har ikkala qismini kvadratga ko‘taramiz:

$$a+bi=(x^2-y^2)+2xyi.$$

Ikkita kompleks sonning bir-biriga tenglik shartidan x va y ni topishga imkon beradigan ikkinchi darajali tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} x^2-y^2=a, \\ 2xy=b. \end{cases} \quad (1)$$

Masala (1) sistemaning haqiqiy ildizlarini topishga keltiriladi. Ikkala tenglamani kvadratga ko'tarib, so'ngra ularni qo'shib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2 \Rightarrow x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$$

(radikal oldidagi ishora tashlangan, chunki x va y ning haqiqiy qiymatlarida x^2+y^2 ifodaning manfiy bo'lishi mumkin emas). Oxirgi tenglamani (1) sistemaning birinchi tenglamasi bilan birgalikda olamiz, ularni qo'shib va ayirib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}};$$

$$y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

(1) sistemaning ikkinchi tenglamasidan: agar $b>0$ bo'lsa, x va y ishoralari bir xil, agar $b<0$ bo'lsa, x va y ishoralari har xil bo'lishi kelib chiqadi. Shuning uchun:

$b>0$ bo'lganda, $\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$,

$b<0$ bo'lganda, $\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$. (2)

Misollar:

1) $$\sqrt{5+12i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right)=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}}+i\sqrt{\frac{8}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{9}+i\sqrt{4}\right)=\pm(3+2i);$$

2) $\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{i}=\sqrt{0+1i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right)=$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right);$$

3) $\sqrt{3-4i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}+3}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}-3}{2}}\right]=\pm(2-i).$

Kompleks koeffitsiyentli $az^2+bz+c=0,\ a\neq 0$ tenglama ham haqiqiy koeffitsiyentli tenglama uchun chiqarilgan

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

formula bo‘yicha yechiladi. Xususiy holda, diskriminanti manfiy bo‘lgan haqiqiy koeffitsiyentli tenglamalarni yechamiz.

Misol. Tenglamalarni yeching:

1) $9x^2-12x+7=0;$

2) $x^2+3=0;$

3) $z^2-(3+2i)z+6i=0.$

Yechish. 1) $9x^2-12x+7=0,$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-63}}{9}=\frac{6\pm\sqrt{-27}}{9}=\frac{6\pm 3i\sqrt{3}}{9}=\frac{2\pm i\sqrt{3}}{3};$$

2) $x^2+3=0\Rightarrow x^2=-3\Rightarrow x_{1,2}=\pm i\sqrt{3};$

3) $z^2-(3+2i)z+6i=0,$

$$z_{1,2}=\frac{(3+2i)\pm\sqrt{(3+2i)^2-24i}}{2}=\frac{(3+2i)\pm\sqrt{9+12i+4i^2-24i}}{2}=$$

$$=\frac{(3+2i)\pm\sqrt{9-12i-4}}{2}=\frac{(3+2i)\pm\sqrt{5-12i}}{2}.$$

Chiqarilgan $(b=-12<0)$ (2) formulaga ko‘ra

$$\sqrt{5-12i}=\sqrt{\frac{\sqrt{5^2+(-12)^2}+5}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{5^2+(-12)^2}-5}{2}}=3-2i,$$

$$z_{1,2}=\frac{(3+2i)\pm(3-2i)}{2},\ z_1=3;\ z_2=2i.$$

Kompleks koeffitsiyentli kvadrat tenglamalar uchun ham Viyet teoremasi o‘z kuchida qoladi:

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

$D = b^2 - 4\ ac < 0$ bo‘lganda haqiqiy koeffitsiyentli kvadrat tenglamaning ildizlari bir-biriga qo‘shma kompleks sonlar bo‘ladi. Bordi-yu $z = a + bi$ ko‘rinishdagi kompleks son biror kvadrat tenglamaning ildizi bo‘lsa, $z = a - bi$ kompleks son ham shu tenglamaning ildizi bo‘ladi. Agar biror kvadrat tenglamaning bitta kompleks ildizi berilgan bo‘lib, bu kvadrat tenglamani topish talab qilinsa, albatta, berilgan ildizga qo‘shma kompleks son ham bu tenglamaning ildizi bo‘lishini e’tiborga olib, Viyet teoremasidan foydalanish lozim.

Masalan, ildizi $\sqrt{6} - i\sqrt{5}$ bo‘lgan kvadrat tenglamani tuzing deyilsa, $\sqrt{6} + i\sqrt{5}$ kompleks son ham izlanayotgan tenglamaning ildizi bo‘lishini e’tiborga olsak,

$$P = -(z_1 + z_2) = -\left[(\sqrt{6} - i\sqrt{5}) + (\sqrt{6} + i\sqrt{5})\right] = -2\sqrt{6},$$

$$Q = z_1 z_2 = (\sqrt{6} - i\sqrt{5})(\sqrt{6} + i\sqrt{5}) = 6 + 5 = 11$$

bo‘lib, izlanayotgan kvadrat tenglama

$$z^2 - 2\sqrt{6}z + 11 = 0$$

bo‘ladi.

4- §. Kompleks sonning trigonometrik shakli

1. Kompleks sonlarni geometrik tasvirlash. Kompleks sonlar to‘plamining amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan eng muhim xususiyatlaridan biri ularni geometrik tasvirlashdir.

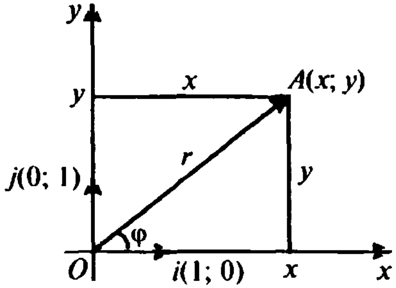
$z = x + iy$ kompleks son $(x;\ y)$ haqiqiy sonlar jufti bilan beriladi. Bu juft sonlarni esa koordinatalar tekisligida biror nuqtaning koordinatalari deb qarash mumkin. Har bir $z = x + iy$ kompleks songa A nuqtani mos qo‘yamiz va uni $A\ (x;\ y)$ deb belgilaymiz.

Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini olib, uzunlik birligini tanlab, haqiqiy sonlarni Ox o‘qi (gorizontal o‘q) bo‘yicha, mavhum sonlarni esa Oy o‘qi (vertikal o‘q) bo‘yicha qo‘yib chiqamiz. Shularga muvofiq Ox o‘qi *haqiqiy o‘q*, Oy o‘qi esa *mavhum o‘q* deb ataladi.

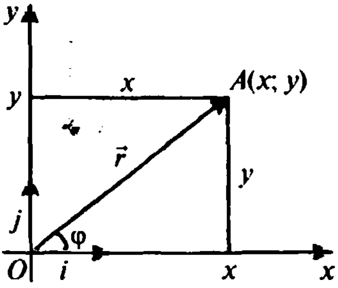
Demak, berilgan koordinata o‘qlarida va berilgan uzunlik birligida tekislikning har bir nuqtasiga bitta va faqat bitta kompleks son to‘g‘ri keladi va, aksincha, har qanday kompleks songa tekislikning bitta va faqat bitta nuqtasi to‘g‘ri keladi (14-rasm).

Shunday qilib, har qanday haqiqiy son, son to‘g‘ri chizig‘idagi nuqtalar bilan geometrik yo‘sinda tasvirlangani kabi, har qanday kompleks son ham geometrik usulda tekislik nuqtalari bilan tasvirlanishi mumkin. Har bir $z = x + yi$ kompleks songa tekislikning $(x;\ y)$ koordinatali nuqtasi va, aksincha, tekislikning $(x;\ y)$ koordinatali nuqtasiga $z = x + yi$ kompleks son mos qo‘yiladi. Shunday qilib, barcha kompleks sonlar to‘plami bilan sonli tekislikning barcha nuqtalari to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. Kompleks sonlarni boshqacha ham geometrik tasvirlash mumkin. Har bir $z = x + yi$ kompleks songa boshi O koordinata boshida, oxiri $A(x;\ y)$ nuqtada yotgan $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ radius-vektorni mos qo‘yish mumkin (15- rasm).

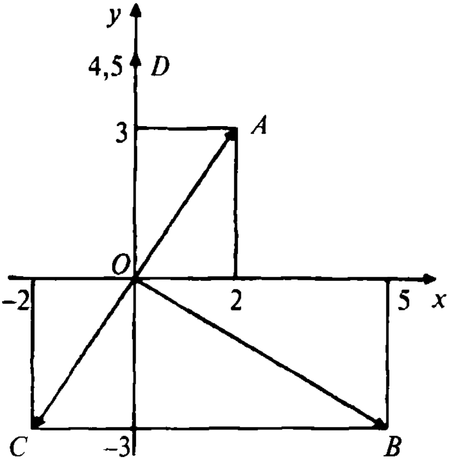
Demak, kompleks sonlar to‘plami bilan tekislikning barcha radius-vektorlari to‘plami orasida ham bir qiymatli



14-rasm.



15-rasm.



16- rasm.

moslik mavjud. $x + yi$ kompleks songa $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ radius-vektor mos kelsa va, aksincha, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ radius-vektorga $x + yi$ kompleks son mos keladi ($\vec{i}, \vec{j}$ — birlik vektorlar (ortlar)).

16- rasmda $2+3i(\overrightarrow{OA})$, $5-3i(\overrightarrow{OB})$, $-2-3i(\overrightarrow{OC})$, $4,5i(\overrightarrow{OD})$ sonlarga mos keluvchi vektorlar tasvirlangan.

2. Kompleks sonning trigonometrik shakli. Kompleks sonlarning vektorlar yordamida geometrik tasvirlanishidan foydalanib, algebraik shaklda berilgan $x + yi$ kompleks sonni trigonometrik shaklda ifodalash mumkin. Agar $A(x;\ y)$ nuqtaga $z = x + yi$ kompleks son mos kelsa, u holda r ga $z = x + yi$ kompleks sonning *moduli (uzunligi)* deyiladi va $r = |z| = |x + yi|$ koʻrinishda yoziladi. 15- rasmdan koʻramizki, koordinatalar boshidan berilgan $z = x + yi$ kompleks sonni tasvirlovchi nuqtagacha boʻlgan $r = |z|$ masofa bir kateti x ga, ikkinchi kateti y ga teng boʻlgan toʻgʻri burchakli uchburchakning gipotenuzasidan iborat. Demak,

$$r = |z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1)$$

φ burchak esa $z = x + yi$ kompleks sonning argumenti deyiladi va $\varphi = \arg z$ koʻrinishda yoziladi. z kompleks sonning φ argumenti $2k\pi$, $(k \in Z)$ gacha aniqlikda

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \ \sin\varphi = \frac{y}{r} \tag{2}$$

formulalardan aniqlanadi. $z = 0$ uchun arg z aniqlanmagan. (2) formulalar yordamida φ ning qiymatini bir qiymatli aniqlab bo‘lmaydi. Shuning uchun φ ni aniqlashda quyidagilarni hisobga olish kerak:

$x > 0, y \geq 0$ bo‘lganda, $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$;

$x \leq 0, y > 0$ bo‘lganda, $\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \pi$;

$x < 0, y \leq 0$ bo‘lganda, $\pi \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}$;

$x \geq 0, y < 0$ bo‘lganda, $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi < 2\pi$.

Haqiqiy sonlar uchun φ argument faqat ikkita qiymat qabul qiladi.

Musbat sonlar uchun $\varphi = 2k\pi$ va manfiy sonlar uchun esa $\varphi = (2k + 1)\pi$ bo‘ladi ($k = 0$; ±1; ±2; ...).

(2) dan

$$x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi. \tag{3}$$

Bu formulalar yordamida kompleks sonning $z = x + yi$ algebraik shaklidan uning trigonometrik shakliga o‘tish mumkin:

$$x + yi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Demak,

$$z = x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{4}$$

Bunda

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \text{ agar } x > 0, y \geq 0; x \geq 0; y < 0 \\ \text{(I va IV chorakdan olingan nuqtalar uchun);} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, \text{ agar } x \leq 0, y > 0 \\ \text{(II chorakdan olingan nuqtalar uchun);} \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, -\pi, \text{ agar } x < 0, y \leq 0 \\ \text{(III chorakdan olingan nuqtalar uchun).} \end{cases}$$

(4) va (5) tengliklar bilan aniqlangan $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ifoda kompleks sonning *trigonometrik shakli* deyiladi.

1-misol. $z = 2 + 2i$ sonni trigonometrik shaklda ifodalang.

Yechish. $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$\varphi = \arg z$ ni topamiz:

$$\cos\varphi = \frac{x}{y} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \sin\varphi = \frac{v}{z} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}.$$

Demak, $r = 2\sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$ bo‘lib, $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ bo‘ladi.

2-misol. $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ sonning moduli va argumentini toping.

Yechish. Berilgan sonning ko‘rinishini trigonometrik funksiyalarning juftlik va toqlik xossalaridan foydalanib, o‘zgartiramiz:

$$z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

z sonning bu ifodasi uning (4) shakliga mos keladi.

Demak, $r = |z| = 3, \varphi = \arg z = -\frac{2\pi}{3}.$

5- §. Trigonometrik shakldagi kompleks sonlar ustida amallar

1. Ko‘paytirish. Trigonometrik shakldagi kompleks sonlar berilgan bo‘lsin:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Ularning ko‘paytmasini topish talab qilinsin.

$$z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 +$$
$$+ \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Olingan ifoda z_1z_2 ko'paytmaning trigonometrik shaklidir.

Shunday qilib, ikki kompleks son ko'paytmasining moduli ko'paytuvchilar modullarining ko'paytmasiga teng, argumenti esa ko'paytuvchilar argumentlarining yig'indisiga teng:

$$|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1||z_2|;$$

$$\arg(z_1z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + z_2.$$

Olingan natijalarni umumlashtirish ham mumkin.

Agar $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, ..., $z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$ bo'lsa, u holda

$$z_1z_2...z_n = r_1r_2...r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) +$$
$$+ i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n)]. \quad (6)$$

1-misol. $z_1 = 2(\cos 60^\circ + i\ \sin 60^\circ)$,
$z_2 = 3(\cos 45^\circ + i\ \sin 45^\circ)$

kompleks sonlar berilgan. z_1z_2 ko'paytmani toping.

Yechish. $z_1z_2 = 6[\cos(60^\circ + 45^\circ) + i\sin(60^\circ + 45^\circ)] =$
$= 6(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ) = 6[\cos(90^\circ + 15^\circ) + i\sin(90^\circ + 15^\circ)] =$
$= 6(-\sin 15^\circ + i\cos 15^\circ)$.

2-misol. $z_1 = 2(\cos 150^\circ + i\ \sin 150^\circ)$,
$z_2 = 3(\cos 200^\circ + i\ \sin 200^\circ)$,
$z_3 = 5(\cos 10^\circ + i\ \sin 10^\circ)$

kompleks sonlar berilgan. $z_1z_2z_3$ ko'paytmani toping.

Yechish. Yuqoridagiga o'xshash topamiz:

$$z_1z_2z_3 = 30(\cos 360^\circ + i\ \sin 360^\circ) = 30 \cdot (1 + i \cdot 0) = 30.$$

Yaqqol ko'rinib turibdiki, bu sonlarni algebraik shaklda ko'paytirib chiqish uchun anchagina katta hisoblashlarni bajarish va ko'pgina vaqt kerak bo'lar edi.

2. Bo'lish. Ushbu $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ kompleks sonni $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ kompleks songa bo'lish kerak bo'lsin.

Kompleks sonlarni ko'paytirishning yuqoridagi qoidasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}{r_2\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_2)]}{r_2\{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2]}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Demak, ikkita kompleks son bo'linmasining moduli ular modullarining bo'linmasiga, argumenti esa bo'linuvchi bilan bo'luvchi argumentlarining ayirmasiga tengdir:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{r_1}{r_2};\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2.$$

3-misol. $z_1 = 3(\cos 30° + i\ \sin 30°)$, $z_2 = 2(\cos 60° +$ $+i\ \sin 30°)$ berilgan. $\frac{z_1}{z_2}$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)}{2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)}=1,5[\cos(30^\circ-60^\circ)+i\sin(30^\circ-60^\circ)]=$$

$$=1,5[\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ)]=1,5(\cos 30^\circ-i\sin 30^\circ).$$

3. Darajaga ko'tarish.

Agar $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ bo'lsa, u holda (6) ga asosan

$$z^n=[r\cos\varphi+i\sin\varphi]^n=r^n[\cos n\varphi+i\sin n\varphi] \qquad (7)$$

formulani olamiz. (7) formula *Muavr formulasi* deyiladi. Shunday qilib, kompleks son darajasining moduli asos modulining o'sha darajasiga teng bo'lib, argumenti esa asos argumenti bilan daraja ko'rsatkichining ko'paytmasiga teng:

$$|z^n|=|z|^n=r^n;\quad \arg(z^n)=n\ \arg\ z.$$

Agar (7) formulada $r=1$ xususiy holni qarasak, matematikada keng qo‘llaniladigan

$$(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\ \sin n\varphi \qquad (8)$$

formulani olamiz.

4-misol. $\sin 2\varphi$ va $\cos 2\varphi$ ni $\sin\varphi$ va $\cos\varphi$ orqali ifodalang.

Yechish. (8) formulada $n=2$ desak,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi \text{ yoki}$$
$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2(\cos\varphi\sin\varphi)i = \cos 2\varphi + i\ \sin 2\varphi$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Kompleks sonlarning tengligiga ko‘ra oldindan ma’lim bo‘lgan

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,\ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

formulalarni olamiz.

5-misol. $\cos 3\varphi$ va $\sin 3\varphi$ ni $\cos\varphi$ va $\sin\varphi$ orqali ifodalang.

Yechish. Agar (8) Muavr formulasida $n=2$ desak,

$$(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\ \sin 3\varphi$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikning chap qismidagi ikki son yig‘indisining kubini ochib, $i^2=-1$, $i^3=-i$ bo‘lishini va ikkita kompleks sonning tenglik shartlarini e’tiborga olsak,

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,\ \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

formulalarni hosil qilamiz.

Shuningdek, (8) da $n=4$ desak,

$$\cos 4\varphi = 4\cos^4\varphi - 6\sin^2\varphi\ \cos^2\varphi + \sin^4\varphi;$$
$$\sin 4\varphi = 2\sin\varphi\ \cos\varphi(2\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi)$$

munosabatlarni ham keltirib chiqarish mumkin.

6-misol. $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$ ni hisoblang.

(7) formulaga asosan topamiz:

$$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6=2^6\left[\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$
$$=64(\cos\pi+i\sin\pi)=64\cdot(-1+0\cdot i)=-64.$$

7-misol. $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$ ni hisoblang.

Yechish. Darajaning asosidagi kompleks sonni trigonometrik shaklda ifodalaymiz:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1}=1,$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}\to\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3},$$

$$\varphi=60^\circ\left(\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ=\frac{1}{2}\right).$$

Demak, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1\,(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$.

Oxirgi tenglikka (7) formulani qo'llaymiz:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}=[1\,(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)]^{20}=$$

$$=1^{20}\,(\cos 1200^\circ+i\sin 1200^\circ)=\cos(360^\circ\cdot 3+120^\circ)+$$

$$+i\sin(360^\circ\cdot 3+120^\circ)=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ=$$

$$=\cos(90^\circ+30^\circ)+i\sin(90^\circ+30^\circ)=$$

$$=-\sin 30^\circ+i\cos 30^\circ=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Ildiz chiqarish. Haqiqiy sonlar to'plamida biz faqat „arifmetik ildiz“ tushunchasidan foydalandik. Kompleks sonlar to'plamida esa ildizning umumiy ta'rifi qaraladi. $n\in N$ bo'lsin.

Ta'rif. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ *kompleks sonning* ***n-darajali ildizi*** *deb,* $u^n=z$ *tenglikni qanoatlantiruvchi* $u=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ *kompleks songa aytiladi va* $u=\sqrt[n]{z}$ *ko'rinishda belgilanadi.*

Ta'rifga ko'ra

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho\,(\cos\theta+i\sin\theta)\ \text{yoki}$$

$$\rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \qquad (9)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Ikkita kompleks sonning modullari teng bo'lib, argumentlari bir-biridan 2π ga karrali bo'lgan butun sonlarga farq qilsa, ular teng deyiladi.

Ta'rifga ko'ra (9) dan

$$\rho^n = r, \; n\theta = \varphi + 2k\pi, \; k \in Z_0$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bu yerdan

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \; \theta = \frac{\varphi+2k\pi}{n}, \; n \in N, \; k \in Z_0.$$

ρ va θ ning bu topilgan ifodalarini (9) ga qo'yib, trigonometrik shakldagi kompleks sondan ildiz chiqarish formulasini olamiz:

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad (10)$$

bunda $n \in N$, $k \in Z_0$, $\sqrt[n]{r}$ — arifmetik ildiz.

8-misol. $\sqrt[n]{1}$ ning barcha qiymatlarini toping ($z^n = 1$ tenglamaning barcha ildizlarini toping).

Yechish. 1 sonini trigonometrik shaklda ifodalaymiz:

$$1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ.$$

(10) formuladan foydalanib topamiz:

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \qquad (11)$$

$k = 0, 1, 2, 3, ..., n-1.$

9-misol. $\sqrt[6]{1}$ ni hisoblang.

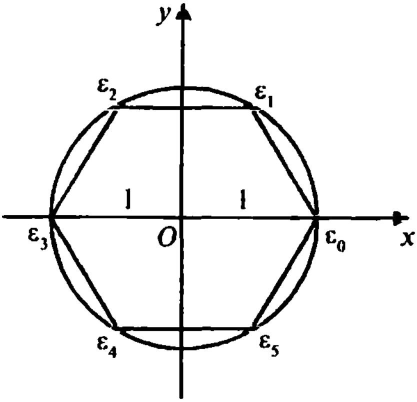
Yechish. (11) formulaga asoslanib topamiz:

$$\varepsilon_k = \sqrt[6]{1} = \cos \frac{\pi}{3} k + i \sin \frac{\pi}{3} k \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

$$k = 0, \; \varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$k = 1, \; \varepsilon_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i;$$

$$k = 2, \; \varepsilon_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i;$$



17- rasm

$$k = 3,\ \varepsilon_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

$$k = 4,\ \varepsilon_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$k = 5,\ \varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Yechilgan misol geometrik mazmunga ega. Topilgan ε_0, ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5 ildizlar radiusi $r = 1$ bo‘lgan va markazi koordinata boshida yotgan aylanaga ichki chizilgan muntazam oltiburchakning uchlariga mos keladi (17-rasm).

10-misol. $x^5 - 243 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. $x^5 = 243 \Rightarrow x = \sqrt[5]{243}$.

Ammo $243 = 243\ (\cos 360°k + i\sin 360°k)$ bo‘lib, (11) ga ko‘ra $\sqrt[5]{243} = 3(\cos 72° k + i\sin 72° k)$.

$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ bo‘lganda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\varepsilon_0 = 3(\cos 0° + i\sin 0°) = 3(1 + i\cdot 0) = 3;$$

$\varepsilon_1 = 3(\cos 72° + i\sin 72°)$; | $\varepsilon_2 = 3(\cos 144° + i\sin 144°)$;

$\varepsilon_3 = 3(\cos 216° + i\sin 216°)$; | $\varepsilon_4 = 3(\cos 288° + i\sin 288°)$.

III BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

1. Berilgan kompleks sonlar uchun qo‘shma kompleks sonlarni toping:

1) $z = 3 - 2i$; 2) $z = -2 - 1$; 3) $z = 5i$;
4) $z = i$; 5) $z = 6$.

2. Kompleks tekislikda quyidagi nuqtalarni yasang:

1) $z = 2 + 2i$; 2) $z = -1 + i$; 3) $z = i$;
4) $z = -i$; 5) $z = -i - 1$; 6) $z = -4$.

3. Kompleks tekislikda quyidagi kompleks sonlarga mos keladigan qo‘shma kompleks sonlarni yasang:

1) $z = 3 - i$; 2) $z = i$; 3) $z = 2$;
4) $z = 1 + i$; 5) $z = -1 - i$; 6) $z = -i$.

4. $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$ sonlar berilgan. Quyidagilarni toping:

1) $z_1 + z_2$; 2)$z_1 - z_2$; 3) $z_1 z_2$; 4) $\frac{z_1}{z_2}$.

5. Agar $\frac{(z_1 + z_2)\cdot z_3}{z_4} = a + bi$ bo‘lsa, $\frac{(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)\cdot \bar{z}_3}{\bar{z}_4} = a - bi$ bo‘lishini isbotlang.

6. $z = 2 + i$ berilgan. Agar $n = -1, -2, 2, 3, 4$ bo‘lsa, z^n ni toping.

7. $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$ tenglamadan x va y ni toping $(x,\ y \in R)$.

8. Hisoblang: a) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; b) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

9. O‘zining kvadratiga qo‘shma bo‘lgan kompleks sonni toping.

10. Qutb koordinatalarida $A\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(3; -\frac{3\pi}{4}\right)$ va $C\left(2,5; -\frac{11\pi}{6}\right)$ nuqtalarni yasang.

11. $A\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$ va $C\left(1;-\frac{\pi}{4}\right)$ nuqtalarning to‘g‘ri burchakli koordinatalarini toping.

12. $1;\ -1;\ -\sqrt{2};\ i;-i;\ i\sqrt{2};\ -1+i;\ 2-3i$ kompleks sonlarni tasvirlovchi nuqtalarni yasang.

13. $1;\ -1;\ i;\ -i;\ 1+i;\ -1+i;\ -1-i\sqrt{3};\ 2i;\ 2+\sqrt{3}+i$ kompleks sonlarni trigonometrik shaklda ifodalang.

14. $z_1 = 3 + 4i;\ z_2 = -3 + 2i;\ z_3 = -4 - 3i$ sonlar berilgan.

1) $z_1 + z_2$; 2) $z_2 + z_3$; 3) $z_1 + z_3$;
4) $z_1 - z_2$; 5) $z_2 - z_1$; 6) $z_3 - z_1$

sonlarning moduli va argumentini hisoblang.

15. $z_1 = 2(\cos30° + i\sin30°)$ va $z_2 = 3(\cos60° + i\sin60°)$ sonlar berilgan $z_1 + z_2$ va $z_1 - z_2$ sonlarni, ularning modullari va argumentlarini toping.

16. Kompleks sonlar bilan tasvirlangan nuqtalar to‘plamini toping:

a) moduli 1 ga teng: b) argumenti $\frac{\pi}{6}$ ga teng.

17. Tekislikning quyidagi tengsizliklarni qanoatlantiruvchi z kompleks sonlar bilan ifodalanuvchi nuqtalari to‘plamini toping:

1) $|z| < 1$; 2) $|z| \leq 1$; 3) $|z| > 1$; 4) $|z| \geq 2$.

18. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

sonlar berilgan. Quyidagilarni toping:

1) $z_1 z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_1^3; 4) $\sqrt{z_1}$; 5) $\overline{z}_1\overline{z}_2$; 6) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

19. Soddalashtiring: $\frac{\cos\varphi + i\cos\varphi}{\cos\varphi - i\cos\varphi}$.

20. Hisoblang: $(1 + i)^6$.

21. Ildiz chiqaring: 1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt[3]{2-2i}$; 3) $\sqrt[4]{-4}$; 4) $\sqrt[8]{1}$.

22. $\cos x$ va $\sin x$ orqali ifodalang:

1) $\cos5x$; 2) $\sin6x$; 3) $\mathrm{tg}3x$.

IV BOB

KO'PHADLAR, RATSIONAL IFODALAR. BIR NOMA'LUMLI TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR. TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR SISTEMALARI

1- §. Ifodalar va ularning turlari. Butun ratsional ifodalar va ularning kanonik ko'rinishi

Har qanday algebraik ifoda algebraik amallar yordamida belgilar (harflar, raqamlar, qavslar va h.k)ning biriktirilib yozilishidan hosil bo'ladi.

Algebraik amallar deyilganda qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, natural ko'rsatkichli darajaga ko'tarish va natural ko'rsatkichli ildiz chiqarish amallari tushuniladi. Masalan:

$$3(2a+5b-7);\ a^2+\frac{1}{b-3};\ (x+3y)^3;\ \frac{a+\sqrt{5b}}{\sqrt{ab}-b};\ 6\cdot7+8;\ ab;\ 5:6.$$

1-ta'rif. *Harflar yoki raqamlar bilan belgilangan sonlardan beshta amal (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish va natural darajaga ko'tarish) vositasi bilan tuzilgan ifoda* ***ratsional algebrik ifoda*** *deyiladi.*

Ratsional ifodalarga quyidagilar misol bo'la oladi:

$$ax+b;\ ax^2+bx+c;\ 3ab^2-\frac{3}{a}x+6;\ \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{2}{c}}{a^2+b^2+ac}.$$

Natural darajaga ko'tarish amaliga ko'paytirish amalining xususiy holi deb qaraladi. Shuning uchun x^5, a^6, $\frac{x^2+4a}{x^2+a^2}$ kabi ifodalar ratsional hisoblanadi. Biroq darajaning ko'rsatkichlarida harf o'zgaruvchilar bo'lgan ifodalar ratsional hisoblanmaydi.

Masalan, 2^x, 5^a, $\frac{3^{\frac{1}{x}}+7^x}{2}$, $\sin x$ ifodalar ratsional emas. Shuningdek, harflarga har qanday qiymat berganda ham son qiymatga ega boʻlmaydigan $\frac{a+c}{0}$, $\frac{a-1}{a-a}$; $\frac{x^2+y^2}{(a+b)^2-a^2-b^2-2ab}$ kabi ifodalar ham ratsional hisoblanmaydi va bunday ifodalar ma'noga ega emas deb qaraladi.

2-ta'rif. *Agar ratsional ifoda ichida harf argumentli ifodaga bo'lish amali bo'lmasa, u* ***butun ifoda*** *yoki* ***ko'phad*** *deyiladi.*

Masalan: $x^2+\frac{3}{2}x^2+5x+3$, $(x+a)^2(x-b^3)^2$, $\frac{x^3-y^3}{2}a^2x^3$.

3-ta'rif. *Agar ratsional ifodalar ichida harfiy ifodalarga bo'lish amali ham bo'lsa, ular* ***kasr ratsional ifodalar*** *deyiladi.*

$$\text{Masalan: } \frac{x-a}{x+a}, \quad \frac{\frac{x-1}{x+1}+3}{\frac{a^2b^2}{2}+5}, \quad \frac{x^2+xy+y^2}{x^4+y^4}.$$

Ratsional ifodalarni butun va kasr ratsional ifodalarga ajratishda biz ularning tashqi koʻrinishiga asoslandik.

Masalan, $\frac{(x^2+a^2)^3}{x^2+a^2}$ kasr ratsional ifoda boʻlsa-da, ammo bu ifoda $(x^2+a^2)^2$ butun ifodaga aynan teng.

Ratsional ifodalar tarkibiga kirgan harf argumentlarga nisbatan ham turlarga boʻlinadi. Masalan, $\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^2y}{ab^2}+\frac{y^3}{b^3}$ ifoda tarkibiga kirgan hamma harflarga nisbatan kasr ratsional ifodadir. Agar a va b koeffitsiyentlardan har birini aniq son qiymatiga ega desak, u holda bu ifoda x va y harflarga nisbatan butun ifoda boʻladi.

Bitta x oʻzgaruvchili har qanday koʻphadni ayniy almashtirishlardan keyin quyidagi kanonik koʻrinish deb ataluvchi koʻrinishga keltirish mumkin:

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0, \qquad (1)$$

bu yerda a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 berilgan haqiqiy sonlar bo'lib, koeffitsiyentlar deb ataladi, n esa berilgan natural sondir.

Agar $a_n \neq 0$ bo'lsa, *n ko'phadning darajasi* deyiladi. Bunday holda (1) *n- darajali bir o'zgaruvchili ko'phad* deyiladi. Agar a_0 dan boshqa barcha koeffitsiyentlar 0 ga teng bo'lsa, bunday holda (1) 0- *darajali ko'phad* deyiladi. Agar barcha koeffitsiyentlar nolga teng bo'lsa, ya'ni

$$f(x)=0\cdot x^n+0\cdot x^{n-1}+\ldots+0\cdot x+0$$

ko'rinishdagi ko'phad deyiladi.

(Biz $f(x)=a_1x+a_0$, $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ chiziqli va kvadrat ko'phadlarni mukammal o'rgandik.)

Ko'phadlar ustida amallar bajarish, ularni ayniy almashtirishlar ko'phadlarning aniqlash sohasi bilan uzviy bog'liq bo'ladi. Har qanday bir o'zgaruvchili ko'phadning aniqlanish sohasi unga kiruvchi harflarning barcha qiymatlaridan iborat bo'ladi, ya'ni *R* haqiqiy sonlar to'plamidan iboratdir.

Ikkita

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

va

$$\varphi\,(x)=b_mx^m+a_{m-1}\,x^{m-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+a_0$$

ko'phadning aynan teng bo'lishi uchun $a_n=b_m$, $a_{n-1}=b_{m\ 1}$, ..., $a_1=b_1$, $a_0=b_0$ va $n=m$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Ko'pchilik hollarda ifodaga kirgan harflarning berilgan qiymatlarida ifodaning son qiymatini hisoblashga to'g'ri keladi. Ifodaga kirgan harflar ikki xil ma'noga ega bo'lishi mumkin. Birinchidan, ularga har xil son qiymatlar berish mumkin. Ikkinchidan, harflar berilgan ifodada o'zgarmaydigan aniq sonlarni bildirishi mumkin.

Masalan, aylananing uzunligi (doiraning yuzi) uning radiusiga bog'liq ekanligini ko'satuvchi $l=2\pi R$ ($S=\pi R^2$)

ifodani qaraylik. Bu ifodadagi R ga ixtiyoriy musbat qiymatlar berish mumkin. π esa butunlay aniq bir sonni, ya'ni aylana uzunligining diametrga nisbatini bildiradi. Bu harf hamma vaqt o'zgarmas qiymat qabul qiladi ($\pi \approx 3{,}14$).

To'g'ri chiziqli tekis harakatdagi nuqtaning o'tadigan $s = \upsilon t$ yo'lini hisoblash formulasidagi υ tezlik (uning yo'nalishiga qarab) musbat qiymatlar ham, manfiy qiymatlar ham qabul qila oladi.

2- §. Ratsional ifodalarni ayniy almashtirishlar

Oldingi paragrafda eslatganimizdek, ifodalarni ayniy almashtirish ularning aniqlanish sohasiga bog'liq bo'ladi.

Biror to'plamda (oraliqda) analitik ifodani unga aynan teng bo'lgan boshqa ifodaga almashtirish, shu to'plamda (oraliqda) berilgan ifodani ayniy almashtirish deyiladi.

Biror $(a;\ b)$ oraliqda berilgan ikkita $f(x)$ va $\varphi(x)$ ifodaning shu oraliqning har bir nuqtasidagi qiymatlari teng bo'lsa, bunday holda ifodalar bu to'plamda (oraliqda) aynan teng deyiladi, ya'ni

$$f(x) \equiv \varphi(x), \quad x \in (a;\ b).$$

Masalan, $f(x) = 1$ va $\varphi(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$ ifodalar $(-\infty;\ \infty)$ oraliqda aynan tengdir, chunki istalgan x uchun $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ tenglik o'rinli.

$f(x) = \lg x^2$ va $\varphi(x) = 2\lg x$ ifodalarning aniqlanish sohalari har xil: $f(x)$ ifoda $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ to'plamda, $\varphi(x)$ ifoda esa $(0;\ +\infty)$ oraliqda aniqlangan bo'lib, ular aniqlanish sohalarining umumiy qismida, ya'ni $(0;\ \infty)$ da aynan teng bo'ladi.

Ifodalarni ayniy almashtirishda ularning aniqlanish sohasi o'zgaradi. Masalan, $x^2 - 5x + 6 + \sqrt{3x} - \sqrt{3x}$ ifodada o'xshash hadlarni ixchamlashtirish natijasida uning aniqlanish sohasi kengayadi: berilgan ifoda $[0;\ \infty[$ oraliqda aniqlangan bo'lsa, ixchamlash natijasida olingan $x^2 - 5x + 6$ ifoda esa $]-\infty;\ \infty[$ da aniqlangan. Berilgan va olingan ifodalar $]0;\ \infty[$ to'plamda aynan teng bo'ladi.

d) To‘g‘ridan to‘g‘ri ko‘phadlarni ko‘paytirib, qavslarni ochib chiqsak, 16 ta had hosil bo‘ladi. Ishni soddalashtirish uchun qavslarni boshqacha ochamiz. Birinchi qo‘shiluvchi ko‘paytuvchilarini guruhlaymiz:

$$[(a+1)(a+7)][(a+3)(a+5)]+15=$$
$$=(a^2+8a+7)(a^2+8a+15)+15=$$
$$=(a^2+8a)^2+22(a^2+8a)+120=$$
$$=(a^2+8a+10)(a^2+8a+12)=$$
$$=(a+2)(a+b)(a^2+8a+10).$$

2 - misol. Agar $a\in N$ bo‘lsa, u holda $(a^5-5a^3+4a)\,\vdots\,120$ bo‘lishini isbotlang.

Yechish. a^5-5a^3+4a ifodani ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$a^5-5a^3+4a=a(a^4-5a^2+4)=a[a^4-a^2-4a^2+4]=$$
$$=a[a^2(a^2-1)-4(a^2-1)]=a(a^2-1)(a^2-4)=$$
$$=a(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2).$$

$a\in N$ bo‘lgani uchun oxirgi ko‘paytma ketma-ket keluvchi 5 ta natural sonning ko‘paytmasidan iborat bo‘ladi. Ketma-ket keluvchi beshta natural sonning ko‘paytmasi tarkibida hamma vaqt 120 sonini hosil qiluvchi ko‘paytuvchilar bo‘ladi. $(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120,\ 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=120\cdot6,$ $3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=120\cdot21,\ \ldots)$, shuning uchun $n\in N$ bo‘lganda $(a^5-5a^3+4a)\,\vdots\,120$ bo‘ladi.

3 - misol. $\left(\frac{1}{a^2+3a+2}+\frac{2a}{a^2+4a+3}+\frac{1}{a^2+5a+6}\right)^2\cdot\frac{(a-3)^2+12a}{2}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$, $a^2+4a+3=$ $=(a+1)(a+3)$, $a^2+5a+6=(a+2)(a+3)$ bo‘lishini e’tiborga olib, ko‘rsatilgan amallarni bajaramiz:

$$\left(\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{2a}{(a+1)(a+3)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}\right)^2\cdot\frac{a^2-6a+9+12a}{2}=$$

$$=\left(\frac{a+3+2a(a+2)+a+1}{(a+1)(a+2)(a+3)}\right)^2\cdot\frac{a^2+6a+9}{2}=\left(\frac{2a^2+6a+4}{(a+1)(a+2)(a+3)}\right)^2\cdot\frac{(a+3)^2}{2}=$$

$$=4\left(\frac{a^2+3a+2}{(a^2+3a+2)(a+3)}\right)^2\cdot\frac{(a+3)^2}{2}=4\cdot\frac{1}{2}=2.$$

Shunday qilib, $a\neq-1$, $a\neq-2$, $a\neq-3$ bo'lganda berilgan ifodaning qiymati 2 ga teng ekan.

4-misol. $\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}-\frac{2a}{1+a^2}-\frac{4a^3}{1+a^4}-\frac{8a^7}{1+a^8}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. Ko'rsatilgan amallarni yozilish tartibida bajaramiz:

1) $\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}-\frac{a+1-1+a}{1-a^2}=\frac{2a}{1-a^2};$

2) $\frac{2a}{1-a^2}-\frac{2a}{1+a^2}=\frac{2a+2a^3-2a+2a^3}{1-a^4}=\frac{4a^3}{1-a^4};$

3) $\frac{4a^3}{1-a^4}-\frac{4a^3}{1+a^4}=\frac{4a^3+4a^7-4a^3+4a^7}{1-a^8}=\frac{8a^7}{1-a^8};$

4) $\frac{8a^7}{1-a^8}-\frac{8a^7}{1+a^8}=\frac{8a^7+8a^{15}-8a^7+8a^{15}}{1-a^{16}}=\frac{16a^{15}}{1-a^{16}}\quad(a\neq1).$

5-misol. Agar $a+b+c=0$ bo'lsa, u holda $a^3+b^3+c^3=3abc$ bo'lishini isbotlang.

Yechish. Shartga ko'ra $a+b+c=0$, bunday holda $a=-b-c$ bo'ladi.

$$a^3+b^3+c^3=(-b-c)^3+b^3+c^3=-(b+c)^3+b^3+c^3=$$
$$=-b^3-3b^2c-3bc^2-c^3+b^3+c^3=-3b^2c-3bc^2=-3bc\,(b+c).$$

Agar $b+c=-a$ bo'lishini e'tiborga olsak, $a^3+b^3+c^3=-3bc(-a)=3abc$ bo'ladi.

3- §. Ko'phadlarning bo'linishi

1-ta'rif. *Berilgan $f(x)$ va $g(x)$ ko'hadlar uchun $f(x)=g(x)q(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $q(x)$ ko'phadni topish mumkin bo'lsa, bunday holda $f(x)$ ko'phad $g(x)$ ko'phadga* ***qoldiqsiz bo'linadi*** *deyiladi. $g(x)$ ko'phad $f(x)$ ko'phadning* ***bo'luvchisi*** *deyiladi.*

$q(x)$ ko‘phad sifatida esa $f(x)$ ni $g(x)$ ga bo‘lganda chiqadigan bo‘linma olinadi.

1-misol. a) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$;

b) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$;

d) $x-1$; $x+1$; x^3+x^2+x+1; x^3-x^2+x-1; x^2+1; x^2-1 ko‘phadlar x^4-1 ko‘phadning bo‘luvchilaridir. Chunki x^4-1 had ularning har biriga bo‘linadi:

$$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1);$$
$$x^4-1=(x+1)(x^3-x^2+x-1);$$
$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1).$$

2-ta’rif. *Agar istalgan $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phad uchun shunday $q(x)$ va $r(x)$ ko‘phadlarni topish mumkin bo‘lib, $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ tenglik bajarilsa, bunday holda $f(x)$ ko‘phad $g(x)$ ko‘phadga* ***qoldiqli bo‘linadi*** *deyiladi.*

2-misol. $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ ko‘phadni $g(x)=x^2-3x+1$ ko‘phadga bo‘lganda hosil bo‘ladigan $q(x)$ bo‘linma ko‘phad va $r(x)$ qoldiq ko‘phadni toping.

Yechish. $f(x)$ ko‘phadni $g(x)$ ko‘phadga to‘g‘ridan to‘g‘ri bo‘lamiz:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4-3x^3+4x^2-5x+6 & x^2-3x+1 \\ \cline{2-2}
-\;\underline{2x^4-6x^3+2x^2} & 2x^2+3x+11 \\
3x^3+2x^2-5x+6 & \\
-\;\underline{3x^3-9x^2+3x} & \\
11x^2-8x+6 & \\
-\;\underline{11x^2-33x+11} & \\
25x-5 &
\end{array}$$

Demak, $q(x)=2x^2+3x+11$, $r(x)=24x-5$.

Agar $f(x)$ ni $g(x)$ ga bo‘lganda $r(x)$ qoldiq nolga teng bo‘lsa, u holda $g(x)$ ko‘phadi $f(x)$ ko‘phadning *bo‘luvchisi* deyiladi.

4- §. Ko‘phadning ildizi. Bezu teoremasi. Gorner sxemasi

1. Ko‘phadning ildizi. Bizga

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

ko‘phad berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. *Agar x o‘zgaruvchining biror a qiymatida f(x) ko‘phadning qiymati nolga aylansa, bu a soni f(x)* ***ko‘phadning ildizi*** *deyiladi.*

$f(x)$ ko‘phadning ildizlarini aniqlash uchun uni nolga tenglashtirib, $f(x) = 0$ tenglamani yechish kerak. Bu tenglamaning ildizlari $f(x)$ ko‘phadning ham ildizlari bo‘ladi.

1-misol. $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$ ko‘phadning ildizlarini toping.

Yechish. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Rightarrow x^4 - 4x^2 - 9x^2 + 36 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0.$ Bu tenglama ikkita tenglamaga ajraladi:

$$1)\; x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0, \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -2; \end{cases}$$

$$2)\; x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0, \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

Berilgan ko‘phadning ildizlari: –3; –2; 2; 3 bo‘ladi.

2-misol. $f(x) = 2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4$ ko‘phadning ildizlarini toping.

Yechish. $2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$ tenglamani yechamiz:

$$2x^5 - 4x^4 + 5x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 10x - 2x + 4 = 0,$$
$$2x^4(x-2) + 5x^3(x-2) - 5x(x-2) - 2(x-2) = 0,$$
$$(x-2)(2x^4 + 5x^3 - 5x - 2) = 0,$$
$$(x-2)[2x^4 + 2x^3 + 3x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 3x - 2x - 2] = 0,$$
$$(x-2)[2x^3(x+1) + 3x^2(x+1) - 3(x+1) - 2(x+1)] = 0,$$

$$(x-2)(x+1)(2x^3+3x^2-3x-2)=0,$$
$$(x-2)(x+1)[2(x^3-1)+3x(x-1)]=0,$$
$$(x-2)(x+1)(x-1)(2x^2+5x+2)=0,$$
$$(x-2)(x+1)(x-1)(2x+1)(x+2)=0.$$
$$x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=-2;\ x_3=-1;\ x_4=1;\ x_5=2.$$

Shunday qilib, berilgan ko‘phadning ildizlari $-\frac{1}{2}$; ± 1; ± 2 bo‘ladi.

2. Bezu teoremasi. ***$f(x)$ ko‘phadni $x-a$ ikkihadga bo‘lishdan chiqqan qoldiq ko‘phadning $x=a$ bo‘lgandagi qiymatiga teng:***

$$\boldsymbol{r=f(a)=a_0a^n+a_1a^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\ \ a+a_n}.$$

Isbot. Qoldiqli bo‘lish formulasidan foydalanamiz:

$$f(x)=(x-a)q(x)+r.$$

Agar bu tenglamada $x=a$ desak, $r=f(a)$ bo‘ladi.

Natija. $f(x)$ ko‘phad $x-a$ ga bo‘lingandagina va faqat shundagina a soni $f(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘ladi.

Misol. $f(x)=x^3-1$ ko‘phad $x-1$ ga bo‘linadi. Chunki $x=1$ soni $f(x)=x^3-1$ ko‘phadning ildizi bo‘ladi, ya’ni $f(1)=0$.

Shunday qilib, $f(x)$ ko‘phadning ildizlarini izlash uning $x\pm a$ ko‘rinishdagi chiziqli bo‘luvchilarini topish bilan teng kuchlidir.

Bezu teoremasidan quyidagi natijalarni olamiz ($x^n\pm a^n$ ikkihadning $x\pm a$ ikkihadga bo‘linishi):

a) ikki sonning bir xil darajalari ayirmasi shu sonlarning ayirmasiga bo‘linadi. Chunki x^n-a^n ni $x-a$ ga bo‘lganda qoldiq a^n-a^n bo‘lib, u nolga teng;

b) ikki sonning bir xil darajalari yig‘indisi shu sonlar ayirmasiga bo‘linmaydi. Chunki x^n+a^n ni $x-a$ ga bo‘lganda qoldiq $a^n+a^n=2a^n$ bo‘lib, bu qoldiq nolga teng emas;

d) ikki sonning bir xil juft darajalari ayirmasi shu sonlarning yig‘indisiga bo‘linadi, toq darajalarining ayirmasi esa bo‘linmaydi. Chunki $x^n - a^n$ ayirmani $x + a$ ga bo‘lganda qoldiq $(-a)^n - a^n$ ga teng bo‘ladi, bu qoldiq esa n juft bo‘lganda nolga teng, n toq bo‘lganda esa $-2a^n$ ga teng bo‘ladi;

e) ikki sonning bir xil toq darajalarining yig‘indisi shu sonlarning yig‘indisiga bo‘linadi, juft darajalarining yig‘indisi esa bo‘linmaydi. Chunki $x^n - a^n$ yig‘indini $x + a$ ga bo‘lganda qoldiq $(-a)^n + a^n$ ga teng bo‘lib, bu qoldiq n toq bo‘lganda nolga teng, n juft bo‘lganda $2a^n$ ga teng bo‘ladi.

Misollar:

1) $x^2 - a^2$ ikkihad $x - a$ ga ham, $x + a$ ga ham bo‘linadi;

2) $x^2 + a^2$ ikkihad $x - a$ ga ham, $x + a$ ga ham bo‘linmaydi;

3) $x^3 - a^3$ ikkihad $x - a$ ga bo‘linadi, $x + a$ ga bo‘linmaydi;

4) $x^3 + a^3$ ikkihad, $x + a$ ga bo‘linadi, $x - a$ ga bo‘linmaydi. Umuman, n toq bo‘lganda quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n\ 1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}),$$
$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n\ 1} - ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}).$$

$f(x)$ ko‘phadni $x \pm a$ ikkihadga bo‘lishning turli usullari bor. Shunday usullardan biri Gorner usuli nomi bilan ataladi.

3. Gorner sxemasi. Bizga (1) ko‘phad berilgan bo‘lsin. $f(x)$ ko‘phadni $x - a$ ikkihadga bo‘lganda $q(x)$ bo‘linmaga va r qoldiqqa ega bo‘laylik. $x - a$ bo‘luvchi birinchi darajali ko‘phad bo‘lgani uchun $r(x)$ qoldiq nolinchi darajali ko‘phad yoki nolga teng bo‘lishi mumkin.

Shunday qilib,

$$f(x) = (x - a)q(x) + r \qquad (2)$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Bunda

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}. \qquad (3)$$

(1) va (3) ni (2) ga qo‘yamiz:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x + a)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + r,$$
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n\ 1}x + a_n = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots +$$
$$+ b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x - ab_0x^{n-1} - ab_1x^{n-2} - \ldots - ab_{n-1} + r$$

yoki

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= b_0x^n + (b_1 - ab_0)x^{n-1} + \ldots + r - ab_{n-1}.$$

Oxirgi tenglikning har ikkala qismida x ning bir xil darajalari qatnashgan hadlar oldidagi koeffitsiyentlarni taqqoslab, quyidagi tengliklarni olamiz:

$$\begin{array}{ll}
a_0 = b_0, & b_0 = a_0, \\
a_1 = b_1 - ab_0, & b_1 = a_1 + ab_0, \\
a_2 = b_2 - ab_1, & b_2 = a_2 + ab_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2} & b_{n-1} = a_{n-1} + ab_{n-2}, \\
a_n = r - ab_{n-1}, & r = a_n + ab_{n-1}.
\end{array}$$

Bo‘linmaning b_0, b_1, ..., b_{n-1} koeffitsiyentlarini va r qoldiqni topishda Gorner nomi bilan ataluvchi sxema juda qulay:

	a_0	a_1	a_2	a_3	...	a_{n-1}	a_n
a	a_0	$a_1 + ab_0$	$a_2 + ab_1$	$a_3 + ab_2$	...	$a_{n-1} + ab_{n-2}$	$a_n + ab_{n-1}$

Gorner sxemasining pastki satrida $q(x)$ ko‘phadning b_i koeffitsiyentlari va r qoldiq turadi.

3-misol. $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 11$ ko‘phadni $x + \frac{1}{2}$ ga Gorner cxemasi bo‘yicha bo‘ling:

	1	0	-2	3	-5	11
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{31}{8}$	$-\frac{111}{16}$	$\frac{463}{32}$

Izlanayotgan bo‘linma va qoldiqni topamiz:

$$q(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{31}{8}x - \frac{111}{16}, \quad r = \frac{463}{32}.$$

4-misol. $f(x) = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3$ ko‘phadni $(x - 3)$ ga bo‘lganda hosil bo‘ladigan bo‘linma va qoldiqni toping.

	2	−1	−3	0	1	−3
3	2	3·2 −1=5	3·5−3=12	3·12+0=36	3·36+1=109	3·109−3=324

Demak, $q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109$, $r = f(3) = 324$.

5- §. Ratsional kasr ifodalarni ayniy almashtirishlar

1. Ratsional kasr ifodalar va ularning kanonik shakli. Ratsional kasr ifodaning eng sodda ko‘rinishi ikkita ko‘phadning nisbatidan (bo‘linmasidan) iborat bo‘ladi.

1-ta’rif. *Ikkita $P_n(x)$ va $Q_m(x)$* ko‘phadning $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *nisbati* ***algebraik*** *yoki* ***ratsional kasr*** *deyiladi. $P_n(x)$ ko‘phad ratsional kasrning* ***surati,*** *$Q_m(x)$ ko‘phad esa* ***maxraji*** *deyiladi.*

Shu bilan birga, maxrajda turgan ko‘phad nol-ko‘phad bo‘lmasligi kerak.

Agar $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ ko‘phadlar

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

kanonik ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u holda ratsional kasr ifoda ham

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m} \qquad (1)$$

kanonik ko‘rinishni oladi. Agar $n \geq m$ bo‘lsa, u holda ratsional kasr *noto‘g‘ri*, $n < m$ bo‘lsa, *to‘g‘ri ratsional kasr* deyiladi.

Masalan, $\frac{x+1}{x^2+2x+2}$, $\frac{2}{x+2}$, $\frac{3x+2}{x^2+x+5}$ kasrlar to‘g‘ri, $\frac{x}{x+9}$, $\frac{x^3+3}{x^2+x+1}$, $\frac{x^6+1}{x}$ noto‘g‘ri kasrlardir.

2. Noto‘g‘ri ratsional kasrning butun qismini ajratish. (1) ifodada $n \geq m$ bo‘lganda $P_n(x)$ ko‘phadni $Q_m(x)$ ko‘phadga bo‘lish bilan butun qismi ajratiladi. Aytaylik, $P_n(x)$ ko‘phadni $Q_m(x)$ ko‘phadga bo‘lganda $S_{n\ m}(x)$ bo‘linma ko‘phadga va $R_k(x)$ $(k < m)$ qoldiq ko‘phadga ega bo‘laylik. Bunday holda qoldiqli bo‘lishning ifodasiga ko‘ra $P_n(x) = Q_m(x)S_{n-m}(x) + R_k(x)$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikning ikkala qismini $Q_m(x)$ ga bo‘lib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}.$$

Bu yerda $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ to‘g‘ri kasr bo‘lib, $S_{n-m}(x)$ ko‘phad esa $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ kasrning *butun qismi* deyiladi.

1-misol. $\frac{x^4+2x^3+1}{x^2+2x+3}$ kasrning butun qismini ajrating.

Yechish. Kasrning suratidagi ko‘phadni maxrajida turgan ko‘phadga bo‘lamiz:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^4+2x^3+1 & x^2+2x+3 \\ \underline{x^4+2x^3+3x^2} & \overline{x^2-3} \\ -\;\;-3x^2-1 & \\ \underline{-3x^2-6x-9} & \\ 6x+10 & \end{array}$$

Demak, $x^4 + 2x^3 + 1 = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 3) + 6x + 10,$

$$\frac{x^4+2x^3+1}{x^2+2x+3} = x^2 - 3 + \frac{6x+10}{x^2+2x+3},$$

bunda $x^2 - 3$ ko‘phad $\frac{x^4+2x^3+1}{x^2+2x+3}$ kasrning butun qismi bo‘ladi.

3. Ratsional kasr ifodalarning aynan tenglik sharti. Ratsional kasrlar orasidagi munosabatlar ham ularning aniqlanish sohasi bilan uzviy bog‘liqdir.

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ratsional kasrning maxrajidagi $Q_m(x)$ ko‘phadning qitmatlarini nolga aylantirmaydigan x ning qiymatlari to‘plami bu ratsional kasrning *aniqlanish sohasi* deyiladi.

Masalan, $\frac{3x^2+b^2}{3x-8}$ kasr barcha butun sonlar to‘plamida aniqlangan bo‘lib, ratsional sonlar to‘plamida esa faqat $x=\frac{8}{3}$ nuqtada aniqlanmagan.

2-ta’rif. *Agar x o‘zgaruvchining barcha qiymatlarida $PQ_1=P_1Q$ ayniyat o‘rinli bo‘lsa, u holda ikkita $\frac{P}{Q}$ va $\frac{P_1}{Q_1}$ kasr* ***aynan teng*** *deyiladi:*

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_1}{Q_1}\Rightarrow\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m\ 1}+\ldots+b_m}\equiv\frac{c_0x^l+c_1x^{l-1}+\ldots+a_l}{d_0x^k+d_1x^{k-1}+\ldots+d_k}.$$

Masalan, $\frac{x^2+1}{x^2-x^2+x-1}$ va $\frac{1}{x-1}$ kasrlar aynan teng, chunki

$$(x^2+1)(x-1)=x^3-x^2+x-1.$$

4. Algebraik kasrlarning asosiy xossasi. Agar algebraik kasrning surat va maxraji nol-ko‘phaddan farqli ko‘phadga ko‘paytirilgan (bo‘lingan) bo‘lsa, u holda hosil bo‘lgan kasr berilgan kasrga aynan teng bo‘ladi.

Haqiqatan, $\frac{P}{Q}$ kasr va $R\neq 0$ ko‘phad berilgan bo‘lsin. $\frac{P}{Q}=\frac{PR}{QR}$ bo‘lishini ko‘rsataylik.

Shartga ko‘ra ikkita kasr aynan teng bo‘lishi uchun $P(QR)\equiv Q(PR)$ bo‘lishi kerak. Bunday bo‘lishi $P(QR)\equiv$ $\equiv PQR\equiv QPR\equiv Q(PR)$ dan kelib chiqadi.

Demak, $\frac{P\cdot R}{Q\cdot R}=\frac{P}{Q}$.

Endi $\frac{PR}{QR}$ kasr berilgan bo‘lib, uning surat va maxraji $R\neq 0$ umumiy ko‘paytuvchiga ega bo‘lsin. Bunday holda

$\frac{P \cdot R}{Q \cdot R} = \frac{P}{Q}$ kasrning surat va maxrajini ularning umumiy ko‘paytuvchisiga bo‘lish *kasrni qisqartirish* deyiladi. Berilgan kasrni qisqartirish uchun uning surat va maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratib, so‘ngra surat va maxrajini ularning umumiy ko‘paytuvchilarining ko‘paytmasiga bo‘lish kerak.

2-misol. Quyidagi kasr ifodalarni qisqartiring:

$$1)\ \frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1};\ 2)\ \frac{3a^2-2bc-ac+6ab}{9a^3-2bc^2-ac^2+18a^2b};\ 3)\ \frac{a^2-9a+20}{a^2-11a+28}.$$

Yechish. Har bir kasrning surat va maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$1)\ \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x+1))(x^2-1)} = \frac{1}{x+1};$$

$$2)\ \frac{a(3a-c)+2b(3a-c)}{9a^2(a+2b)-c^2(a+2b)} = \frac{(3a-c)(a+2b)}{(a+2b)(9a^2-c^2)} =$$

$$= \frac{3a-c}{(3a-c)(3a+c)} = \frac{1}{3a+c};$$

$$3)\ \frac{a^2-9a+20}{a^2-11a+28} = \frac{(a-4)(a-5)}{(a-4)(a-7)} = \frac{a-5}{a-7}.$$

5. Algebraik kasrlarni umumiy maxrajga keltirish. Algebraik kasrlarni umumiy maxrajga keltirish uchun berilgan kasrlar maxrajlarining eng kichik karralisini topib, uni har bir kasrning maxraji qilib, bu kasrning suratlarini esa eng kichik karralisini maxrajlariga bo‘lganda chiqqan bo‘linmaga ko‘paytirish kerak.

3-misol. $\frac{x+1}{x^2-6x+5}$, $\frac{2x}{x^3-6x^2+11x-6}$, $\frac{1}{x^2-3x+2}$ kasrlarni umumiy maxrajga keltiring.

Yechish. Avvalo berilgan kasrlarning maxrajlarini ko‘paytuvchilarga ajratib, bu kasrlar maxrajlarining eng kichik karralisini topamiz:

$$x^2-6x+5=(x-1)(x-5),$$
$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3),$$
$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

$EKUK(x^2-6x+5;\, x^3-6x^2+11x-6;\, x^2-3x+2=(x-1)\times$ $\times(x-2)(x-3)(x-5)$. Har bir suratlarining to‘ldiruvchi ko‘paytuvchilarini topamiz:

$$[(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)]:[(x-1)(x-5)]=(x-2)(x-3),$$
$$[(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)]:[(x-1)(x-2)(x-3)]=x-5,$$
$$[(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)]:[(x-1)(x-2)]=(x-3)(x-5).$$

Berilgan kasrlar umumiy maxrajga keltirilgandan keyin quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x+1}{x^2-6x+5}=\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}=\frac{x^3-4x^2+x+6}{x^4-11x^3+41x^2-61x+30};$$

$$\frac{2x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{2x(x-5)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}=\frac{2x^2-10x}{x^4-11x^3+41x^2-61x+30};$$

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{(x-3(x-5)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}=\frac{x^2-8x+15}{x^4-11x^3+41x^2-61x+30}.$$

6. Algebraik kasrlar ustida amallar va ularning qonunlari. Algebraik kasrlar ustida bajariladigan amallar ham oddiy kasrlar ustida bajarilgan amallardek bajariladi.

Ratsional kasrlar to‘plami qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish (nol-ko‘phadga bo‘lishdan tashqari) amallariga nisbatan yopiq hisoblanadi, ya’ni algebraik ratsional kasrlarning yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasi yana algebraik ratsional kasr bo‘ladi.

Algebraik ratsional kasrlar ustida amallar quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi:

a) qo‘shishning o‘rin almashtirish qonuni:

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}=\frac{R}{S}+\frac{P}{Q};$$

b) qo‘shishning guruhlash qonuni:

$$\left(\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}\right)+\frac{T}{U}=\frac{P}{Q}+\left(\frac{R}{S}+\frac{T}{U}\right);$$

d) ko‘paytirishning o‘rin almashtirish qonuni:

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{R}{S}\cdot\frac{P}{Q};$$

e) ko‘paytirishning guruhlash qonuni:

$$\frac{P}{Q}\cdot\left(\frac{R}{S}\cdot\frac{T}{U}\right)=\left(\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}\right)\cdot\frac{T}{U};$$

f) ko‘paytirishning qo‘shishga nisbatan taqsimot qonuni:

$$\left(\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}\right)\cdot\frac{T}{U}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{T}{U}+\frac{R}{S}\cdot\frac{T}{U}.$$

4-misol. $\left[\left(\frac{3}{x-y}+\frac{3x}{x^3-y^3}\cdot\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right):\frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}\right]\cdot\frac{3}{x+y}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. Berilgan ifodani amal bosqichlari va ularni bajarish qoidalariga rioya qilib soddalashtiramiz:

1) $\frac{3x}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\cdot\frac{(x^2+xy+y^2)}{x+y}=\frac{3x}{x^2-y^2};$

2) $\frac{3}{x-y}+\frac{3x}{x^2-y^2}=\frac{3x+3y+3x}{x^2-y^2}=\frac{3(2x+y)}{x^2-y^2};$

3) $\frac{3(2x+y)}{x^2-y^2}:\frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}=\frac{3(2x+y)}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x+y)^2}{2x+y}=\frac{3(x+y)}{x-y};$

4) $\frac{3(x+y)}{x-y}\cdot\frac{3}{x+y}=\frac{9}{x-y}.$

5-misol. $\frac{[1,5(a-1)]^{-1}}{[3(a-b)]^{-2}}:\left[1+a^{-1}-2b^{-1}+\frac{(1-b^{-1})^2}{a^{-1}-1}\right]$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $a>0$ bo‘lganda $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$ $(0<r\in Q)$ munosabatdan foydalanib, berilgan ifodani soddalashtiramiz:

1) $$1+\frac{1}{a}-\frac{2}{b}+\frac{\left(1-\frac{1}{b}\right)^2}{\frac{1}{a}-1}=\frac{ab+b-2a}{ab}+\frac{\frac{(b-1)^2}{b^2}}{\frac{1-a}{a}}=$$

$$=\frac{ab+b-2a}{ab}+\frac{a(b-1)^2}{b^2(1-a)}=\frac{b^2-2ab-a^2b^2+2a^2b+a^2b^2-2a^2b+a^2}{ab^2(1-a)}=$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{ab^2(1-a)}=\frac{(a-b)^2}{ab^2(1-a)};$$

2) $$\frac{[1,5(a-1)]^{1}}{[3(a-b)]^{-2}}:\frac{(a-b)^2}{ab^2(1-a)}=\frac{9(a-b)^2}{1,5(a-1)}\cdot\frac{ab^2(1-a)}{(a-b)^2}=-6ab^2.$$

6-§. Ratsional kasr ifodalarni sodda kasrlarga yoyish

Ko'pgina hisoblashlarni bajarishda ratsional kasr ifodalarni ulardan soddaroq bo'lgan kasrlar yig'ndisi ko'rinishida ifodalashga to'g'ri keladi.

Ta'rif. *Ushbu*

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{B}{(x-a)^k}\ (k=2,3,4,...);\ \frac{Cx+D}{x^2+px+q},\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ (n=2,3,4,...)$$

ko'rinishdagi kasrlar ***sodda kasrlar*** *deyiladi.*

Bu yerda A, B, C, D, M, N — haqiqiy sonlar, p va q haqiqiy sonlar esa $\frac{p^2}{4}-q<0$ tengsizlikni qanoatlantiradi deb qaraladi.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri ratsional kasrni sodda kasrlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalashda $Q(x)$ ko'phad quyidagicha ko'paytuvchilarga ajratiladi deb qaraladi:

$$Q(x)=a_0(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}...(x-l)^{\lambda}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}...$$
$$...(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}...(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}. \qquad (1)$$

Bunda a, b, ..., l haqiqiy sonlar bo'lib, $Q(x)$ ko'phadning ildizlari, α, β, ..., λ sonlar a, b, ..., l ildizlarning takrorlanuvchanlik sonlari bo‘ladi, $x^2 + p_i x + q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ haqiqiy koeffitsiyentli uchhadlar bo‘lib, barchasi mavhum ildizlarga ega, chunki ular uchun barcha i larda $\frac{p_i^2}{4} < q_i$ tengsizliklar bajarariladi deb qaralyapti. Har bir to‘g‘ri ratsional kasrni chekli sondagi sodda kasrlarning yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkin. (1) yoyilma tarkibidagi har bir:

1) $(x - a)$ ko‘rinishdagi ko‘paytuvchiga $\frac{A}{x-a}$ ko‘rinishidagi kasr;

2) $(x - a)^k$ ko‘rinishdagi ko‘paytuvchiga

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

ko‘rinishdagi sodda kasrlarning yig‘indisi;

3) $x^2 + px + q$ ko‘rinishdagi ko‘paytuvchiga $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ ko‘rinishdagi kasr;

4) $(x^2 + px + q)^r$ ko‘rinishdagi ko‘paytuvchiga esa $\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+px+q)^r}$ ko‘rinishdagi sodda kasrlarning yig‘indisi mos qo‘yiladi.

Yuqorida izohlanganlarning amaliyotda qanday bajarilishini misollar orqali tushuntiraylik.

1-misol. $\frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x} = \frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}$ kasrni sodda kasrlar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalang.

Yechish. Berilgan kasrning maxraji chiziqli ko‘paytuvchilarga ajralgan. Bunday holda berilgan kasr sodda kasrlarning yig‘indisi ko‘rinishida quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2},$$

bu yerda A, B, C hozircha noma’lum sonlar bo‘lib, ularni ikkita ko‘phadning aynan tengligi shartlaridan foydalanib topamiz. Bu tenglikning ikkala qismini $x(x-1)(x+2)(x\neq 0,$ $x\neq 1,\ x\neq -2)$ ga ko'paytiramiz:

$$2x^2-x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

Bu tenglikning o'ng qismidagi qavslarni ochib, x ning bir xil darajalari qatnashgan hadlarni alohida-alohida yig'ib, quyidagi ayniyatni olamiz:

$$2x^2-x+3=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A.$$

Bu ayniyatning ikkala qismidagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni taqqoslab, A, B, C noma'lumlarga nisbatan quyidagi uchta tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} A+B+C=2, \\ A+2B-C=-1, \Rightarrow A=-\frac{3}{2};\quad B=\frac{4}{3};\quad C=\frac{13}{6}. \\ -2A=3 \end{cases}$$

Izlanayotgan yoyilma quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{-3}{2x}+\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{6(x+2)}.$$

2-misol. $\frac{3x^2-8x+2}{(x-2)^2(x^2+x+1)}$ kasrni sodda kasrlar yig'indisi ko'rinishida ifodalang.

Yechish. Berilgan kasr uchun yoyilma quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{3x^2-8x+2}{(x-2)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Umumiy maxrajga keltiramiz va 1-misoldagiga o'xshash quyidagini olamiz:

$$3x^2-8x+2=A(x-2)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+$$
$$+(Cx+D)(x-2)^2.$$

Agar bu tenglikda $x=2$ desak, $-2=7B\Rightarrow B=-\frac{2}{7}$ bo'ladi.

Oxirgi tenglikning ikkala qismidagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni taqqoslab, A, B, C va D ni aniqlashga imkon beradigan tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ -A+B+D-4C=3, \\ -2A+B+4D=2. \end{cases}$$

$B=-\frac{2}{7}$ ni e'tiborga olib, sistemani yechsak, $A=\frac{38}{49}$, $C=-\frac{38}{49}$, $D=-\frac{47}{49}$ ekanini topamiz. Demak, berilgan kasr quyidagicha yig'indi ko'rinishida ifodalanadi:

$$\frac{3x^2-8x+2}{(x-2)^2(x^2+x+1)}=\frac{38}{49(x-2)}-\frac{2}{7(x-2)^2}-\frac{38x-47}{49(x^2+x+1)}.$$

7- §. Bir noma'lumli tenglamalar va ularni yechish usullari

1. Bir noma'lumli tenglama haqida tushunchalar. Biz quyi sinflardan tenglikning ikkita turi: tenglama va ayniyat haqida tushunchaga egamiz. Tenglamalarni yechish va ayniyatlarni isbotlashni ham bilamiz. Noma'lum son qatnashgan tenglik tenglama deyiladi, deb ta'riflagan ham edik. $ax=b$ ko'rinishdagi tenglama birinchi darajali bir noma'lumli tenglama deyilgan edi. Bu tenglama: 1) $a\neq 0$, $b\in R$ bo'lganda yagona yechimga ega: 2) $a=b=0$ va $x\in R$ bo'lganda cheksiz ko'p yechimga ega va 3) $a=0$ va $b\neq 0$, $b\in R$ bo'lganda esa yechimga ega bo'lmasligini ham tahlil qilgan edik. Shuningdek, $ax^2+bx+c=0$ tenglamaning ham R haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega bo'lish yoki bo'lmaslik shartlarini o'rnatgan edik. Endi bir noma'lumli tenglama haqida aytilgan oldingi fikr va mulohazalarimizni umumlashtiramiz.

1-ta'rif. ***Bir noma'lumli tenglama*** *deb,*

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglikka aytiladi (bu yerda $f(x)$ va $g(x)$ — biror sonli M to'plamda berilgan x o'zgaruvchining funksiyalari).

Masalan: 1) $x^2 - 3x = 2x - 6$, bunda $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = 2x - 6$;

2) $x+\sqrt{x^2-6x+5}=0$, bunda $f(x)=x+\sqrt{x^2-6x+5}$, $g(x)=0$.

2-ta'rif. *(1) tenglamaning* ***yechimi (ildizi)*** *deb, noma'lum x ning tenglama shartida ko'rsatilgan sonli to'plamdan olingan, (1) tenglamani ayniyatga aylantiradigan qiymatiga aytiladi.*

Masalan, $3x^2 - 8x + 4 = 0$ tenglama uchun, agar $x \in N$ bo'lsa, $x = 2$ soni uning yechimi bo'ladi, chunki $2 \in N$, lekin $x=\frac{2}{3}$ soni berilgan tenglamani qanoatlantirsa-da, uning yechimi bo'lmaydi, chunki $\frac{2}{3} \notin N$.

Tenglamani yechish degan so'z uning barcha yechimlarini topish yoki berilgan tenglama yechimga ega emasligini ko'rsatishdan iborat.

3-ta'rif. *(1) tenglamaning* ***aniqlanish sohasi*** *yoki (1) tenglamadagi x noma'lumga berish mumkin bo'lgan qiymatlar to'plami deb, x noma'lumning (1) tenglamada berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (tenglamalarning chap va o'ng qismlari) aniqlanish sohalarining umumiy qismidan olingan qiymatlari to'plamiga aytiladi.*

1-misol. Agar $x \in Z$ (Z — butun sonlar to'plami) bo'lsa, $\frac{x}{x+2}+\sqrt{6+x}=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-1}$ tenglamaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Tenglamaning chap qismidan iborat bo'lgan $f(x)=\frac{x}{x+2}+\sqrt{6+x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz:

$$\begin{cases} x+2\neq 0, \\ 6+x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq -2, \\ x\geq -6, \end{cases}$$

ya'ni $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi {–6; –5; –4; –3; –1; 0; 1; 2; 3; ...} butun sonlar to'plamidan iborat.

Tenglamaning o'ng qismi bo'lgan $g(x)=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz:

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ x\neq 1, \end{cases}$$

ya'ni $g(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi {2; 3; 4; ...} butun sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

Berilgan tenglamaning aniqlanish sohasi tenglamaning chap va o'ng qismlaridan iborat bo'lgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlanish sohalarining umumiy qismidan (kesishmasidan) iborat bo'ladi:

$$\{-6;-5;-4;-3;-1;0;1;2;3;...\}\cap\{2;3;4;5;...\}=$$
$$=\{2;3;4;...\}.$$

2-misol. Agar $x\in R$ bo'lsa, $\sqrt{x}+\sqrt{x^2-5x+6}=\frac{\sqrt{5-x}}{3-x}$ tenglamaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Tenglamaning chap qismi bo'lgan $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x^2-5x+6}$ funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz:

$$\begin{cases} x\geq 0, \\ x^2-5x+6\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ (x-2)(x-3)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ x\leq 2;\ x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq 2, \\ x\geq 3, \end{cases}$$

ya'ni $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi

$$\begin{cases} 0\leq x\leq 2, \\ x\geq 3 \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar to'plamidan iborat: $[0;2]\cup[3;+\infty[$.

Endi tenglamaning o‘ng qismidan iborat bo‘lgan $g(x)=\frac{\sqrt{5-x}}{3-x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz:

$$\begin{cases}5-x\geq 0,\\ -x+3\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 5,\\ x\neq 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}]-\infty;5],\\ ]-\infty;3[\cup]3;+\infty]\end{cases}\Rightarrow]-\infty;3[\cup]3;5].$$

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlanish sohalarining umumiy qismini topamiz:

$$\{[0;2]\cup[3;\infty[\}\cup\{]-\infty;3[\cup]3;5]\}=\{[0;2]\cup]3;5]\}.$$

2.Teng kuchli tenglamalar va teng kuchli tenglamalar haqida asosiy teoremalar. Bizda chap va o‘ng qismlari mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalardan iborat bo‘lgan

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

tenglama berilgan bo‘lsin. (1) tenglamaning aniqlanish sohasi D sonli to‘plamdan iborat bo‘lsa, $D=M_1\cap M_2$ bo‘ladi. Bu yerda M_1 va M_2 mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning aniqlanish sohasidan iborat bo‘lgan sonli to‘plamlardir.

(1) tenglama D sohada ba’zi bir ayniy almashtirishlardan (umumiy maxrajga keltirish, qavslarni ochib chiqish, hadlarni tenglamaning bir qismidan ikkinchi qismiga olib o‘tish, o‘xshash hadlarni ixchamlashtirish va h.k.) keyin

$$f_1(x)=g_1(x) \tag{2}$$

ko‘rinishni qabul qilsin.

4-ta’rif. *Agar (1) va (2) tenglamalarning ikkalasi ham bir xil yechimlarga ega bo‘lsa, ya’ni yechimlari to‘plamlari ustma-ust tushsa, bunday holda (1) va (2) tenglamalar **teng kuchli tenglamalar** deyiladi.*

3-misol. $2^{x(x\ 1)}=1$ va $\sqrt{x}=x$ tenglamalar teng kuchli, chunki ularning har biri ikkita ildizga ega: 0 va 1.

4-misol. $10x^2+57x+47=0$ va $5x+6=\frac{7}{2x+9}$ tenglamalar teng kuchli, chunki ularning har biri bir xil ildizlarga ega: $x_1=-1$, $x_2=-4{,}7$.

5-ta'rif. *Agar (1) tenglamaning barcha yechimlari (2) tenglamaning ham yechimlari bo'lsa, u holda (2) tenglama (1) tenglamaning* ***natijasi*** *deyiladi.*

Masalan, $(x-2)(x-3)=0$ tenglama $x-2=0$ $(x-3=0)$ tenglamaning natijasi bo'ladi, lekin $x-2=0$ $(x-3=0)$ tenglama $(x-2)(x-3)=0$ tenglamaning natijasi bo'lmaydi. Shunday qilib, agar ikkita tenglamadan har biri boshqasining natijasi bo'lsa, bunday tenglamalar teng kuchli bo'ladi va quyidagicha yoziladi:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f_1(x)=g_1(x).$$

Berilgan $f(x)=g(x)$ tenglamada qator almashtirishlar bajarib, uni $f_1(x)=g_1(x)$ tenglamaga keltirgan bo'laylik. Bu tenglamaning ba'zi bir ildizlari $f(x)=g(x)$ tenglamaning ildizlari bo'lmasligi mumkin. Bunday holda $f_1(x)=g_1(x)$ tenglamaning bunday ildizlari $f(x)=g(x)$ tenglamaning *chet ildizlari* deyiladi. Masalan, $\sqrt{x}=-x$ tenglamaning ikkala qismini kvadratga ko'tarib, $x=x^2$ tenglamani olamiz. Bu tenglama 0 va 1 ildizlarga ega. 0 ildiz $\sqrt{x}=-x$ tenglamani qanoatlantiradi, lekin 1 ildiz esa $\sqrt{x}=-x$ tenglamani qanoatlantirmaydi, ya'ni bu ildiz berilgan tenglama uchun chet ildiz bo'ladi.

Tenglamalarni yechishda, odatda, har xil almashtirishlar bajariladi, natijada berilgan tenglama soddaroq tenglamaga (tenglamalar sistemasiga) keltiriladi.

Shuning uchun qanday almashtirishlar berilgan tenglamani unga teng kuchli tenglamaga almashtirishini, qanday almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan tenglama berilgan tenglamaning natijasi bo'lishini, qanday almashtirishlar natijasida ildizlarning yo'qolishini va chet ildizlar paydo bo'lishini bilishimiz muhimdir.

1-teorema. ***Agar berilgan tenglamaning aniqlanish sohasida uning chap va o'ng qismida ayniy almashtirishlar bajarilgan bo'lsa, u holda berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi, ya'ni (1) va (2) tenglamalarning D aniqlanish sohasida $f(x) \equiv f_1(x)$ va $g(x) \equiv g_1(x)$ bo'lsa, u holda $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f_1(x) = g_1(x)$ bo'ladi.***

Isbot. a) (1) tenglama yechimga ega bo'lib, bu yechimlarning biri $x = a$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $f(a) \equiv g(a)$ va teorema shartiga ko'ra esa $f(a) = f_1(a)$ va $g(a) = g_1(a)$ bo'ladi. Tranzitivlik xossasiga ko'ra:

$$f_1(a) \equiv f(a),\ f(a) \equiv g_1(a) \text{ va } g(a) \equiv g_1(a)$$

bo'lib, bundan $f_1(a) \equiv g_1(a)$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (1) tenglamaning istalgan yechimi (2) tenglamaning ham yechimi bo'lishini bildiradi, ya'ni $(1) \Rightarrow (2)$.

b) Faraz qilaylik, (2) tenglama yechimga ega bo'lsin. $x = b$ bu yechimlarning istalgan bittasi bo'lsin. Bunday holda $f_1(b) \equiv g_1(b)$ bo'ladi.

Teorema shartiga ko'ra $f(b) \equiv f_1(b)$ va $g(b) \equiv g_1(b)$ bo'lib, bundan $f(b) \equiv g(b)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, (2) tenglamaning istalgan yechimi (1) tenglamaning ham yechimi bo'lar ekan, ya'ni $(2) \Rightarrow (1)$. Teoremaning isbotini tugallash uchun agar (1) tenglama yechimga ega bo'lmasa, (2) tenglama ham yechimga ega bo'lmasligini va teskarisini isbotlash qoladi. Buni qarama-qarshisini faraz qilish usuli bilan isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, (1) tenglama yechimga ega bo'lmasin, (2) tenglama esa yechimga ega bo'lsin. Bu esa oldin isbotlanganiga, ya'ni $(2) \Rightarrow (1)$ bo'lishiga ziddir. Shunga o'xshash, agar (2) tenglama yechimga ega bo'lmasa, u holda (1) tenglama ham yechimga ega bo'lmasligi isbotlanadi.

Shunday qilib, $(1) \Leftrightarrow (2)$. Teorema to'la isbotlandi.

2-teorema. ***Agar tenglamaning har ikkala qismiga bir xil son yoki tenglamaning aniqlanish sohasida aniqlangan bir xil ifoda qo'shilsa, berilgan tenglamaga teng***

kuchli tenglama hosil bo‘ladi, ya’ni agar $m(x)$ ***ifoda*** (*I*) ***tenglamaning aniqlanish sohasida aniqlangan ifoda bo‘lsa, u holda*** $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)+m(x)=g(x)+m(x)$ ***bo‘ladi.***

Natija. Tenglamaning istalgan hadini uning bir qismidan ikkinchi qismiga qarama-qarshi ishora bilan olib o‘tish mumkin. Natijada berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo‘ladi.

3-teorema. ***Agar tenglamaning har ikkala qismini nolga teng bo‘lmagan songa yoki tenglamaning aniqlanish sohasida aniqlangan va nolga teng bo‘lmagan ifodaga ko‘paytirilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo‘ladi, ya’ni agar*** $m(x)$ (*I*) ***tenglamaning aniqlanish sohasida aniqlangan bo‘lib,*** $m(x)\neq 0$ ***bo‘lsa, u holda*** $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)+m(x)=g(x)+m(x)$ ***bo‘ladi.***

1-natija. Agar tenglama hadlari orasida kasr ifodali hadlari bo‘lsa, kasr hadlarini umumiy maxrajga keltirib, so‘ngra tenglamaning har ikkala qismini maxrajlarning eng kichik karralisiga ko‘paytirib, maxrajdan ozod qilish mumkin. Agar x noma’lumning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlarida eng kichik karralining qiymatlari noldan farqli bo‘lsa, olingan tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo‘ladi.

2-natija. Tenglamaning barcha hadlarini nolga teng bo‘lmagan songa yoki tenglamaning aniqlanish sohasida aniqlangan va x noma’lumning tenglama aniqlanish sohasidan olingan qiymatlarida qiymati nolga aylanmaydigan ifodaga bo‘lish mumkin.

4-teorema (teng kuchli tenglamalarning tranzitivlik xossasi haqida). ***Agar*** $f(x)=g(x)$ ***tenglama*** $f_1(x)=g_1(x)$ ***tenglamaga,*** $f_1(x)=g_1(x)$ ***tenglama esa*** $f_2(x)=g_2(x)$ ***tenglamaga teng kuchli bo‘lsa, u holda*** $f(x)=g(x)$ ***va*** $f_2(x)=g_2(x)$ ***tenglamalar teng kuchli bo‘ladi, ya’ni***

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=g(x)\Leftrightarrow f_1(x)g_1(x), \\ f_1(x)=g_1(x)\Leftrightarrow f_2(x)g_2(x) \end{array}\right\}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\Leftrightarrow f_2(x)g_2(x).$$

8- §. Kvadrat tenglamaga keltirilib yechiladigan yuqori darajali tenglamalar

Kvadrat tenglamaga keltirilib yechiladigan yuqori darajali tenglamalarning ba'zi xususiy hollarini qaraymiz.

1. Bikvadrat tenglama. Noma'lumning toq darajalari qatnashmagan to'rtinchi darajali butun algebraik ratsional tenglama *bikvadrat tenglama* deyiladi.

Har qanday bikvadrat tenglamani shakl almashtirishlardan keyin quyidagi kanonik ko'rinishga keltirish mumkin:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (a \neq 0). \qquad (1)$$

Agar (1) tenglamada $x^2 = y$ almashtirishni bajarsak, $ay^2 + by + c = 0$ kvadrat tenglamaga kelamiz.

Bu tenglamaning ildizlari uchun formula keltirib chiqargan edik:

$$y_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad y_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Agar $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ ($a > 0$, $c > 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$, $b < 0$ yoki $a < 0$, $c < 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$, $b < 0$) bo'lsa, u holda (1) bikvadrat tenglama to'rtta ildizga ega bo'ladi:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}. \qquad (2)$$

1-misol. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. (2) formulalardan foydalanamiz:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{13-\sqrt{169-144}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{13-5}{2}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2;$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{13+\sqrt{169-144}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{13+\sqrt{25}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{13+5}{2}} = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$

Javob. –3; –2; 2; 3.

kuchli tenglama hosil bo'ladi, ya'ni ag oluvchi

tenglamaning aniqlanish sohasida

u holda $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f$

Natija. Teng (3)

qismidan ikki

o'tish

a $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=t,\ \frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{1}{t}$

an kvadrat tenglamaga

$$\Rightarrow at^2-ct+b=0. \qquad (4)$$

t_2 ildizlarga ega bo'lsa, u holda

amani olamiz:

$$\cdot t_1\varphi(x)=0,\ f(x)-t_2\varphi(x)=0.$$

Bu alar $f(x)\varphi(x)\neq 0$ shartda (3) tenglamaga teng kuch bo'ladi.

2-misol. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2,9$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasiga faqat $x=0$ soni kirmaydi. Agar $\frac{x^2+1}{x}=t$ desak, $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{t}$ bo'ladi. Bundan t ga nisbatan $t+\frac{1}{t}=2,9\Rightarrow t^2-2,9t+1=0$ kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. Uning ildizlarini topamiz: $t_1=0,4,\ \ t_2=2,5.$

1) $t_1=\frac{2}{5}$ bo'lganda $5x^2-2x+5=0$ tenglamani olamiz. Bu tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$x_1=\frac{1-2i\sqrt{6}}{5},\ x_2=\frac{1+2i\sqrt{6}}{5};$$

2) $t_2=\frac{5}{2}$ bo'lganda $2x^2-5x+5=0$ tenglamani olamiz, uning ildizlari $x_3=2;\ x_4=\frac{1}{2}$ bo'ladi.

Javob. $x_1=2;\ x_2=\frac{1}{2};\ x_3=\frac{1-2i\sqrt{6}}{5};\ x_4=\frac{1+2i\sqrt{6}}{5}.$

3-misol. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama $x\neq\pm1$, $x\neq\pm2$ bo‘lganda aniqlangan. Tenglamaning har ikkala qismini $\frac{x^2-4}{x^2-1}$ ga bo‘lamiz va

$$20\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}-5\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}+48=0$$

tenglamani olamiz. Oxirgi tenglamada $\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=t$ belgilash kiritib, $20t^2+48t-5=0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Uning yechimlari: $t_1=\frac{1}{10}$; $t_2=-\frac{5}{2}$.

Bu yechimdan foydalanib, x o‘zgaruvchiga qaytamiz:

1) $t_1=\frac{1}{10}$ bo‘lganda $3x^2-11x+6=0$ tenglamani olamiz va uning ildizlarini topamiz: $x_1=3$; $x_2=\frac{2}{3}$;

2) $t_2=-\frac{5}{2}$ bo‘lganda $7x^2+9x+14=0$ tenglamani olamiz, uning ildizlari:

$$x_3=\frac{-9+i\sqrt{311}}{14};\quad x_4=\frac{-9-i\sqrt{311}}{14}.$$

Javob. $x_1=3$; $x_2=\frac{2}{3}$; $x_3=\frac{-9+i\sqrt{311}}{14}$; $x_4=\frac{-9-i\sqrt{311}}{14}$.

3. Yuqori darajali tenglamalarda to‘liq kvadrat ajratish usuli. Ba’zi bir to‘rtinchi darajali tenglamalarni to‘liq kvadrat ajratish bilan kvadrat tenglamaga keltirib yechish mumkin. Buni misollarda qaraymiz.

4-misol. $x^4+4x^3-10x^2-28x-15=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning chap qismidan to‘liq kvadrat ajratamiz:

$$x^4+4x^3+4x^2-14x^2-28x-15=0,$$
$$(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0.$$

Agar $x^2 + 2x = t$ desak, t ga nisbatan $t^2 - 14t - 15 = 0$ tenglamani hosil qilamiz, uning ildizlarini topamiz: $t_1 = -1$, $t_2 = 15$.

1) $t_1 = -1$ bo‘lganda $x^2 + 2x + 1 = 0$ tenglamani olamiz va uning ildizlarini topamiz: $x_{1,2} = -1$.

2) $t_2 = 15$ bo‘lganda $x^2 + 2x - 15 = 0$ tenglamani olamiz va uning ildizlarini topamiz: $x_3 = 3$, $x_4 = -5$.

Javob. $x_1 = x_2 = -1$; $x_3 = 3$; $x_4 = -5$.

5-misol. $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning chap qismidan to‘liq kvadrat ajratamiz:

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 + 2x - 1 = 0,$$
$$(x^2 + 2x)^2 - (x^2 - 2x + 1) = 0,$$
$$(x^2 + 2x)^2 - (x - 1)^2 = 0.$$

Bu tenglamaning chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$(x^2 + 2x - x + 1)(x^2 + 2x + x - 1) = 0.$$

Bu tenglama ikkita tenglamaga ajraladi:

1) $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$;

2) $x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{12}$.

Javob. $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$, $x_4 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$.

4. Qaytma tenglamalar. Ushbu

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0 \qquad (4)$$

ko‘rinishdagi butun algebraik tenglama qaytma tenglama deyiladi. Bunda tenglamaning boshidan va oxiridan bir xil uzoqlikda yotgan hadlarning koeffitsiyentlari bir-biriga teng bo‘ladi. Qaytma tenglamaning ildizlaridan hech biri nolga teng emasligini ko‘rish oson.

Haqiqatan ham, agar $x=0$ tenglamaning ildizi bo'lsa, u holda biz $a=0$ ga ega bo'lib, tenglamaning darajasi pastroq bo'lar edi.

Oldin juft ($n=2k$) darajali qaytma tenglamani qaraymiz.

Tenglamaning har ikkala qismini x^k ga bo'lib, hadlarini guruhlash natijasida uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$a\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)+b\left(x^{k\ 1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)+\ldots+l\left(x+\frac{1}{x}\right)+f=0. \quad (5)$$

Agar (5) tenglamada $x+\frac{1}{x}=y$ desak, ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2;\ x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y;\ldots. \quad (6)$$

(6) ni (5) ga qo'yib, y ga nisbatan k- darajali tenglamani hosil qilamiz. x ning qiymatlarini esa $x^2-yx+1=0$ tenglamadan topamiz.

Toq darajali ($n=2k+1$) qaytma tenglamani yechish juft darajali qaytma tenglamani yechishga keltiriladi.

Ushbu $ax^{2k+1}+bx^{2k}+cx^{2k-1}+\ldots+cx^2+bx+a=0$ tenglamaning $x=-1$ ildizga ega ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak, buning chap qismi $x+1$ ga bo'linadi. Tenglamaning ikkala qismini har biri $x+1$ ga bo'linadigan qo'shiluvchilar yig'indisi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$a(x^{2k+1}+1)+bx(x^{2k-1}+1)+cx^2(x^{2k-3}+1)+\ldots+lx^k(x+1)=0,$$

$$(x+1)(ax^{2k}+b_1x^{2k-1}+\ldots+b_1x+a)=0.$$

Shunday qilib, masala juft ko'rsatkichli ushbu $ax^{2k}+b_1x^{2k-1}+\ldots+b_1x+a=0$ qaytma tenglamani yechishga keltiriladi.

Qaytma tenglamaning yana o'ziga xos bir xususiyati bor. Agar $x=x_0$ soni qaytma tenglamaning ildizi bo'lsa, u holda $x=\frac{1}{x_0}$ soni ham shu tenglamaning ildizi bo'ladi.

6-misol. $21x^6+82x^5+103x^4+164x^3+103x^2+82x+$ $+21=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning har ikkala qismini x^3 ga bo‘lamiz:

$$21\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+82\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+103\left(x+\frac{1}{x}\right)+164=0.$$

Agar $x+\frac{1}{x}=t$ desak, $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$; $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$ bo‘ladi. Natijada t ga nisbatan tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$21t^3+82t^2+40t=0 \Rightarrow t(21t^2+82t+40)=0.$$

Bu tenglama ikkita tenglamaga ajraladi: $t_1=0$ va $21t^2+82t+40=0$. Bu tenglamalarni yechib topamiz: $t_1=0$, $t_2=-\frac{4}{7}$; $t_3=-\frac{10}{3}$.

Agar: 1) $t_1=0$ bo‘lsa, $x+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x^2+1=0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Uning ildizlari: $x_1=-i$, $x_2=i$;

2) $t_2=-\frac{4}{7}$ bo‘lsa, $7x^2+4x+7=0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Uning ildizlari: $x_3=\frac{-2-3i\sqrt{5}}{7}$; $x_4=\frac{-2+3i\sqrt{5}}{7}$;

3) $t_3=-\frac{10}{3}$ bo‘lsa, $3x^2+10x+3=0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Uning ildizlari: $x_5=-\frac{1}{3}$; $x_6=-3$.

Javob. $x_1=-i$; $x_2=i$; $x_3=\frac{-2-3i\sqrt{5}}{7}$; $x_4=\frac{-2+3i\sqrt{5}}{7}$; $x_5=-\frac{1}{3}$; $x_6=-3$.

7-misol. $x^5-1=0$ tenglamaning barcha ildizlarini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratamiz, ya’ni uning chap qismini $x-1$ ga bo‘lamiz, chunki $x=1$ soni x^5-1 ko‘phadning ildizi bo‘ladi:

$$x^5-1=0,\ x^5-x^4+x^4-x^3+x^3-x^2+x^2-x+x-1=0,$$
$$x^4(x-1)+x^3(x-1)+x^2(x-1)+x(x-1)+(x-1)=0,$$
$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0.$$

Bu tenglama ikkita tenglamaga ajraladi: $x-1=0$ va $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

Birinchi tenglama $x_1=1$ yechimga ega. Ikkinchi tenglama qaytma tenglamadir, uni ham yechamiz:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Agar $x+\frac{1}{x}=y$ desak, $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ bo'lib, y ga nisbatan $y^2+y-1=0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama $y_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ildizlarga ega.

Endi x ni topamiz: $y_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ desak, $2x^2-(-1+\sqrt{5})x+$ $+2=0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$x_{2,3}=\frac{\sqrt{5}-1\pm\sqrt{6-2\sqrt{5}-16}}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$y_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ desak, $2x^2+(1+\sqrt{5})x+2=0$ tenglama hosil bo'ladi. Uning ildizlarini topamiz:

$$x_{4,5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Javob. $x_1=1$; $x_{2,3}=-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $x_{4,5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+l=0$ $(l\neq 0)$ tenglama qaytma tenglama bo'lishi uchun uning koeffitsiyentlari quyidagicha bog'langan bo'lishi kerak:

$$d=\lambda b,\ l=\lambda^2 a.$$

Bunday holda berilgan tenglama $y=x+\frac{\lambda}{x}$ almashtirish bilan kvadrat tenglamaga keladi.

Ushbu

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m \qquad (7)$$

tenglamani qayta tenglamaga keltirish uchun uning koeffitsiyentlari orasida $a+b=c+d$ (yoki $a+c=b+d$, yoki $a+d=b+c$) tenglik bajarilishi kerak.

8-misol. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$ tenglamani yeching.

Yechish. $a=1$, $b=3$, $c=5$, $d=7$, $a+d=b+c \Rightarrow$ $\Rightarrow 1+7=3+5$. Bunday holda berilgan tenglamaning chap qismini quyidagicha guruhlash mumkin:

$$[(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)]+15=0,$$
$$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0,$$
$$(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+120=0.$$

Agar $x^2+8x=y$ desak, y ga nisbatan $y^2+22y+120=0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Uning ildizlari: $y_1=-10$; $y_2=-12$ bo‘ladi.

Agar $y=y_1=-10$ desak, $x^2+8x+10=0$ tenglamani olamiz, bu tenglamaning ildizlari: $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{6}$ bo‘ladi. Agar $y=y_2=-12$ desak, $x^2+8x+12=0$ tenglama hosil bo‘ladi, bu tenglamaning ildizlari: $x_3=-2$, $x_4=-6$.

Javob. $x_1=-4+\sqrt{6}$; $x_2=-4-\sqrt{6}$; $x_3=-2$; $x_4=-6$.

Ushbu

$$(x+a)^4+(x+b)^4=c \qquad (8)$$

ko‘rinishdagi tenglama

$$x=t-\frac{a+b}{2} \qquad (9)$$

almashtirish bilan bikvadrat tenglamaga keladi. Haqiqatan, berilgan tenglamada $x+a=t+m$, $x+b=t-m$ almashtirishlarni bajarsak, $a-b=2m$ yoki $m=\frac{a-b}{2}$ bo‘ladi. Bunday holda $x+a=t+\frac{a-b}{2}$ yoki $x=t-\frac{a+b}{2}$. Natijada (8) tenglama t ga nisbatan quyidagi ko‘rinishni oladi:

$\left(t+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(t-\frac{a-b}{2}\right)^4=c$. Bu tenglamani soddalashtirgandan keyin esa $t^4+6\left(\frac{a-b}{2}\right)^2t^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^4=\frac{c}{2}$ bikvadrat tenglamani olamiz. Bu tenglamani yechishni bilamiz.

9-misol. $(x+5)^4+(x+3)^4=2$ tenglamani yeching.

Yechish. $x=t-\frac{5+3}{2}=t-4$ almashtirish bajaramiz. Natijada t ga nisbatan $(t+1)^4+(t-1)^4=2\Rightarrow t^4+6t^2=0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama $t_1=t_2=0$, $t_3=t_4=i\sqrt{6}$ ildizlarga ega. $t_1=t_2=0$ bo'lganda $x_1=x_2=-4$; $t_3=t_4=i\sqrt{6}$ bo'lganda $x_3=x_4=-4-i\sqrt{6}$ bo'ladi.

Javob. $x_1=x_2=-4$; $t_3=t_4=-4-i\sqrt{6}$.

Ushbu

$$\frac{dx}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c \tag{10}$$

ko'rinishdagi tenglama

$$px+\frac{q}{x}=t \tag{11}$$

almashtirish bilan kvadrat tenglamaga keladi. Agar $c=0$ bo'lsa, u holda (10) tenglama $x_1=0$ ildizga ega bo'ladi. Qolgan ildizlari x ga nisbatan kvadrat tenglamaga keltirib topiladi.

Agar $c\neq0$ bo'lsa, u holda $x\neq0$ bo'lib, bunday holda (10) tenglama chap qismining surat va maxrajini x ga bo'lib, uni $\frac{a}{px+n+\frac{q}{x}}+\frac{b}{px+m+\frac{q}{x}}=c$ ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglamada $px+\frac{q}{x}=t$ almashtirish bajarsak, $\frac{a}{t+n}+\frac{b}{t+m}=c$ tenglamani olamiz. Oxirgi tenglama $t\neq n$, $t\neq m$ shartlarda $ct^2+(mc+nc-a-b)t+mnc-am-bn=0$ kvadrat tenglamaga keladi.

10-misol. $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning chap qismidagi har bir kasrning surat va maxrajini x ga bo'lamiz:

$$\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1.$$

Agar $4x+\frac{7}{x}=t$ desak, t ga nisbatan $\frac{4}{t-8}+\frac{3}{t-10}=1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu yerda $t \neq 8$ va $t \neq 10$ desak, oxirgi tenglamadan $t^2-25t+144=0$ tenglamani olamiz. Bu tenglama $t_1=9$ va $t_2=16$ ildizlarga ega.

Agar $t=t_1=9$ desak, $4x^2-9x+7=0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama $x_{1,2}=\frac{9\pm i\sqrt{31}}{8}$ yechimlarga ega.

Agar $t=t_2=16$ desak, $4x^2-16x+7=0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=\frac{7}{4}$ yechimlarga ega.

Javob. $x_1=\frac{9+i\sqrt{31}}{8}$; $x_2=\frac{9-i\sqrt{31}}{8}$; $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=\frac{7}{4}$.

9- §. Noma'lum modul ostida qatnashgan tenglamalar

Noma'lum modul ostida qatnashgan tenglamalarning eng soddalari bilan II bobning 8- § ida tanishgan edik. Noma'lum modul ostida qatnashgan tenglamalarni yechishda quyidagi usullarni qo'llash mumkin: 1) modulni qoida bo'yicha ochish; 2) tenglamaning ikkala qismini kvadratga ko'tarish; 3) oraliqlarga bo'lish usuli. Bu usullarni aniq misollar yechishga qo'llaymiz.

1-misol. $|x^2+x-1|=2x-1$ tenglamani yeching.

Yechish. *1- usul.* Misolning ta'rifiga ko'ra

$$|x^2+x-1|=\begin{cases} x^2+x-1, & \text{agar } x^2+x-1\geq 0, \\ -(x^2+x-1), & \text{agar } x^2+x-1<0. \end{cases}$$

Berilgan tenglama quyidagi aralash sistemani yechish bilan teng kuchli:

$$\begin{cases} x^2+x-1\geq 0, \\ x^2+x-1=2x-1 \end{cases} \text{va} \begin{cases} x^2+x-1<0, \\ -(x^2+x-1)=2x-1. \end{cases}$$

Birinchi sistemadan $x_1 = 1$, ikkinchi sistemadan esa $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ bo‘lishini topamiz.

2-usul. Berilgan tenglamaning ikkala qismi ham nomanfiy. Shuning uchun berilgan tenglamaning ikkala qismini kvadratga ko‘tarib, unga teng kuchli bo‘lgan $|x^2+x-1|^2=(2x-1)^2$ tenglamani olamiz. Agar $|f(x)|^2 = (f\ (x))^2$ bo‘lganligini e’tiborga olsak, oxirgi tenglama $(x^2+x-1)^2=(2x-1)^2$ ko‘rinishni oladi. Bu tenglamani yechamiz:

$$x^4+x^2+1+2x^3-2x^2-2x-4x^2+4x-1=0,$$
$$x^4+2x^3-5x^2+2x=0,$$
$$x(x^3+2x^2-5x+2)=0.$$

Bu tenglama ikkita tenglamaga ajraladi: $x=0$ va $x^3+2x^2-5x+2=0$. $x=0$ chet ildiz.

Oxirgi tenglama keltirilgan butun koeffitsiyentli algebraik tenglamadir. Bu tenglama butun ildizlarga ega bo‘lsa, bu butun ildizlar ±1 va ±2 sonlari bo‘lishi mumkin. Sinash usuli bilan $x=1$ soni bu tenglamaning ildizi bo‘lishini topamiz. Tenglamaning chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^3-x^2+3x^2-3x-2x+2=0,$$
$$x^2(x-1)+3x(x-1)-2(x-1)=0,$$
$$(x-1)(x^2+3x-2)=0.$$

$x_1=1;\ x_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$ ni topamiz.

Tekshirish bilan berilgan tenglamani qanoatlantiradigan ildizlarni ajratib olamiz. Bu ildizlar: $x=1$ va $x\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ bo‘ladi.

2-misol. $7-4x=|4x-7|$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani ham modulni ochish qoidasini qo‘llab yechamiz:

$$|4x-7|=\begin{cases}4x-7, & \text{agar } 4x-7\ge 0,\\ 7-4x, & \text{agar } 4x-7<0.\end{cases}$$

Berilgan tenglama quyidagi ikkita aralash sistemaga teng kuchli bo‘ladi:

$$\begin{cases}4x-7\ge 0,\\ 7-4x=4x-7\end{cases} \text{va} \begin{cases}4x-7<0,\\ 7-4x=-4x+7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\ge\frac{7}{4},\\ x=\frac{7}{4}\end{cases} \text{va} \begin{cases}x<\frac{7}{4},\\ -\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

$x\le\frac{7}{4}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar berilgan tenglamani qanoatlantiradi. $x>\frac{7}{4}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar berilgan tenglamani qanoatlantirmaydi.

Javob. $\left]-\infty;\ \frac{7}{4}\right]$.

3-misol. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamani oraliqqa bo‘lish usulidan foydalanib yechamiz.

Son o‘qida $x-2$, $x-3$ va $2x-8$ ifodalarning qiymatlarini nolga aylantiradigan x ning qiymatlarini belgilaymiz. Son o‘qi $]-\infty;\ 2[$, $[2;\ 3[$, $[3;\ 4[$, $[4;\ +\infty[$ oraliqlarga bo‘linadi. Berilgan tenglamani har bir oraliqda yechamiz:

$$\begin{cases}-\infty<x<2,\\ -x+2-x+3-2x+8=9;\end{cases} \qquad \begin{cases}2\le x<3,\\ x-2-x+3-2x+8=9;\end{cases}$$

$$\begin{cases}3\le x<4,\\ x-2+x-3-2x+8=9;\end{cases} \qquad \begin{cases}4\le x<+\infty,\\ x-2+x-3+2x-8=9\end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} -\infty < x < 2, \\ x = 1; \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} 2 \le x < 3, \\ x = 0; \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} 3 \le x < 4, \\ 0 = 6; \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} 4 \le x < +\infty, \\ x = \frac{11}{2}. \end{cases}$$

1- sistemadan $x = 1$ ni topamiz, 2 va 3- sistemalar yechimga ega emas, 4- sistemadan $x = \frac{11}{2}$ ni topamiz. Berilgan tenglama 1; $\frac{11}{2}$ yechimlarga ega.

10- §. Bir noma'lumli tengsizliklar va ularning teng kuchliligi

1. Bir noma'lumli tengsizliklar haqida asosiy tushunchalar.

Ta'rif. *Ushbu*

$$f(x) > \varphi(x), \ f(x) \ge \varphi(x),$$

$$f(x) < \varphi(x), \ f(x) \le \varphi(x)$$

ko'rinishdagi tengsizliklar ***bir noma'lumli tengsizliklar*** *deb ataladi.*

Bu yerda $f(x)$ va $\varphi(x)$ — x o'zgaruvchining funksiyalari bo'lib, ulardan birortasi o'zgarmas son bo'lishi ham mumkin. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar algebraik ifodalar bo'lsa, bunday holda tengsizliklar algebraik tengsizliklar deyiladi. Masalan, $3x^2 + 7x + 5 \ge 9$, $3x < 6x - 13$, $\sqrt{x^2 - 1} < 5x$ algebraik tengsizliklardir.

x noma'lumning berilgan tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymati *bir noma'lumli tengsizlikning yechimi* deyiladi.

Masalan, $x^2 - 5x < -6$ tengsizlik x noma'lumning $x = 2{,}5$ qiymatida to'g'ri tengsizlikka, $x = 4$ bo'lganda esa noto'g'ri tengsizlikka aylanadi. $x = 2{,}5$ soni berilgan tengsizlikning yechimi bo'ladi, $x = 4$ soni esa uning yechimi bo'lmaydi. Bir noma'lumli tengsizlikning yechimlari deb, uning barcha xususiy yechimlari to'plamiga aytiladi.

$f(x) > \varphi(x)$ tengsizlikning aniqlanish sohasi deb yoki noma'lumga berish mumkin bo'lgan qiymatlar to'plami deb, x ning $f(x)$ va $\varphi(x)$ ifodalar aniqlangan qiymatlar to'plamiga aytiladi. Boshqa so'z bilan aytganda $f(x) > \varphi(x)$ tengsizlikning aniqlanish sohasi $f(x)$ va $\varphi(x)$ ifodalar aniqlanish sohalarining umumiy qismiga aytiladi.

Masalan, $x^3 + \sqrt{6-x} > \frac{x}{x^2-1}$ tengsizlikning aniqlanish sohasi, ya'ni x noma'lumning mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami (MBQT)ni topaylik. Tengsizlikning chap qismi $6 - x \geq 0$, ya'ni $x \leq 6$ bo'lganda mavjud bo'ladi. O'ng qismi esa $x \neq \pm 1$ bo'lganda ma'noga ega. Demak, tengsizlikning aniqlanish sohasi, ya'ni x noma'lumga berish mumkin bo'lgan qiymatlar to'plami $x < -1$, $-1 < x < 1$, $1 < x \leq 6$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x ning qiymatlari to'plamidan iborat bo'ladi.

2. Teng kuchli tengsizliklar va teng kuchli tengsizliklar haqida asosiy teoremalar. Bizga ikkita bir noma'lumli tengsizlik berilgan bo'lsin:

$$f(x) > \varphi(x) \tag{1}$$

va

$$f_1(x) > \varphi_1(x). \tag{2}$$

(2) tengsizlik (1) tengsizlikdan ba'zi bir almashtirishlardan keyin olingan bo'lishi mumkin. Agar (1) tengsizlikning barcha yechimlari (2) tengsizlikning yechimlari bo'lsa, bunday holda (2) tengsizlik (1) tengsizlikning natijasi deyiladi. Qisqacha (1) $\Rightarrow$ (2) ko'rinishda yoziladi. Agar (1) tengsizlikning har bir yechimi (2) tengsizlikning yechimi, aksincha, (2) tengsizlikning har bir yechimi (1) tengsizlikning yechimi bo'lsa, u holda (1) va (2) tengsizliklar teng kuchli deyiladi. Qisqacha (1) $\Leftrightarrow$ (2) ko'rinishda yoziladi.

1-teorema. ***Agar tengsizlikning aniqlanish sohasida uning chap va o'ng qismlarida ayniy almashtirishlar qilsak, u holda berilgan tengsizlikka teng kuchli tengsizlik hosil bo'ladi, ya'ni aniqlanish sohasi D dan iborat bo'lgan (1) tengsizlik berilgan bo'lib, uni ayniy almashtirishdan hosil bo'lgan (2) tengsizlikning ham aniqlanish sohasi***

***D* dan iborat bo'lsa, bu (2) tengsizlik (1) tengsizlikka teng kuchli bo'ladi.**

2-teorema. ***Agar tengsizlikning har ikkala qismiga bir xil son va noma'lumning qiymatlar sohasida aniqlangan bir xil ifoda qo'shilsa, berilgan tengsizlikka teng kuchli tengsizlik hosil bo'ladi, ya'ni aniqlanish sohasi D dan iborat bo'lgan* $f(x) > \varphi(x)$ *tengsizlik berilgan bo'lib,* $m(x)$ *esa son yoki x ning D sohasidan olingan qiymatlarida aniqlangan ifoda bo'lsa, u holda* $f(x) + m(x) > \varphi(x) + m(x)$ *tengsizlik berilgan tengsizlikka teng kuchli bo'ladi.***

Natija. Tengsizlikning istalgan hadini uning bir qismidan ikkinchi qismiga qarama-qarshi ishora bilan olib o'tish mumkin.

3-teorema. ***Agar tengsizlikning har ikkala qismi musbat songa yoki noma'lumning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarida musbat qiymatlarni qabul qiluvchi ifodaga ko'paytirilsa, berilgan tengsizlikka teng kuchli tengsizlik hosil bo'ladi.***

Isbot. Ushbu

$$f(x) > \varphi(x) \qquad (1)$$

tengsizlik berilgan bo'lsin. (1) ning aniqlanish sohasidan olingan x lar uchun $m(x) > 0$ bo'lsin. Bunday holda

$$f(x) \cdot m(x) > \varphi(x) \cdot m(x) \qquad (3)$$

tengsizlik (1) tengsizlikka teng kuchli bo'lishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, (1) tengsizlik $x = a$ yechimga ega bo'lsin. Bunday holda $f(a) > \varphi(a)$ tengsizlik va $m(a) > 0$ musbat songa ega bo'lamiz. Sonli tengsizliklarning xossasiga ko'ra $f(a) \cdot m(a) > \varphi(a) \cdot m(a)$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bu esa $x = a$ soni (3) tengsizlikning yechimi bo'lishini ko'rsatadi. Endi faraz qilaylik, $x = \beta$ soni (3) tengsizlikning yechimi bo'lsin. Bunday holda $f(\beta)\, m(\beta) > \varphi(\beta)\, m(\beta)$ sonli tengsizlikka ega bo'lamiz. $m(\beta) > 0$ bo'lgani uchun, oxirgi tengsizlikning ikkala qismini $m(\beta)$ ga bo'lib, $f(\beta) > \varphi(\beta)$ tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlik $x = \beta$ soni (1) tengsizlikning yechimi bo'lishini ko'rsatadi. Shunday qilib, (1) tengsizlikning istalgan yechimi (3) tengsizlikning yechimi va aksincha bo'lishini isbotlaylik. Demak, (1) $\Leftrightarrow$ (3).

4-teorema. ***Agar tengsizlikning har ikkala qismini manfiy songa yoki noma'lumning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarida manfiy qiymatlar qabul qiluvchi ifodaga ko'paytirilsa, berilgan tengsizlikka qarama-qarshi ma'nodagi teng kuchli tengsizlik hosil bo'ladi, ya'ni agar $f(x) > \varphi(x)$ tengsizlik berilgan bo'lib, $m(x)$ esa manfiy son yoki x noma'lumning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarida manfiy qiymatlar qabul qiladigan ifoda bo'lsa, u holda $f(x)\, m(x) < \varphi(x)\, m(x)$ tengsizlik berilgan tengsizlikka teng kuchli bo'ladi.***

5-teorema. a) $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ *tengsizlik* $\varphi(x) \neq 0$ *bo'lganda* $f(x)\varphi(x) > 0$ *tengsizlikka teng kuchli bo'ladi;*

b) $\frac{f(x)}{\varphi(x)} < 0$ *tengsizlik esa* $\varphi(x) \neq 0$ *bo'lganda* $f(x)\varphi(x) < 0$ *tengsizlikka teng kuchlidir.*

Isbot. a) teorema shartidagi $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0$ tengsizlik chap qismining surat va maxrajini $\varphi(x) \neq 0$ ga ko'paytirib, 1-teoremaga ko'ra $\frac{f(x)\varphi(x)}{[\varphi(x)]^2} > 0$ tengsizlikni olamiz. $[\varphi(x)]^2 > 0$ bo'lganligidan birinchi tengsizlikka teng kuchli bo'lgan $f(x)\,\varphi(x) > 0$ tengsizlikni olamiz;

b) teoremaning bu qismi ham yuqoridagiga o'xshash isbotlanadi. Shuni qayd qilish kerakki, $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \geq 0$ tengsizlik $\varphi(x) \neq 0$ bo'lganda $f(x)\varphi(x) \geq 0$ tengsizlikka teng kuchli; $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \leq 0$ tengsizlik esa $\varphi(x) \neq 0$ bo'lganda $f(x)\varphi(x) \leq 0$ tengsizlikka teng kuchli bo'ladi.

6-teorema (teng kuchli tengsizliklarning tranzitivlik xossasi haqida). ***Ushbu***

$$f_2(x) > \varphi_2(x) \qquad (4)$$

tengsizlik berilgan bo'lsin. Agar (1) tengsizlik (2) tengsizlikka, (2) tengsizlik esa (4) tengsizlikka teng kuchli bo'lsa, u holda (1) tengsizlik (4) tengsizlikka teng kuchli bo'ladi.

11- §. Bir noma'lumli ratsional tengsizliklarni yechish

1. Birinchi darajali bir noma'lumli tengsizliklarni yechish. Ushbu

$$ax+b>0,\ ax+b<0,\ ax+b\geq 0,\ ax+b\leq 0\ (a\neq 0) \quad (1)$$

ko'rinishdagi tengsizliklar birinchi darajali bir noma'lumli chiziqli algebraik tengsizliklar deyiladi. Bu tengsizliklar $a>0$ bo'lganda mos ravishda

$$x\in\left]-\frac{b}{a};\infty\right[,\ x\in\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right[,\ x\in\left[-\frac{b}{a};\infty\right[,\ x\in\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right]$$

yechimlar to'plamiga ega, $a<0$ bo'lganda esa mos ravishda

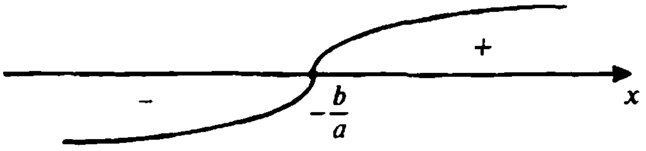
$$x\in\left]-\infty;\frac{b}{a}\right[,\ x\in\left]-\frac{b}{a};\infty\right[,\ x\in\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right],\ x\in\left[-\frac{b}{a};\infty\right[$$

yechimlar to'plamiga ega bo'ladi.

$ax+b$ $(a\neq 0)$ ikkihadni tekshiraylik. Bu ikkihadning ildizi yoki nolini topaylik: $ax+b=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}$.

Endi $ax+b$ ikkihadni $a\left(x+\frac{b}{a}\right)$ $(a\neq 0)$ ko'rinishda ifodalaylik.

$a>0$ bo'lib, $x+\frac{b}{a}>0$ bo'lsa, ikkihadning qiymati musbat ($x>-\frac{b}{a}$ bo'lganda), $x+\frac{b}{a}<0$ ($x<-\frac{b}{a}$ bo'l-



18- rasm.

ganda) ikkihadning qiymati manfiy bo‘ladi. Xulosa qilib aytganda, $a > 0$ bo‘lib, x ning qiymati $-\frac{b}{a}$ ildizdan katta bo‘lganda $ax + b$ ikkihadning qiymati musbat, x ning qiymati $-\frac{b}{a}$ ildizdan kichik bo‘lganda ikkihadning qiymati manfiy bo‘ladi ($a > 0$ bo‘lganda teskari bo‘ladi).

Geometrik nuqtayi nazardan $a > 0$ bo‘lganda $ax + b$ ikkihadning qiymati o‘z ildizining chap qismida manfiy, o‘ng qismida musbat bo‘ladi (18- rasm).

1-misol. $\frac{3x+1}{6}+\frac{1}{2} \geq \frac{x+3}{3}-1{,}5$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikning ikkala qismini 6 ga ko‘paytiramiz:

$$3x+1+3 \geq 2(x+3)-1{,}5 \cdot 6,$$

$$3x+4 \geq 2x+6-9,\ 3x-2x \geq -3-4,\ x \geq -7.$$

Javob. $x \in [-7;\ \infty[$.

2. Ikkinchi darajali bir noma’lumli (kvadrat) tengsizliklarni yechish. Ushbu

$$ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c \geq 0, \quad (2)$$

$$ax^2+bx+c \leq 0 \quad (a \neq 0)$$

ko‘rinishdagi tengsizliklar *bir noma’lumli ikkinchi darajali (kvadrat) tengsizliklar* deyiladi.

$ax^2+bx+c>0$ $(a \neq 0)$ tengsizlikni yechaylik.

Agar $a > 0$ bo‘lsa, bu tengsizlik $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0$ yoki

$$x^2 + px + q > 0 \quad (3)$$

tengsizlikka teng kuchli. Bunda $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$.

Agar $a < 0$ bo‘lsa, u holda berilgan tengsizlik $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0$ yoki

$$x^2 + px + q < 0 \tag{4}$$

tengsizlikka teng kuchli bo‘ladi. Bunda $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$. Shunga o‘xshash boshqa tengsizliklar ham (3) yoki (4) kabi ko‘rinishga keltiriladi.

Endi

$$x^2 + px + q \tag{5}$$

uchhadni qaraylik.

1. Agar $D = p^2 - 4q > 0$ bo‘lsa, u holda $x^2 + px + q$ uchhadni chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratish mumkin:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

bunda $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ $(x_1 < x_2)$ kvadrat uchhadning ildizlari (nollari).

Agar $x < x_1 < x_2$ bo‘lsa, u holda $x - x_1 < 0$ va $x - x_2 < 0$ bo‘lib, $x^2 + px + q > 0$ bo‘ladi.

Agar $x_1 < x < x_2$ bo‘lsa, u holda $x - x_1 > 0$ va $x - x_2 < 0$ bo‘lib, $x^2 + px + q < 0$ bo‘ladi.

Agar $x > x_2 > x_1$ bo‘lsa, u holda $x - x_1 > 0$ va $x - x_2 > 0$ bo‘lib, $x^2 + px + q > 0$ bo‘ladi.

Xulosa. Agar $D > 0$ bo‘lsa, u holda x kichik ildizdan kichik, katta ildizdan katta bo‘lganda $x^2 + px + q$ kvadrat uchhadning qiymati musbat, x ning qiymati ildizlar oralig‘ida bo‘lganda manfiy bo‘ladi. 19-rasmda $x^2 + px + q$ uchhadning ishoralari bir xil bo‘lgan oraliqlar tasvirlangan.

19- rasm.

2. Agar $D = p^2 - 4q = 0$ $\left(q = \frac{p^2}{4}\right)$ bo'lsa, u holda uchhad to'liq kvadratni tashkil qiladi:

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

$x \neq -\frac{p}{2}$ bo'lganda uchhadning qiymati musbat, $x = -\frac{p}{2}$ bo'lganda 0 ga teng.

3. Agar $D = p^2 - 4q < 0$ bo'lsa, u holda (5) uchhadda quyidagicha to'liq kvadrat ajratish mumkin:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2 - 4q}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4},$$

bunda $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$ va $4q - p^2 > 0$, shuning uchun x ning barcha qiymatlarida $x^2 + px + q > 0$ bo'ladi. Shuningdek, $x^2 + px + q \geq 0$ va $x^2 + px + q \leq 0$ tengsizliklar ham yechiladi. $x^2 + px + q \geq 0$ $(x^2 + px + q \leq 0)$ tengsizlik yechimlari to'plami $x^2 + px + q > 0$ $(x^2 + px + q < 0)$ tengsizlik yechimlari to'plamiga $x^2 + px + q$ uchhadning ildizlari qo'shib olinishidan hosil qilinadi.

2-misol. $x^2 - 8x + 15 > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikning chap qismini chiziqli ko'paytuvchilarga ajratamiz: $(x - 3)(x - 5) > 0$. Bu yerda $x_1 = 3$ yoki $x_2 = 5$ bo'lganda tengsizlikning chap qismi nolga aylanadi.

$x > 5$ bo'lganda x ning barcha qiymatlarida $x - 3 > 0$ va $x - 5 > 0$ bo'lib, kvadrat uchhad faqat musbat qiymatlar qabul qiladi va x ning bunday qiymatlari yechim bo'la oladi.

$3 < x < 5$ bo'lganda, $x - 3 > 0$ va $x - 5 < 0$ bo'lib, kvadrat uchhad manfiy qiymatlar qabul qiladi va x ning bunday qiymatlari berilgan tengsizlikning yechimi bo'la olmaydi.

$x < 3$ bo'lganda, $x - 3 < 0$ va $x - 5 < 0$ bo'lib, $(x - 3) \times$ $\times (x - 5) > 0$ bo'ladi, ya'ni uchhad musbat qiymatlarni qabul qiladi, x ning bunday qiymatlari ham berilgan tengsizlikning yechimi bo‘ladi.

Javob. $x < 3$ yoki $x < 5$.

3-misol. $x^2 - x - 6 < 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Tengsizlikning chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratamiz: $(x + 2)(x - 3) < 0$.

Bu tengsizlik x ning qiymatlari uning ildizlari oralig‘ida yotganda bajariladi: $x_1 < x < x_2$. $x_1 = -2$; $x_2 = 3$. Demak, $-2 < x < 3$.

4-misol. $x^2 - 10x + 25 > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikning chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratsak, to‘liq kvadrat tashkil qilishini ko‘rish qiyin emas:

$$(x - 5)(x - 5) > 0 \quad (x - 5)^2 > 0.$$

Oxirgi tengsizlikning chap qismi $x \neq 5$ bo‘lganda hamma vaqt musbat.

Javob. $x \neq 5$.

5-misol. $3x^2 + 5x + 3 > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Tengsizlikning chap qismi chiziqli haqiqiy ko‘paytuvchilarga ajralmaydi. Tengsizlikning chap qismidan to‘liq kvadrat ajratamiz:

$$3x^2 + 5x + 3 = 3\left(x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 3\left(x^2 + 2 \cdot \frac{5}{6}x + \frac{25}{36} + \frac{11}{36}\right) =$$
$$= 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}.$$

$3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} > 0$ tengsizlik x ning $(-\infty; \infty)$ oraliqdan olingan barcha qiymatlarida bajariladi.

Javob. $-\infty < x < \infty$.

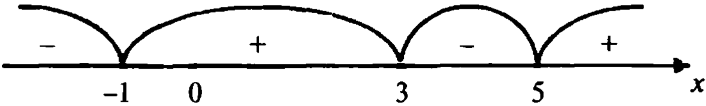
3. Bir noma’lumli yuqori darajali ratsional tengsizliklarni yechish. Intervallar usuli. Berilgan bir noma’lumli n-darajali butun ratsional tengsizlikni quyidagi kanonik ko‘rinishlarning biriga keltirish mumkin:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 > 0, \qquad (6)$$
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \geq 0, \qquad (7)$$
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 < 0, \qquad (8)$$
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \leq 0. \qquad (9)$$

(6) — (9) tengsizliklarni turli usullar bilan yechish mumkin. Biz esa bu tengsizliklarni yechishga intervallar usulini qo'llaymiz. Intervallar usulining mazmunini aniq misollar yechish bilan ochishga harakat qilaylik.

6 - misol. $(x+1)(x-3)(x-5) > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Bu tengsizlikning chap qismidan iborat bo'lgan $f(x) = (x+1)(x-3)(x-5)$ funksiya barcha R haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan. Funksiyaning (ko'phadning) qiymatlari $x = -1$, $x = 3$ va $x = 5$ nuqtalarda nolga aylanadi. Bu nuqtalar funksiyaning aniqlanish sohasini $(-\infty; -1)$; $(-1; 3)$; $(3; 5)$ va $(5; +\infty)$ oraliqlarga ajratadi (20- rasm).



20- rasm.

Tengsizlikning chap qismi $(x+1)(x-2)(x-5)$ uchta ko'paytuvchining ko'paytmasidan iborat. Bu ko'paytuvchilardan har birining qaralayotgan oraliqlardagi ishoralari jadvalda ko'rsatilgan.

	$x \in]-\infty; -1[$	$x \in]-1; 3[$	$x \in]3; 5[$	$x \in]5; +\infty[$
$x+1$	−	+	−	+
$x-3$	−	−	+	+
$x-5$	−	−	−	+

Jadvaldan ko'rinib turganidek:

agar $x \in]-\infty; -1[$ bo'lsa, $f(x) < 0$ bo'ladi;

agar $x \in]-1;\ 3[$ bo‘lsa, $f(x) > 0$ bo‘ladi;
agar $x \in]3;\ 5[$ bo‘lsa, $f(x) < 0$ bo‘ladi;
agar $x \in]5;\ +\infty[$ bo‘lsa, $f(x) > 0$ bo‘ladi.

Biz $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ 3[$, $]3;\ 5[$, $]5;\ +\infty[$ oraliqlarning har birida funksiya (tengsizlikning chap qismi) o‘z ishorasini saqlashini -1, 3 va 5 nuqtalar orqali o‘tishda uning ishorasi o‘zgarishini ko‘ramiz. Demak, berilgan tengsizlikning yechimlari to‘plami $]-1;3[\cup]5;+\infty[$ bo‘ladi.

7-misol. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Tengsizlikning chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratamiz.

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$ ko‘phadi -1, 1; 3 va 5 nuqtalarda nolga aylanadi. Demak, $f(x) = (x+1)(x-1) \times$ $\times (x-3)(x-5)$. Bunday holda berilgan tengsizlik quyidagi ko‘rinishni oladi: $(x+1)(x-1)(x-3)(x-5) > 0$. Yuqoridagiga o‘xshash $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ 1[$, $]1;\ 3[$, $]3;\ 5[$ va $]5;+\infty[$ oraliqlarning har birida $f(x)$ funksiyaning ishorasini aniqlaymiz:

agar $x \in]-\infty;\ -1[$ bo‘lsa, $f(x) > 0$ bo‘ladi;
agar $x \in]-1;\ 1[$ bo‘lsa, $f(x) < 0$ bo‘ladi;
agar $x \in]1;\ 3[$ bo‘lsa, $f(x) > 0$ bo‘ladi;
agar $x \in]3;\ 5[$ bo‘lsa, $f(x) < 0$ bo‘ladi;
agar $x \in]5;\ +\infty[$ bo‘lsa, $f(x) > 0$ bo‘ladi.

Berilgan tengsizlikning yechimlari to‘plami $]-\infty;\ -1[$, $]1;\ 3[$, $]5;+\infty[$ oraliqlarning yig‘indisidan iborat bo‘ladi: $]-\infty;-1[\cup]1;\ 3[\cup]5;+\infty[$.

8-misol. $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-6x+8)(x^2+4x+4) < 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. $x^2-4=(x-2)(x+2)$; $x^2-4x+4=(x-2)^2$; $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$; $x^2+4x+4=(x+2)^2$ bo‘lgani uchun berilgan tengsizlik $(x+2)^3(x-2)^4(x-4) < 0$ ko‘rinishni oladi. $f(x)=(x+2)^3(x-2)^4(x-4)$ funksiyaning qiymati $x=-2$, $x=2$, $x=4$ nuqtalarda nolga aylanadi.

$f(x)$ funksiyaning $]-\infty;\ 2[$; $]-2;\ 2[$; $]2;\ 4[$ va $]4;+\infty[$ oraliqlardagi ishoralarini aniqlaymiz:

agar $x\in]-\infty;\ -2[$ bo‘lsa, $f(x)>0$ bo‘ladi;
agar $x\in]-2;\ 2[$ bo‘lsa, $f(x)<0$ bo‘ladi;
agar $x\in]2;\ 4[$ bo‘lsa, $f(x)<0$ bo‘ladi;
agar $x\in]4;\ \infty[$ bo‘lsa, $f(x)>0$ bo‘ladi.

Berilgan tengsizlikning yechimlar to‘plami: $]-2;\ 2[\ \cup$ $\cup\ ]2;\ 4[$.

4. Bir noma’lumli ratsional kasr tengsizliklarni yechish.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0;\ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\geq 0;$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0;\ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\leq 0 \qquad (10)$$

ko‘rinishdagi bir noma’lumli tengsizliklar *ratsional kasr tengsizliklar* deyiladi. Bunda

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0(a_n\neq 0);$$
$$Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0(b_m\neq 0).$$

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$ ko‘rinishdagi ratsional tengsizlikni yechish

$$P_n(x)\cdot Q_m(x)>0 \qquad (11)$$

tengsizlikni yechish bilan teng kuchlidir. Haqiqatan berilgan tengsizlikning ikkala qismini x ning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlarida musbat bo‘lgan $[Q_m(x)]^2$ ko‘phadga ko‘paytirsak, (11) tengsizlik hosil bo‘ladi $(Q_m(x)\neq 0)$.

Qolgan tengsizliklarni yechish uchun ham yuqoridagidek mulohaza yuritish mumkin.

$$\frac{ax+b}{cx+d}>k,\ \frac{ax+b}{cx+d}\geq k,\ \frac{ax+b}{cx+d}<k,\ \frac{ax+b}{cx+d}\leq k \qquad (12)$$

ko‘rinishdagi tengsizliklar *kasr-chiziqli bir noma’lumli tengsizliklar* deyiladi. Bu yerda a, b, c, d berilgan haqiqiy sonlar va $c\neq 0$, $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ (agar $c=0$ bo‘lsa, kasr-chiziqli tengsizliklar chiziqli tengsizlikka aylanadi; agar $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ bo'lsa, bunday holda (12) tengsizliklar x o'zgaruvchini o'z tarkibiga olmaydi).

9-misol. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35}>0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikning surat va maxrajidagi kvadrat uchhadlarni ko'paytuvchilarga ajratamiz: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$; $x^2-12x+35=(x-5)(x-7)$, natijada berilgan tengsizlik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-7)}>0.$$

Bu tengsizlikni yechish $x\neq 5$ va $x\neq 7$ bo'lganda $f(x)=(x-2)(x-3)(x-5)(x-7)>0$ tengsizlikni yechish bilan teng kuchli. Bu tengsizlikning chap qismini nolga aylantiradigan 2, 3, 5, 7 nuqtalar tengsizliklarning aniqlanish sohasini $]-\infty;\ 2[,\ ]2;\ 3[,\ ]3;\ 5[,\ ]5;\ 7[$ va $]7;\ \infty[$ oraliqlarga ajratadi. Har bir oraliqda $f(x)$ funksiyaning ishorasini aniqlaymiz:

agar $x\in]-\infty;\ 2[$ bo'lsa, $f(x)>0$ bo'ladi;
agar $x\in]2;\ 3[$ bo'lsa, $f(x)<0$ bo'ladi;
agar $x\in]3;\ 5[$ bo'lsa, $f(x)>0$ bo'ladi;
agar $x\in]5;\ 7[$ bo'lsa, $f(x)<0$ bo'ladi;
agar $x\in]7;\ +\infty[$ bo'lsa, $f(x)>0$ bo'ladi.

x ning berilgan tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlarini ajratib olamiz: $]-\infty;\ 2[\ \cup\ ]3;\ 5[\ \cup\ ]7;\ +\infty[$.

10-misol. $\frac{3x-2}{2x-3}\leq 3$ tengsizlikni yeching.

Yechish. $x\neq\frac{3}{2}$ shartda berilgan tengsizlikning ikkala qismini $(2x-3)^2$ ga ko'paytirib, unga teng kuchli bo'lgan tengsizlikni olamiz:

$$(3x-2)(2x-3)\leq 3(2x-3)^2,$$
$$6x^2-13x+6\leq 12x^2-36x+27,$$
$$6x^2-23x+21\geq 0.$$

Bu tengsizlikning chap qismini nolga aylantiradiga x ning qiymatlarini topamiz:

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{7}{2}.$$

Berilgan tengsizlik x ning kichik ildizidan kichik hamd katta ildizidan katta va teng bo‘lgan qiymatlarida bajariladi ya’ni tengsizlikning yechimlar to‘plami $x < \frac{3}{2}$ va $x \geq \frac{7}{2}$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x ning qiymatlari bo‘ladi

$$\left]-\infty;\ \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{2};\ +\infty\right[.$$

11-misol. $\frac{3}{6x^2-x-12} < \frac{25x-47}{10x-15} - \frac{3}{3x+4}$ tengsizlikn yeching.

Yechish. Tengsizlik tarkibidagi kasrlarni umumi maxrajga keltiramiz.

Buning uchun tengsizlikda $x \neq \frac{4}{3}$, $x \neq \frac{3}{2}$ deb, almashtirishlar bajaramiz:

$$\frac{3}{(3x+4)(2x-3)} < \frac{25x-47}{5(2x-3)} - \frac{3}{3x+4},$$

$$\frac{5\cdot 3-(25x-47)(3x+4)+5\cdot 3(2x-3)}{5(3x+4)(2x-3)} < 0,$$

$$\frac{15-75x^2+141x-100x+188+30x-45}{(3x+4)(2x-3)} < 0,$$

$$\frac{75x^2+71x-158}{(3x+4)(2x-3)} > 0, \quad \frac{75\left(x+\frac{79}{75}\right)(x-2)}{6\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)} > 0.$$

Bu tengsizlik $x \neq -\frac{4}{3}$ va $x \neq -\frac{3}{2}$ bo‘lganda

$$f(x) = \left(x+\frac{79}{75}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2) > 0$$

tengsizlikni yechish bilan teng kuchlidir. $f(x)$ funksiya

$x=-\frac{79}{75}$ va $x=2$ nuqtada 0 ga aylanadi, $x=-\frac{4}{3}$ va $x=-\frac{3}{2}$ nuqtalarda esa uzilishga ega. Bu nuqtalar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini $\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[$, $\left]-\frac{4}{3};-\frac{79}{75}\right[$, $\left]-\frac{79}{75};\frac{3}{2}\right[$, $\left]\frac{3}{2};2\right[$, $]2;+\infty[$ oraliqlarda ajratadi. Bu oraliqlarda $f(x)$ funksiyaning ishorasini aniqlaymiz:

agar $x\in\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[$ bo'lsa, $f(x)>0$ bo'ladi;

agar $x\in\left]-\frac{4}{3};-\frac{79}{75}\right[$ bo'lsa, $f(x)<0$ bo'ladi;

agar $x\in\left]-\frac{79}{75};\frac{3}{2}\right[$ bo'lsa, $f(x)>0$ bo'ladi;

agar $x\in\left]\frac{3}{2};2\right[$ bo'lsa, $f(x)<0$ bo'ladi;

agar $x\in]2;+\infty[$ bo'lsa, $f(x)>0$ bo'ladi.

x ning berilgan tengsizlikni qanoatlantiradigan yechimlari to'plamini ajratib olamiz:

$$\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[\cup\left]-\frac{79}{75};\frac{3}{2}\right[\cup]2;+\infty[.$$

5. Noma'lum modul belgisi ostida qatnashgan tengsizliklarni yechish. Noma'lum modul belgisi ostida qatnashgan tengsizliklarni yechishda ko'pincha quyidagi teoremadan foydalaniladi.

Teorema. ***$f(x)>\varphi(x)$ tengsizlik berilgan bo'lib, tengsizlikning aniqlanish sohasidan olingan x ning barcha qiymatlarida $f(x)\geq 0$ va $\varphi(x)\geq 0$ bo'lsin. Agar tengsizlikning ikkala qismini bir xil n natural darajaga ko'tarsak, berilgan tengsizlikka teng kuchli $(f(x))^n>(\varphi(x))^n$ tengsizlik hosil bo'ladi.***

Ba'zan esa noma'lum modul belgisi ostida qatnashgan tengsizliklarni yechishda haqiqiy son modulining geometrik ma'nosidan ham foydalaniladi. *a* sonning $|a|$ moduli son to‘g‘ri chizig‘ida a nuqtadan koordinata boshigacha bo‘lgan masofani bildiradi. $|x_2-x_1|$ ayirmaning moduli esa koordinatalari x_1 va x_2 bo‘lgan nuqtalar orasidagi masofani bildiradi.

12-misol. $|1-3x|-|2x+3|\ge 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlik $|2x+3|\le|1-3x|$ tengsizlikka teng kuchli. Oxirgi tengsizlikning ikkala qismini kvadratga ko‘tarib topamiz:

$$(2x+3)^2\le(1-3x)^2;\ 4x^2+12x+9\le 1-6x+9x^2,$$

$$5x^2-18x-8\ge 0,\ \left(x+\frac{2}{5}\right)(x-4)\ge 0.$$

Oxirgi tengsizlik $]-\infty;-0,4]\cup[4;+\infty[$ sonlar to‘plamida bajariladi.

13-misol. $\left|\frac{2x-3}{x^2-1}\right|\ge 2$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlik $x\ne\pm1$ bo‘lganda $\left(\frac{2x-3}{x^2-1}\right)^2\ge 4$ tengsizlikni yechish bilan teng kuchlidir. Bu tengsizlikni yechamiz:

$$\frac{4x^2-12x+9}{x^4-2x^2+1}-4\ge 0\Rightarrow\frac{4x^2-12x+9-4x^4+8x^2-4}{x^4-2x^2+1}\ge 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-4x^4+12x^2-12x+5}{(x^2-1)^2}\ge 0\Rightarrow\frac{4x^4-12x^2+12x-5}{(x^2-1)^2}\le 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(2x^2+2x-5)(2x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2}\le 0.$$

Bu yerda $x\in R$ bo‘lganda $2x^2-2x+1>0$ bo‘ladi, chunki $D=b^2-4ac=-4<0$.

$$2x^2+2x-5=2\left(x+\frac{1+\sqrt{11}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{11}}{2}\right).$$

Natijada oxirgi tengsizlik

$$f(x)=\frac{(2x^2-2x+1)\left(x+\frac{1+\sqrt{11}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{11}}{2}\right)}{(x-1)^2(x+1)^2}\le 0$$

ko'rinishni oladi. Bu tengsizlikni intervallar usuli bilan yechib, uning yechimlari to'plamini quyidagicha topamiz:

$$\left[\frac{-1-\sqrt{11}}{2};\ -1\right]\cup[-1;\ 1]\cup\left[1;\ \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right].$$

12- §. Muhammad al-Xorazmiyning „Al-jabr val-muqobala hisobi“ kitobi haqida

Chala kvadrat tenglamalarni va to'liq kvadrat tenglamalarning xususiy ko'rinishlarini yechishni qadimgi vavilonliklar (yunonlar) bilishgan. Kvadrat tenglamalarning ayrim turlarini qadimgi grek matematiklari yechishgan. Bunda ularni yechish geometrik yasashlarga keltirilgan.

Xorazmiy (to'liq ismi Abu Abdulloh Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy) matematikaning ilmiy rivojlanishida yangi davr yaratgan va barcha fanlar taraqqiyotiga ulkan inqilobiy ta'sir ko'rsatgan qomusiy olim, o'rta asr sharq madaniyatining ustunlaridan biridir. Alloma yozib qoldirgan asarlarning har biri ilm sohasida yangi sahifa ochdi. U matematikaga oid risolasi bilan algebra faniga asos soldi.

Bu fanning eng muhim tushunchalari, hattoki nomi ham Xorazmiy asaridan boshlanadi.

Uning bu risolasi shu sohadagi birinchi asar bo'lib, arabcha „Kitob Al-jabr val-muqobala“ nomi bilan ma'lum. Xorazmiy bu asarida:

1) $ax^2 = bx$;　　4) $ax^2 + bx = c$;
2) $ax^2 = c$;　　5) $ax^2 + c = bx$;
3) $bx = c$;　　6) $bx + c = ax^2$

ko'rinishdagi tenglamalarning musbat ildizlarini topish usullarini bergan. Yechish usullarini geometrik izohlab tushuntirgan.

Xorazmiy Sharqda birinchi bor yaratilgan trigonometrik jadvallarning muallifi hisoblanadi. U bu bilan o'rta asr sharqida trigonometriya va geometriya sohasidagi tadqiqotlarni boshlab berdi. Xorazmiyning ilmiy jasorati, faqat ayrim fanlar sohasidagi ulkan yutuqlari bilangina belgilanmaydi. U o‘z ijodida quldorlik davri erishgan Qadimgi Sharq va Gretsiya ilmiy yutuqlarini yakunlab, yangi ijtimoiy-iqtisodiy formatsiyaning tug‘ilishi jarayonida ilmiy ixtirolarga ehtiyojlar kuchaygan bu davrning aqliy intilishlari, ilmiy qudrati, potensial kuchi, yo‘nilishi va tavsifini ifodaladi.

Uchinchi darajali tenglamalarni yechish usullari qadimgi grek faniga ham, arab faniga ham ma’lum bo‘lmagan. IX — XV asrlardagi arab matematiklarining algebraik risolalarida birinchi va ikkinchi darajali tenglamalarni hamda tenglamalar sistemasini yechishdan tashqari, xususiy ko‘rinishdagi kub tenglamalarni yechish qarab chiqiladi. Biroq bu tenglamalarni yechish usullari ildizlarning taqribiy qiymatlarini topishga keltirilar edi.

Kub tenglamalar va ularni yechish haqida buyuk faylasuf va matematik Umar Xayyom ham muhim ahamiyatga ega bo‘lgan ishlarni qildi. U „Algebraik muammolarni isbotlash haqida traktat“ asarida kub tenglamalar haqidagi fikr va mulohazalarni eng qulay va ravon izohlab berdi. Birinchi marta algebrani mustaqil fan darajasiga ko‘tardi. Umar Xayyom algebrasining asosiy predmeti noma’lum sonlar (noma’lum miqdorlar) bo‘lib, ular boshqa ma’lum sonlar (miqdorlar) orqali ifodalanadi. Noma’lum va ma’lum sonlar tenglamalar vositasida bog‘langan bo‘ladi, degan fikrni birinchi bo‘lib aytdi. Algebraga tenglamalar haqidagi fan sifatida qaradi va „Algebra ilmiy san’at“ deb baholadi.

13- §. Ko‘p noma’lumli tenglamalar sistemasi

1. Ikki noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasi va uni yechish usullari. Ushbu

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi sistema *ikki noma’lumli ikkita chiziqli tengla-*

malar sistemasi deyiladi. Bu yerda x va y — noma'lumlar, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — sistemaning koeffitsiyentlari, ya'ni berilgan haqiqiy sonlardir.

Agar $c_1 = c_2 = 0$ bo'lsa, u holda (1) sistema bir jinsli, qolgan hollarda ($c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$; $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$) *bir jinslimas sistema* deyiladi.

(1) sistemani turli usullar bilan yechish mumkin:

A. O'rniga qo'yish usuli.
B. Algebraik qo'shish usuli.
D. Taqqoslash usuli.
E. Grafik yechish usuli.

A. O'rniga qo'yish usuli. (1) sistemani yechish uchun $b_1 \neq 0$ deb, sistemaning birinchi tenglamasidan y ni x orqali ifodalaymiz:

$$y = \frac{c_1 - a_1 x_1}{b_1}. \tag{2}$$

y ning bu ifodasini (1) sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yamiz:

$$a_2 x + b_2 \frac{c_1 - a_1 x_1}{b_1} = c_2 \Rightarrow (a_1 b_2 - a_2 b_1)x = c_1 b_2 - c_2 b_1.$$

Agar $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ bo'lsa, u holda $x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$.

x ning bu ifodasini (2) ga qo'yamiz:

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} x = \frac{c}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Shunday qilib, $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ bo'lganda (1) sistemaning yechimini quyidagicha olamiz:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \\ y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \end{cases} \tag{3}$$

B. Algebraik qo'shish usuli. (1) sistemani algebraik qo'shish usuli bilan yechish uchun uning birinchi tenglamasining ikkala qismini $b_2 \neq 0$ ga va ikkinchisini $-b_1 \neq 0$ ga ko‘paytiramiz. Natijada (1) ga teng kuchli bo‘lgan sistemani olamiz:

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2, \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = c_2b_1. \end{cases}$$

Sistema yechimga ega bo‘lsin deb, oxirgi sistema tenglamalarini hadlab qo‘shamiz va topamiz: $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$, bundan $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ deb, x ni topamiz:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

y ni topish uchun ham yuqoridagidek ish bajaramiz. (1) sistema birinchi tenglamasining ikkala qismini $-a_2 \neq 0$ ga, ikkinchi tenglamasini $a_1 \neq 0$ ga ko‘paytirib,

$$\begin{cases} -a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1, \\ a_1a_2x + a_1b_2y = -a_1c_2 \end{cases}$$

sistemani olamiz. Bu sistema tenglamalarini hadlab qo‘shib $(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$ tenglamani olamiz.

Bundan $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ bo‘lganda y ni topamiz:

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Shunday qilib, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ bo‘lganda (1) sistemaning yechimini quyidagicha olamiz:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$$

Bevosita tekshirish bilan ishonch hosil qilish mumkinki, x va y ning topilgan

$$\left(\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1};\ \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$

jufti $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ bo‘lganda (1) sistemani qanoatlantiradi.

D. Taqqoslash usuli. Bu usul bilan (1) sistemani yechishda u sistema yechimga ega deb faraz qilinadi. Sistemaning har bir tenglamasidan y ni (yoki x ni) topamiz:

$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1},\ y=\frac{c_2-a_2x}{b_2},\ b_1\neq 0,\ b_2\neq 0.$$

y uchun ifodalarni tenglashtirib, x ga nistbatan tenglama hosil qilamiz:

$$\frac{c_1-a_1x}{b_1}=\frac{c_2-a_2x}{b_2}.$$

$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ bo'lganda oxirgi tenglamani yechib, x ni topamiz:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

x ning bu topilgan ifodasini y uchun ifodalarning biriga, masalan, ikkinchisiga qo'yib, y ni topamiz:

$$y=\frac{c_2-a_2\cdot\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}}{b_2}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

Agar (1) sistema yechimga ega bo'lsa, u holda uning yechimi $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ bo'lganda $\left(\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1};\ \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$ juftdan iborat bo'ladi.

2. Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish. Qulaylik uchun yuqorida topilgan (3) yechimda quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$\Delta=a_1b_2-a_2b_1,\ \Delta_x=c_1b_2-c_2b_1,\ \Delta_y=a_1c_2-a_2c_1.$$

1. Agar $\Delta\neq 0$ bo'lsa, u holda (1) sistema yagona yechimga ega bo'ladi:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

$\Delta\neq 0$ degan shartimiz (1) sistemadagi x va y noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlar, mos ravishda, proporsional bo'lmasligini, ya'ni $a_2\neq 0$ va $b_2\neq 0$ bo'lganda

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \qquad (4)$$

bo‘lishini bildiradi. (1) sistemada noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlar proporsional bo‘lmasa, bunday holda sistema yagona yechimga ega bo‘ladi. Sistema birgalikda bo‘lib, aniq sistema bo‘ladi.

2. Agar $\Delta = 0$ bo‘lib, $\Delta_x \neq 0$ va $\Delta_y \neq 0$ bo‘lsa, u holda (1) sistema yechimga ega bo‘lmaydi, ya’ni (1) sistema birgalikda bo‘lmaydi. $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ va $c_2 \neq 0$ bo‘lganda birgalikda bo‘lmaslik sharti

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \qquad (5)$$

ko‘rinishga ega, ya’ni noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlar o‘zaro proporsional bo‘lib, ozod hadlar proporsional bo‘lmasa, bunday holda (1) sistema yechimga ega bo‘lmaydi.

3. Agar $\Delta = 0$ bo‘lib, $\Delta_x = 0$ va $\Delta_y = 0$ bo‘lsa, bunday holda (1) sistema cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamiga ega bo‘ladi, ya’ni sistema birgalikda bo‘lib, aniqmas bo‘ladi. $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ va $c_2 \neq 0$ bo‘lganda (1) sistema cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamiga ega bo‘lishi sharti

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \qquad (6)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi, ya’ni (1) sistemada noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlar va ozod hadlar o‘zaro proporsional bo‘lsa, bunday holda (1) sistema aniqmas bo‘lib, cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Sistema tarkibidagi istalgan tenglama boshqasiga teng kuchli bo‘lib, sistemaning yechimlari bitta tenglamaning cheksiz ko‘p yechimlari to‘plamidan iborat bo‘ladi.

1-misol. $\begin{cases} 4x - 5y = 3, \\ 6x - 2y = 7 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Tenglamalar sistemasini algebraik qo‘shish usuli bilan yechamiz. Sistema birinchi tenglamasining ikkala qismini 2 ga, ikkinchisining ikkala qismini 5 ga ko‘paytirib, ikkinchi tenglamadan birinchi tenglamani hadlab ayirsak, x ga nisbatan tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} 4x-5y=3, \\ 6x-2y=7 \end{cases} \left| \begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} 8x-10y=6, \\ 30x-10y=35 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22x=29 \Rightarrow x=\frac{29}{22}=1\frac{7}{22}.$$

x ning topilgan qiymatini sistemaning birinchi tenglamasiga qo‘yib, y ni topamiz:

$$4\cdot\frac{29}{22}-5y=3 \Rightarrow \frac{58}{11}-5y=3 \Rightarrow 58-55y=33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11y=5 \Rightarrow y=\frac{5}{11}.$$

Javob. $x=1\frac{7}{22}$, $y=\frac{5}{11}$.

2-misol. $\begin{cases} 3x-9y=6, \\ x-3y=4 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Berilgan sistemada noma’lumlarning oldidagi koeffitsiyentlar o‘zaro proporsional bo‘lib, (5) shart bajariladi, ya’ni

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{-3}{-3}\neq\frac{1}{2};$$

berilgan tenglamalar sistemasi birgalikda emas. Demak, sistema yechimga ega emas.

3-misol. $\begin{cases} 6x-5y=11, \\ 30x-25y=55 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Berilgan sistema uchun (6) shart bajariladi. Berilgan sistema aniqmas bo‘lib, cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

3. Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasining geometrik ma'nosi. Chiziqli tenglamalar sistemasini grafik usul bilan yechish. (1) sistemaning har bir tenglamasi bilan x va y o'zgaruvchilar orasidagi o'zaro chiziqli moslik berilgan bo'lsin. x va y o'zgaruvchilar orasidagi har bir chiziqli moslik to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida qandaydir to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Agar sistema yagona yechimga ega bo'lsa, u holda sistema tenglamalari bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar bir nuqtada kesishadi. Agar sistema cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lsa, u holda sistema tenglamalari bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi. Agar sistema birgalikda bo'lmasa, sistemaning tenglamalari bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi. (1) sistema tarkibidagi tenglamalarning koordinata tekisligidagi geometrik tasvirlari bo'lib ularning grafiklari xizmat qiladi.

Ikki noma'lumli birinchi darajali

$$ax + by = c$$

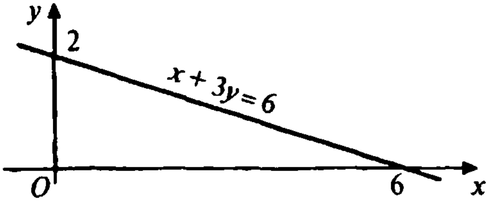
tenglamaning grafigi deb bu tenglamaga x va y koordinatalarini qo'yganda uni to'g'ri tenglikka aylantiruvchi $M(x;\ y)$ nuqtalar to'plamiga aytiladi.

Endi ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini grafik usul bilan yechishni aniq misollarda qaraymiz.

4-misol. $\begin{cases} x + 3y = 6, \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini grafik usulda yeching.

Yechish. Berilgan sistemaga kiruvchi har bir tenglamaning grafigini yasaymiz. Buning uchun har bir tenglamada y ni x orqali ifodalaymiz:

$$\begin{cases} x + 3y = 6, \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 6 - x, \\ y = 7 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{6-x}{3}, \\ y = 7 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - \frac{x}{3}, \\ y = 7 - 2x. \end{cases}$$



21- rasm.

To‘g‘ri chiziq o‘zining ikkita nuqtasi bilan to‘liq aniqlanadi. To‘g‘ri chiziqni yasash uchun uning ikkita nuqtasini topish yetarli. Bu nuqtalarni

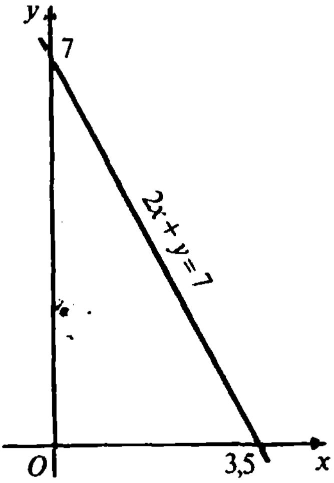
$$y = 2 - \frac{1}{3}x$$

tenglamadan topamiz: agar $x = 0$ bo‘lsa, u holda $y = 2$ bo‘ladi; agar $x = 6$ bo‘lsa, u holda $y = 0$ bo‘ladi. Shunday qilib,

$$y = 2 - \frac{1}{3}x$$

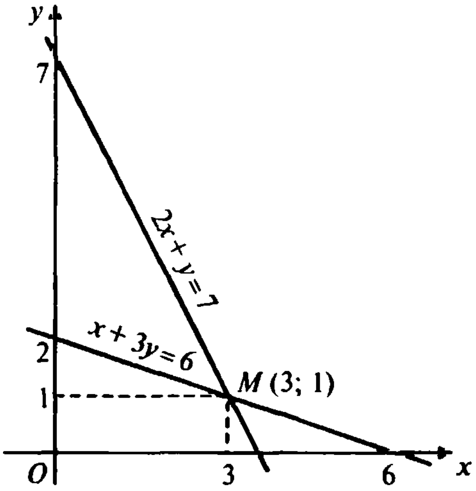
tenglamaning grafigi (0; 2) va (6; 0) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘ladi (21-rasm).

Yuqoridagidek mulohaza yuritib, $y = 7 - 2x$ tenglama grafigini yasaymiz. Agar bu tenglamada $x = 0$ bo‘lsa, u holda $y = 7$ bo‘ladi, agar $y = 0$ bo‘lsa, u holda $x = 3{,}5$ bo‘ladi. Demak, $2x + y = 7$ tenglamaning grafigi (0; 7) va (3,5; 0) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘ladi (22-rasm).



22- rasm.

Yasalgan ikkala to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasini qaraymiz. 23-rasmdan ko‘rinib turibdiki, bu to‘g‘ri chiziqlar (3; 1) nuqtada kesishadi. Bu nuqta ikkala to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lgani uchun $x = 3$ va $y = 1$ bo‘lganda sistema tenglamalarining ikkalasi



23- rasm.

ham to‘g‘ri tenglikka aylanadi, ya’ni $x=3$ va $y=1$ berilgan tenglamalar sistemasining yechimi bo‘ladi (23-rasm).

Tenglamalar sistemasini yechishning grafik usuli quyidagicha bo‘ladi:

1) sistemadagi har bir tenglamaning grafigi yasaladi;

2) yasalgan grafiklar kesishish nuqtasining (agar ular kesishsa) koordinatalari topiladi.

Tenglamalar grafiklari kesishish nuqtasining koordinatalari shu tenglamalar sistemasining yechimi bo‘ladi.

4. Uch va undan ortiq noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasi. Gauss usuli.

$$\begin{cases} \{a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ \{a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ \{a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \qquad (7)$$

ko‘rinishdagi sistema uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi. Bu yerda x, y, z — noma’lumlar, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 — *sistemaning koeffitsiyentlari*, d_1, d_2, d_3 — *ozod hadlar* deyiladi.

$d_1 = d_2 = d_3 = 0$ bo‘lsa, (7) sistema bir jinsli, qolgan hollarda esa *bir jinsli bo‘lmagan sistema* deyiladi. Ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullarini (7) sistemani yechishga ham qo‘llash mumkin. (7) ko‘rinishdagi sistemani yechishga Gauss usulini qo‘llaymiz. (7) sistema quyidagi almashtirishlar yordamida maxsus ko‘rinishga (uchburchak yoki trapetsiya shakliga) keltiriladi:

1) (7) sistema tarkibidagi istalgan tenglamaning ikkala qismini istalgan $\lambda \neq 0$ songa ko‘paytirish;

2) (7) sistema tarkibidagi istalgan tenglamaning ikkala qismini ixtiyoriy α songa ko‘paytirish, sistemaning boshqa istalgan tenglamasiga hadlab qo‘shish;

3) (7) sistemadagi istalgan ikkita tenglamaning o‘rinlarini almashtirish.

Bu almashtirishlar natijasida (7) sistema o‘ziga teng kuchli bo‘lgan sistemaga o‘tadi. Bu sistemani yechish esa juda qulay bo‘ladi. Bu usul *Gauss usuli* deyiladi. Bu usul *n* noma’lumli *m* ta chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda keng qo‘llaniladi.

5-misol. $\begin{cases} 2x - 3x + z = -1, \\ x + y + z = 6, \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

Yechish. Birinchi tenglama sifatida sistemaning ikkinchi tenglamasini olamiz:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - 3x + z = -1, \\ 3x + y - 2z = -1. \end{cases}$$

Bu sistema birinchi tenglamasining ikkala qismini –2 ga ko‘paytirib, uni ikkinchi tenglamaga hadlab qo‘shamiz; undan keyin birinchi tenglamaning ikkala qismini

–3 ga ko'paytirib, uni uchinchi tenglamaga hadlab qo'shamiz. Natijada berilgan sistemaga teng kuchli bo'lgan sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ -5y-z=-13, \\ -2y-5z=-19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6, \\ 5y+z=13, \\ 2y+5z=19. \end{cases}$$

Oxirgi sistema ikkinchi tenglamasining ikkala qismini –5 ga ko'paytirib, uni uchinchi tenglamaga hadlab qo'shib, quyidagini olamiz:

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ 5y+z=13, \\ -23y=-46. \end{cases}$$

Shunday qilib, berilgan sistema uchburchak ko'rinishiga keltirildi. Bu sistemaning oxirgi tenglamasidan $y=2$ ni topamiz. Ikkinchi tenglamadan esa $z=3$ ni topamiz. $y=2$ va $z=3$ ni birinchi tenglamaga qo'yib, $x=1$ ni topamiz.

Javob. $x=1$, $y=2$, $z=3$.

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi kabi (7) sistema ham geometrik mazmunga ega. (7) sistemaning har bir tenglamasi fazoda tekislikni aniqlaydi. Fazoda uchta tekislik o'zaro joylashuvining mumkin bo'lgan hollarini qaraymiz.

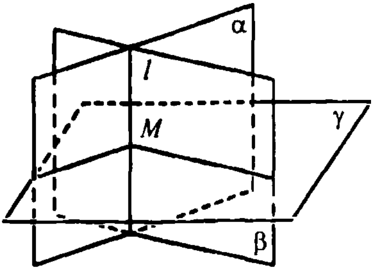
A. Uchala tekislik har xil joylashgan.

B. Ikkita tekislik ustma-ust tushgan, uchinchi tekislik farqli joylashgan.

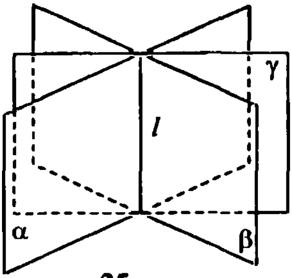
D. Uchala tekislik ham ustma-ust tushadi.

Mumkin bo'lgan hollarning har birini alohida-alohida tahlil qilamiz.

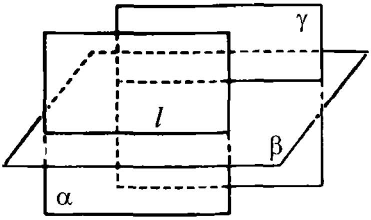
A. Agar tekisliklardan ikkitasi α va β kesishsa, u holda uchta hol bo'lishi mumkin: 1) uchinchi γ tekislik α va β tekisliklarning *l* kesishish chizig'ini kesib o'tishi mumkin (24-rasm);



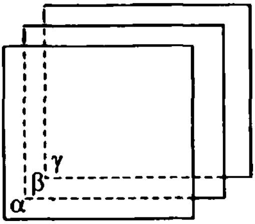
24- rasm.



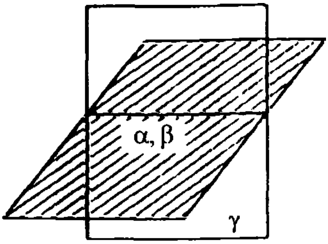
25- rasm.



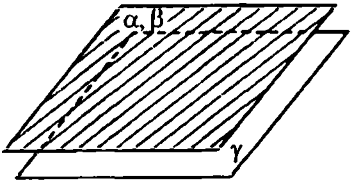
26- rasm.



27- rasm.



28- rasm.



29- rasm.

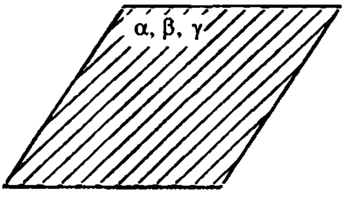
2) *l* to'g'ri chiziq γ tekislikka tegishli bo'lishi mumkin (25-rasm);

3) γ tekislik *l* ga parallel bo'lib, u bilan umumiy nuqtaga ega bo'lmasligi mumkin (26-rasm);

4) agar tekisliklar kesishuvchi bo'lmasa, u holda uchala tekislik parallel bo'lishi mumkin (27-rasm).

B. Ikkita hol bo'lishi mumkin:

5) α va β ustma-ust tushuvchi tekisliklarni uchinchi γ tekislik kesishi mumkin (28-rasm);



30- rasm.

6) γ tekislik ustma-ust tushuvchi α va β tekisliklarga parallel bo'lishi mumkin (29-rasm). Ular bilan umumiy nuqtalarga ega bo'lmasligi mumkin.

Rasmlarda ustma-ust tushuvchi tekisliklar shtrixlab ko'rsatilgan.

D. Faqat bitta hol bo'lishi mumkin:

7) barcha uchala tekislik ustma-ust tushadi (30-rasm).

Shunday qilib, 1- holda sistema bitta yechimga ega; 2, 5 va 7- hollarda cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega; 3, 4 va 6- hollarda yechimlar to'plami bo'sh to'plam tashkil qiladi.

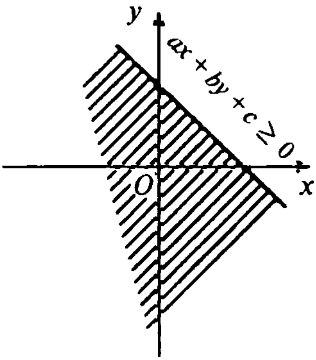
14- §. Ko'p o'zgaruvchili tengsizliklar va ularning sistemalari

1. Ikki o'zgaruvchili tengsizliklarni yechish. Ushbu

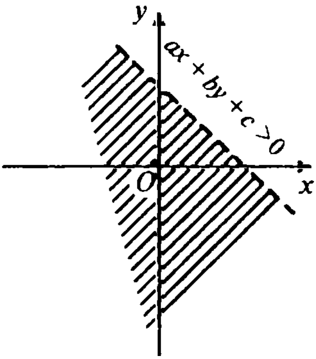
$$F(x;\, y) > 0,\ F(x;\, y) \geq 0,\ F(x;\, y) < 0,\ F(x;\, y) \leq 0 \qquad (1)$$

ko'rinishidagi tengsizliklar *ikki o'zgaruvchili tengsizliklar* deyiladi.

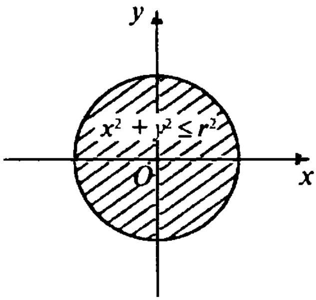
$F(x;\, y) = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi l chiziq tekislikni bir nechta sohalarga ajratishi mumkin. Bu sohalarning ba'zi birlarida $F(x;\, y) > 0$ ($F(x;\, y) \geq 0$) tengsizlik, boshqalarida esa $F(x;\, y) < 0$ ($F(x;\, y) \leq 0$) tengsizlik bajarilishi mumkin. Shunday ekan, $F(x;\, y) > 0$ tengsizlikni yechmoqchi bo'lsak, avvalo $F(x;\, y) = 0$ tenglama bilan tasvirlanuvchi l chiziqni yasaymiz. Bu chiziq ajratgan sohalarda sinash nuqtalarini tanlaymiz. Tanlangan nuqtalarda $F(x;\, y)$ funksiyaning ishorasini aniqlaymiz. Sohaning qolgan nuqtalarida ham funksiya shunday ishoraligicha qoladi. Shundan so'ng $F(x;\, y)$ ning ishorasi musbat bo'lgan sohalar ajratiladi. Agar bu ajratib olingan sohalarga l chiziq ustidagi nuqtalarni qo'shib olsak, $F(x;\, y) \geq 0$ tengsizliklarning yechimlar to'plamini topgan bo'lamiz.



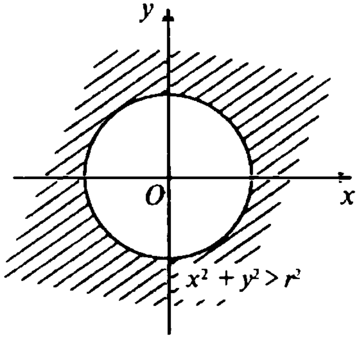
31- rasm.



32- rasm.



33- rasm.



34- rasm.

Masalan, $ax+by+c\geq 0$ yoki $ax+by+c>0$ chiziqli tengsizlikning yechimlar to'plami yarimtekislikdan iboratdir. Agar tengsizlik noqat'iy bo'lsa, yarimtekislik chegarasidagi nuqtalar bu to'plamga tegishli bo'ladi (31-rasm); agar tengsizlik qat'iy bo'lsa, chegaraviy nuqtalar bu to'plamga tegishli bo'lmaydi (32-rasm).

$x^2+y^2\leq r^2$ tengsizliklarning yechimlari to'plami markazi koordinata boshida yotgan r radiusli doiradan iborat (33- rasm) (tengsizlik qat'iy bo'lganda aylana bu to'plamga tegishli bo'lmaydi, tengsizlik noqat'iy bo'lganda esa aylana bu to'plamga tegishli bo'ladi).

$x^2+y^2\le r^2$ tengsizlikning yechimlari to'plami esa doiraning to'ldiruvchisidan iborat (34-rasm).

Shunday qilib, $F(x;\ y)>0$ $(F(x;\ y)\ge 0)$ tengsizliklarning yechimlar to'plami tekislikda biror shakldan iborat bo'lar ekan. Yana misollar yechib, tahlil qilaylik.

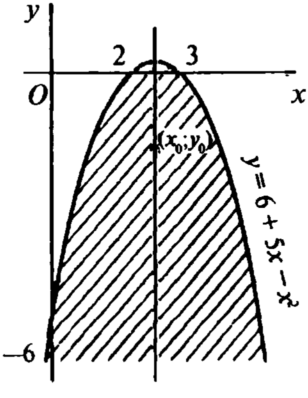
1-misol. $y+x^2-5x+6\le 0$ tengsizlikning yechimlar to'plamini ko'rsating.

Yechish. Bu tengsizlikning yechimlar to'plami chegarasi $y=-6+5x-x^2$ parabola bo'lgan tekislikdagi shakl bo'ladi. Parabola uchi (2,5; 0,25) nuqtada yotadi. Uning tarmoqlari abssissa o'qini (2; 0) va (3; 0) nuqtalarda kesib o'tadi. Chap tarmog'i ordinata o'qini (0; –6) nuqtada kesib o'tadi. Tengsizlikning yechimlar to'plami 35- rasmda shtrixlab ko'rsatilgan bo'lib, $x=x_0$ bo'lganda

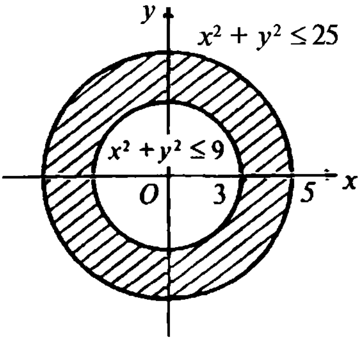
$y_0=5x_0-x_0^2-6$ bo'ladi.

Shunday $(x_0;\ y_0)$ nuqta hamma vaqt $x=x_0$ vertikal to'g'ri chiziqda yotadi. Bu vertikal to'g'ri chiziqda $(x_0;\ y_0)$ nuqtadan pastda joylashgan barcha nuqtalar uchun $y<y_0$ bo'ladi, ya'ni bu nuqtalar berilgan tengsizlik yechimlari to'plamiga tegishli bo'ladi.

2-misol. $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-25)\le 0$ tengsizlikning yechimlar to'plamini toping.



35- rasm.



36- rasm.

Yechish. Ma'lumki, ko'paytma nolga teng bo'lishi uchun ko'paytuvchilardan birortasi nolga teng bo'lishi kifoya. Shunday ekan

$$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-25)=0$$

tenglama $x^2+y^2-9=0$ va $x^2+y^2-25=0$ tenglamalarga ajraladi. Bu tenglamalar esa markazlari koordinatalar boshida yotgan $r_1=3$ va $r_2=5$ radiusli aylanalarni ifodalaydi (36- rasm).

Bu aylanalar tekislikni uchta sohaga ajratadi. Bu sohalardan sinash nuqtalarini tanlab, tekshirish bilan ishonch hosil qilish mumkinki, berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami aylanalar bilan chegaralangan halqadan iborat bo'ladi. Bu soha chizmada shtrixlab ko'rsatilgan.

2. Ikki o'zgaruvchili tengsizliklar sistemasini yechish. Ikki o'zgaruvchili ikkita tengsizliklar sistemasini quyidagi tengsizliklar sistemasining biriga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} f(x;y)<0, \\ \varphi(x;y)>0; \end{cases} \begin{cases} f(x;y)\geq 0, \\ \varphi(x;y)>0; \end{cases} \begin{cases} f(x;y)<0, \\ \varphi(x;y)\leq 0; \end{cases} \begin{cases} f(x;y)\leq 0, \\ \varphi(x;y)\leq 0; \end{cases} \dots \begin{cases} f(x;y)\geq 0, \\ \varphi(x;y)\leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

(1) ikkita tengsizliklar sistemasining yechimi deb, o'zgaruvchilarning shunday tartiblangan (α; β) juft qiymatlariga aytiladiki, ularning bu qiymatlarini x va y ning o'rniga qo'yganda sistemaning har bir tengsizligi to'g'ri tengsizlikka aylansin.

Masalan, $\begin{cases} 4x^2-3xy+2y^2>7, \\ 2x+3y\leq 20 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi uchun (2; 3) juftlik yechim bo'ladi. Chunki $x=2$ va $y=3$ bo'lganda tengsizliklar sistemasining har biri to'g'ri tengsizlikka aylanadi, ya'ni $\begin{cases} 16>7, \\ 13\leq 20. \end{cases}$ Lekin (1; 2) juftlik berilgan sistemaning yechimi bo'la olmaydi. Chunki $x=1$

va $y = 2$ bo‘lganda berilgan sistemaning birinchi tengsizligi bajarilmaydi, ya’ni $\begin{cases} 6 > 7, \\ 8 \leq 20. \end{cases}$

$f(x;\ y)$ va $\varphi(x;\ y)$ ifodalar mavjud bo‘ladigan $(x;\ y)$ juftliklar to‘plami (1) ikki o‘zgaruvchili ikkita tengsizliklar sistemasining *aniqlanish sohasi* deyiladi.

Agar biror ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar sistemasining barcha yechimlari boshqa bir shunday o‘zgaruvchili tengsizliklar sistemasining yechimlari bo‘lsa, u holda ikkinchi sistema birinchi sistemaning *natijasi* deyiladi.

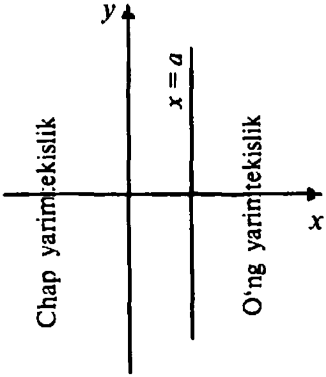
Agar ikkita ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar sistemalarining har biri boshqasining natijasi bo‘lsa, u holda bunday ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar sistemalari *teng kuchli* deyiladi (ikkala sistema yechimga ega bo‘lmasa ham).

A. Har biri bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan ikki o‘zgaruvchili ikkita tengsizliklar sistemasini yechish. *Oxy* koordinatalar tekisligida har bir $(\alpha;\ \beta)$ juft songa abssissasi α ga va ordinatasi β ga teng bo‘lgan nuqta mos keladi. Agar bu sonlarning juftligi (1) sistemaning yechimi bo‘lsa, u holda $(\alpha;\ \beta)$ nuqta bu sistemani qanoatlantiradi deyiladi yoki $(\alpha;\ \beta)$ nuqta berilgan sistemaning yechimi bo‘ladi.

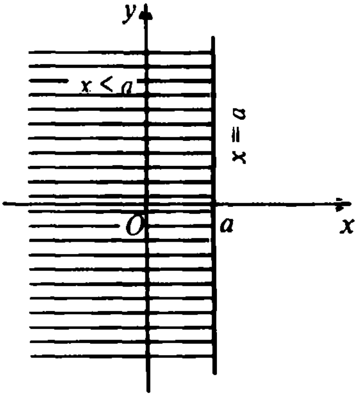
Oxy koordinatalar tekisligida $x = a$ tenglamaga *Ox* o‘qdagi a nuqtadan o‘tuvchi *Oy* o‘qqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq mos keladi. Bu to‘g‘ri chiziq koordinatalar tekisligini chap va o‘ng yarimtekisliklarga bo‘ladi (37- rasm).

$x > a$ tengsizlikni chap yarimtekislikning barcha nuqtalari qanoatlantiradi va $x = a$ to‘g‘ri chiziq nuqtalari va o‘ng yarimtekislikning barcha nuqtalari qanoatlantirmaydi. $x \leq a$ tengsizlikni esa chap yarimtekislik nuqtalari va $x = a$ to‘g‘ri chiziqdagi barcha nuqtalar qanoatlantiradi, lekin o‘ng yarimtekislikdagi nuqtalar qanoatlantirmaydi (38- rasm).

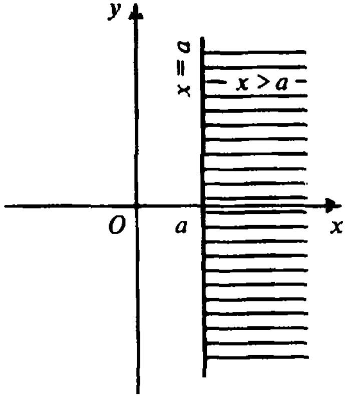
Shuningdek, $x > a$ tengsizlikni o‘ng yarimtekislikning barcha nuqtalari qanoatlantiradi, $x = a$ to‘g‘ri chiziqdagi va



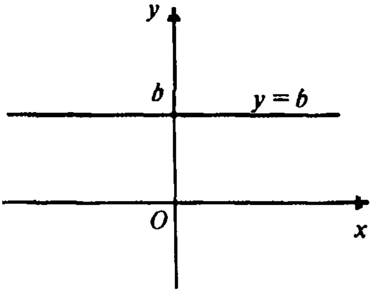
37- rasm.



38- rasm.



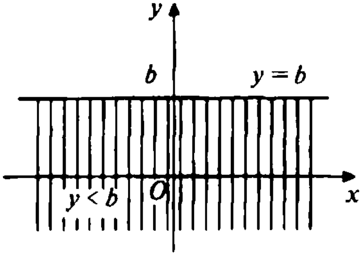
39- rasm.



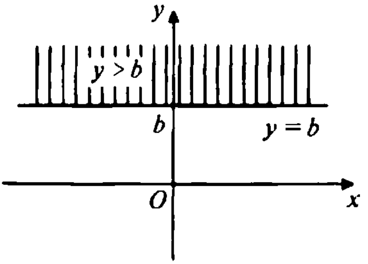
40- rasm.

chap yarimtekislikdagi nuqtalar qanoatlantirmaydi; $x \geq a$ tengsizlikni esa o'ng yarimtekislikdagi va $x = a$ to'g'ri chiziqdagi nuqtalar qanoatlantiradi, lekin chap yarimtekislikdagi nuqtalar qanoatlantirmaydi (39- rasm).

Oxy koordinatalar tekisligida $y = b$ tenglamaga *Oy* o'qidagi b nuqtadan o'tuvchi *Ox* o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq mos keladi. Bu to'g'ri chiziq koordinatalar tekisligini ustki va pastki yarimtekisliklarga bo'ladi (40- rasm).



41- rasm.



42- rasm.

$y < b$ tengsizlikni pastki yarimtekislikning barcha nuqtalari qanoatlantiradi, lekin $y = b$ to‘g‘ri chiziq ustidagi va ustki tekislikning barcha nuqtalari qanoatlantirmaydi; $y \leq b$ tengsizlikni esa pastki yarimtekislik nuqtalari va $y = b$ to‘g‘ri chiziq ustidagi barcha nuqtalar qanoatlantiradi, lekin yuqori yarimtekislikning barcha nuqtalari qanoatlantirmaydi (41-rasm).

$y > b$ tengsizlikni ustki yarimtekislikning barcha nuqtalari qanoatlantiradi, lekin $y = b$ to‘g‘ri chiziq ustidagi va pastki yarimtekislikning barcha nuqtalari qanoatlantirmaydi.

$y \geq b$ tengsizlikni ustki yarimtekislik va $y = b$ to‘g‘ri chiziqning barcha nuqtalari qanoatlantiradi, lekin pastki yarimtekislikning barcha nuqtalari qanoatlantirmaydi (42-rasm).

Agar to‘g‘ri chiziq (yoki egri chiziq) nuqtalari tengsizlikning yechimlari bo‘lsa, rasmda uni yaxlit chizamiz, agar to‘g‘ri chiziq (yoki egri chiziq) nuqtalari tengsizlikning yechimlari bo‘lmasa, uni uzuq-uzuq chiziqchalar bilan chizamiz.

3-misol. $\begin{cases} x^2 - 7x + 12 < 0, \\ 3y - 9 \geq 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

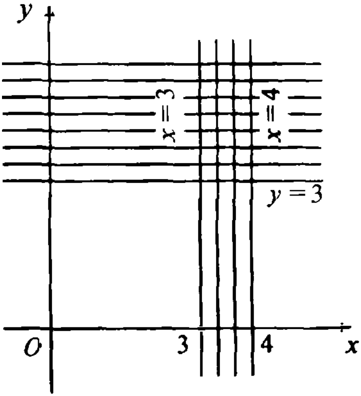
Yechish. Sistemaning har bir tengsizligini alohida yechamiz:

a) $x^2-7x+12<0$. Tengsizlikning chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$(x-3)(x-4)<0.$$

Bu tengsizlikning yechimlari Oxy koordinatalar tekisligida $x=3$ va $x=4$ to‘g‘ri chiziqlar orasida yotgan nuqtalar to‘plamidan iborat (43-rasm);

b) $3y-9\geq 0$. Bu tengsizlikni yechib, $y\geq 3$ yoki $3\leq y<+\infty$ ga ega bo‘lamiz, ya’ni tengsizlikning yechimlar to‘plami $y=3$ to‘g‘ri chiziq ustida va bu to‘g‘ri chiziq yuqorisida yotgan nuqtalarning koordinatalaridan iborat bo‘ladi.



43- rasm.

Tengsizliklar sistemasining yechimlari to‘plami:

$$\begin{cases}3<x<4,\\ 3\leq y<+\infty.\end{cases}$$

4-misol. $\begin{cases}x^4-13x^2+36\leq 0,\\ y^4-25y^2+144<0\end{cases}$ tengsizliklar sistemasini yeching.

Yechish. a) $x^4-15x^2+36\leq 0$. Berilgan tengsizlikning chap qismini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$(x+3)(x+2)\,(x-2)(x-3)\leq 0.$$

Bu tengsizlikni intervallar usuli bilan yechib, uning yechimlar to‘plamini topamiz:

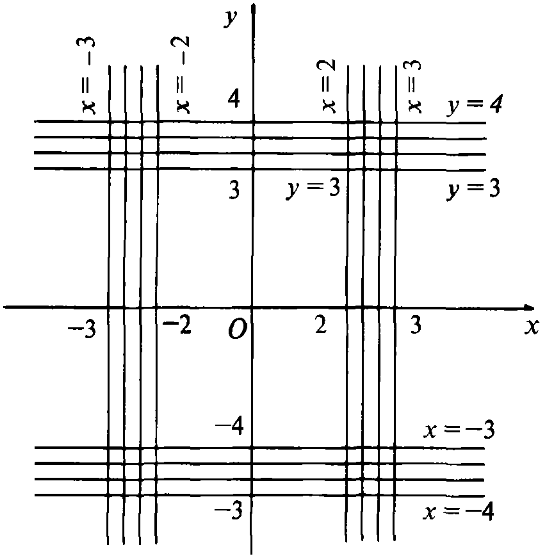
$$-3\leq x\leq -2,\quad 2\leq x\leq 3;$$

b) $y^4-25y^2+144<0$. Bu tengsizlikni ham yuqoridagidek yechamiz:

$$(y+4)(y+3)\,(y-3)(y-4)<0.$$

Intervallar usuli bilan yechimlar to‘plamini ajratib olamiz:

$$-4<y<-3,\quad 3<y<4.$$



44- rasm.

Berilgan tengsizliklar sistemasining yechimlar to‘plamini quyidagicha tengsizliklar sistemalari to‘plami ko‘rinishida berish mumkin:

$$\begin{cases}-3\le x\le -2,\\ -4<y<-3;\end{cases}\quad \begin{cases}-3\le x\le -2,\\ 3<y<4;\end{cases}\quad \begin{cases}2\le x\le 3,\\ -4<y<-3;\end{cases}\quad \begin{cases}2\le x\le 3,\\ 3<y<3\ .\end{cases}$$

Yechimlar to‘plamini geometrik tasvirlaymiz (44-rasm).

B. Ikki o‘zgaruvchili ikkita chiziqli tengsizliklar sistemasini yechish. Ikki o‘zgaruvchili ikkita chiziqli tengsizliklar sistemasini turli xil almashtirishlardan keyin

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1\underset{>}{\overset{\le}{}}0,\\ A_2x+B_2y+C_2\underset{>}{\overset{\le}{}}0\end{cases}\qquad (2)$$

tengsizliklar sistemalarining biriga keltirish mumkin. Bu yerda A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 — haqiqiy sonlar (sistemaning koeffitsiyentlari), x va y — o‘zgaruvchilar.

Bitta ikki o‘zgaruvchili

$$Ax+By+C \overset{\leq}{>} 0 \qquad (3)$$

tengsizlikni qaraylik. Agar $A \neq 0$, $B=0$ bo‘lsa, u holda (3) tengsizlik

$$Ax+C \overset{\leq}{>} 0 \text{ yoki } x \overset{\leq}{>} -\frac{C}{A} \quad (A \neq 0)$$

ko‘rinishni oladi. $-\frac{C}{A}=a$ desak, ilgari qaralgan tengsizliklarni olamiz: $x \overset{\leq}{>} a$.

Agar $A=0$, $B \neq 0$ bo‘lsa, u holda (3) tengsizlik

$$By+C \overset{\leq}{>} 0 \text{ yoki } y \overset{\leq}{>} -\frac{C}{B}$$

ko‘rinishni oladi. $-\frac{C}{B}=b$ desak, yana ilgari qaralgan tengsizlikni olamiz: $y \overset{\leq}{>} b$.

Endi $A \neq 0$, $B \neq 0$ bo‘lganda (3) tengsizlikni qaraylik. Bu holda tengsizlikni

$$y \overset{\leq}{>} -\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

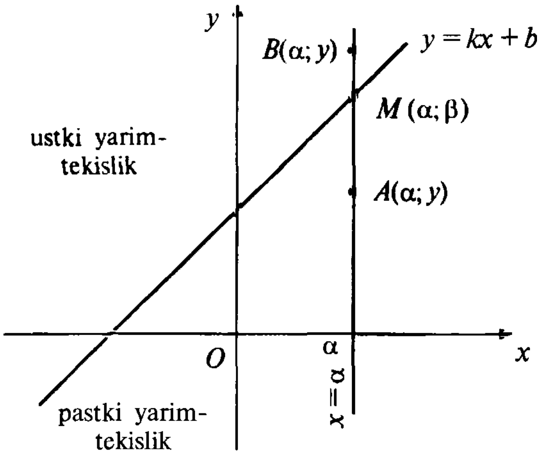
ko‘rinishlarning biriga keltirish mumkin. $-\frac{A}{B}=k$, $-\frac{C}{B}=b$ desak, bu tengsizlik $y \overset{\leq}{>} kx+b$ ko‘rinishni oladi.

$y=kx+b$ tenglamaga Oxy koordinatalar tekisligida to‘g‘ri chiziq mos kelib, bu to‘g‘ri chiziq koordinatalar tekisligini ustki va pastki ikkita yarimtekislikka ajratadi (45- rasm).

Ox o‘q ustida α nuqtani olamiz. Bu nuqta orqali $x=\alpha$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. $x=\alpha$ va $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $M(\alpha;\ \beta)$ bo‘lsin, bunda $\beta=k\alpha+\beta$.

Agar $x=\alpha$ to‘g‘ri chiziqda $y<\beta$ ordinatali A nuqtani olsak, u holda bu nuqta pastki yarimtekislikda yotadi: agar $x=\alpha$ to‘g‘ri chiziqda $y>\beta$ ordinatali B nuqtani olsak, bu nuqta ustki yarimtekislikda yotadi.

Shunday qilib, $y<kx+b$ tengsizlikni Oxy tekislikning $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziqdan pastda yotgan barcha nuqta-



45- rasm.

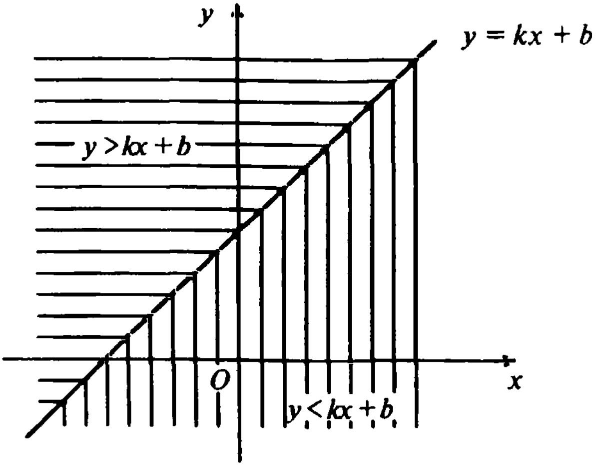
larining koordinatalari qanoatlantiradi, lekin $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziqda va uning ustida yotgan barcha nuqtalarning koordinatalari u tengsizlikni qanoatlantirmaydi.

$y > kx + b$ tengsizlikni esa $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziqning ustki qismidagi, ya’ni ustki yarimtekislik nuqtalari qanoatlantiradi, lekin to‘g‘ri chiziq ustida yotgan nuqtalar va pastki yarimtekislikning barcha nuqtalarining koordinatalari qanoatlantirmaydi. Agar $y \le kx + b$ yoki $y \ge kx + b$ qat’iy bo‘lmagan tengsizliklar bo‘lsa, bunday tengsizlikning yechimlari to‘plamiga $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq ustidagi nuqtalarning koordinatalari ham tegishli bo‘ladi (46- rasm).

5-misol. $\begin{cases} 2x - y - 1 \le 0, \\ x + 2y + 2 \ge 0 \end{cases}$ sistema yechimlarining to‘plamini toping.

Yechish. Berilgan tengsizliklar sistemasini quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} y \ge 2x - 1, \\ y \ge -\frac{1}{2}x - 1. \end{cases}$$



46- rasm.

$y = 2x - 1$ va $y = -\frac{1}{2}x - 1$ to‘g‘ri chiziqlarni qaraymiz. Ularning kesishish nuqtasini aniqlaymiz.

Buning uchun

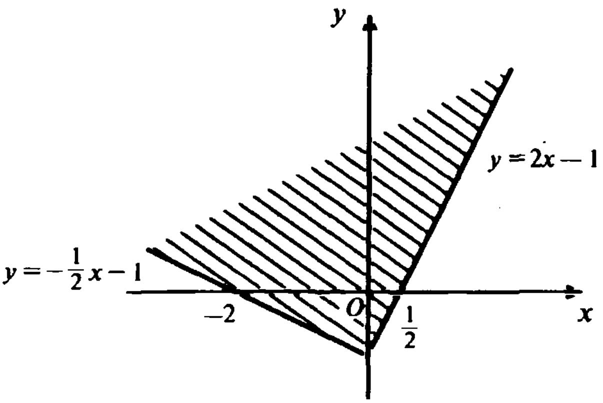
$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechamiz. $x = 0$; $y = -1$. Ular $M(0; -1)$ nuqtada kesishadi.

Birinchi tengsizlikni $y = 2x - 1$ to‘g‘ri chiziqda va uning yuqorisida yotgan nuqtalar to‘plami qanoatlantiradi. Ikkinchi tengsizlikni esa $y = -\frac{1}{2}x - 1$ to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar va uning yuqorisida yotgan nuqtalar to‘plami qanoatlantiradi (47- rasm).

Berilgan tengsizliklar sistemasining yechimini analitik ravishda ifodalasak, quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} -\infty < x < \frac{1}{2}, \\ y \geq 2x - 1, \\ y \geq -\frac{1}{2}x - 1. \end{cases}$$



47- rasm.

6-misol. $\begin{cases} x+y+2\geq 0, \\ x-y+2\geq 0, \\ x-y-1\leq 0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasining yechimlari to‘plamini toping.

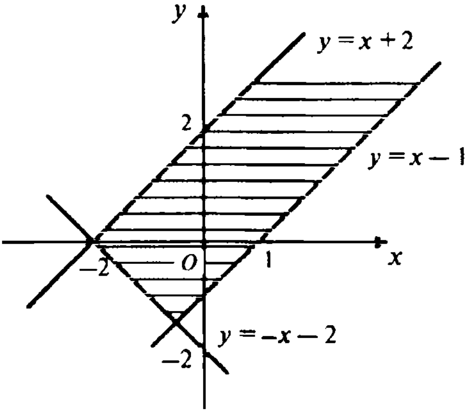
Yechish. Berilgan tengsizliklar sistemasini quyidagi

ko‘rinishga keltiramiz: $\begin{cases} y\geq -x-2, \\ y\leq x+2, \\ y\geq x-1. \end{cases}$

$y=-x-2$, $y=x+2$ va $y=x-1$ to‘g‘ri chiziqlarni qaraymiz. Ularning kesishish nuqtalarini topamiz. Buning uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yechamiz:

1) $\begin{cases} y=-x-2, \\ y=x+2. \end{cases}$ Bundan $x=-2$, $y=0$ bo‘ladi, ya’ni to‘g‘ri chiziqlar (–2; 0) nuqtada kesishadi;

2) $\begin{cases} -x-2=y, \\ y=x-1. \end{cases}$ Bundan $x=-2$, $y=-3$ bo‘ladi, ya’ni to‘g‘ri chiziqlar $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$ nuqtada kesishadi;



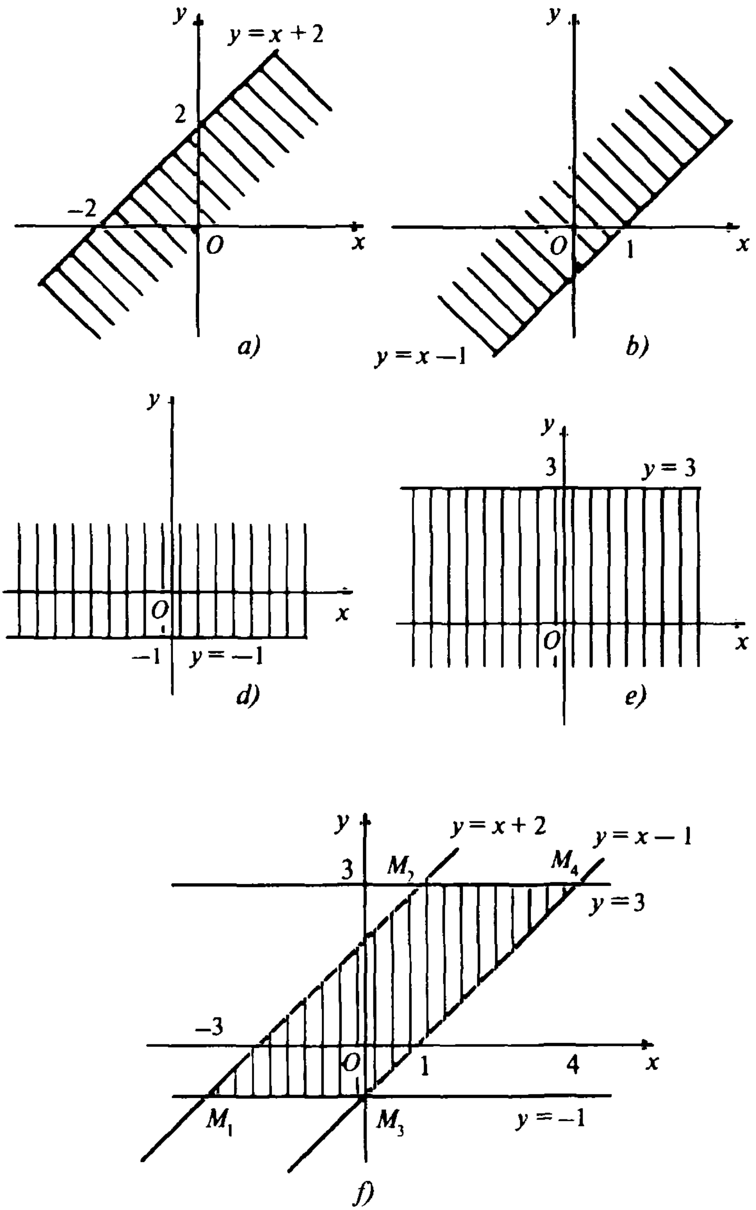
48- rasm.

3) $\begin{cases} y = x + 2, \\ y = x - 1. \end{cases}$ Bu sistema tarkibidagi to‘g‘ri chiziqlar parallel. Chunki ularning burchak koeffitsiyentlari teng: $k_1 = k_2 = 1$.

$y = x + 2$ to‘g‘ri chiziq ordinatalar o‘qini (0; 2) nuqtada, $y = x - 1$ to‘g‘ri chiziq (0; –1) nuqtada va $y = -x - 2$ to‘g‘ri chiziq esa (0; –2) nuqtada kesib o‘tadi. Bu to‘g‘ri chiziqlarni yasaylik (48- rasm).

$y \geq -x - 2$ tengsizlikni Oxy koordinatalar tekisligining $y = -x - 2$ to‘g‘ri chiziq ustidagi va undan yuqorida yotgan nuqtalar, $y \leq x + 2$ tengsizlikni $y = x + 2$ to‘g‘ri chiziq ustidagi va undan pastdagi nuqtalar, $y \geq x - 1$ tengsizlikni esa $y = x - 1$ to‘g‘ri chiziq ustidagi va undan yuqoridagi nuqtalar to‘plamining koordinatalari qanoatlantiradi (48-rasm).

7-misol. $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0, \\ x - y - 1 \leq 0, \\ y + 1 \geq 0, \\ y - 3 \leq 0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi yechimlari to‘plamini toping.


y
y = x + 2
2
−2
O
x
a)
y
O
1
x
y = x −1
b)
y
O
x
−1
y = −1
d)
y
3
y = 3
O
x
e)
y
y = x + 2
y = x − 1
3
M_2
M_4
y = 3
−3
O
1
4
x
M_1
M_3
y = −1
f)

49-rasm.

Yechish. Berilgan tengsizliklar sistemasi tarkibidagi har bir tengsizlikning yechimlari to'plamini topib chizmada tasvirlaymiz. Buning uchun $y=x+2$, $y=x-1$, $y=-1$, $y=3$ to'g'ri chiziqlarni yasaymiz. Bu to'g'ri chiziqlarga nisbatan berilgan sistema tengsizliklarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami qaysi yarimtekislikda yotishini ham aniqlaymiz:

1) $y=x+2$ va $y=x-1$ to'g'ri chiziqlar parallel, ular kesishmaydi;

2) $y=-1$ va $y=3$ to'g'ri chiziqlar ham parallel, ular ham kesishmaydi:

3) $y=x+2$ va $y=-1$ to'g'ri chiziqlar $M_1(-3; -1)$ nuqtada kesishadi;

4) $y=x+2$ va $y=3$ to'g'ri chiziqlar $M_2(1; 3)$ nuqtada kesishadi;

5) $y=x-1$ va $y=-1$ to'g'ri chiziqlar $M_3(0; -1)$ nuqtada kesishadi;

6) $y=x-1$ va $y=3$ to'g'ri chiziqlar $M_4(4; 3)$ nuqtada kesishadi.

Shunday qilib, berilgan tengsizliklar sistemasining yechimlar to'plami uchlari $M_1(-3; -1)$, $M_2(1; 3)$, $M_3(0; -1)$, $M_4(4; 3)$ nuqtalarda yotgan parallelogramm va uning ichki nuqtalari to'plamidan iborat (49- *a*, *b*, *d*, *e*, *f* rasmlar).

15- §. Tenglamalar va tenglamalar sistemalari yordamida masalalar yechish

Tenglamalar va tenglamalar sistemalarini qo'llash masalalar yechishni osonlashtiradi. Bunday masalalarni yechish, odatda, to'rtta bosqichdan iborat bo'ladi:

1) masalada izlanayotgan miqdorlarni x, y, z, ... harflar bilan belgilash;

2) masala shartlaridan foydalanib, berilgan miqdorlar va noma'lum miqdorlarni bog'lovchi tenglama (tenglamalar sistemasini) tuzish;

3) olingan tenglamani (tenglamalar sistemasini) yechish;

4) masala mazmuniga mos keladigan yechimlarni tanlash.

Ko‘pchilik hollarda quyidagi mazmundagi masalalarni yechish uchrab turadi:

1) sonli ifodalarni bog‘lovchi masalalar;
2) progressiyaga doir masalalar;
3) jismlarning harakatiga doir masalalar;
4) ishni birgalikda bajarish haqidagi masalalar;
5) qotishma va aralashmalar haqidagi masalalar.

Endi tenglamalar (tenglamalar sistemasi) tuzib yechiladigan masalalarni qaraylik.

1-masala. Ishchining ish haqi ketma-ket ikki marta bir xil oshirilgandan keyin uning ish haqi 10000 so‘mdan 12100 so‘mga yetdi. Har safar ishchining ish haqi necha foizga oshirilgan?

Yechish. Ishchining ish haqi ketma-ket ikki marta bir xil oshirilgandan keyin oldingi ish haqiga nisbatan x % bo‘lsin. Birinchi marta oshirilgandan keyin ishchining ish haqi so‘m hisobida $10000 \cdot \frac{x}{100} = 100x$ bo‘ladi. Ikkinchi marta oshirilgandan keyin esa ishchining ish haqi $100x \cdot \frac{x}{100} = 12100$ so‘m bo‘ladi. Natijada $x^2 = 12100$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu tenglamaning ildizlari $x_1 = 110$ va $x_2 = -110$ bo‘ladi. x_2 ildiz masala mazmuniga mos kelmaydi, chunki $x_2 < 0$. Demak, $x = x_1 = 110\%$ bo‘lib, ishchining ish haqi har safar $110\% - 100\% = 10\%$ ga oshirilgan.

2-masala. To‘rtta son arifmetik progressiya tashkil qiladi. Agar ularning birinchisidan 2, ikkinchisidan 6, uchinchisidan 7, to‘rtinchisidan 2 olinsa, hosil bo‘lgan sonlar geometrik progressiya tashkil qiladi. Shu sonlarni toping.

Yechish. Izlanayotgan sonlar a_1, a_2, a_3, a_4 bo‘lsin. Masala shartiga ko‘ra

$$b_1 = a_1 - 2, \quad b_2 = a_2 - 6, \quad b_3 = a_3 - 7, \quad b_4 = a_4 - 2 \qquad (1)$$

sonlar geometrik progressiya tashkil qiladi. Arifmetik progressiyaning birinchi hadini a_1, ayirmasini d, geometrik progressiyaning birinchi hadini b_1, maxrajini q desak,

$$a_1 = a_1,\ \ a_2 = a_1 + d,\ \ a_3 = a_1 + 2d,\ \ a_4 = a_1 + 3d;$$

$$b_1 = b_1,\ \ b_2 = b_1 q,\ \ b_3 = b_1 q^2,\ \ b_4 = b_1 q^3$$

bo‘ladi.

Bunday holda (1) tenglamalarga ko‘ra a_1, b_1, d, q ga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} a_1 = b_1 + 2, \\ a_1 + d = b_1 q + 6, \\ a_1 + 2d = b_1 q^2 + 7, \\ a_1 + 3d = b_1 q^3 + 2. \end{cases}$$

Bu sistemaning birinchi tenglamasidagi a_1 ning $b_1 + 2$ ifodasini uning navbatdagi tenglamalariga qo‘yib,

$$\begin{cases} b_1 + d = b_1 q + 4, \\ b_1 + 2d = b_1 q^2 + 5, \\ b_1 + 3d = b_1 q^3 \end{cases} \tag{2}$$

tenglamalar sistemasini topamiz. (2) sistemaning birinchi tenglamasidan d ni topamiz: $d = b_1 q - b_1 + 4$. d ning bu ifodasini (2) tenglamalar sistemasining keyingilariga qo‘yib, b_1 va q ga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} b_1(2q - q^2 - 1) = -3, \\ b_1(3q - q^3 - 2) = -12. \end{cases}$$

Bu sistema tenglamalarini hadlab bo‘lib, q ga nisbatan $\dfrac{3q - q^3 - 2}{2q - q^2 - 1} = 4$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Bundan

$$q^3 - 4q^2 + 5q - 2 = 0 \Rightarrow (q - 1)^2 (q - 2) = 0 \Rightarrow q_1 = 1,\ q_2 = 2.$$

Masala mazmuniga $q = q_2 = 2$ ildiz mos keladi. Endi b_1, d va a_1 ni topamiz:

$$b_1(2q - q^2 - 1) = -3 \Rightarrow -b_1(4 - 4 - 1) = 3 \Rightarrow b_1 = 3;$$

$$d = b_1 q - b_1 + 4 \Rightarrow d = 3 \cdot 2 - 3 + 4 = 7;$$

$$a_1 = b_1 + 2 \Rightarrow a_1 = 3 + 2 \Rightarrow a_1 = 5.$$

Izlanayotgan sonlar: 5; 12; 19; 26.

3-masala. Ikki pristan orasidagi masofa daryo yo'li bilan 80 km. Paroxod shu pristanlarning biridan ikkinchisiga borib kelishi uchun 8 soat 20 minut vaqt sarf qiladi. Daryo oqimining tezligi soatiga 4 km bo'lsa, paroxodning turg'un suvdagi tezligini toping.

Yechish. Paroxodning turg'un suvdagi tezligi x km/soat bo'lsin. Paroxod tekis, ya'ni o'zgarmas tezlik bilan harakatlanadi deb qaraladi. Paroxod daryo oqimi bo'ylab $(x + 4)$ km/soat, oqimga qarshi esa $(x - 4)$ km/soat tezlik bilan yuradi. Oqim bo'ylab yo'lga $\frac{80}{x+4}$ soat, oqimga qarshi yo'lga esa $\frac{80}{x-4}$ soat vaqt sarflaydi. Paroxod pristanlarning biridan ikkinchisiga borib kelishi uchun

$$8 \text{ soat } 20 \text{ minut} = \left(8 + \frac{1}{3}\right) \text{soat} = 8 + \frac{1}{3} \text{soat}$$

vaqt sarf qilishi ma'lum. Natijada

$$\frac{80}{x+4} - \frac{80}{x-4} = 8\frac{1}{3}$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama $x \neq \pm 4$ bo'lganda $5x^2 - 96x - 80 = 0$ tenglamani yechish bilan teng kuchli. Bu tenglamaning ildizlarini topamiz: $x_1 = -\frac{4}{5}$; $x_2 = 20$. Masala mazmuniga x_2 ildiz mos keladi. Demak, paroxodning turg'un suvdagi tezligi $x = x_2 = 20 \frac{\text{km}}{\text{soat}}$ ekan.

4-masala. Quvvatlari har xil bo'lgan ikkita traktor 4 kun birga ishlab, xo'jalik yerining $\frac{2}{3}$ qismini haydadi. Agar butun yerni birinchi traktor ikkinchisiga qaraganda 5 kun tezroq hayday olsa, butun yerni har qaysi traktor yolg'iz o'zi necha kunda hayday oladi?

Yechish. Quvvatliroq traktor yerni x kunda hayday olsin desak, quvvati kamroq traktor yerni $(x + 5)$ kunda haydab bo'ladi. Bajariladigan ish 1 butun deb qaraladi. Bunday holda quvvatli traktor bir kunda yerning $\frac{1}{x}$ qismini, quvvati kam traktor esa $\frac{1}{x+5}$ qismini haydaydi. Ikkala traktor birgalikda ishlaganda bir kunda yerning $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}\right)$ qismini, 4 kunda esa $4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}\right)$ qismini haydaydi. Bu haydalgan yer butun yerning $\frac{2}{3}$ qismiga teng. Natijada $4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}\right)=\frac{2}{3}$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama $x_1 = -3$; $x_2 = 10$ ildizlarga ega.

Masala mazmuniga x_2 ildiz mos keladi. Demak, quvvatli traktor xo'jalik yerini $x = 10$ kunda, quvvati kam traktor esa $x + 5 = 10 + 5 = 15$ kunda haydab tamomlaydi.

5-masala. 8 g suyuqlikni zichligi kamroq bo'lgan 6 g suyuqlik bilan aralashtirib, solishtirma og'irligi $0,7\frac{g}{sm^3}$ bo'lgan aralashma hosil qilindi. Agar bu suyuqliklardan birining solishtirma og'irligi ikkinchisining solishtirma og'irligidan $0,2\frac{g}{sm^3}$ ortiq bo'lsa, har qaysi suyuqlikning solishtirma og'irligini toping.

Yechish. Solishtirma og'irligi kichik bo'lgan suyuqlikning solishtirma og'irligi $x\frac{g}{sm^3}$ bo'lsin. Solishtirma og'irligi katta bo'lgan suyuqlikning solishtirma og'irligi

$(x+0,2)\frac{\text{g}}{\text{sm}^3}$ bo‘ladi. Solishtirma og‘irligi kichik bo‘lgan suyuqlikning hajmi $\frac{6}{x}\ \text{sm}^3$, solishtirma og‘irligi katta bo‘lgan suyuqlikning hajmi $\frac{8}{x+0,2}\ \text{sm}^3$ bo‘ladi. Hosil bo‘lgan aralashma suyuqlikning hajmi $\frac{(8+6)\,\text{g}}{0,7\frac{\text{g}}{\text{sm}^3}}=20\ \text{sm}^3$ bo‘ladi.

Masala shartini e’tiborga olsak, solishtirma og‘irligi kichik bo‘lgan suyuqlikning solishtirma og‘irligini topishga imkon beradigan tenglamani olamiz: $\frac{6}{x}+\frac{8}{x+0,2}=20$. Bu tenglamani yechib, uning ildizlarini topamiz: $x_1=-0,1$, $x_2=0,6$. Masala mazmuniga x_2 ildiz mos keladi. Chunki $x>0$ bo‘lishi kerak. Demak, suyuqliklarning solishtirma og‘irliklari $x=0,6\frac{\text{g}}{\text{sm}^3}$ va $x+0,2=0,8\frac{\text{g}}{\text{sm}^3}$ bo‘ladi.

6-masala. *A* shahardan *B* shaharga qarab yuk mashina, 1 soatdan keyin esa *A* shahardan *B* shaharga qarab yengil mashina yo‘lga chiqdi. *B* shaharga mashinalar bir vaqtda yetib kelishdi. Agar *A* va *B* shaharlardan mashinalar bir-biriga qarab bir vaqtda yo‘lga chiqqanlarida edi, ular 1 soat 14 minutdan keyin uchrashgan bo‘lar edi. *A* shahardan *B* shahargacha bo‘lgan masofani yuk avtomobili qancha vaqtda bosib o‘tadi?

Yechish. x km/soat — yuk mashinasining tezligi, y km/soat — yengil mashinaning tezligi bo‘lsin. *A* shahardan *B* shahargacha bo‘lgan masofa z km bo‘lsin. U holda *A* shahardan *B* shahargacha bo‘lgan masofani yuk mashinasi $\frac{z}{x}$ soatda, yengil mashina esa $\frac{z}{y}$ soatda bosib o‘tadi. Masala shartiga ko‘ra $\frac{z}{x}-\frac{z}{y}=1$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Agar mashinalar bir vaqtda bir-biriga qarab yo‘lga chiqsa, ular $\frac{z}{x+y}$ soatdan keyin uchrashadi. Masala shartiga ko‘ra ular

$$1 \text{ soat } 20 \text{ min} = \left(1+\frac{1}{5}\right)\text{soat} = \frac{6}{5}\text{soat}$$

dan keyin uchrashadi.

Natijada uch noma'lum ikkita tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \frac{z}{x}-\frac{z}{y}=1, \\ \frac{z}{x+y}=\frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z}{x}-\frac{z}{y}=1, \\ 6\cdot\frac{x}{z}+6\cdot\frac{y}{z}=5. \end{cases}$$

Agar $u=\frac{z}{x}$, $\upsilon=\frac{z}{y}$ desak, u va υ ga nisbatan

$$\begin{cases} u-\upsilon=1, \\ \frac{6}{u}+\frac{6}{\upsilon}=5 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bu sistemani yechib, $u=3$, $\upsilon=2$ ni topamiz. Demak, yuk mashinasi A shahardan B shahargacha bo'lgan masofani 3 soatda bosib o'tar ekan.

IV BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

Ko'paytuvchilarga ajrating:

1. a^6-1.
2. a^4-13a^2+36.
3. $a^4+a^2b^2+b^4$.
4. a^4+2a^3-2a-1.
5. a^4+a^2+1
6. $(a^2+a+3)(a^2+a+4)-12$.
7. $a^3+9a^2+27a+19$.
8. $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$.
9. $a^3-7a^2+7a+15$.
10. $a^2-2a^3b-2ab^3+b^2$.

Kasrlarni qisqartiring:

11. $\frac{5a^2-a-4}{a^3-1}$.
12. $\frac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3+a^2+a+1}$.
13. $\frac{a^4+a^2-2}{a^6+8}$.
14. $\frac{a^4-a^2-12}{a^4+8a^2+15}$.
15. $\frac{2a^4+7a^2+6}{3a^4+3a^2-6}$.
16. $\frac{5a^4+5a^2+3a^2b-3b}{a^4+3a^2+2}$.
17. $\frac{a^4+a^2b^2+b^2}{a^6-b^6}$.

Soddalashtiring:

18. $\left[\left(1-\frac{2}{1-3a}\right)\left(1-\frac{9a-9a^2}{3a+1}\right)\right]:\left[2(1-9a^2)\right].$

Javob. $-\frac{1}{2(3a+1)}.$

19. $\frac{2}{a}-\left(\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}-\frac{2}{1-a}\right):\frac{a^3+a^2+2a}{a^2-1}.$

Javob. $-\frac{2a}{a^2+a+1}.$

20. $\left[\frac{a+c}{a^3c+a^2-ac-1}+\frac{ac+1}{1-a^2}:(a+c)\right]\cdot\frac{a^3+c^3}{3-3c^2}.$

Javob. $\frac{a^2-ac+c^2}{3(ac+1)}.$

21. $\left[\left(\frac{3}{x-y}+\frac{3x}{x^3-y^3}\cdot\frac{x^3+xy+y^3}{x+y}\right):\frac{2x+y}{c^2+2xy+y^2}\right]\cdot\frac{3}{x-y}.$

Tenglamalarni yeching:

22. $\frac{3}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)^2}+\frac{3}{x(x-3)}.$ Javob. $x=1\frac{6}{13}.$

23. $x^4+5x^3-12x^2+5x+1=0.$

24. $x^4-3x^3-8x^2-12x+16=0.$

Javob. $x_1=-2,\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=4.$

25. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=9.$

Javob. $x_1=x_2=-1-\sqrt{2};\ x_3=x_4=-1+\sqrt{2}.$

26. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12.$

Javob. $x_1=-2,\ x_2=1.$

27. $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8.$

Javob. $x_1=-2-2\sqrt{2};\ x_2=-2+2\sqrt{2}.$

28. $\frac{24}{x^2-2x}=\frac{12}{x^2-x}+x^2-x.$

Javob. $x_1=-1,\ x_2=3.$

29. $x^3-x^2-8x+12=0.$ Javob. $x_1=-3,\ x_2=x_3=2.$

30. $x^5-x^4-3x^3+5x^2-2x=0.$

Javob. $x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=x_4=x_5=1.$

31. $2x^4+x^3-49x^2+96x-36=0.$

Javob. $x_1=-6,\ x_2=0{,}2,\ x_3=2,\ x_4=3.$

32. $x^3-9x^2+27x-30=0.$ Javob. $x=3+\sqrt[3]{3}.$

33. $x^4-8x+63=0.$ Javob. $\varnothing$

34. $(1-x^2)^2=4x(1-x^2).$

Javob. $x_1=x_2=-1-\sqrt{2}$, $x_3=x_4=-1+\sqrt{2}$.

35. $14x+8=10x+5|3x-5|.$ Javob. $x_1=\frac{17}{19},\ x_2=3.$

36. $|x+3|+|x-1|=3x-5.$ Javob. $x=7.$

37. $x^2-4x-3|x-2|+6=0.$

Javob. $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3,\ x_4=4.$

Quyidagi tenglamalar teng kuchlimi:

38. $x^3+x=0$ va $\frac{x^3+x}{x}=0.$

39. $x^2+1=0$ va $\frac{x^2+1}{x}=0.$

40. $\frac{2x^2+2x+3}{x+2}=\frac{3x^2+2x-1}{x+2}$ va $2x^2+2x+3=3x^2+2x-1.$

41. $\frac{2x^2+2x+3}{x+3}=\frac{3x^2+2x-1}{x+3}$ va $2x^2+2x+3=3x^2+2x-1.$

42. $\sqrt{x}+2=\sqrt{2x}+1$ va $(\sqrt{x}+2)^2=(\sqrt{2x}+1)^2.$

43. $(\sqrt{x}+2)^2=(\sqrt{2x}+1)^2$ va $x-4\sqrt{x}+4=2x+2\sqrt{2x}+1.$

44. $2\sqrt{x}-7x^2=2x+2\sqrt{x}$ va $-7x^2=2x$?

Quyidagi tenglamalarni yeching va tekshiring. Agar chetki ildizlar paydo bo'lsa, uning sababini tushuntiring:

45. $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x-x^2}$. Javob. 4.

46. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{2-x}{1-x}+\frac{4}{x-1}=0$. Javob. 0; –2.

47. $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{1}{27}-\frac{13}{1-2x}$. Javob. 13.

48. $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2-\frac{x+4}{x-1}$. Javob. 5; –2.

49. $1+\sqrt{2x+7}=x-3$. Javob. 9.

50. $\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}}=\sqrt{x-4}$. Javob. 8.

51. $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$. Javob. 6.

52. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$. Javob. 6.

53. $\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2$. Javob. 2; 34.

54. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$. Javob. 4.

55. $\lg(54-x^2)=3\lg x$. Javob. 3.

56. $\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5$. Javob. 4.

57. $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18$. Javob. 8.

58. $\frac{\lg(3x-5)}{\lg(3x^2+25)}=\frac{1}{2}$. Javob. 4.

59. $\frac{\lg(2x-5)}{\lg(x^2+8)}=0{,}5$. Javob. $5\frac{2}{3}$.

60. $\log_x(2x^2-7x+12)=2$. Javob. 3; 4.

61. $\log_x(2x^2-4x+3)=2$. Javob. 3.

Quyidagi tenglamalarni ko‘paytuvchilarga ajratish usuli bilan yeching:

62. $x^4 - 1 = 0$. Javob. -1; 1; $-i$; i.

63. $x^6 - 64 = 0$.

Javob. 2; $-2; 1+i\sqrt{3}$; $-1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$; $1-i\sqrt{3}$.

64. $x^4 + 16 = 0$.

Javob. $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

65. $x^6 - 1 = 0$.

Javob: $-i$; $-i$; $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$.

66. $x^3 + x - 2 = 0$. Javob. 1; $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$; $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

67. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$. Javob. -1; 2; 3.

68. $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$. Javob. -1; -2; -5.

69. $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8$. Javob. $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 3.

70. $2x^4 - 21x^3 + 75x^2 - 105x + 50 = 0$.

Javob. 1; 2; 5; $\frac{5}{2}$.

71. $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 24x - 24 = 0$.

Javob. -1; 2; $-3+i\sqrt{3}$; $-3-i\sqrt{3}$.

72. $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$.

Javob. $1; 2$; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

73. $x^5 + 4x^4 + 6x^3 - 24x^2 - 27x - 108 = 0$.

Javob. $3; -3; -4; i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}$.

74. $(x+1) + (x^2+2) + (x+2)(x^2+1) = 2$.

Javob. -1; $\frac{-1+i\sqrt{15}}{4}$; $\frac{-1-i\sqrt{15}}{4}$.

75. $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right) - 7\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$. Javob. -1; 3; $\frac{1}{3}$.

76. $\frac{(3+x)(2+x)(1+x)}{(3-x)(2-x)(1-x)}=-35$. Javob. 4; $\frac{20+i\sqrt{59}}{17}$; $\frac{20-i\sqrt{59}}{17}$.

77. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{29}{15}$.

Javob. 2; –2; $\frac{3\sqrt{21}}{7}$; $-\frac{3\sqrt{21}}{7}$.

78. $2x^4-x^3+5x^2-x+3=0$.

Javob. i; $-i$; $\frac{1+i\sqrt{23}}{4}$; $\frac{1-i\sqrt{213}}{4}$.

79. $2x^4-4x^3+13x^2-6x+15=0$.

Javob. $\frac{i\sqrt{6}}{2}$; $-\frac{i\sqrt{6}}{2}$; $1+2i$; $1-2i$.

80. $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$.

Javob. 2; 3; $\frac{5+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{5-i\sqrt{3}}{2}$.

81. $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-3)-4=0$.

Javob. 3; –1; $1+\sqrt{10}$; $1-\sqrt{10}$.

82. $\frac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2$. Javob. 0; 1; –1; –2.

83. $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$.

Javob. 0; 1; $\frac{1+i\sqrt{15}}{2}$; $\frac{1-i\sqrt{15}}{2}$.

84. $\frac{1}{x^2-3x+3}+\frac{2}{x^2-3x+4}=\frac{6}{x^2-3x+5}$.

Javob. 1; 2; $\frac{9+i\sqrt{51}}{6}$; $\frac{9-i\sqrt{51}}{6}$.

85. $x^3-x^2-\frac{8}{x^3-x^2}=2$.

Javob. –1; 2; $1+i$; $1-i$; $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$; $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

86. $x(x-1)(x-2)(x-3)=15$.

Javob. $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{3+i\sqrt{11}}{2}$; $\frac{3-i\sqrt{11}}{2}$.

87. $(x-1)x(x+1)(x+2)=24.$

Javob. $-3;\ 2;\ \frac{1-i\sqrt{15}}{2};\ \frac{1-i\sqrt{15}}{2}.$

88. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3.$

Javob. $\frac{-5+\sqrt{13}}{2};\ \frac{-5-\sqrt{13}}{2};\ \frac{-5+i\sqrt{3}}{2};\ \frac{-5-i\sqrt{3}}{2}.$

89. $(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=4,5.$

Javob. $-\frac{1}{2};\ -\frac{5}{4};\ \frac{-2+2i\sqrt{2}}{8};\ \frac{-2-2i\sqrt{2}}{8}.$

90. $(x-4,5)^4+(x+5,5)^4=1.$

Javob. $\frac{11}{2};\ -\frac{9}{2};\ \frac{10+i\sqrt{7}}{2};\ \frac{10-i\sqrt{7}}{2}.$

91. $10x^3-3x^2-2x+1=0.$ Javob. $\frac{1}{2};\ \frac{2+i}{5};\ \frac{2-i}{5}.$

92. $4x^3-3x-1=0.$ Javob. $1;\ -\frac{1}{2}.$

93. $38x^3+7x^2-8x-1=0.$

Javob. $-\frac{1}{2};\ \frac{3+2\sqrt{17}}{19};\ \frac{3-2\sqrt{17}}{19}.$

94. $4x^3+6x^2+4x+1=0.$ Javob. $-\frac{1}{2};\ \frac{-1+i}{2};\ \frac{-1-i}{2}.$

95. $16x^3-28x^2+4x+1=0.$ Javob. $\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ -\frac{1}{4}.$

96. $100x^3-120x^2+47x-6=0.$ Javob. 0,3; 0,4; 0,5.

97. $6x^3-13x^2+9x-2=0.$ Javob. $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3}.$

98. $4x^3+6x^2+5x+69=0.$ Javob. $-3;\ \frac{3+i\sqrt{83}}{4};\ \frac{3-i\sqrt{83}}{4}.$

99. $3x^3-2x^2+x-10=0.$ Javob. $\frac{3}{5};\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2};\ \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.$

100. $32x^3-24x^2-12x-77=0.$

Javob. $\frac{7}{4};\ \frac{-2+3i\sqrt{2}}{4};\ \frac{-2-3i\sqrt{2}}{4}.$

101. $4x^3+2x^2-8x+3=0.$ Javob. $\frac{1}{2};\ \frac{1+\sqrt{7}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{7}}{2}.$

102. $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0.$

Javob. $2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2};\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$

103. $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47.$

Javob. $\frac{1}{2};\ \frac{-11+\sqrt{105}}{4};\ \frac{-11-\sqrt{105}}{4}.$

104. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4.$

Javob. $1;\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$

105. $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=5\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right).$

Javob. $2;\ 6;\ \frac{-3+i\sqrt{39}}{2};\ \frac{-3-i\sqrt{39}}{2}.$

106. $x^4-2x^3+x^2-2x+1=0.$

Javob. $\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$

107. $x^4+2x^3+4x^2+5x+25=0.$

Javob. $1+2i;\ 1-2i;\ \frac{-3+i\sqrt{11}}{2};\ \frac{-3-i\sqrt{11}}{2}.$

108. $x^4+2x^3-7x^2+4x+4=0.$

Javob. $2;\ -1;\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2};\ \frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$

109. $16x^4+8x^3-7x^2+2x+1=0.$

Javob. $-1;\ -\frac{1}{4};\ \frac{3+i\sqrt{17}}{8};\ \frac{3-i\sqrt{17}}{8}.$

110. $x^4-8x+63=0.$

Javob. $2+i\sqrt{3};\ 2-i\sqrt{3};\ -2+i\sqrt{5};\ -2-i\sqrt{5}.$

111. $\frac{x^2-6x-9}{x}=\frac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}.$

Javob. $-1;\ 9;\ \frac{5+i\sqrt{61}}{2};\ \frac{5-i\sqrt{61}}{2}.$

112. $|x| + x^3 = 0$. Javob. $0; -1$.

113. $(x + 1)(|x| - 1) = -0{,}5$.

Javob. $\frac{\sqrt{2}}{2}; \ -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \ -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

114. $\frac{4x-8}{|x-2|} = x$. Javob. $4; -4$.

115. $\frac{7x+4}{5} - x = \frac{|3x-5|}{2}$. Javob. $3; \ \frac{17}{19}$.

116. $7 - 4x = |4x - 7|$. Javob. $\left]-\infty; \ \frac{7}{4}\right]$.

117. $|3x - 5| = 5 - 3x$. Javob. $\left]-\infty; \ \frac{5}{3}\right]$.

118. $|x^2 - 3x + 3| = 2$.

Javob. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \ \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \ \frac{3+i\sqrt{11}}{2}; \ \frac{3-i\sqrt{11}}{2}$.

119. $|2x - x^2 + 3| = 2$.

Javob. $1 + \sqrt{2}; \ 1 - \sqrt{2}; \ 1 + \sqrt{6}; \ 1 - \sqrt{6}$.

120. $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$. Javob. $1; \ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

121. $|x^2 - x - 3| = -x - 1$. Javob. $-\sqrt{2}; \ 1 - \sqrt{5}$.

122. $2|x^2 + 2x - 5| = x - 1$. Javob. $\frac{-5+\sqrt{113}}{4}$.

123. $(x + 1)^2 - 2|x + 1| + 1 = 0$. Javob. $-2; \ 0$.

124. $x^2 + 2x - 3|x + 1| + 3 = 0$. Javob. $-3; \ -2; \ 0; \ 1$.

125. $|x| + |x + 1| = 1$. Javob. $0; \ 1$.

126. $|x + 1| + |x + 2| = 2$. Javob. $-\frac{1}{2}; \ -\frac{5}{2}$.

127. $|x - 1| + |x - 2| = 1$. Javob. $[2; \ \infty]$.

128. $|x - 2| + |4 - x| = 1$. Javob. $\frac{3}{2}; \ -\frac{9}{2}$.

129. $|x - 1| + |x - 2| = 1$. Javob. $[1; \ 2]$.

130. $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$. Javob. $1; \ \frac{11}{2}$.

Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini yeching:

131. $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$ **132.** $\begin{cases} 3x-4y+5z=18, \\ 2x+4y-3z=26, \\ x-6y+8z=0. \end{cases}$

Javob. (1; 2; 3). Javob. (8; 4; 2).

133. $\begin{cases} 10x-9z=19, \\ 8x-y=10, \\ y-12z=10. \end{cases}$ **134.** $\begin{cases} x+2y+z+7=0, \\ 2x+y-z-1=0, \\ 3x-y+2z-2=0. \end{cases}$

Javob. (1; –2; –1). Javob. (1; –3; –2).

135. $\begin{cases} \frac{x}{a^3}-\frac{y}{a^2}+\frac{z}{a}=1, \\ \frac{x}{b^3}-\frac{y}{b^2}+\frac{z}{b}=1, \\ \frac{x}{c^3}-\frac{y}{c^2}+\frac{z}{c}=1. \end{cases}$

Javob. $(abc;\ ab+bc+ac;\ a+b+c)$.

Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini yeching va tekshiring:

136. $\begin{cases} x+ay=1, \\ ax-3ay=2a+3. \end{cases}$ **137.** $\begin{cases} 3x+ay=5a^2, \\ 3x-ay=a^2. \end{cases}$

138. $\begin{cases} (a+5)x+(2a+3)y=3a+2, \\ (3a+10)x+(5a+b)y=2a+4. \end{cases}$

139. $\begin{cases} a(a-1)x+a(a+1)y=a^3+2, \\ (a^2-1)x+(a^3+1)y=a^4-1. \end{cases}$

140. $\begin{cases} (a^2+b^2)x+(a^2-b^2)y=a^2, \\ (a+b)x+(a-b)y=a. \end{cases}$

141. *a* va *b* ning qanday qiymatlarida

$$\begin{cases} a^2x - by = a^2 - b, \\ bx - b^2y = 2 + 4b \end{cases}$$

sistema cheksiz ko‘p yechimlarga ega bo‘ladi?

Javob. (1; –1); (1; –2); (–1; –1); (–1; –2).

142. *a* ning qanday qiymatlarida

$$\begin{cases} a^2x + (2 - a)y = 4 + a^2, \\ ax + (2a - 1)y = a^5 - 2 \end{cases}$$

sistema yechimga ega bo‘lmaydi? Javob. $a = 1$.

Quyidagi bir jinsli va simmetrik tenglamalar sistemalarini yeching:

143. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 20, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4} \end{cases}$

Javob. (4; 1); (1; 4); $\left(\frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}; \frac{-5 \mp \sqrt{41}}{2}\right)$.

144. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6, \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$ Javob. (1; 2), (2; 1).

145. $\begin{cases} (x^2 + y^2)xy = 78, \\ x^4 + y^4 = 97. \end{cases}$ Javob. (±3; ±2), (±2; ±3).

146. $\begin{cases} 5(x^4 + y^4) = 41(x^2 + y^2), \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$

Javob. (±3; ±1), (±1; ±3).

147. $\begin{cases} xy - x + y = 1, \\ x^2y - y^2x = 30. \end{cases}$

Javob. (5; 1), (1; 5), (3; 2), (2; 3).

148. $\begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$

Javob. (2; 1), (–1; –2), $(1 \pm \sqrt{2};\ 1 \mp \sqrt{2})$.

149. $\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ x^2 + xy + y = 20. \end{cases}$ Javob. (–2; –4), $\left(\frac{5}{3};\ \frac{10}{3}\right)$.

150. $\begin{cases} 2x^2 + 2xy + y^2 = 26, \\ x^2 + xy + y^2 = 26. \end{cases}$

Javob. (1; 4), (–5; 4), (5; –4), (–1; –4).

151. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931. \end{cases}$

Javob. (3; 5), (5; 3), (–3; –5), (–5; –3).

152. $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases}$

Javob. (2; 1), (1; 2), (–3; 0), (0; –3), (1; –2), (2; –1).

153. $\begin{cases} x^5 - y^5 = 3093, \\ x - y = 3. \end{cases}$ Javob. (5; 2), (–2; –5).

154. $\begin{cases} y^2 + xy - z^2 = 4, \\ x + 5y = 8. \end{cases}$ Javob. (3; 1; 0).

155. $\begin{cases} x^2 - 2yz = -1, \\ y + z - x = 1. \end{cases}$ Javob. (1; 1; 1).

156. $\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91, \\ y^2 = xz. \end{cases}$ Javob. (1; 3; 9), (9; 3; 1).

157. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=2(y-x-z)-2, \\ x^3+y^3+z^3=3(x^2-y^2+z^2). \end{cases}$

Javob. (0; 1; –1), (–1; 2; –1), (–1; 1; 0).

158. $\begin{cases} xy+yz+xz=11, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xyz=6. \end{cases}$ Javob. (1; 2; 3).

159. $\begin{cases} x^2+xy+xz=70, \\ xy+y^2+yz=28, \\ xz+yz+z^2=98. \end{cases}$ Javob· (–5; –2; –7)(5; 2; 7).

160. $\begin{cases} \sqrt{\frac{y+1}{x-y}}+2\sqrt{\frac{x-y}{y+1}}=3, \\ x+xy+y=7. \end{cases}$ Javob. $\left(\frac{24}{23};\ 24\right), \left(3;\ \frac{3}{2}\right)$.

161. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=4. \end{cases}$ Javob. (2; 5; 6).

162. $\begin{cases} x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=189, \\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=180. \end{cases}$ Javob. (16; 25), (25; 16).

Quyidagi tengsizliklar sistemalari yechimlari to‘plamlarini toping:

163. $\begin{cases} x+y+1\geq 0, \\ x+y-3\leq 0, \\ x+1\geq 0, \\ x-3\leq 0. \end{cases}$ Javob. Parallelogramm.

164. $\begin{cases} x-y+2\geq 0, \\ x-y-1\leq 0, \\ y+1\geq 0, \\ x-3\leq 0. \end{cases}$ Javob. Uchlari $M_1(-3;\ -1)$, $M_2(1;\ 3)$, $M_3(4;\ 3)$, $M_4(0;\ -1)$ nuqtalarda bo‘lgan parallelogramm.

165. $\begin{cases} x+2y+2\geq 0, \\ x+2y-4\leq 0, \\ x-2\leq 0, \\ x+y+1\geq 0. \end{cases}$ Javob. Uchlari $M_1(0;\ -1)$, $M_2(-6;\ 5)$, $M_3(2;\ 1)$, $M_4(2;\ -2)$ nuqtalarda bo‘lgan trapetsiya.

166. $\begin{cases} 3x-2y+6\geq 0, \\ 3x+2y\leq 0, \\ 2y-9\geq 0, \\ x+y+2\geq 0. \end{cases}$ Javob. Trapetsiya.

167. $\begin{cases} x-y+2\geq 0, \\ 3x-y-4\leq 0, \\ x+1\geq 0, \\ y\geq 0. \end{cases}$ Javob. Uchlari $M_1(-1;\ 0)$, $M_2(-1;\ 1)$, $M_3(3;\ 5)$, $M_4\left(\frac{4}{3};0\right)$ nuqtalarda bo‘lgan qavariq to‘rtburchak.

168. $\begin{cases} x-2y+1\geq 0, \\ 3x+y-11\leq 0, \\ x+4y\geq 0, \\ x\geq 0. \end{cases}$ Javob. Qavariq to‘rtburchak.

169. $\begin{cases} x^2+y^2\leq 9, \\ x+y\geq 0, \\ x-2y\leq 0. \end{cases}$ Javob. Sektor.

Quyidagi tengsizliklar sistemasi bilan berilgan sohani tasvirlang:

170. $\begin{cases} -6 \le x \le 2, \\ \dfrac{x^2}{4} - x \le y \le 2 - x. \end{cases}$ **171.** $\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ y \le x \le 10 - y. \end{cases}$

172. $\begin{cases} 1 \le x \le 3, \\ x^2 \le y \le x + 9. \end{cases}$ **173.** $\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le \sqrt{25 - x^2}. \end{cases}$

D soha $\begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi(x) \le y \le f(x) \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi bilan berilgan, bu sohani $\begin{cases} c \le x \le d, \\ \varphi(y) \le y \le f(y) \end{cases}$ ko‘rinishdagi tengsizliklar sistemasi bilan ifodalang:

174. $\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ 3x^2 \le y \le 12x. \end{cases}$

175. $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 2x \le y \le 3x. \end{cases}$

176. $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ -\sqrt{1 - x^2} \le y \le 1 - x. \end{cases}$

177. $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{x^2}{2} \le y \le \sqrt{3 - x^2}. \end{cases}$

178. Ikkita *A* va *B* omborxonada 90 t yonilg‘i saqlanmoqda. *A* omborxonadan 1-, 2- va 3- yonilg‘i shoxobchalariga bir tonna yonilg‘ini olib borish uchun 10, 30 va

50 so'm sarflanadi (bu yerda va bundan buyon narxlar shartli ravishda berilgan). *B* omborxonadan o'sha yonilg'i shoxobchalariga 1 t yonilg'i olib borish uchun 20 so'm, 50 so'm va 40 so'm sarflanadi. Har bir shoxobchaga bir xil miqdordagi yonilg'i olib borildi. Yonilg'ini tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, transport xarajatlari eng kam bo'lsin.

179. Temiryo'lning *A*, *B* va *C* stansiyalarida rezervdagi 60, 80 va 100 ta vagonlar turibdi. Bu vagonlarni 4 ta razyezdga yuborish kerak. 1- razyezdga 40 ta, 2- razyezdga 60 ta, 3- razyezdga 80 ta va 4- razyezdga 60 ta vagon zarur. Agar *A* stansiyadan ko'rsatilgan razyezdlarga vagonlarni olib borish uchun 10, 20, 30 va 40 so'm, *B* stansiyadan o'sha razyezdlarga yuboriladigan vagonlar uchun 40, 30, 20 va 0 so'm, *C* stansiyadan razyezdlarga yuboriladigan vagonlar uchun 0, 20, 20 va 10 so'm sarflansa, vagonlarni razyezdlarga yuborishning shunday eng yaxshi (optimal) rejasini tuzingki, xarajat eng kam bo'lsin.

180. *A*, *B*, *C* omborxonalarda 10, 15 va 25 t urug'lik don saqlanmoqda. Bu urug'lik donlarni 4 ta xo'jalikka yetkazib berish zarur. 1- xo'jalikka 5 t, 2- xo'jalikka 10 t, 3- xo'jalikka 20 t va 4- xo'jalikka 15 t olib borish kerak. *A* ombordan xo'jaliklarga 1 tonna donni olib borish uchun 80, 30, 50, 20 so'm, *B* ombordan 40, 10, 60 va 70 so'm, *C* ombordan esa 10, 90, 40, 30 so'm pul sarflanadi. Donni 4 ta xo'jalikka olib borishning shunday eng yaxshi rejasini tuzingki, donni olib borishga sarflanadigan xarajatlar eng kam bo'lsin.

181. Bir fermada 7 t 680 kg, ikkinchisida esa 9 t 600 sr silos g'amlashadi. Birinchi fermada kuniga 352 kg, ikkinchisida esa 480 kg silos sarflanadi. Necha kundan keyin ikkala fermadagi g'amlangan siloslar teng bo'lib qoladi? (Javob. 15 kundan so'ng.)

182. Bir sabzavot omboriga 145 t 480 kg, ikkinchisiga esa 89 t 7 sr kartoshka keltirishdi. Birinchi ombordan do‘konlarga har kuni 4 t 40 kg dan, ikkinchisidan esa 2 t 550 kg dan kartoshka jo‘natiladi. Necha kundan keyin ikkinchi omborda birinchidagidan 2 marta kam kartoshka qoldi. (Javob. 32 kundan so‘ng.)

183. Oralaridagi masofa 340 km bo‘lgan ikki shahardan bir vaqtda bir-biriga qarab ikki poyezd yo‘lga chiqdi. Ulardan birining tezligi ikkinchisinikidan 5 km/soat ortiq. Agar harakat boshlanganidan 2 soat o‘tgandan keyin poyezdlar orasidagi masofa 30 km ekanligi ma’lum bo‘lsa, ularning tezliklarini toping. (Javob. 75 km/soat va 80 km/soat.)

184. Oralaridagi masofa 230 km bo‘lgan *A* va *B* shaharlaridan bir vaqtda bir-birlariga qarab ikki mototsiklchi yo‘lga chiqdi. Harakat boshlangandan 3 soat o‘tgach ular orasidagi masofa 20 km bo‘ldi. Agar mototsiklchilardan birining tezligi ikkinchisinikidan 10 km/soat kam bo‘lsa, mototsiklchilarning tezliklarini toping. (Javob. 40 km/soat va 30 km/soat.)

185. Oralaridagi masofa 28 km bo‘lgan *A* va *B* punktlardan ikki velosipedchi bir-biriga qarab bir vaqtda yo‘lga chiqdi va bir soatdan keyin uchrashdi. To‘xtamasdan oldingi tezliklari bilan yo‘llarida davom etishdi. Birinchisi *B* punktga ikkinchisi *A* punktga yetib borishidan 35 minut oldin keldi. Har qaysi velosipedchining tezligini toping. (Javob. 16 km/soat va 12 km/soat.)

186. Oralaridagi masofa 24 km bo‘lgan *A* va *B* punktlardan ikki avtomobil bir vaqtda bir-biriga qarab yo‘lga chiqdi. *A* punktdan kelayotgan avtomobil uchrashishdan 16 minut keyin *B* punktga yetib keldi, ikkinchi avtomobil esa *A* punktga 4 minutdan keyin keldi. Shu avtomobillarning tezliklarini toping. (Javob. 60 km/soat va 120 km/soat.)

187. O‘rilgan bug‘doyni ikkita g‘alla yanchadigan mashina 4 kunda yanchib bo‘ldi. Agar shu g‘alla yanchadigan mashinalardan biri bug‘doyning yarmini yanchib, so‘ngra qolgan yarmini ikkinchisi yanchsa, hamma bug‘doy 9 kunda yanchilib bo‘ladi. Shu bug‘doyni har qaysi mashinaning o‘zi necha kunda yancha oladi? (Javob. 12 kun va 6 kunda.)

188. Ikki ishchi bir ishni birgalashib ishlasa, 12 kunda tamom qiladi. Agar oldin bittasi ishlab, ishning yarmini tamom qilgandan keyin, uning o‘rniga ikkinchisi ishlasa, ish 25 kunda tamom bo‘ladi. Shu ishni har qaysi ishchi yolg‘iz o‘zi ishlasa, necha kunda tamom qiladi? (Javob. 30 kun va 20 kunda.)

189. Qayiq daryo oqimiga qarshi 22,5 km, oqim bo‘ylab 28,5 km yurib, hamma yo‘lga 8 soat sarf qildi. Daryo oqimining tezligi soatiga 2,5 km bo‘lsa, qayiqning turg‘un suvdagi tezligini toping. (Javob. 7 km/soat.)

190. Ikki pristan orasidagi masofa daryo yo‘li bilan 80 km. Paroxod shu pristanlarning biridan ikkinchisiga borib kelishi uchun 8 soat 20 minut vaqt sarf qiladi. Daryo oqimining tezligi soatiga 4 km bo‘lsa, paroxodning turg‘un suvdagi tezligini toping. (Javob. 20 km/soat.)

191. Daraxt kesuvchilar brigadasi rejaga ko‘ra bir necha kunda 216 m^3 o‘tin tayyorlashi kerak edi. Birinchi 3 kunda brigada faqat rejada ko‘rsatilgan normani bajarib keldi, so‘ngra har kuni rejadagidan 8 m^3 ortiq o‘tin tayyorladi. Shuning uchun muddatidan bir kun oldin 232 m^3 o‘tin tayyorlandi. Brigada rejasiga ko‘ra har kuni qancha o‘tin tayyorlashi kerak edi? (Javob. 24 m^3.)

192. Klubning tomosha zalida 320 ta joy bor edi. Har bir qatordagi joylar sonini 4 ta orttirib, yana bir qator qo‘shilgandan keyin zalda 420 ta joy bo‘ldi. Klubning tomosha zalidagi joylar endi necha qator bo‘ldi? (Javob. 21 qator.)

193. Ikkita metall parchasidan birining og'irligi 880 g, ikkinchisining og'irligi 858 g. Birinchi parchaning hajmi ikkinchisinikidan 10 sm^3 kam. Birinchi metallning solishtirma og'irligi ikkinchisining solishtirma og'irligidan 1 g/sm^3 ortiq bo'lsa, har qaysi metallning solishtirma og'irligini toping. (Javob. 8,8 g/sm^3 va 7,8 g/sm^3.)

194. Ikkita metall parchasidan biri 178 g, ikkinchisi 219 g keladi. Birinchi metallning solishtirma og'irligi ikkinchisinikiga qaraganda 1,6 g/sm^3 ortiq. Birinchi parchaning hajmi ikkinchi parchaning hajmidan 10 sm^3 kam. Har qaysi metall parchasining hajmini toping. (Javob. 20 sm^3 va 30 sm^3.)

195. Musobaqadosh ikki jamoa xo'jaligining olgan hosillarini hisoblanganda, birinchi xo'jalik 200 sr paxta hosili olgani, ikkinchi xo'jalikning yeri birinchisining yeridan 2 ga ortiq bo'lgani va har gektaridan unga qaraganda 5 sr ortiq hosil olib, hamma yerdan 300 sr paxta topshirgani ma'lum bo'ldi. Har qaysi xo'jalik qancha yerga chigit ekkanligini va har gektaridan qanchadan hosil olganini toping. (Javob. 10 ga, 20 sr; 12 ga, 25 sr; 8 ga, 25 sr; 10 ga, 30 sr.)

196. *A* va *B* punktlari orasidagi yo'l balandlik va pastliklardan iborat. *A* va *B* ga velosipedda kelayotgan odam pastlikka tushishda balandlikka chiqishga qaraganda soatiga 6 km tez yuradi va butun yo'lga 2 soat-u 40 minut sarf qiladi. *B* dan *A* ga qaytishda 20 minut kam vaqt sarf qiladi. Agar butun yo'l 36 km bo'lsa, velosipedchining balandlikka chiqishdagi va pastlikka tushishdagi tezligini hamda *A* dan *B* ga borishda yuqorilab borgan yo'lning uzunligini toping. (Javob. 12 km/soat; 18 km/soat; 24 km.)

197. Yo'nalishlari to'g'ri burchak hosil qilgan ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi 89 kg. Agar kuchlarning har biri 3 kg ga kamaytirilsa, teng ta'sir etuvchi kuch

4 kg ga kamayadi. Tashkil etuvchi kuchlarning miqdorini toping. (Javob. 80 kg va 39 kg.)

198. Boshlang'ich tezlikka ega bo'lgan jism 25 sm/s^2 tezlanish oldi. 570 m uzunlikdagi yo'lning oxirida tezligi sekundiga 17 m bo'ladi. Jismning boshlang'ich tezligini va uning qancha vaqt tezlanuvchan harakat qilganini toping. (Javob. 2 m/s^2; 1 min.)

199. Geometrik progressiya 6 ta haddan iborat bo'lib, oldingi uchta hadning yig'indisi 168, keyingi uchta hadning yig'indisi 21. Shu progressiyani toping. (Javob. 96; 48; 24; 12; 6; 3.)

200. O'suvchi arifmetik va geometrik progressiyalarning birinchi hadlari bir xil bo'lib, har biri 3 ga teng. Progressiyalarning ikkinchi hadlari ham teng. Geometrik progressiya uchinchi hadining arifmetik progressiyaning uchinchi hadiga nisbati $9:5$ kabi. Shu progressiyalarni toping. (Javob. 3; 9; 15; ... va 3; 9; 27; ... .)

201. Geometrik progressiya tashkil qiluvchi to'rtta sonning yig'indisi -40 ga, ular kvadratlarining yig'indisi 3280 ga teng. Shu sonlarni toping. (Javob. 2; -6; 18; -54.)

202. x, y, z sonlar geometrik progressiya, $x+y$, $y+z$, $z+x$ sonlar esa arifmetik progressiya tashkil qiladi. Geometrik progressiyaning maxrajini toping. (Javob. 1 yoki -2.)

203. Sayyoh tog'ga ko'tarilib, birinchi soatda 800 m balandlikka chiqdi, undan keyingi har bir soatda oldingi soatdagidan 25 m kam bo'lgan balandlikka ko'tarildi. U qancha vaqtda 5700 m balandlikka ko'tarildi? (Javob. 8 soat.)

204. Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi 4 ga, uning hadlari kublarining yig'indisi 192 ga teng. Progressiyaning birinchi hadini va maxrajini toping. (Javob. 6; $-\frac{1}{2}$.)

205. Aylanaga kvadrat ichki chizilgan, unga esa ikkinchi aylana ichki chizilgan. Ikkinchi aylanaga ikkinchi kvadrat ichki chizilgan, unga esa uchinchi aylana ichki chizilgan va hokazo. Aylanalarning radiuslari geometrik progressiya tashkil qilishini isbotlang. (Javob. $r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n$.)

206. 60° li burchakka bir-biriga urinuvchi aylanalar ketma-ket ichki chizilgan. Birinchi aylananing radiusi R_1 ga teng. Qolgan aylanalarning R_2, R_3, ..., R_n, ... radiuslarini toping va ular cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya tashkil qilishini ko'rsating. $R_1 + 2(R_2 + R_3 + ... + R_n + ...)$ yig'indi birinchi aylananing markazidan burchakning uchigacha bo'lgan masofaga tengligini isbotlang.

(Javob. $R_n = \frac{1}{3^{n-1}} R_1$.)

207. Tarkibida 40 g tuz bo'lgan eritmaga 200 g suv qo'shildi, shundan keyin uning konsentratsiyasi 10% kamaydi. Eritmada qancha suv bo'lgan va uning konsentratsiyasi qanday bo'lgan? (Javob. 160 g, 20%.)

208. Spirt to'ldirilgan 20 litrlik idishdan birmuncha spirt quyib olindi, idishga o'shancha suv quyib qo'yildi, so'ngra aralashmadan yana oldingicha quyib olib, idishga yana o'shancha suv quyib qo'yildi. Endi idishda 5 *l* sof spirt qoldi. Har safar necha litr suyuqlik quyib olingan? (Javob. 10 *l*.)

V BOB

MATEMATIK INDUKSIYA USULI

1- §. Deduksiya va induksiya

Matematikaning boshqa fanlardan farqli tomoni shundan iboratki, bu fan o‘z nazariyasini deduktiv asosda quradi.

Xulosalar ikki turga bo‘linadi: umumiy va xususiy.

Umumiy xulosalarga misollar keltiraylik:

Har qanday parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi.

Oxiri nol bilan tugovchi barcha sonlar beshga bo‘linadi.

Istalgan teng yonli uchburchak simmetriya o‘qiga ega.

Bu misollarga mos keluvchi xususiy xulosalar:

ABCD parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi.

150 soni 5 ga bo‘linadi.

Berilgan uchburchak teng yonli bo‘lsa, u holda bunday uchburchak simmetriya o‘qiga ega.

Umumiy xulosalardan xususiy xulosalar chiqarish *deduksiya* deyiladi. Deduksiya so‘zi o‘zbek tilida „xulosa chiqarish“ degan ma’noni bildiradi.

Deduksiya ilmiy fikrlashning yagona usuli emas.

Fizika, kimyo, biologiya kabi fanlarda kuzatish va tajribalarga suyanib, induktiv mulohazalar yuritish keng qo‘llaniladi. Induksiya so‘zi o‘zbek tilida „boshqarib borish“ yoki „yetaklab borish“ kabi ma’nolarni bildiradi.

Xususiy xulosalardan umumiy xulosalar chiqarish *induksiya* deyiladi.

Matematikada induktiv fikrlash va mulohazalar yuritish bilan tushunchalar, teoremalar shakllantiriladi, qator hollarda esa isbotlash yo‘llari belgilanadi. Induktiv fikrlash va mulohazalar yuritishda to'g'ri, shuningdek, noto'g'ri xulosalarga kelib qolishimiz mumkin. Buni quyidagi misollardan tushunib olishimiz mumkin.

1-misol. 150 soni 5 ga bo'linadi. 0 bilan tugovchi barcha sonlar 5 ga bo'linadi.

Bu yerda xususiy xulosadan umumiy xulosa chiqarilgan. Chiqarilgan xulosa to'g'ri.

2-misol. 150 soni 5 ga bo'linadi. Barcha uch xonali sonlar 5 ga bo'linadi.

3-misol. Raqamlarining yig'indisi 3 ga bo'linadigan sonlarning barchasi 3 ga bo'linadi. 3 ga bo'linadigan sonlar 9 ga ham bo'linadi.

2- va 3- misolda xulosalardan umumiy xulosa chiqarilgan. Chiqarilgan umumiy xulosalar noto'g'ri.

2- §. To'liq va to'liq bo'lmagan induksiya

Induksiya xususiy xulosalardan umumiy xulosalar chiqarish usuli ekanligiga ishonch hosil qildik.

Yana misollarga murojaat qilaylik.

4-misol. Bizdan dastlabki n ta toq sonlar kvadratlarining yig'indisini topish talab qilinsin. 1, 3, 5, ..., $2n-1$ toq sonlar uchun n ning turli 1, 2, 3, ... qiymatlarida quyidagi yig'indilarni hisoblaylik.

$$\begin{array}{ll} n=1 & 1=1 \\ n=1 & 1+3=4=2^2 \\ n=3 & 1+3+5=9=3^2 \\ n=4 & 1+3+5+7=16=4^3 \\ n=5 & 1+3+5+7+9=25=5^2 \end{array}$$

Bu xususiy hollarni qaraganimizdan keyin quyidagi umumiy xulosani chiqarish mumkin.

Dastlabki n ta toq natural sonlarning yig'indisi qo'shiluvchilar sonining kvadratiga teng. Chiqargan xulosamizning istalgan sondagi qo'shiluvchilar uchun o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Bizning yo'l qo'ygan farazimizni (gipotezamizni) quyidagicha shakllantirish mumkin: „Barcha n natural sonlar uchun

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

tenglik o'rinli". Navbatdagi mavzuda (1) formula o'rinli bo'lishini isbotlaydigan usul bilan tanishamiz. Yana misollar qaraylik.

5-misol. Agar $p(x) = x^2 + x + 41$ kvadrat uchhadda x ning o'rniga 1, 2, 3, 4, 5 natural sonlarni qo'ysak, $p(1) = 43$; $p(2) = 47$; $p(3) = 53$; $p(4) = 61$; $p(5) = 71$ tub sonlarni olamiz. Shuningdek, x ning o'rniga 0; –1; –2; –3; –4 manfiy butun sonlarni qo'ysak, $p(0) = 41$; $p(-1) = 41$; $p(-2) = 43$; $p(-3) = 47$; $p(-4) = 53$ tub sonlarini olamiz. Quyidagi gipotezaning paydo bo'lishi tabiiy; $p(x)$ ko'phadning qiymati x ning istalgan butun qiymatida tub son bo'lmasmikan? Lekin tahlil qilingan gipoteza noto'g'ri. Chunki $p(x)$ uchhadning qiymatlari $x = 40$ va $x = 41$ bo'lganda 41^2 va $41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$ murakkab sonlar hosil bo'ladi.

6-misol. Endi bizdan istalgan a va b haqiqiy sonlar uchun

$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad (2)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlash talab qilinsin.

Bu yerda 4 ta hol bo'lishi mumkin:

1) $a \geq 0,\ b \geq 0$; 2) $a < 0,\ b \geq 0$;
3) $a \geq 0,\ b < 0$; 4) $a < 0,\ b < 0$.

Isbotlash uchun yig'indining moduli qanday aniqlanishini eslab, har bir hol uchun (2) tenglikning o'rinli bo'lishligini isbotlaylik.

Agar $a \geq 0$, $b \geq 0$ bo'lsa, u holda $|a + b| = a + b$, $|a| = a$, $|b| = b$ bo'lib, (2) tengsizlik $a + b \leq a + b$ ko'rinishni oladi. Bu tengsizlik o'rinli.

Agar $a < 0$ va $b \geq 0$ bo'lsa, u holda $a + b$ yig'indi a va b sonlar orasida bo'ladi. $a \leq a + b < b$ va $|a + b|$ soni $|a|$, $|b|$ sonlarning kattasidan oshib ketmaydi. Demak, $|a + b| \leq \leq |a| + |b|$. Bu isbotlangan holda o'xshash $a \geq 0, b < 0$ bo'lgan hol ham isbotlanadi.

Endi $a<0$, $b<0$ bo'lsin. Bunday holda $|a+b|=-a-b$, $|a|=-a$, $|b|=-b$ bo'lib, (2) tengsizlik $-a-b\leq-a-b$ ko'rinishni oladi. Bu tengsizlik ham qo'yilgan shartlarda o'rinli.

7-misol. Endi quyidagi mulohazaning o'rinli bo'lishini isbotlaylik. Istalgan muntazam ko'pyoqlar uchun $U-Q+Y=2$ tenglik o'rinli. Bunda U — ko'pyoqning uchlari, Q — qirralari va Y — yoqlari soni. 5 ta xususiy holni qarash yetarli: tetraedr, oktaedr, kub, dodekaedr, ikosaedr. Boshqa muntazam ko'pyoqlar mavjud emas. Bu holning to'g'riligiga quyidagi jadvalni kuzatish bilan ishonch hosil qilish mumkin.

Muntazam ko'pyoqning nomi	Ko'pyoq uchlarining soni	Ko'pyoq qirralarining soni	Ko'pyoq yoqlarining soni
Tetraedr	4	6	4
Oktaedr	6	12	8
Kub	8	12	6
Dodekaedr	20	30	12
Ikosaedr	12	30	20

Yuqoridagi misollarda barcha gipotezalar induksiya yordamida hosil qilinadi, ammo mulohazalar keltirilgan gipotezalarning (muammolarning) isboti bo'lib xizmat qila olmaydi. Ilgari aytganimizdek, induksiya yordamida ochilgan qonuniyatlar (bog'lanishlar) to'g'ri bo'lishi ham, noto'g'ri bo'lishi ham mumkin. Shu sababli induksiya yordamida hosil qilingan qonuniyatning to'g'ri yoki noto'g'ri ekani biror deduktiv usul yordamida qat'iy isbotlanmog'i kerak.

Tekshirish jarayonida bir nechta (chekli sondagi) xususiy hollarning to'g'riligiga asoslanib, xulosa chiqarish usuli to'liq bo'lmagan induksiya deyiladi. To'liq bo'lmagan induksiya yordamida chiqarilgan xulosalar va keyinchalik bu xulosalarning xato ekani aniqlanganligiga oid misollar keltiraylik.

8-misol. $n \in N$ bo'lganda $2^{2^n} + 1$ ifodani qaraylik. $n = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$ bo'lganda $2^{2^0} + 1 = 3;\ 2^{2^1} + 1 = 5;\ 2^{2^2} + 1 = 17;\ 2^{2^3} + 1 = 257;\ 2^{2^4} + 1 = 65537$ tub sonlar hosil bo'ladi. P. Ferma yuqoridagi ko'rinishdagi barcha sonlar tub bo'ladi, degan xulosani chiqargan edi. Ammo XVIII asrga kelib, L. Eyler $n = 5$ bo'lganda $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$ murakkab son hosil bo'lishini aniqlab, Ferma xulosasi noto'g'ri ekanligini ko'rsatgan edi.

9-misol. G.V.Leybnis har qanday butun musbat son uchun $n^3 - n$ soni 3 ga, $n^5 - n$ soni 5 ga, $n^7 - n$ soni 7 ga bo'linishini isbotlab, bularga asoslanib: „Har qanday toq k va ixtiyoriy n natural son uchun $n^k - n$ soni k ga bo'linadi", degan xulosani chiqardi. Keyinchalik uning o'zi bu xulosaning noto'g'riligini isbotladi, ya'ni $2^9 - 2 = 510$ soni 9 ga bo'linmasligini ko'rsatdi.

Ferma Leybnis muammosi k tub son bo'lganda o'rinli bo'lishini isbotladi.

To'liq bo'lmagan induksiya yordamida har doim ham to'g'ri xulosa chiqarish mumkin bo'lavermas ekan. Lekin uning foydali tomoni bor. Uning yordamida gipotezani ifodalash, bayon etish juda qulay, so'ngra aytilgan gipotezani isbotlash yoki rad qilish mumkin bo'ladi. Ba'zi muammolarni hal etishda tekshirilayotgan jarayonning barcha xususiy hollarini ko'rib chiqish imkoniyati bo'ladi.

Barcha xususiy hollarni tahlil qilish orqali mulohaza yuritish usuli *to'liq induksiya* deyiladi.

To'liq induksiyaning qo'llanilishiga oid yuqoridagi 4, 6 va 7-misollarni tahlil qilgan edik. Yuqorida tahlil qilingan misollardan quyidagi sodda va muhim xulosani chiqarish mumkin. Mulohazamiz (fikrimiz) qator xususiy hollar uchun to'g'ri bo'lib, umuman noto'g'ri bo'lishi mumkin.

Shunday ekan quyidagi savollarning paydo bo'lishi tabiiy. Bir qancha xususiy hollar uchun to'g'ri bo'lgan tasdiq berilgan bo'lsin. Barcha xususiy hollarni qarashning imkoniyati yo'q. Umuman, tasdiqning to'g'ri ekanligini qanday bilish mumkin? Bu savolni matematik induksiya (to'liq induksiya) usuli bilan hal qilish mumkin.

3- §. Matematik induksiya usuli

Matematik induksiya usuli asosida matematik induksiya prinsipi yotadi. Bu prinsipning mazmunini izohlaylik. *Biror n natural songa bog'liq bo'lgan fikrimizni* (gipotezani) *A* (*n*) orqali belgilaylik. Bu fikrimizning (mulohazamizning) ixtiyoriy *n* natural son uchun to'g'riligini isbotlash kerak bo'lsin. Lekin *A*(*n*) mulohazaning to'g'riligini barcha *n* uchun bevosita tekshirib ko'rishning iloji bo'lmasin. *A*(*n*) mulohaza matematik induksiya prinsipiga ko'ra quyidagicha isbotlanadi: *A*(*n*) mulohazaning to'g'riligi, avvalo, $n=1$ uchun tekshiriladi. So'ngra aytilgan mulohazani $n=k$ uchun to'g'ri deb faraz qilib, uning to'g'riligi $n=k+1$ uchun isbotlanadi. Shundan so'ng, *A(n)* mulohazamiz barcha $n \in N$ uchun isbotlangan hisoblanadi. Shunday qilib, matematik induksiya prinsipiga asoslangan isbot matematik induksiya usuli bilan isbotlash deyiladi. Bunday isbot ikkita qismdan iborat bo'lib, ikkita mustaqil teoremani isbotlashdan iborat.

1-teorema. ***A(n) tasdiq n = 1 uchun o'rinli.***

2-teorema. ***Agar A(n) tasdiqning n = k uchun to'g'riligidan uning n = k + 1 uchun to'g'riligi kelib chiqsa, u holda A(n) tasdig'i ixtiyoriy n uchun o'rinli bo'ladi.***

Agar bu ikki teorema isbotlangan bo'lsa, u holda matematik induksiya prinsipiga ko'ra *A(n)* tasdig'imiz ixtiyoriy *n* uchun o'rinli bo'ladi.

Matematik induksiya usulini yig'indilarni hisoblashga, ayniyatlarni, tenglik va tengsizliklarni isbotlashga, bo'linish belgilarini isbotlashga, sonli ketma-ketliklarning xossalarini o'rganishga, shuningdek, boshqa har xil masalalarni yechishga qo'llash mumkin.

10-misol. Istalgan *n* natural son uchun

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

yig'indini hisoblang.

Yechish: Bu yig‘indini S_n orqali belgilaylik. S_n yig‘indini hisoblash uchun formula topamiz. Buning uchun S_n yig‘indining dastlabki S_1, S_2, S_3, ... yig‘indilarini hisoblaymiz.

$$S_1=\frac{1}{1\cdot4}=\frac{1}{4}=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{4});$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}=S_1+\frac{1}{4\cdot7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot7}=\frac{2}{7}=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{7});$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}=S_2+\frac{1}{7\cdot10}=\frac{2}{7}+\frac{1}{7\cdot10}=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{10});$$

$$S_4\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\frac{1}{10\cdot13}=S_2+\frac{1}{10\cdot13}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10\cdot13}=$$

$$=\frac{40}{10\cdot13}=\frac{4}{13}=\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{13}).$$

Bu topilgan yig‘indilarni diqqat bilan kuzatsak, ular qavs ichidagi ayirma ayriluvchisining maxraji bilan farq qiladi. Bu maxraj esa har bir yig‘indi oxirgi qo‘shiluvchi maxrajidagi ikkinchi ko‘paytuvchisiga teng. Bu esa bizni

$$S_n=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+1)}=\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3n+1}) \qquad (3)$$

induktiv faraz qilishga olib keladi.

Bu tenglikni matematik induksiya usuli bilan isbotlaymiz:

1) $n=1$, 2, 3, 4 uchun mulohazamizning to‘g‘riligi isbotlandi;

2) faraz qiliylik, mulohazamiz $n=k$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin:

$$S_k=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3k-1)(3k+1)}=\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3k+1}).$$

$$S_{k+1}=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3k-4)(3k-2)}+$$

$$+\frac{1}{(3k-1)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{(3k+4)})$$

bo‘lishini isbotlaymiz.

$$S_{k+1}=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3k-4)(3k-2)}+$$

$$+\frac{1}{(3k-1)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=$$

$$=S_k+\frac{1}{3(3k+1)(3k+4)}=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)})=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)})=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3k+4-3}{3(3k+1)(3k+4)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3k+1}{(3k+1)(3k+4)})=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3k+4}=\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3k+4}).$$

$S_{k+1}=\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3k+4})$ tenglik (3) dan $n=k+1$ bo‘lganda hosil bo‘ladi.

Matematik induksiya prinsipiga ko‘ra isbotlanishi kerak bo‘lgan (3) tenglik n ning barcha natural qiymatlarida o‘rinli.

11-misol. $7+77+\ldots+\underbrace{777\ldots7}_{n\text{ ta}}=\frac{7(10^{n+1}-9n-10)}{81}$ ayniyatni isbotlang.

Yechish: $S_1=7$ bo‘lishi ravshan. Boshqa tomondan n - 1 bo‘lganda,

$$S_1=\frac{(10^{1+1}-9-10)\cdot 7}{81}=\frac{81\cdot 7}{81}=7.$$

Demak, $n=1$ bo‘lganda formula to‘g‘ri.

Faraz qilaylik, $n=k$ bo‘lganda

$$S_k=7+77+\ldots+\underbrace{77\ldots7}_{k\text{ ta}}=\frac{7(10^{k+1}-9k-10)}{81}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsin.

$$S_{k+1}=7+77+\ldots+\underbrace{77\ldots7}_{k\text{ ta}}+\underbrace{777\ldots7}_{(k+1)\text{ ta}}=\frac{7(10^{k+2}-9(k+1)-10)}{81}$$

bo‘lishini isbotlaylik:

$$S_{k+1} = S_k + \underbrace{777\ldots77}_{(k+1)\,\text{ta}} = S_k + 7\cdot10^k + 7\cdot10^{k-1} + \ldots +$$

$$+7\cdot10^2 + 7\cdot10 + 7 = S_k + 7(1 + 10 + 10^2 + \ldots + = 10^k).$$

Qilingan farazga ko‘ra

$$S_k = \frac{7(10^{k+1} - 9k + 10)}{81}.$$

$$1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^k = \frac{10^{k+1} - 1}{10 - 1} = \frac{10^{k+1} - 1}{9}.$$

Demak,

$$S_{k+1} = \frac{7(10^{k+1} - 9k - 10)}{81} + 7\cdot\frac{10^{k+1} - 1}{9} = 7\cdot\left(\frac{10^{k+1} - 9k - 10 + 9\cdot10^{k+1} - 9}{81}\right) =$$

$$= \frac{7(10\cdot10^{k+1} - 9(k+1) - 10)}{81} = \frac{7(10^{k+2} - 9(k+1) - 10)}{81}.$$

Shunday qilib, berilgan tenglik (formula) istalgan n natural son uchun to‘g‘ri ekan.

12-misol. Agar $n \geq 8$ ($n \in N$) bo‘lsa, $2^n > 2n + 1$ bo‘lishini isbotlang.

Yechish: $n = 3$ bo‘lganda tengsizlik to‘g‘ri: $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$; faraz qilaylik, $n = k$ ($k \geq 3$) bo‘lganda $2^k > 2k + 1$ bo‘lsin. $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$ bo‘lishini isbotlaylik.

Haqiqatan,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) = (2k + 3) + (2k - 1) >$$
$$> (2k + 3) = 2(k + 1) + 1.$$

Bunda $2k - 1 > 0$ tengsizlik k ning barcha natural qiymatlarida bajariladi. Demak, $n \geq 3$ bo‘lgan barcha n natural sonlar uchun $2^n > 2n + 1$ bo‘ladi.

13-misol. Ketma-ket keluvchi 3 ta natural son kublarining yig‘indisi 9 ga bo‘linishini isbotlang.

Yechish. $n \in N$ bo‘lganda $\left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right] \vdots 9$ bo‘lishini isbotlaymiz. $n = 1$ bo‘lganda

$$\left[1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3\right] \vdots 9 = 36 \vdots 9.$$

$n=k$ bo‘lganda $\left[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3\right]\vdots 9$ bo‘lsin.

$n=k+1$ bo‘lganda $\left[(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3\right]\vdots 9$ bo‘lishini ko‘rsataylik.

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+$$
$$+9k^2+27k+27=\left[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3\right]+9(k^2+3k+3).$$

Bu yig‘indining har bir qo‘shiluvchisi 9 ga bo‘linadi: qilingan farazga ko‘ra $\left[k^3+(k+1)^3+(k+2)^3\right]\vdots 9$, ikkinchi qo‘shiluvchi 9 ga karrali. Agar yig‘indining har bir qo‘shiluvchisi biror songa bo‘linsa, yig‘indi ham o‘sha songa bo‘linadi. Demak, $n\in N$ bo‘lganda $\left[n^3+(n+1)^3+(n+2)^3\right]\vdots 9$ bo‘ladi.

14-misol. Agar $n\in N$ bo‘lsa, $(3^{2n+1}+40n-67)\vdots 64$ bo‘lishini isbotlang.

Yechish: Agar $n=1$ bo‘lsa, u holda $3^3+40-67=0$ bo‘lib, $0\vdots 64$ bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $n=k$ bo‘lganda $(3^{2k+1}+40k+67)\vdots 64$ bo‘lsin.

$n=k+1$ bo‘lganda $\left[3^{2k+3}+40(k+1)-67\right]\vdots 64$ bo‘lishini isbotlaylik.

$$3^{2k+3}+40(k+1)-67=9\cdot 3^{2k+1}+40k-27=$$
$$=9(3^{2k+1}+40k-67)-320k+576=$$
$$=9(3^{2k+1}+40k-67)-64(5k-9).$$

Bunda $\left[9(3^{2k+1}+40k-67)\right]\vdots 64$ va $\left[64(5k-9)\right]\vdots 64$.

Demak, berilgan tasdiq istalgan n natural son uchun o‘rinli.

15-misol. Agar $a\in N$ bo‘lsa, $(a^5-5a^3+4a)\vdots 120$ bo‘lishini isbotlang.

Yechish: $a=1$ bo‘lsa, tasdiq to‘g‘ri, ya’ni $(1^5-5\cdot 1^3+$ $+4\cdot 1)\vdots 120$ · $a+2$ bo‘lsa ham $\left(2^5-5\cdot 2^3+4\cdot 2\right)\vdots 120$.

Faraz qilaylik, $a=k$ bo‘lganda $\left(k^5-5k^3+4k\right)\vdots 120$ bo‘lsin.

$a=k+1$ bo'lganda $\left[(k+1)^5-5(k+1)^3+4(k+1)\right]\vdots 120$ bo'lishini isbotlaymiz:

$$(k+1)^5-5(k+1)^3+4(k+1)=$$
$$=(k+1)\left[(k+1)^4-5(k+1)^2+4\right]=$$
$$=(k+1)\left[(k+1)^2-4\right]\left[(k+1)^2-1\right]=$$
$$=(k+1)(k^2+2k)(k^2+2k-3)=$$
$$=(k^3+3k^2+2k)(k^2+2k-3)=$$
$$=(k^5-5k^3+4k)+5(k^4+2k^3-k^2-2k).$$

Bunda $(k^5-5k^3+4k)\vdots 120$.

Agar $(k^4+2k^3-k^2-2k)\vdots 24$ bo'lishini ko'rsata olsak, tasdiqning to'g'ri ekanligini isbotlagan bo'lamiz:

$$k^4+2k^3-k^2-2k=k\left[k^2(k+2)-(k+2)\right]=$$
$$=k(k+2)(k^2-1)=(k-1)k(k+1)(k+2).$$

Bu oxirgi ko'paytma ketma-ket keluvchi 4 ta natural sonning ko'paytmasini ifodalaydi. Bunday ko'paytma tarkibida hamma vaqt 24 ko'paytuvchi bo'ladi. Demak, $k\in N$ bo'lganda $(k^4+2k^3-k^2-2k)\vdots 24$ bo'ladi.

Berilgan tasdiq istalgan n natural son uchun o'rinli ekan.

16-misol. $n>1$ bo'lgan istalgan natural son uchun

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

tengsizlikni isbotlang.

Yechish. Tengsizlikning chap qismini S_n bilan belgilaylik.

1. $n=2$ bo'lganda tengsizlik o'rinli, ya'ni

$$S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}.$$

2. $n=k$ hol uchun $S_k>\frac{13}{24}$ bo'lsin.

3. $n = k + 1$ bo‘lganda $S_{k+1} > \frac{13}{24}$ bo‘lishini isbotlaylik.

S_k va S_{k+1} yig‘indilarni tuzaylik:

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k},$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

S_k va S_{k+1} yig‘indilarni taqqoslaylik.

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{k+1},$$

ya’ni $S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2(k+2)(2k+1)}$. k istalgan natural son bo‘lganda oxirgi tenglikning o‘ng qismi musbat. Shuning uchun $S_{k+1} > S_k$. $S_k > \frac{13}{24}$ bo‘lgani uchun $S_{k+1} > \frac{13}{24}$ bo‘ladi.

Berilgan tengsizlik istalgan $n > 1$ uchun o‘rinli ekan.

17- misol. $\cos\alpha \cos 2\alpha \cdots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$ ayniyatni isbotlang.

Yechish. 1. $n = 0$ bo‘lgan hol uchun ayniyat o‘rinli, ya’ni

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}.$$

2. Ayniyat $n = k$ hol uchun ham to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cdots \cos 2^k\alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}.$$

Bu ayniyat $n = k + 1$ bo‘lgan hol uchun ham o‘rinli. Haqiqatan,

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \cdots \cos 2^k\alpha \cos 2^{k+1}\alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha \cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha} = \frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}.$$

V BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

Xususiy natijalarni umumlashtirib, quyidagi yig'indilar va ko'paytmalar uchun formulalar toping:

1. $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$. Javob. $S_n = \frac{n}{n+1}$.

2. $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Javob. $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \ldots + n(3n+1)$.
Javob. $S_n = n(n+1)^2$.

4. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Javob. $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$.

5. $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+3)}$.

Javob. $S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$.

6. $\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$.

Javob. $S_n = \frac{1}{6}\left(\frac{23}{15} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right)$.

7. $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \ldots + \frac{3^n + 2^n}{6^n}$. Javob. $S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2\cdot 3^n}$.

8. $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. Javob. $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

9. $\frac{1}{9} + \frac{1}{225} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

Javob. $S_n = \frac{1}{8}\left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]$.

10. $P_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$. Javob. $P_n = \frac{1}{n+1}$.

11. $P_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right).$

Javob. $P_n = \frac{n+2}{2n+2}$

Quyidagi ayniyatlarni isbotlang:

12. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

13. $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

14. $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$

15. $1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad (x \neq 1).$

16. $3+33+333+\ldots+333\ldots33 = \frac{10^{n+1}-9n-10}{27}.$

Quyidagi tengsizliklarni isbotlang:

17. Agar $a > b$, $a > 0$, $b > 0$ bo‘lsa, $a^n > b^n$ bo‘lishini isbotlang.

18. Agar $n \in N$ bo‘lsa, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} > \frac{n}{2}$ bo‘lishini isbotlang.

19. Agar $n \geq 5$ bo‘lsa, $2^n > n^2$ bo‘lishini isbotlang.

20. Agar $n \geq 11$ bo‘lsa, $2^n > n^3$ bo‘lishini isbotlang.

21. Agar $n \geq 2$ bo‘lsa, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1} < n$ bo‘lishini isbotlang.

22. Agar $n \geq 2$ bo‘lsa, $\sqrt{n} < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ bo‘lishini isbotlang.

23. Agar $a > 0$, $b > 0$ bo‘lsa, $2^{n-1}(a^n+b^n) \geq (a+b)^n$ bo‘lishini isbotlang.

24. Agar $n \geq 3$ bo‘lsa, $2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$ bo‘lishini isbotlang.

25. $\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c+\ldots+\sqrt{c}}}} < \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$ $(c > 0)$.

26. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}} < 3$.

Agar $n \in N$ bo‘lsa, quyidagilarni isbotlang.

27. $(6^{2n}-1) \vdots 35$.

28. $(4^{n}+15n-1) \vdots 9$.

29. $(6^{2n-1}+1) \vdots 7$.

30. $(6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}) \vdots 11$.

31. $(7^{2n}-1) \vdots 48$.

32. $(2^{5n+3}+5^{n} \cdot 3^{n+2}) \vdots 17$.

33. $(3^{3n+2}+2^{4n+1}) \vdots 11$.

34. $(11^{n+2}+12^{2n+1}) \vdots 133$.

35. $(7^{n+2}+8^{2n+1}) \vdots 57$.

36. $(n^{4}+6n^{3}+11n^{2}+6n) \vdots 24$.

37. $(n^{2}-1) \vdots 24$ $((n; 6)=1)$.

VI BOB

FUNKSIYALAR

1- §. O‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlar

1. Turli jarayonlarni kuzatish bilan bu jarayonlarda qatnashayotgan miqdorlar o‘zlarini turlicha tutishlarini, ya’ni ba’zilari o‘zgarayotganini, ba’zilari esa o‘zgarmay qolayotganini ko‘rish mumkin. Masalan, poyezd harakatlanib borayotganda undagi yo‘lovchilar soni, bo‘sh o‘rinlar soni, poyezd vagonlarining uzunligi o‘zgarishsiz qoladi, ammo shu vaqtning o‘zida poyezd tezligi, bosib o‘tgan yo‘li, yoqilg‘i miqdori, atrofdagi havoning temperaturasi o‘zgaradi.

Barcha miqdorlarni o‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlarga ajratish mumkin.

Biror jarayonda qatnashayotgan o‘zgaruvchi miqdorlar odatda bir-biridan ajralgan holda emas, balki bir-biri bilan bog‘liq ravishda o‘zgaradi. Masalan, υ tezlik bilan borayotgan poyezdning harakatida s yo‘l va t vaqt o‘zgarib boradi. Shuning uchun ular *o‘zgaruvchi miqdorlar* yoki *o‘zgaruvchilar* deyiladi. Bunda s va t ixtiyoriy ravishda emas, balki tekis harakatning $s = \upsilon t$ qonuniga bo‘ysungan holda o‘zgaradi. Qaralayotgan jarayonda υ o‘zgarmas miqdor bo‘ladi.

O‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishlarga oid ko‘plab misollar keltirish. Aylana radiusining o‘zgarishi aylananing uzunligi va doira yuzining o‘zgarishiga sabab bo‘ladi. Biror jarayonni matematik o‘rganishning asosiy vazifasi bir o‘zgaruvchi miqdorning o‘zgarishi boshqa o‘zgaruvchi miqdorning o‘zgarishiga qanday ta’sir qilishini aniqlashdan iboratdir.

Ma'lumki, jismning V hajmi uning m massasiga nisbatan to'g'ri proporsional ravishda o'zgaradi:

$$V = m / \rho,$$

(ρ — o'zgarmas miqdor, ya'ni moddaning solishtirma zichligi). Agar jismning massasi ma'lum bo'lsa, uning hajmini hisoblash mumkin.

Agar $S = 4\pi R^2$ formulada radius R ma'lum bo'lsa, shar sirtining yuzini aniqlash mumkin. Agar to'g'ri burchakli uchburchakning bir o'tkir burchagi ma'lum bo'lsa, $\beta = \pi/2 - \alpha$ formula bo'yicha uning ikkinchi o'tkir burchagini topish mumkin.

Keltirilgan misollarning istalgan birida ikki miqdor o'zaro shunday bog'langanki, bulardan birining mumkin bo'lgan har bir qiymatiga ikkinchisining aniq bir qiymati mos keladi. Bunday holda o'zgaruvchilar orasida funksional bog'lanish o'rnatilgan bo'ladi.

Shunday qilib, tabiatning turli jarayonlarini (fizik, kimyoviy, biologik va h.k) o'rganishda har xil miqdorlarni (uzunlik, yuz, hajm, temperatura, massa, og'irlik, tok kuchi, ish, vaqt, valentlik, issiqlik va h.k) qarashga to'g'ri keladi. Qaraladigan miqdorlar har xil sonli qiymatlarni yoki bitta aniq qiymatni qabul qiladi.

2-§. Funksiya va uning aniqlanish sohasi

Ta'rif. *x va y o'zgaruvchi berilgan bo'lsin. Agar x o'zgaruvchining uning ko'rsatilgan D o'zgarish sohasidagi har bir qiymatiga biror qonun bo'yicha y o'zgaruvchining bitta yoki bir nechta aniq qiymati mos qo'yilgan bo'lsa, u holda y o'zgaruvchi x o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi va $y = f(x)$ ko'rinishda yoziladi.*

x miqdor *erkli o'zgaruvchi* yoki *argument* deyiladi. Agar x ning har bir qiymatiga y ning aniq bir qiymati mos kelsa, u holda y funksiya *bir qiymatli* deyiladi.

Agar x argument faqat haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan qiymatlarni qabul qilsa, u holda y funksiya *haqiqiy o'zgaruvchili* (*sonli*) *funksiya* deyiladi.

Agar x ning har bir qiymatiga y ning bir qancha (ikki, uch va h.k.) qiymatlari mos kelsa, u holda y funksiya *ko'p qiymatli* (ikki, uch va h.k.) *funksiya* deyiladi.

$y = f(x)$ tengsizlikka kirgan f harfi x va y harflaridan farq qiladi. f bilan x va y o'zgaruvchilar orasida o'rnatilgan qoida (qonun) belgilanadi va u funksiyaning *xarakteristikasi* deyiladi. Bu qoida (qonun) turli vositalar bilan beriladi.

Funksiyaning *aniqlanish sohasi* deb, uning argumenti qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plamiga aytiladi. f funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ bilan belgilanadi.

x argumentning aniqlash sohasidan olingan barcha qiymatlarida funksiya qabul qiladigan qiymatlari to'plami funksiyaning *o'zgarish sohasi* deyiladi va $E(f)$ bilan belgilanadi.

Agar funksiyaning aniqlanish (mavjudlik) sohasi, ya'ni x argumentning qiymatlar to'plami ko'rsatilgan bo'lsa, u holda x argumentning $y = f(x)$ funksiyasi berilgan hisoblanadi. Ko'pincha funksiya biror formula (analitik ifoda) yordamida beriladi. Analitik usulda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini topish argumentning formula ma'noga ega bo'ladigan barcha qiymatlarini topish demakdir.

Misol. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping:

1) $y = 1 - x^2$;
2) $y = \frac{1}{1 - x^2}$;
3) $y = \sqrt{1 - x^2}$;
4) $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
5) $y = \frac{1}{x}$;
6) $y = \operatorname{tg} x$.

Yechish. 1) $y = 1 - x^2$ funksiya x ning istalgan qiymatida ma'noga ega bo'lgani uchun, uning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat.

Javob. $D(f) = R = (-\infty; \infty)$.

2) $y=\frac{1}{1-x^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasiga $x=-1$ va $x=1$ sonlar kirmaydi. Chunki x ning bu qiymatlarida $\frac{1}{1-x^2}$ ifodaning maxraji nolga aylanadi. Nolga bo'lish esa ma'noga ega emas. Demak, berilgan funksiya $]-\infty;-1[$, $]-1;1[$ va $]1;\infty[$ oraliqlarda aniqlangan.

Javob. $D(f)=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;\infty[$.

3) $y=\sqrt{1-x^2}$ ifoda $1-x^2\geq 0$ bo'lganda ma'noga ega, ya'ni funksiya $x^2\leq 1\Rightarrow|x|\leq 1\Rightarrow -1\leq x\leq 1$ bo'lganda aniqlangan.

Javob. $D(f)=[-1;\ 1]$.

4) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ifoda esa $1-x^2>0$ bo'lganda ma'noga ega, ya'ni funksiyaning aniqlanish sohasi $|x|<1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to'plamidan iborat. Bu to'plam $]-1;\ 1[$ oraliqdan iborat.

Javob. $D(f)=]-1;\ 1[$.

5) $\frac{1}{x}$ ifoda $x\neq 0$ bo'lganda ma'noga ega. Shu sababli funksiyaning aniqlanish sohasi nolga teng bo'lmagan barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'ladi. Uning qiymatlari sohasi bilan aniqlanish sohasi bir xil bo'lib, $]-\infty;\ 0[$ va $]0;\ \infty[$ intervallarning birlashmasidan iborat bo'ladi.

Javob. $D(f)=]-\infty;0[\cup]0;\infty[$.

6) $y=\text{tg}\ x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ ko'rinishdagi barcha intervallar birlashmasidan iborat, bunda $k\in Z$; uning qiymatlar sohasi esa sonlar to'g'ri chizig'idan iborat, ya'ni $E(\text{tg})=]-\infty;\ \infty[$.

Javob. $D(\text{tg})=\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ k\in Z,$

$E(\text{tg})=]-\infty;\ \infty[$.

3- §. Funksiyaning berilish usullari va uning grafigi

1. Analitik usul. x va y o‘zgaruvchilar orasidagi moslikni turli xil usullar bilan berish mumkin. Funksiya berilishining eng ko‘p tarqalgan usuli uning analitik usulda berilishidir. Biz esa bu usulda funksiyaning aniqlanish sohasini tahlil qilishda foydalandik, chunki funksiyaning analitik usulda berilishi bilan uning aniqlanish sohasi uzviy bog‘liqdir. Bunday usulda erksiz o‘zgaruvchini erkli o‘zgaruvchi bilan bog‘lovchi formula ko‘rsatiladi, masalan,

$$y = kx + b, \quad y = ax^2, \quad S = \pi \cdot r^2, \quad m = d\upsilon \text{ va h.k.}$$

Analitik usulda funksiyalar murakkabroq ko‘rinishda (tarmoqlangan shaklda) ham berilishi mumkin.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo‘lsa,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo‘lsa;} \end{cases} \quad y = \begin{cases} x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo‘lsa,} \\ \sin x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo‘lsa.} \end{cases}$$

2. Jadval usuli. x erkli o‘zgaruvchining funksiya aniqlangan sohadan olingan va ma’lum tartibda yozilgan $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlariga mos keluvchi funksiyaning ham $y_1, y_2, ..., y_n$ qiymatlari berilgan bo‘lib,

x	x_1	x_2		x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2		y_{n-1}	y_n

ko‘rinishda ifodalangan bo‘lsa, u holda funksiya jadval usulida berilgan deyiladi. Masalan, kvadratlar, kublar, sinuslar va logarifmlar jadvallari bunga misol bo‘la oladi.

Texnika va tabiatda ba’zi bir miqdorlar orasidagi qonuniyat ma’lum bo‘lsa-da, ular orasidagi bog‘lanish jadval shaklida aniqlanadi. Buning uchun tajriba o‘tkaziladi. Natijada o‘lchash bilan argumentning qator qiymatlariga mos keluvchi funksiya qiymatlari jadval ko‘rinishida beriladi. Masalan, istalgan o‘simlikning balandligi (bo‘yi) vaqtning funksiyasi. Aniq bir sharoitda tanlangan o‘simlik L bo‘yi-ning o‘zgarishini t vaqt o‘zgarishi bilan bog‘lovchi qonuniyatni o‘rnatish uchun $t_0 = 0$ paytdan boshlab, aniq vaqt oralig‘ida o‘lchab boramiz. Natijada quyidagi jadvalga ega bo‘lamiz:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
L	2	2,5	2,75	3	3,2	4	5	6,5	7	...

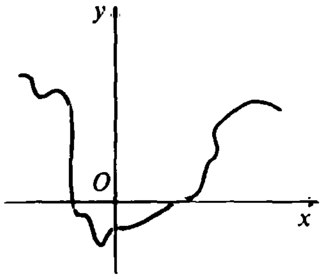
Albatta, bu jadval tekshirilayotgan funksiyani aniq ifodalay olmaydi. Chunki o‘lchashlar o‘lchov asboblarining sifatiga, tajriba o‘tkazuvchi shaxslarning bilim darajasiga ham bog‘liq bo‘ladi. Shunday bo‘lsa-da, jarayonni tekshirishda olingan tajriba natijalari L va t miqdorlar orasidagi bog‘lanishni yetarlicha aniqlikda ifodalash imkonini beradi.

3. Grafik usul. Koordinatalari $y = f(x)$ munosabat bilan bog‘langan tekislikning barcha $(x;\ y)$ nuqtalari to‘plami biror D sohada berilgan $y = f(x)$ funksiyaning *grafigi* deyiladi. Bunda x o‘zgaruvchi D sohadan olingan istalgan qiymatlarni qabul qiladi. $y = f(x)$ tenglik esa funksiya grafigining tenglamasi deyiladi.

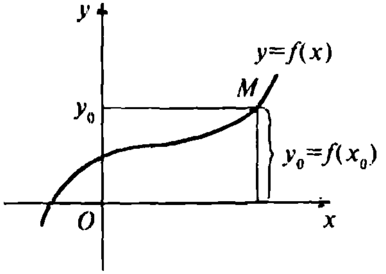
Ko‘pincha amalda funksiyaning grafik usulda berilishidan ham foydalaniladi. Funksiyaning grafigi chizilgan bo‘lsa, u berilgan hisoblanadi. Masalan, havo atmosferasining turli balandliklardagi bosimini o‘lchash uchun o‘zi yozuvchi maxsus apparat — barograf ishlatiladi.

Harakatdagi lentaga havo bosimining balandlikka bog‘liq bo‘lgan o‘zgarishi egri chiziq ko‘rinishida yoziladi. Qaralayotgan holda funksiya grafik usulda berilgandir. Lentada hosil bo‘lgan egri chiziqqa qarab havo bosimining o‘zgarishi tahlil qilinadi. Grafik usulni funksiyani analitik usulda berish ancha qiyin bo‘lgan hollarda qo‘llash maqsadga muvofiq bo‘ladi (50- rasm).

Bundan tashqari, ko‘pgina jarayonlarni o‘rganishda biz formulalar tilida gaplasha olmaydigan asboblardan foydalanamiz (barograf). Ammo shu asboblar yordamida shunday egri chiziqlar hosil qilinadiki, bu egri chiziqlarga



50- rasm.



51- rasm.

qarab bir o‘zgaruvchi miqdorning ikkinchi o‘zgaruvchi miqdorning o‘zgarishiga bog‘liq ravishda o‘zgarishi haqida xulosa chiqarish mumkin bo‘ladi.

Yana bir misol keltiraylik. Tibbiyotda elektrokardiograflar keng ishlatiladi. Bu asbob yordamida elektrokardiogrammalarni — yurak ishlaganda uning muskulida hosil bo‘ladigan elektr impulslarining o‘zgarishini tasvirlovchi egri chiziqlarni hosil qilish mumkin. Bu egri chiziqlar yurakning ishlashi haqida to‘g‘ri xulosa chiqarishga yordam beradi.

Funksiya grafigi turli koordinatalar sistemalarida berilishi mumkin. Eng ko‘p qo‘llaniladigani to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasidir.

Grafik ravishda berilgan funksiyaning $y_0=f(x_0)$ qiymatini topish uchun abssissa o‘qida x_0 nuqtani topamiz. Bu nuqtada O_x o‘qqa perpendikular tiklab, uni funksiya grafigini M nuqtada kesguncha davom ettiramiz. Undan keyin M nuqtadan Oy o‘qqa perpendikular tushiramiz. Bu perpendikularning asosiga mos keluvchi y_0 son berilgan funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi qiymati bo‘ladi (51- rasm).

4- §. Funksiyalar ustida amallar

Matematikada ko‘pchilik hollarda „funksiyalar teng“, „funksiyalarning yig‘indisi“, „funksiyalarning ko‘paytmasi“ kabi iboralar ishlatilib turiladi. Bu iboralarning mazmunlarini aniqlaymiz. Ikkita funksiyaning tengligini quyidagicha ta'riflash mumkin.

Berilgan $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar uchun, agar:

1) bu funksiyalar bir xil aniqlanish sohasiga ega bo'lsa;

2) D sohadan olingan argumentning ixtiyoriy bitta qiymatiga mos keluvchi ularning qiymatlari teng bo'lsa, u holda bu funksiyalar teng deyiladi, ya'ni $f(x)=\varphi(x)$, $x \in D$.

Misollar.

1. $f(x)=1$ va $\varphi(x) = \cos^2 x+\sin^2 x$ funksiyalar $]-\infty; \infty[$ oraliqda aynan teng. Chunki bu oraliqdan olingan x ning istalgan qiymatida $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ tengsizlik o'rinli.

2. $f(x)=\lg x^2$ va $\varphi(x) = 2\lg x$ funksiyalar har xil aniqlanish sohasiga ega. Agar ular $]0; \infty[$ sohada berilgan bo'lsa, teng bo'ladi, ya'ni ko'rsatilgan sohadan olingan istalgan x uchun $f(x)=\varphi(x)$. Shuningdek, ularning aniqlanish sohasi ham ustma-ust tushadi.

3. $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-3}$ va $\varphi(x)=\sqrt{x(x-3)}$ funksiyalar qanday oraliqda aynan teng bo'ladi?

Yechish. Har bir funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz. Buning uchun kvadrat ildizning mavjud bo'lish shartidan foydalanamiz. $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ x-3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge 3 \end{cases} \Rightarrow x \ge 3 \Rightarrow x \in [3; \infty[.$$

$\varphi(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz:

$$x(x-3) \ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x-3 \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0, \\ x-3 \le 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0, \\ x \le 3 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} x \ge 3, \\ x \le 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in]-\infty; 0] \cup [3; \infty[.$$

Berilgan funksiyalar aniqlanish sohalarining umumiy qismini aniqlaymiz: $D = \{]-\infty;\ 0] \cup [3;\ \infty[\} \cap [3;\ \infty[= [3;\ \infty[$.

Topilgan $[3;\ \infty[$ oraliqda berilgan funksiyalarning qiymatlari ustma-ust tushadi, ya'ni bu oraliqda ular aynan teng bo'ladi.

Endi $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning aniqlanish sohalari mos ravishda D_1 va D_2 bo'lsin. D_1 va D_2 sohalar D umumiy qismga ega bo'lsin, ya'ni $D = D_1 \cap D_2$.

Agar D sohaning har bir x_0 nuqtasida $F(x_0) = f(x_0) + \varphi(x_0)$ bo'lsa, u holda D sohada aniqlangan $F(x)$ funksiya $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning *yig'indisi* deyiladi:

$$F(x) = f(x) + \varphi(x).$$

Masalan, $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ va $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ funksiyalarning yig'indisi ma'noga ega bo'lgan oraliqni topaylik. Buning uchun $F(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{9 - x^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini ko'rsatish kifoya. Kvadrat ildizning mavjud bo'lish shartidan foydalanamiz:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ 9 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4, \\ x^2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 2, \\ |x| \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2, \\ x \leq -2, \\ -3 \leq x \leq 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} [2;\ \infty[, \\ ]-\infty;\ -2], \\ [-3;\ 3]. \end{array}\right.$$

Berilgan funksiyalar yig'indisi $[-3;\ -2]$ va $[2;\ 3]$ kesmalarda ma'noga ega bo'ladi. Yuqoridagiga o'xshash istalgan chekli sondagi funksiyalarning yig'indisi, ko'paytmasi, shuningdek, ikkita funksiyaning ayirmasi va bo'linmasi ham aniqlanadi. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning bo'linmasini aniqlashda $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ funksiyaning maxrajida turgan $\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlarini nolga aylantiradigan x argumentning qiymatlarini D sohadan chiqarib tashlaymiz. Bunday nuqtalarda $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ funksiya aniqlanmagan bo'ladi.

5- §. Elementar funksiyalar va ularning sinflari

1. Elementar funksiyalarning sinflari. Funksiyalar analitik berilishiga va funksiya qiymatlarini hisoblash uchun argument ustida bajariladigan amallarning xarakteriga qarab sinflarga ajratiladi.

Agar funksiya bilan argument orasidagi bog'lanish $F(x;\ y)=0$ tenglama yordamida ifodalangan bo'lsa, bunday funksiya *algebraik funksiya* deyiladi. Bu yerda $F(x;\ y)$ funksiya x va y ga nisbatan ko'phad. Agar funksiya faqat chekli sondagi algebraik amallar yordamida hosil qilingan formula bilan berilgan bo'lsa, u algebraik funksiyadir. Algebraik bo'lmagan har qanday funksiya *transsendent funksiya* deyiladi.

Masalan, $y=\frac{1}{x^2+1}$, $y=\sqrt{x}$, $y=x^2-5x+6$ — algebraik; $y=\sin x$, $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$, $y=\lg x$, $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$, $y=x^{\sqrt{5}}$ — transsenden funksiyalardir.

Algebraik funksiyalar ratsional va irratsional bo'lishi mumkin.

Agar $f(x)$ funksiya x ga nisbatan ratsional algebraik ifodadan iborat bo'lsa, u holda $y=f(x)$ *ratsional algebraik funksiya* deyiladi.

Agar funksiyaning analitik ifodasi irratsional algebraik ifodalar yordamida berilgan bo'lsa, u holda bunday funksiya *irratsional algebraik funksiya* deyiladi.

Masalan, $y=x^3+1$, $y=\frac{x+1}{x^2+2}$, $y=\frac{1}{x}$ — ratsional algebraik funksiyalar; $y=\sqrt{x}$, $y=x^3+\sqrt[3]{x}+2$ — irratsional algebraik funksiyalardir.

Ratsional funksiyalarning analitik ifodasi faqat qo'shish, ayirish, ko'paytirish (natural darajaga ko'tarish) amallarini o'zida saqlasa, bunday funksiya *butun ratsional funksiya* yoki *ko'phad* deyiladi.

Masalan, $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=5x^3-2x^2+3x+6$, $y=\sqrt{3}x^2-\frac{1}{2}x$, $y=\pi x^2$.

Agar funksiyaning analitik ifodasi o'zida ratsional amallarni saqlab, biror argumentga bog'liq bo'lgan ifodaga bo'lingan bo'lsa, bunday funksiya *kasr ratsional funksiya* deyiladi.

Masalan, $y=x+\frac{2}{x}$, $y=x^3+3x-\frac{x^2-1}{x^2+3}$, $y=\frac{2x+\sqrt{3}}{x^3+\sqrt{2}x+1}$.

Har qanday butun ratsional funksiyani

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0) \qquad (1)$$

ko'rinishda, kasr ratsional funksiyani esa ikkita ko'phadning nisbati ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$y=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}. \qquad (2)$$

2. Asosiy elementar funksiyalar. Asosiy elementar funksiyalarga quyidagi funksiyalar kiradi:

1. $y=x^{\mu}$ ((μ — doimiy son) — darajali funksiya.

2. $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ — ko'rsatkichli (eksponensial) funksiya.

3. $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1)$ — logarifmik funksiya.

4. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\text{tg}\,x$, $y=\text{ctg}\,x$, $y=\sec x$, $y=\text{cosec}\,x$ — trigonometrik funksiyalar.

5. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\text{arctg}\,x$, $y=\text{arcctg}\,x$, $y=\text{arcsec}\,x$, $y=\text{arccosec}\,x$ — teskari trigonometrik funksiyalar.

3. Murakkab funksiya. Ko'pchilik hollarda asosiy elementar funksiyalardan biror qoidaga asoslanib hosil qilinadigan murakkabroq funksiyalar bilan ham ish ko'rishga to'g'ri keladi. Murakkab funksiya tuzish usullaridan birining mazmuni bilan tanishaylik.

$u=\varphi(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D bo'lsin va $y=f(u)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D' bo'lsin. Shuningdek, $u=\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlari $y=f(u)$ funksiyaning D' aniqlanish sohasidan chiqmasin. Bunday holda x argumentning D sohadan olingan $x=x_0$ qiymatiga u argumentning D' sohadan olingan $u=u_0=\varphi(x_0)$ qiymati mos keladi, o‘z navbatida esa $u=u_0$ qiymatga o‘zgaruvchining (murakkab funksiyaning) $y=y_0=f(u_0)$ qiymati mos keladi. Endi agar x ning D sohadan olingan $x=x_0$ qiymatiga, u o‘zgaruvchining $u=u_0=\varphi(x_0)$ qiymatiga mos keluvchi y ning $y=y_0$ qiymati mos kelsa, u holda D sohada qandaydir $y=F(x)$ yangi funksiya aniqlangan bo‘ladi. Bu funksiya x ning *murakkab funksiyasi* deyiladi va $y=f[\varphi(x)]$ ko‘rinishda belgilanadi.

Boshqacha aytganda, bu funksiya $y=f(u)$ va $u=\varphi(x)$ funksiyalardan hosil qilinib, funksiyaning *funksiyasi* deyiladi.

y funksiya u o‘zgaruvchiga, u o‘zgaruvchi esa, o‘z navbatida, x o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘ladi.

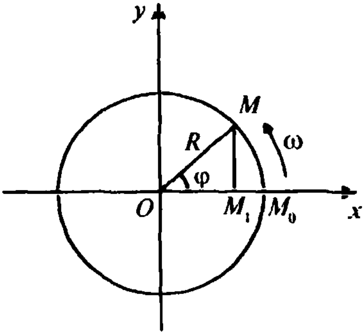
u o‘zgaruvchi *oraliq o‘zgaruvchi* (*argument*), x esa *oxirgi argument* (*erkli o‘zgaruvchi*) deyiladi.

Murakkab funksiya bir qancha funksiyalardan tuzilishi ham mumkin, ya’ni oraliq o‘zgaruvchilar bir qancha bo‘lishi mumkin.

1-misol. $y=\sqrt{1-u}$ funksiya $D'=]-\infty;\ 1]$ oraliqda, $u=\operatorname{tg}x$ funksiya $D=\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ kesmada berilgan bo‘lsa, u holda bu funksiyalar yordamida $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$ kesmada aniqlangan $y=\sqrt{1-\operatorname{tg}x}$ murakkab funksiya berilgan bo‘ladi.

2-misol. Agar $y=\sqrt{u}$ bo‘lib, $u=\lg\upsilon$, $\upsilon=a^x$ $(0<a\neq 1)$ bo‘lsa, u holda $y=\sqrt{\lg a^x}$ murakkab funksiyaga ega bo‘lamiz.

Murakkab funksiya hosil qilishning bir sodda masalasini qaraylik. Faraz qilaylik, M nuqta ω o‘zgarmas burchak tezlik bilan R radiusli aylana bo‘ylab tekis aylanma harakat qilayotgan bo‘lsin. Aylana M nuqtasining aylana markazi



52- rasm.

orqali o'tgan Ox o'qdagi proyeksiyasi bo'lgan M_1 nuqtaning harakat qonunini topaylik (52- rasm). $t=0$ boshlang'ich paytda harakatlanayotgan nuqta Ox o'q bilan aylananing kesishish M_0 nuqtasida joylashgan bo'lsin. M nuqtaning Ox o'qdagi M_1 proyeksiyasining koordinatasini x orqali belgilaylik.

M nuqtaning t vaqt ichida burilgan M_0OM burchagini esa φ orqali belgilaylik. U holda OMM_1 to'g'ri burchakli uchburchakda $\frac{|OM_1|}{OM}=\cos\varphi$ bo'lib, $x=R\cos\varphi$ bo'ladi va $\varphi=\omega t$. Natijada $x=R\cos\omega t$ murakkab funksiyaga ega bo'lamiz. Bu murakkab funksiya bilan mexanikada garmonik tebranishlar ifodalanadi.

4. Teskari funksiyalar. Bizga D sohada aniqlangan va qiymatlar to'plami E sohadan iborat bo'lgan $y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. x o'zgaruvchining D sohadan olingan har bir qiymatiga y o'zgaruvchining (funksiyaning) E sohadan olingan aniq bir qiymati mos qo'yilgan bo'lsin.

Agar y o'zgaruvchini (funksiyani) argument, x o'zgaruvchini (argumentni) esa funksiya deb qabul qilsak, u holda olingan $x=\varphi(y)$ funksiya $y=f(x)$ *funksiyaga nisbatan teskari funksiya* deyiladi.

Bu yerda $y=f(x)$ funksiyadan $x=\varphi(y)$ funksiyaga o'tishda argument va funksiya o'z rollarini almashtiradi. Lekin ikkala funksiya ham x va y miqdorlar orasidagi bog'lanishlarni ifodalaydi. Agar $x=\varphi(y)$ funksiya $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(y)$ ga nisbatan teskari funksiya bo'ladi. Biror $y_0\in E$ nuqtada $x=\varphi(y)$ funksiyaning qiymatini topish uchun $f(x)=y_0$ tenglamani yechish kerak, uning yagona x_0 ildizi

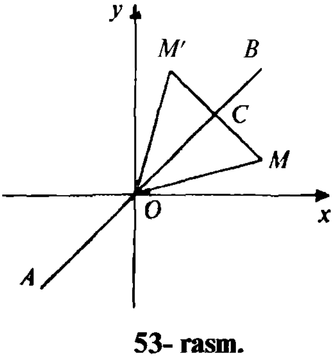
$x=\varphi(y)$ funksiyaning y_0 nuqtadagi $\varphi(y_0)=x_0$ qiymati bo'ladi. Bordi-yu $y=f(x)$ funksiya analitik ravishda biror tenglama bilan berilgan bo'lib, bu tenglamadan x ni y orqali bir qiymatli ifodalash imkoniyati, ya'ni $x=\varphi(y)$ bo'lsa, u holda bu tenglama berilgan $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiyani aniqlash imkonini beradi.

Umumiy kelishuvga muvofiq teskari funksiyani (x ni) y orqali, uning argumenti (y)ni x orqali belgilab, teskari funksiyani ham odatdagi $y=f(x)$ ko'rinishda yozamiz. Bunday holda $y=f(x)$ to'g'ri funksiyaning aniqlanish sohasi unga teskari bo'lgan funksiyaning o'zgarish sohasi bo'ladi va teskarisi ham o'rinli.

Endi teskari funksiyaning grafigi to'g'ri funksiyaning grafigidan qanday hosil qilinishini izohlaylik.

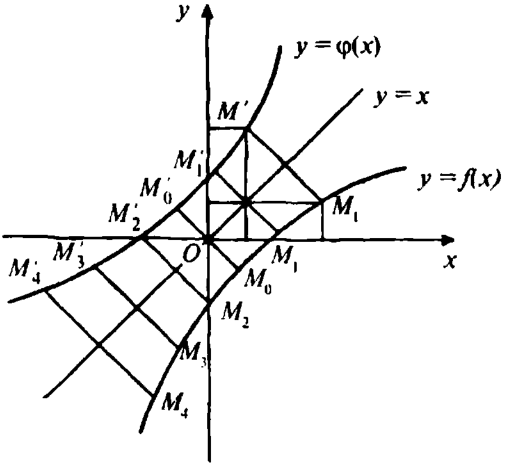
$y=f(x)$ funksiyaning grafigidan unga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiyaning grafigiga o'tishda koordinata o'qlari almashganday bo'lib, birinchi grafikning $M(x_0;\ y_0)$ nuqtasi ikkinchi grafikning $M'(y_0;\ x_0)$ nuqtasiga o'tadi. Shuning uchun berilgan $M(x_0;\ y_0)$ nuqta bo'yicha $M'(y_0;\ x_0)$ nuqtani yasashning eng qulay usulini ko'rsatish yetarli. Birinchi va uchinchi koordinatalar burchaklarining $y=x$ bissektrisasini o'tkazamiz (53- rasm).

AB bissektrisaga nisbatan M' nuqta M nuqta bilan simmetrik ekanligini ko'rsatish yetarli. MM' to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k=\frac{x_0-y_0}{y_0-x_0}=-1$ ga, $y=x$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti esa $k'=1$ ga teng; shuning uchun $MM'\perp AB$ bo'ladi, chunki $kk'=-1$ (to'g'ri chiziqlarning perpendikularlik sharti). MM' kesmaning o'rtasi bo'lgan C nuqta teng koordinatalarga ega:



53- rasm.

$$x_C=\frac{x_0+y_0}{2}=\frac{y_0+x_0}{2}=y_C.$$



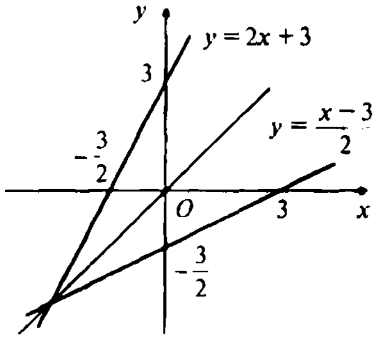
54- rasm.

Shunday qilib, *M* va *M'* nuqtalar bissektrisaga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqda yotib, bissektrisadan teng masofada, *uning turli tomonlarida joylashgan* bo'ladi. Bundan quyidagi xulosani chiqarish mumkin: berilgan $y=f(x)$ funksiyaning grafigidan unga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiyaning grafigini yasash uchun birinchi va uchinchi koordinatalar burchaklarining bissektrisasiga nisbatan $y=f(x)$ funksiya grafigiga simmetrik bo'lgan egri chiziqni yasash yetarli, ya'ni boshqacha aytganda, berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigini bissektrisa atrofida 180° ga burish yetarli (54- rasm).

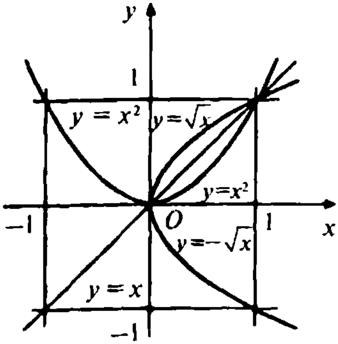
Teskari funksiyani oshkor ko'rinishda olish uchun funksiya va argumentni ifodalovchi harflarning o'rinlarini almashtirib, olingan tenglamani funksiyani ifodalovchi harfga nisbatan yechish yetarli (agar yechish imkoniyati bo'lsa).

3-misol. $y=2x+3$ funksiyaga teskari funksiyani toping.

Yechish. Funksiya va argumentni ifodalovchi harflarning o'rinlarini almashtiramiz: $x=2y+3$. Bu tenglamani



55- rasm.



56- rasm.

y ga nisbatan yechamiz: $y=\frac{x-3}{2}$. Bu berilgan funksiyaga teskari funksiya bo‘ladi. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi va o‘zgarish sohasi ham]–∞; +∞[oraliqdan iborat. Teskari funksiya ham]–∞; +∞[oraliqda aniqlangan (55- rasm).

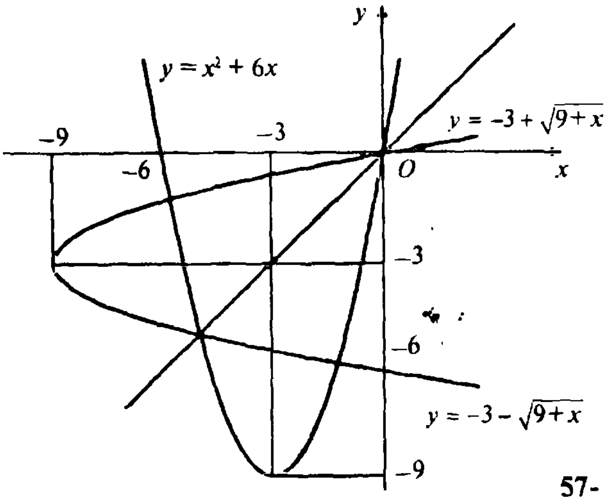
4-misol. $y=x^2$ funksiyaga teskari funksiyani toping.

Yechish. Berilgan funksiya]–∞; +∞[oraliqda aniqlangan. Qiymatlar to‘plami esa [0; +∞[oraliqni to‘ldiradi. Bu funksiyaga]–∞; +∞[oraliqda teskari funksiya mavjud emas. Chunki [0; +∞[oraliqdan olingan $y\neq 0$ bo‘lgan y ning har bir qiymatiga x ning]–∞; +∞[oraliqdan olingan bitta qiymati emas, balki ikkita qiymati mos keladi. Masalan, $y_0=9$ bo‘lsa, $x_0=\pm 3$; $y_0=16$ bo‘lsa, $x_0=\pm 4$ va h.k. bo‘ladi. Agar $y=x^2$ funksiyani [0; +∞[oraliqda (yoki]–∞; 0[oraliqda) qarasak, unga teskari funksiya mavjud bo‘ladi. Bu teskari funksiya ($y=\sqrt{x}$ yoki $y=-\sqrt{x}$) ko‘rinishga ega ($y=x^2 \Rightarrow x=y^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$). Haqiqatan, bunday holda x ning [0; +∞[oraliqdan olingan har bir qiymatiga y ning ham [0; +∞[oraliqdan olingan aniq bir qiymati mos keladi. [0; +∞[oraliqda $y=x^2$ funksiyaga teskari funksiya 56- rasmda tasvirlangan. Shuningdek, x ning]–∞; 0[oraliqdan olingan har bir qiymatiga ham y ning

[0; +∞[oraliqdan olingan aniq bir qiymati mos keladi. Shunday qilib,]0; +∞[oraliqda $y=x^2$ funksiyaga teskari funksiya $y=\sqrt{x}$ bo‘ladi.

5-misol. $y=x^2+6x$ funksiya uchun qanday funksiya teskari funksiya bo‘ladi?

Yechish. $x^2+6x-y=0$ tenglamadan x ni y orqali ifodalaymiz: $x=-3\pm\sqrt{9+y}$. Demak, teskari funksiya ikkita ekan. Agar x va y o‘zgaruvchilarning o‘rinlarini almashtirsak, bu ikkita teskari funksiya quyidagicha bo‘ladi: $y=-3+\sqrt{9+x}$, $y=-3-\sqrt{9+x}$. Ma’lumki, to‘g‘ri va teskari funksiyalarning grafiklari birinchi va uchinchi koordinatalar burchaklarining bissektrisasiga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘ladi. Bu grafiklarning biridan foydalanib ikkinchisini yasash yengil. Berilgan funksiyaning grafigini yasash uchun uning ifodasini $x^2+6x=(x+3)^2-9$ ko‘rinishda ifodalaymiz. Parabolaning uchi $(-3;\ -9)$ nuqtada joylashgan bo‘lib, uning tarmoqlari yuqoriga yo‘nalgan va abssissalar o‘qini $(0;\ 0)$ va $(-6;\ 0)$ nuqtalarda kesib o‘tadi (57-rasm).



57-rasm.

Yuqorida aytilganlardan va yechilgan misollardan ravshan bo‘ldiki, har qanday funksiyaga teskari funksiya mavjud bo‘lavermas ekan. Boshqacha aytganda, berilgan funksiyaga o‘zining butun aniqlanish sohasida teskari funksiya mavjud bo‘lmasligi mumkin. Lekin funksiya o‘z aniqlanish sohasining ba’zi qismlarida o‘suvchi (qat’iy o‘suvchi), ba’zi qismlarida esa kamayuvchi (qat’iy kamayuvchi) bo‘lishi mumkin. Funksiya o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lgan oraliqlarda unga teskari funksiya mavjud bo‘lishi mumkin.

Agar berilgan funksiya aniqlanish sohasida o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lsa, unga teskari funksiya bir qiymatli bo‘ladi. Teskari funksiyaning mavjudlik shartini o‘rnatuvchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. ***Argument qiymatlarining D sohasida monoton (qat’iy monoton) bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya qandaydir E sohada monoton teskari funksiyaga ega bo‘ladi.***

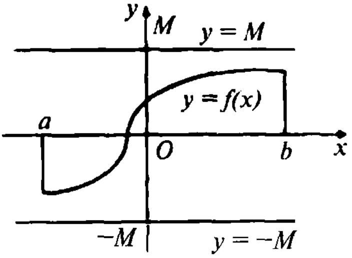
5. Chegaralangan funksiyalar. Agar shunday musbat M sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lib, $[a;\ b]$ kesmadan olingan x ning barcha qiymatlarida $|f(x)| \leq M$ $(M>0)$ tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada *chegaralangan* deyiladi (58- rasm).

Chegaralangan funksiyaning grafigi $y=M$ va $y=-M$ to‘g‘ri chiziqlar orasida yotadi. Asosiy elementar funksiyalar orasidan chegaralangan funksiyalarga quyidagi funksiyalarni misol sifatida keltirish mumkin: $\sin x$, $\cos x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccosec} x$.

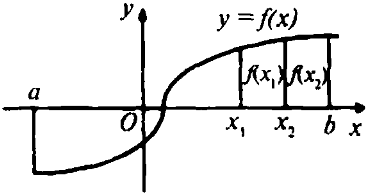
Masalan, $|\sin x| \leq 1$, $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$.

6. O‘suvchi va kamayuvchi funksiyalar. Funksiyalarni tekshirishda argument qiymatlarining o‘zgarishiga qarab, funksiya qiymatlarining o‘zgarish xossalarini o‘rganish muhim ahamiyatga ega.

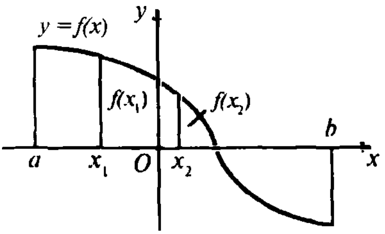
1-ta’rif. *Agar argumentning biror oraliqdan olingan katta qiymatiga funksiyaning ham katta qiymati mos kelsa, ya’ni shu oraliqqa tegishli istalgan x_1 va x_2 uchun $x_2>x_1$ tengsizlikdan $f(x_2)>f(x_1)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $y=f(x)$ funksiya shu oraliqda* ***o‘suvchi funksiya*** *deyiladi* (59- rasm).



58- rasm.



59- rasm.



60- rasm.

Boshqacha aytganda, agar biror oraliqdan olingan argumentning ixtiyoriy ikkita qiymatining kattasiga funksiyaning ham katta qiymati mos kelsa, funksiya shu oraliqda *o'suvchi* deyiladi.

2-ta'rif. *Agar argumentning biror oraliqdan olingan katta qiymatiga funksiyaning kichik qiymati mos kelsa, ya'ni shu oraliqqa tegishli istalgan x_1 va x_2 uchun $x_2 > x_1$ tengsizlikdan $f(x_2) < f(x_1)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $y = f(x)$ funksiya shu oraliqda* ***kamayuvchi funksiya*** *deyiladi* (60- rasm).

Boshqacha aytganda, agar biror oraliqdan olingan argumentning ixtiyoriy ikkita qiymatining kattasiga funksiyaning kichik qiymati mos kelsa, funksiya shu oraliqda *kamayuvchi* deyiladi.

3-ta'rif. *Agar funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda funksiya o'zining aniqlanish sohasida* ***kamaymaydigan (o'smaydigan) funksiya*** *deyiladi.*

O'suvchi, kamayuvchi, kamaymaydigan, o'smaydigan funksiyalar umumiy bir nom bilan *monoton funksiyalar* deyiladi.

6-misol. $y=x^3$ funksiyaning $]-\infty;\ +\infty[$ oraliqda o‘suvchi bo‘lishini isbotlang.

Yechish. Funksiya x ning barcha haqiqiy qiymatlarida aniqlangan. Argumentning x_1 va x_2 qiymatlarini olamiz. $x_1 < x_2$ bo‘lsin. Funksiyaning tanlangan nuqtalardagi qiymatlarini topamiz: $y_1 = x_1^3$ va $y_2 = x_2^3$.

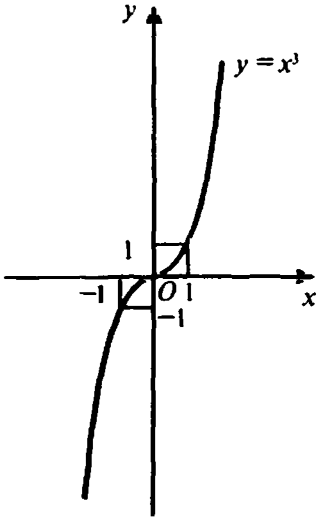
$y_2 - y_1$ ayirmani hisoblaymiz:

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2).$$

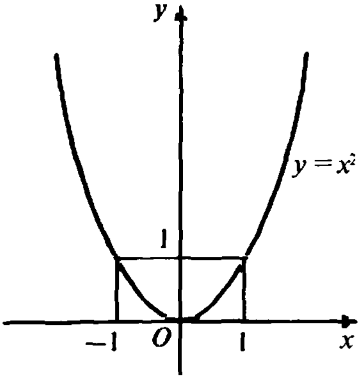
Bu yerda $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2$ kvadrat uchhad x_1 va x_2 ning istalgan qiymatlarida musbat son bo‘ladi:

$$x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 = \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 > 0.$$

Bundan tashqari, $x_2 - x_1 > 0$ bo‘lgani uchun $f(x_2) - f(x_1) > 0$ bo‘lib, $x_2 > x_1$ bo‘lganda $f(x_2) > f(x_1)$ bo‘ladi, ya’ni $y=x^3$ funksiya $]-\infty;\ +\infty[$ oraliqda o‘suvchi bo‘ladi (61-rasm).



61-rasm.



62-rasm.

7-misol. $y=x^2$ funksiyaning kamayish va o‘sish oraliqlarini ko‘rsating.

Yechish. Berilgan funksiya $]-\infty;\ 0[$ oraliqda kamayuvchi, $]0;\ \infty[$ oraliqda esa o‘suvchi.

$y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ ifodaning son qiymati $x_2 > x_1 > 0$ bo‘lsa, $x_2 - x_1 > 0$ va $x_2 + x_1 > 0$ bo‘lib, $x_2^2 > x_1^2$ bo‘ladi, ya’ni funksiya $]0;\ \infty[$ oraliqda o‘suvchi. Agar x_1 va x_2 manfiy bo‘lsa, u holda $x_2 + x_1 < 0$ bo‘lib, $x_2 > x_1$ tengsizlikdan $x_2^2 < x_1^2$ bo‘lishi kelib chiqadi. Berilgan funksiya $]-\infty;\ 0[$ oraliqda kamayuvchi bo‘ladi (62- rasm).

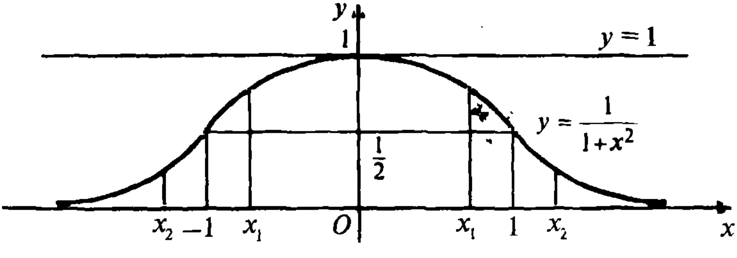
8-misol. $y = \frac{1}{1+x^2}$ funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlarini toping.

Yechish. Berilgan funksiya chegaralangan, istalgan x uchun

$$0 < \left|\frac{1}{1+x^2}\right| = \frac{1}{1+x^2} \le 1 \quad (M = 1)$$

bo‘ladi (63-rasm). Shuningdek, funksiyaning grafigi $x=0$ va $x=1$ to‘g‘ri chiziqlar orasida yotadi. Agar $x_2 > x_1 > 0$ bo‘lsa, $x_2 - x_1 > 0$ va $x_2 + x_1 > 0$ bo‘lib,

$y(x_2) = \frac{1}{1+x_2^2} \le \frac{1}{1+x_1^2} = y(x_1)$ bo‘ladi. Bundan $x_2 > x_1 > 0$ tengsizlik bajarilishi bilan $y(x_2) < y(x_1)$ tengsizlik bajarilishi kelib chiqadi, ya’ni funksiya $]0;\ \infty[$ oraliqda kamayuvchi bo‘ladi.



63- rasm.

Agar $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ bo‘lsa, $x_2 < x_1$ bo‘lganda $\frac{1}{1+x_2^2} < \frac{1}{1+x_1^2}$ bo‘ladi. Bu esa berilgan funksiya $]-\infty; 0[$ oraliqda o‘suvchi bo‘lishini tasdiqlaydi.

7. Juft va toq funksiyalar. Shunday funksiyalar borki, ularning aniqlanish sohalari koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar (sonlar) to‘plamidan iborat bo‘ladi.

Biror sonli to‘plamdan olingan x son qanday bo‘lmasin $(-x)$ son ham shu D to‘plamga tegishli bo‘lsa, u holda D to‘plam koordinatalar boshiga nisbatan *simmetrik sonli to‘plam* deyiladi. Bunday sonlar to‘plamiga barcha butun sonlar to‘plami, barcha kasr sonlar to‘plami, $[-a; a]$ segment yoki $]-a; a[$ interval misol bo‘la oladi.

Endi $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D simmetrik sonlar to‘plamidan iborat bo‘lsin. Xususiy holda D soha sifatida istalgan $[-a; a]$ segmentni olish mumkin.

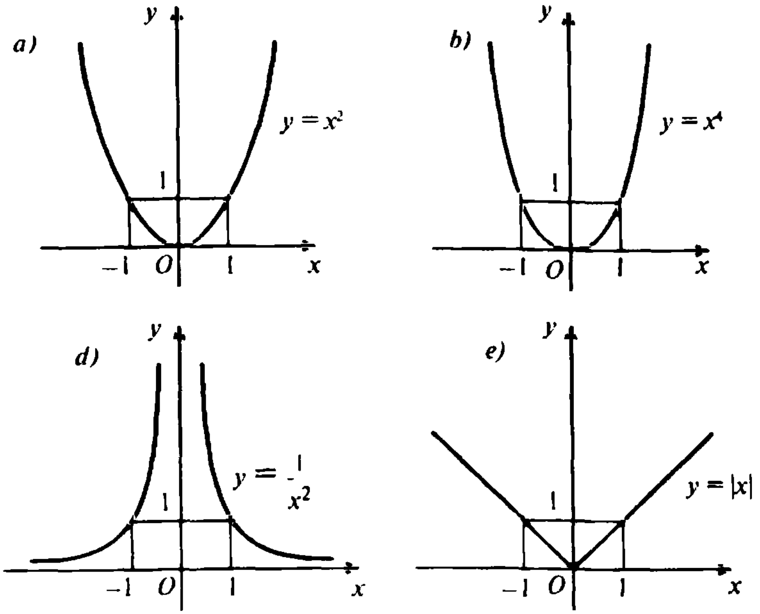
4-ta’rif. *Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan istalgan x uchun $f(-x)=f(x)$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya **juft funksiya** deyiladi.*

Masalan, $y=x^2$, $y=x^4$, $y=\frac{1}{x^2}$, $y=|x|$ funksiyalar juft funksiyalardir. Chunki istalgan x uchun $(-x)^2=x^2$, $(-x)^4=x^4$, $|-x|=|x|$ va istalgan $x \neq 0$ uchun $\frac{1}{(-x^2)}=\frac{1}{x^2}$ tenglik bajariladi.

Bu funksiyalarning grafiklari 64- *a*, *b*, *d*, *e* rasmlarda tasvirlangan.

Berilgan ta’rifdan va keltirilgan misollardan ko‘rinib turibdiki, juft funksiyalarning grafiklari ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘ladi. Bu simmetriklik funksiya grafigini yasashni yengillashtiradi. Juft funksiya grafigini yasashda uning nomanfiy x larga tegishli qismini yasash, so‘ngra hosil bo‘lgan grafikni ordinata o‘qiga nisbatan akslantirish kerak.

5-ta’rif. *Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan istalgan x uchun $f(-x)=-f(x)$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya **toq funksiya** deyiladi.*



64- rasm.

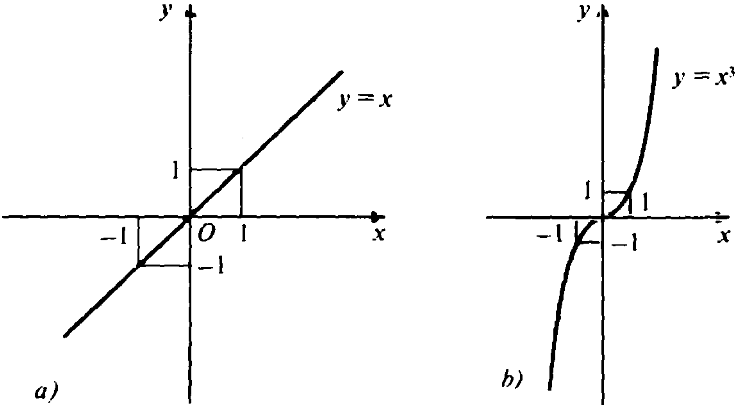
Masalan, $y = x$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sin x$ funksiyalar toq funksiyalardir. Chunki bu funksiyalarning aniqlanish sohalaridan olingan istalgan x uchun

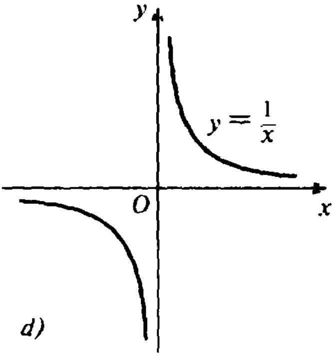
$$(-x) = -x, \quad (-x)^3 = -x^3, \quad \frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x}, \quad \sin(-x) = -\sin x$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu funksiyalardan oldingi uchtasining grafigi 65- a, b, d rasmlarda tasvirlangan.

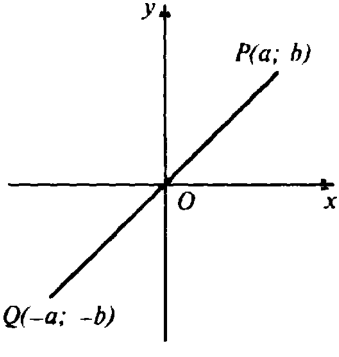
(a; b) koordinatali P nuqta $y = f(x)$ toq funksiyaning grafigiga tegishli bo‘lsin, u holda $b = f(a)$ bo‘ladi. $f(x)$ funksiya toq bo‘lgani uchun $f(-a) = -f(a)$.

Shu sababli $f(-a) = -b$. Oxirgi tenglik ($-a$; $-b$) koordinatali Q nuqta $y = f(x)$ funksiya grafigiga tegishli ekanligini bildiradi. Shunday qilib, (a; b) koordinatali P nuqta $y = f(x)$ toq funksiya grafigiga tegishli bo‘lsa, ($-a$; b) koordinatali Q nuqta ham shu grafikka tegishli bo‘ladi.





65- rasm.



66- rasm.

P va *Q* nuqtalar koordinata boshiga nisbatan o‘zaro simmetrikdir (66-rasm).

Shunday qilib, biz toq funksiya grafigining har qanday nuqtasini olganimizda ham shu grafikda ikkinchi shunday nuqta topiladiki, bu nuqta koordinatalar boshiga nisbatan birinchi nuqtaga simmetrik bo‘ladi. Shuning uchun ham istalgan toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi.

8. Davriy funksiyalar. Juda ko‘p jarayon va hodisalar takrorlanish xususiyatiga ega, bunday jarayon va hodisalarni biz tevarak-atrofimizda uchratib turamiz. Masalan, Quyosh bilan Yerning ma’lum vaziyatdagi joylashuvi bir yildan keyin takrorlanadi. Tebranma harakat qilayotgan jismlarning holatlari ham teng vaqtlar oralig'ida bir xil bo'lib turadi. Fizikada tebranish hodisasi jismning muvozanat holatidan bir xil vaqt oraliqlarida og'ishi bilan ifodalanadi. Bu xil jarayonlar davriy jarayonlar deyiladi, bu jarayonlarni tavsiflovchi funksiyalar esa *davriy funksiyalar* deyiladi.

6-ta'rif. *Agar shunday $T \neq 0$ son mavjud bo'lib, x ning $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan barcha qiymatlarida $f(x+T) = f(x)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya* ***davriy funksiya*** *deyiladi. T son esa $f(x)$ funksiyaning* ***davri*** *deyiladi.*

$y = f(x)$ funksiya o'zining barcha xossalarini uzunligi shu T songa teng bo'lgan oraliqda namoyon qiladi. Masalan, $y = \sin x$ va $y = \cos x$ trigonometrik funksiyalar davriydir. Har qanday x son va har qanday k butun son uchun $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ va $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ tengliklar bajariladi. Bundan $2k\pi$ soni sinus va kosinus funksiyalarining davri bo'lishi kelib chiqadi.

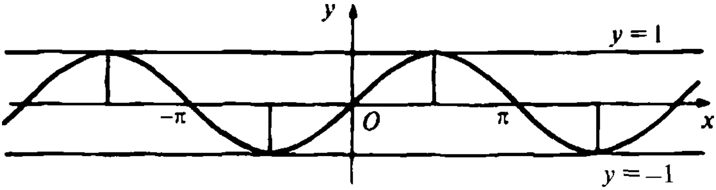
Ko'pchilik hollarda funksiyalarning eng kichik musbat davrini aniqlash muhim ahamiyatga ega. Chunki davriy funksiyalar o'zlarining barcha xossalarini uzunligi o'zining eng kichik davrini ifodalovchi musbat songa teng bo'lgan kesmada namoyon qiladi.

T soni $f(x)$ funksiyaning davri bo'lib, shunday xususiyatga ega bo'lgan eng kichik T_0 musbat son funksiyaning *asosiy davri* deyiladi.

Masalan, $y = \sin x$ funksiya uchun $T = 2k\pi$ $(k \in Z)$ bo'lib, $T_0 = 2\pi$ bo'ladi. Chunki x ning istalgan qiymati uchun $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ tenglik o'rinlidir (67- rasm).

Trigonometrik bo'lmagan davriy funksiyalarga $y = \{x\}$ funksiya misol bo'la oladi. Bu funksiya har bir x songa uning *kasr qismini* mos keltiradi. Masalan:

$$\{3,76\} = 0,76; \quad \{5,02\} = 0,02; \quad \{-63,36\} = 0,64.$$



67- rasm.

x sondan ortib ketmaydigan eng katta butun son x sonning *butun qismi* deyiladi. x sonning butun qismi $[x]$ ko'rinishda belgilanadi. Masalan:

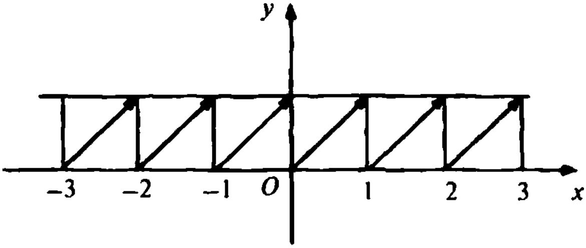
$$[3{,}76] = 3; \quad [5{,}02] = 5; \quad [-63{,}36] = -64.$$

Lekin $[-63{,}36] = -63$ desak, xato bo'lar edi. Chunki $-63 > -63{,}36$, ta'rifga ko'ra x sonning butun qismi o'zidan oshmasligi kerak. Shunday ekan, $-3{,}76$ sonning butun qismi -3 emas, balki -4 bo'ladi. x son bilan uning butun qismi orasidagi ayirma x sonning kasr qismiga teng: $\{x\} = x - [x]$ yoki $x = [x] + \{x\}$, bunda $0 < \{x\} < 1$. Agar ixtiyoriy x songa 1 qo'shilsa, bu sonning faqat butun qismigina o'zgaradi, kasr qismi esa ilgarigidek qolaveradi. Demak, $\{x + 1\} = \{x\}$ va shu sabali $y = \{x\}$ funksiya davri 1 ga teng bo'lgan davriy funksiyadir. Bu funksiyaning grafigi $[0;\ 1]$ oraliqda qanday shaklda bo'lsa, uning $[1;\ 2]$, $[2;\ 3]$ va h.k. oraliqlardagi grafigi ham shunday shaklda bo'ladi (68-rasm).

9. Funksiyaning noli haqida tushuncha. $y = f(x)$ funksiyaning noli (ildizi) deb, uning qiymatini nolga aylantiradigan x argumentning qiymatiga aytiladi.

$y = f(x)$ funksiyaning nollari deyilganda $f(x) = 0$ tenglamaning ildizlari tushuniladi. Shunday ekan, $y = f(x)$ funksiyaning nollarini toping deganda $f(x) = 0$ tenglamaning ildizlarini topish kifoya.

$y = f(x)$ funksiya o'z aniqlanish sohasida chekli sondagi, cheksiz ko'p sondagi nollarga ega bo'lishi mumkin. Funksiya o'z aniqlanish sohasida nolga ega bo'lmasligi ham mumkin.



68- rasm.

9-misol. $y=x^2-5x+6$ funksiya $x_1=2$ va $x_2=3$ nollarga (ildizlarga) ega. Chunki $y(2)=0$ va $y(3)=0$ bo‘lishiga bevosita tekshirish bilan ishonch hosil qilish mumkin.

10-misol. $y=\frac{1}{1+x_2}$ funksiya nollarga ega emas. Chunki $\frac{1}{1+x^2}=0$ tenglamani qanoatlantiradigan hech qanday haqiqiy son topilmaydi.

11-misol. $y=\sin x$ funksiya cheksiz ko‘p nollarga ega. Chunki $\sin x=0$ tenglama cheksiz ko‘p yechimlarga ega: $x=k\pi$, $k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \ldots$.

6- §. Elementar funksiyalarning asosiy xossalari va grafiklari

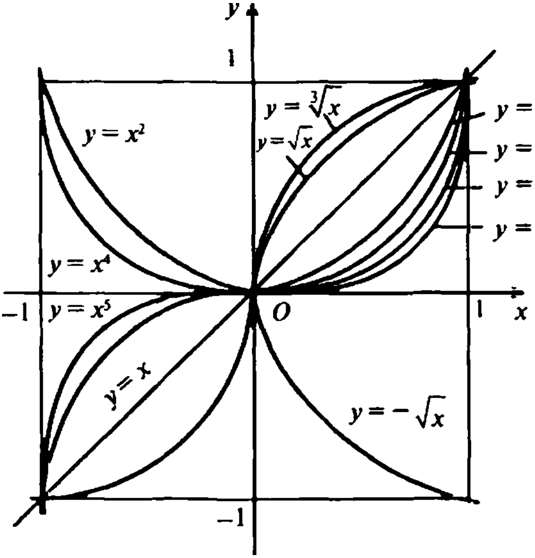
Chekli sondagi arifmetik amallar yordamida asosiy elementar funksiyalardan hosil qilingan funksiyalar (murakkab funksiya ham) *elementar funksiyalar* deyiladi.

Masalan, [0; ∞[yarim segmentda berilgan $y=\sqrt[4]{u}$ va $[0;\ 2\pi]$ segmantda berilgan $u=\sin x$ funksiya yordamida hosil qilingan $y=\sqrt[4]{\sin x}$ murakkab funksiya $[0;\ \pi]$ segmentda aniqlangan elementar funksiya bo‘ladi. Bunday usul bilan yangi elementar (murakkab) funksiya hosil qilish *superpozitsiyalash* (o‘rniga qo‘yish) *usuli* deyiladi. Bu usul bilan elementar funksiyalar tuzishda biror oraliqda berilgan funksiya argumenti o‘rniga boshqa argumentli yangi funksiya qo'yiladi. Hosil qilingan funksiyaning aniqlanish sohasi topiladi. Bu soha oxirgi argumentning o'zgarish sohasi bilan ustma-ust tushishi yoki sohaning biror qismini tashkil qilishi mumkin.

Masalan, $y = \lg^3(2x^2+5)^{\frac{1}{2}}$ funksiya $y = z^3$, $z = \lg u$, $u = \sqrt{v}$ va $v = 2x^2+5$ funksiyalarni superpozitsiyalash natijasida hosil qilinadi.

1. Darajali funksiya. $y = x^{\mu}$ ko'rinishdagi funksiya *darajali funksiya* deyiladi, bu yerda x — erkli o'zgaruvchi, μ — berilgan o'zgarmas son. Bu funksiyaning μ ning qiymatlariga bog'liq bo'lgan turli hollarini qaraymiz.

A. Natural ko'rsatkichli darajali funksiya. μ musbat butun son bo'lsin, ya'ni μ soni n natural songa teng bo'lsin. $y = x^n$ funksiya]–∞; +∞[oraliqda mavjud bo'ladi va uning grafigi koordinatalar boshi va (1; 1) nuqta orqali o'tadi. n ning turli qiymatlarida turli egri chiziqlarga ega bo'lamiz (69- rasm).



69-rasm.

$y=x$ $(n=1)$ — koordinatalar boshidan o‘tuvchi va Ox o‘q bilan 45° li burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziq. Bu to‘g‘ri chiziq birinchi va uchinchi koordinatalar burchaklarining bissektrisasi ham bo‘ladi.

$y=x^2$ $(n=2)$ — parabola. Bu funksiyaning grafigi koordinatalar boshidan o‘tib, Oy o‘qqa nisbatan simmetrik joylashgan bo‘ladi.

$y=x^3$ $(n=3)$ — kichik parabola. Bu funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lib, birinchi va uchinchi choraklarda joylashgan bo‘ladi.

$y=x^n$ (n — istalgan juft son) funksiya grafigi Oy o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lib, birinchi va ikkinchi choraklarda joylashgan bo‘ladi.

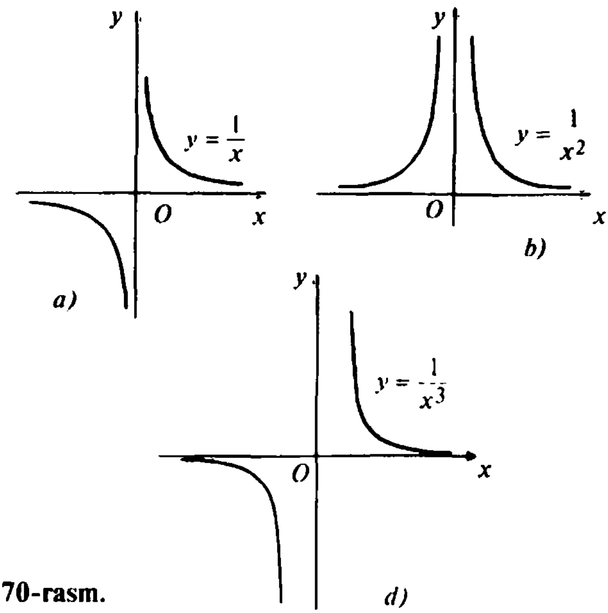
$y=x^n$ (n — istalgan toq son) funksiya grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lib, birinchi va uchinchi choraklarda joylashgan bo‘ladi.

B. Manfiy butun ko‘rsatkichli darajali funksiya. μ soni manfiy butun son bo‘lsin, ya’ni $\mu=-n$. Bunday holda biz $y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ ko‘rinishdagi kasr ratsional funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu funksiya faqat $x=0$ nuqtada mavjud emas. Uning aniqlanish sohasi $]-\infty;\ 0[$ va $]0;\ +\infty[$ oraliqlardan iborat bo‘ladi.

$y=\frac{1}{x}$ $(n=1)$ — giperbola. Bu funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lib, birinchi va uchinchi choraklarda joylashgan (70- *a* rasm).

$y=\frac{1}{x^2}$ $(n=2)$ — egri chiziq Oy o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lib, birinchi va ikkinchi choraklarda joylashgan bo‘ladi (70- *b* rasm).

$y=\frac{1}{x^3}$ $(n=3)$ — egri chiziq koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lib, birinchi va uchinchi choraklarda joylashgan bo‘ladi (70- *d* rasm).



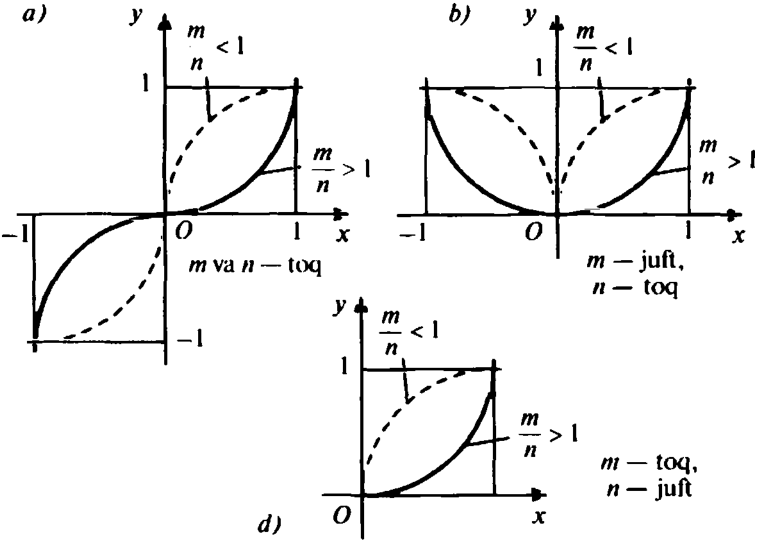
70-rasm.

$y=\frac{1}{x^n}$ (n — istalgan juft son) — egri chiziq Oy o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lib, birinchi va uchinchi choraklarda joylashadi.

$y=\frac{1}{x^n}$ (n — istalgan toq son) — egri chiziq koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lib, birinchi va uchinchi choraklarda joylashadi.

D. Musbat kasr ko‘rsatkichli darajali funksiya. μ soni musbat kasr son bo‘lsin, ya’ni $\mu=\frac{m}{n}$, bunda n va m umumiy ko‘paytuvchiga ega bo‘lmagan natural sonlar.

Bunday holda funksiya $y=x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$ ko‘rinishni oladi. Agar ildiz ko‘rsatkichi juft son bo‘lsa, ildizning arifmetik qiymati ko‘zda tutiladi. n juft bo‘lib, m toq bo‘lganda, ildiz faqat $x \geq 0$ bo‘lganda ma’noga ega bo‘ladi. Bu holda funksiyaning aniqlanish sohasi $[0; +\infty[$ oraliqdan iborat bo‘ladi.



71-rasm.

$y=\sqrt[n]{x^m}$ funksiyaning ba’zi bir xususiy hollarini qaraylik.

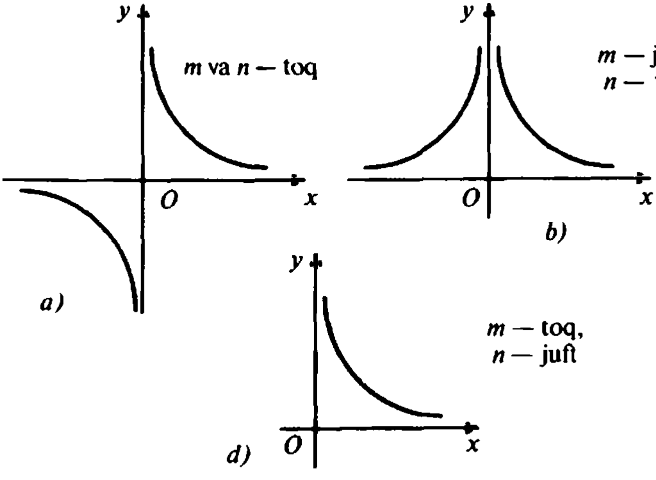
$y=\sqrt[n]{x}$ funksiya $y=x^n$ funksiyaga teskari funksiyadir. Shuning uchun $y=\sqrt[n]{x}$ funksiyalarning grafiklari n ning turli qiymatlarida $y=x$ bissektrisaga nisbatan $y=x^n$ funksiyalar grafiklariga simmetrik bo‘ladi. 71- rasmda bu funksiyalarning grafiklari uzuq chiziqlar bilan tasvirlangan.

$y=\sqrt[n]{x^m}$ funksiyaning grafigi n va m toq bo‘lganda, koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘ladi, ya’ni birinchi va uchinchi choraklarda yotadi. Agar n toq, m esa juft bo‘lsa, u holda funksiya ham juft bo‘lib, uning grafigi Oy o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lib, birinchi va ikkinchi choraklarda joylashgan bo‘ladi. Agar n juft, m esa toq bo‘lsa, u holda funksiya $x\geq 0$ bo‘lganda aniqlangan bo‘ladi, grafigi birinchi chorakda joylashadi. Shuni ham qayd qilish kerakki, $y=\sqrt[n]{x^m}$ funksiyaning grafigi $\frac{m}{n}$

kasrga ham bog'liq bo'ladi. Ularning grafiklarini chizishda $\frac{m}{n}>1$ va $\frac{m}{n}<1$ munosabatlar e'tiborga olinadi (71- rasm).

E. Manfiy kasr ko'rsatkichli darajali funksiya. μ — manfiy kasr son bo'lsin, ya'ni $\mu=-\frac{m}{n}$. Bunday holda darajali funksiya $y=x^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ ko'rinishni oladi. n va m ning turli qiymatlarida bu funksiyalarning grafiklarini yasash uchun $y=\sqrt[n]{x^m}$ funksiyalarning grafiklaridan foydalanish mumkin. Har bir x nuqtada $y=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ funksiya grafigining ordinatalari $y=\sqrt[n]{x^m}$ funksiya grafigi nuqtalari ordinatalarining teskari qiymatlariga teng bo'ladi (72- rasm).

2. **Kasr-chiziqli funksiya.** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ko'rinishdagi funksiya *kasr-chiziqli funksiya* deyiladi. Bu yerda x — argument, a, b, c va d — berilgan sonlar.



72-rasm.

A. Miqdorlarning teskari proporsional bog'lanishi. Agar x va y miqdorlar o'zaro $y=\frac{k}{x}$ tenglama bilan bog'langan bo'lsa, bunday bog'lanish *teskari proporsional bog'lanish* deyiladi.

Agar kasr-chiziqli funksiyada $a=d=0$, $\frac{b}{c}=k$ desak, u holda $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ teskari proporsional bog'lanishni olamiz.

Teskari proporsional bog'lanishning asosiy xossalari:

1. y funksiya $x\neq 0$ bo'lganda, $]-\infty;\ 0[$ va $]0;\ +\infty[$ oraliqlarda aniqlangan.

2. Funksiyaning o'zgarish sohalari ham $]-\infty;\ 0[$ va $]0;\ +\infty[$ oraliqlardan iborat.

3. Funksiya nollarga ega emas, ya'ni uning grafigi abssissalar o'qini kesmaydi.

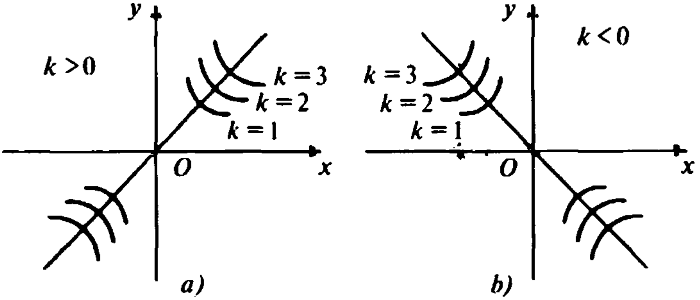
4. Agar $k>0$ bo'lib, $x>0$ bo'lsa, $y>0$ bo'ladi, $x<0$ bo'lsa, $y<0$ bo'ladi.

Agar $k<0$ bo'lib, $x<0$ bo'lsa, $y>0$ va $x>0$ bo'lsa, $y<0$ bo'ladi.

5. Funksiya toq, uning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi (73- *a*, *b* rasm).

6. $k<0$ bo'lsa, funksiya o'sadi, $k>0$ bo'lsa, funksiya kamayadi.

7. Funksiya eng katta va eng kichik qiymatlarga, shuningdek, maksimum va minimum qiymatlarga ega bo'lmaydi.



73-rasm.

8. $y=\frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi giperbola bo‘ladi. (0; 0) nuqta *giperbolaning markazi* deyiladi.

B. Kasr-chiziqli funksiya. Agar $c=0$ bo‘lsa, u holda kasr-chiziqli funksiya $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ ko‘rinishdagi chiziqli funksiyaga aylanadi. Agar $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ yoki $ad=bc$ bo‘lsa, bunday holda $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=p$ desak, $a=cp$ va $b=dp$ bo‘lib, $y=\frac{p(cx+d)}{cx+d}=p$ bo‘ladi, ya’ni funksiya x ga bog‘liq bo‘lmasdan, o‘zgarmas songa bog‘liq bo‘lib qoladi. Shuning uchun $c\neq 0$ va $ad\neq bc$ bo‘lgan hollar uchun kasr-chiziqli funksiyani qaraymiz.

Kasr-chiziqli funksiyaning ko‘rinishini quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}\left(cx+\frac{bc}{a}\right)}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}\left(cx+d+\frac{bc}{a}-d\right)}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d}$$

yoki $y-\frac{a}{c}=\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$.

Agar $y-\frac{a}{c}=y'$, $x+\frac{d}{c}=x'$ va $\frac{bc-ad}{c^2}=k$ belgilashlarni kiritsak, kasr-chiziqli funksiyani oldin o‘rganilgan $x'y'=k$ ko‘rinishdagi teskari proporsional bog‘lanishga keltirish mumkin.

Kasr-chiziqli funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. Funksiya $x\neq -\frac{d}{c}$ bo‘lganda aniqlangan, ya’ni uning aniqlanish sohasi $\left]-\infty;\ -\frac{d}{c}\right[$ va $\left]-\frac{d}{c};\ +\infty\right[$ oraliqlardan iborat.

2. Funksiya $\left]-\infty;\ \frac{a}{c}\right[$ va $\left]\frac{a}{c};\ +\infty\right[$ oraliqlarda o‘zgaradi, ya’ni $\frac{a}{c}$ dan boshqa barcha haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi.

3. Funksiya $x=-\frac{b}{a}$ $(a\neq 0)$ bo‘lganda nolga aylanadi.

4. Agar $k>0$ bo‘lsa: a) $\frac{a}{c}>0$ bo‘lganda $\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$ va $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$ oraliqlarda $y>0$ bo‘ladi, $\left(-\frac{b}{a}; -\frac{d}{c}\right)$ oraliqda esa $y<0$ bo‘ladi; b) $\frac{a}{c}=0$ bo‘lganda $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ oraliqda $y<0$ bo‘lib; $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$ oraliqda esa $y>0$ bo‘ladi; d) $\frac{a}{c}<0$ bo‘lganda $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ va $\left]-\frac{b}{a}; +\infty\right[$ oraliqlarda $y<0$ bo‘lib, $\left]-\frac{d}{c}; -\frac{b}{a}\right[$ oraliqda $y>0$ bo‘ladi.

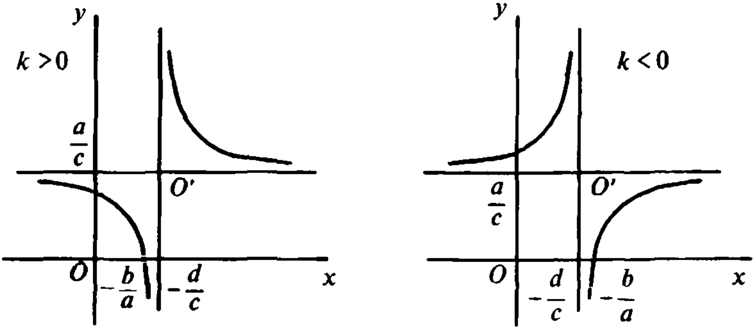
Agar $k<0$ bo‘lsa: a) $\frac{a}{c}>0$ bo‘lganda $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ va $\left]-\frac{b}{a}; +\infty\right[$ oraliqlarda $y>0$ bo‘lib, $\left]-\frac{d}{c}; \frac{b}{a}\right[$ oraliqda esa $y<0$ bo‘ladi; b) $\frac{a}{c}=0$ bo‘lganda $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[$ oraliqda $y>0$ bo‘lib; $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$ oraliqda esa $y<0$ bo‘ladi; d) $\frac{a}{c}<0$ bo‘lganda $\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right[$ va $\left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$ oraliqlarda $y<0$ bo‘lib, $\left]-\frac{b}{a}; -\frac{d}{c}\right[$ oraliqda esa $y>0$ bo‘ladi.

5. Bu funksiya juft ham, toq ham emas (agar $a=d=0$ bo‘lsa, u holda funksiya toq bo‘ladi).

6. Agar $k<0$ bo‘lsa, funksiya o‘sadi; agar $k>0$ bo‘lsa, funksiya kamayadi.

7. Funksiya eng katta va eng kichik qiymatlarga, shuningdek, maksimum va minimumga ham ega emas.

8. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ kasr-chiziqli funksiyaning grafigi $c\neq 0$ va $ad\neq bc$ bo‘lganda $y=\frac{k}{x}$ funksiyaning grafigidek giperbola bo‘ladi, bu giperbolaning markazi koordinatalar boshida emas, balki $O'\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ nuqtada yotadi (74- *a*, *b* rasm).



a) b)

74- rasm.

3. Ko'rsatkich funksiya. Biz natural, nol, manfiy butun, musbat va manfiy kasr ko'rsatkichli darajalar haqida tushunchalarga egamiz. Ko'pgina amaliy masalalarni yechishda haqiqiy (irratsional) ko'rsatkichli daraja tushunchasini kiritib, u bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi.

Fizikada ko'pgina jarayonlar a^x ko'rinishdagi ifoda bilan tavsiflanadi. Masalan, radioaktiv yemirilish $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ formula bilan ifodalanadi. Bunda $m(t)$ va m_0 — radioaktiv moddaning mos ravishda t va $t = 0$ paytdagi massasi, T — yarimyemirilish davri.

Havo bosimining dengiz sathidan balandlikka bog'liq ravishda o'zgarishi $p = p_0 e^{-kh}$ $(e \approx 2{,}718)$ formula bilan tavsiflanadi. Bu yerda p_0 — havoning dengiz sathidagi bosimi, p esa havoning dengiz sathidan h balandlikdagi bosimi, k — proporsionallik koeffitsiyenti. Bunday misollarni ko'plab keltirish mumkin.

Nol, manfiy butun, kasr va irratsional ko'rsatkichli darajalar shunday kiritiladiki, natural ko'rsatkichli daraja ustida bajariladigan barcha amallar istalgan haqiqiy ko'rsatkichli daraja ustida bajariladigan amallar uchun ham yaroqli bo'lib qolsin. Shunday ekan darajaning asosiy xossalarini eslatib o'tamiz. $a > 0$, $b > 0$, x, x_1 va x_2 — istalgan haqiqiy sonlar bo'lsin. U holda:

1) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$;

2) $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$;

3) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$;

4) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

6) $a^x > 0$;

7) agar $a > 1$, $x > 0$ bo‘lsa, $a^x > 1$;

8) $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$, $0^x = 0$ $(x > 0)$;

9) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$;

10) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a \geq 0)$;

11) $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, $(a > 0)$, n, $m \in N$;

12) $1^x = 1$ $(x \in R)$;

13) agar $a > 0$ va $a \neq 1$ bo‘lsa, u holda istalgan b son uchun shunday faqat bitta x haqiqiy son mavjudki, $a^x = b$ $(b > 0)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi;

14) agar $a^{x_1} = a^{x_2}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ bo‘lsa, u holda $x_1 = x_2$ bo‘ladi.

Shuni qayd qilamizki, nolning manfiy darajasi, manfiy sonning maxraji juft son bo‘lgan qisqarmas kasr ko‘rsatkichli darajasi va, shuningdek, manfiy sonning irratsional ko‘rsatkichli darajasi (a^x ifodaning a manfiy bo‘lgan holi) haqiqiy sonlar to‘plamida ma’noga ega bo‘lmaydi.

1 — 5- xossalar nol, natural, manfiy butun, musbat va manfiy kasr, shuningdek, irratsional ko‘rsatkichli darajalarning ta’riflari va natural daraja uchun teoremalardan foydalanib isbotlanadi. Masalan, 1-xossani butun manfiy daraja uchun isbotlaylik.

$x_1 = -m$, $x_2 = -n$ bo‘lsin, bunda m, $n \in N$, $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ bo‘lishini ko‘rsataylik, bu yerda a — istalgan haqiqiy son va $a \neq 1$.

Manfiy butun ko‘rsatkichli darajaning ta’rifiga ko‘ra

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{-m} a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n}.$$

Kasrlarni ko'paytirish va natural darajalarni ko'paytirish qoidalariga ko'ra quyidagini olamiz:

$$\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^m a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}.$$

Manfiy ko'rsatkichli darajaning ta'rifiga ko'ra

$$\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-(m+n)}=a^{-(m)+(-n)}$$

munosabatni olamiz. $-m$ ni x_1 ga, $-n$ ni esa x_2 ga almashtirsak, 1- xossaning ifodasini olamiz:

$$a^{-m+(-n)}=a^{x_1+x_2},\text{ ya'ni } a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}.$$

1 — 14-xossalardan matematikada keng foydalaniladi.

Ta'rif. ***Ko'rsatkichli funksiya*** *deb* $y=a^x$ *ko'rinishdagi funksiyaga aytiladi.*

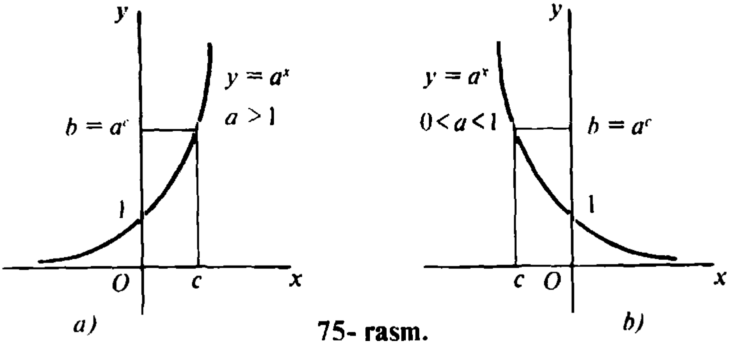
Bunda a — berilgan son, $a>0$, $a\neq 1$, x — argument.

Ko'rsatkichli funksiyaning asosiy xossalarini sanab o'tamiz (bu xossalardan ba'zi birlarining isboti keyin o'rganiladigan mavzularga bog'liq, ba'zi birlarining isbotlari esa bizning bilim doiramizdan tashqariga chiqadi).

1. $y=a^x$ funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plami R dan iborat.

Agar $a<0$ bo'lsa, a^x funksiya faqat x ning butun sonlar va maxraji toq son bo'lgan kasr sonlardan iborat bo'lgan qiymatlarida aniqlangan. Agar $a=0$ bo'lsa, 0^x ifoda $x>0$ bo'lganda aniqlangan. Agar $a>0$ bo'lsa, u holda a^x funksiya x ning barcha haqiqiy qiymatlarida aniqlangan. $a=1$ bo'lganda $1^x=1$ bo'ladi, ya'ni funksiya o'zgarmas songa teng bo'ladi. Biz bundan keyin a^x ko'rsatkichli funksiya uchun $a>0$ va $a\neq 1$ bo'lgan holni qaraymiz.

2. Ko'rsatkichli funksiyaning qiymatlar to'plami barcha musbat haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'ladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun $a^x=b$ $(a>0,\ a\neq 1)$ tenglama $b\leq 0$ bo'lganda ildizlarga ega emasligini, istalgan $b>0$ da esa ildizga ega bo'lishini ko'rsatish kerak. Agar $b\leq 0$ bo'lsa, darajaning 6- xossasiga ko'ra bu tenglama ildizga ega emas. $b>0$ bo'lganda esa bu tenglama ildizga ega



75- rasm.

bo‘lishini $y=b$ to‘g‘ri chiziqning $y=a^x$ funksiya grafigi ($a^x>0$ bo‘lishi e’tiborga olinsa) bilan kesishishi tasdiqlaydi. Grafiklar kesishish nuqtasining abssissasi $a^x=b$ tenglamaning ildizi bo‘ladi (75- *a*, *b* rasm).

3. $y=a^x$ funksiya $a>1$ bo‘lganda barcha haqiqiy sonlar to‘plamida o‘suvchi bo‘ladi, $0<a<1$ bo‘lganda esa kamayuvchi bo‘ladi. Haqiqatan ham, $a>1$ va $x_2>x_1$ bo‘lsin. $y(x_2)>y(x_1)$, ya’ni $a^{x_2}>a^{x_1}$ bo‘lishini ko‘rsataylik. $x_2>x_1$ bo‘lgani uchun $x_2-x_1>0$ bo‘ladi va darajaning 7-xossasiga ko‘ra $a^{x_2-x_1}>1$, ya’ni $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}>1$ ga ega bo‘lamiz. Bundan $a^{x_1}>0$ bo‘lishini e’tiborga olsak, $a^{x_2}>a^{x_1}$ ni olamiz.

Endi $0<a<1$ va $x_2>x_1$ bo‘lsin. $y(x_2)<y(x_1)$, ya’ni $a^{x_2}<a^{x_1}$ bo‘lishini ko‘rsataylik. $0<a<1$ bo‘lgani uchun $\frac{1}{a}>1$ bo‘ladi va shuning uchun $\left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}>\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} \Rightarrow \frac{1}{a^{x_2}}>\frac{1}{a^{x_1}}$ bo‘lib, bundan $a^{x_2}<a^{x_1}$.

$a>1$ va $0<a<1$ bo‘lgan hollar uchun ko‘rsatkichli funksiyaning grafiklari 75- rasmda tasvirlangan. Agar $x<0$ bo‘lsa va kamaysa, u holda grafik *Ox* o‘qiga jadal yaqinlashadi (lekin uni kesib o‘tmaydi); agar $x<0$ bo‘lsa va o‘ssa, u holda grafik yuqoriga jadal ko‘tariladi. $y=a^x$ funksiyaning grafigi (0; 1) nuqtadan o‘tadi va *Ox* o‘qidan yuqorida joylashadi.

4. Shuningdek, ko‘rsatkichli funksiya darajaning asosiy xossalari bo‘lgan 1 — 5- xossalarga ham ega.

4. Logarifmlar va ularning xossalari. $a^x = N$ $(a > 0,$ $a \neq 1)$ tenglamani qaraymiz. Oldingi bandda ko‘rsatilgandek, bu tenglama $N \leq 0$ bo‘lganda yechimga ega emas va $N > 0$ bo‘lganda esa bittagina yechimga ega. Bu yechim N sonining *a asos bo‘yicha logarifmi* deyiladi va $\log_a N$ ko‘rinishda yoziladi, ya’ni $x = \log_a N$.

Masalan, $4^x = 64$ tenglamaning ildizi 3 ga teng, ya’ni $\log_4 64 = 3$. $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{625}$ tenglamaning ildizi 4 ga teng, ya’ni $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{625} = 4$.

Ta’rif. ***Berilgan sonning berilgan asosga ko‘ra logarifmi** deb berilgan sonni hosil qilish uchun asosni ko‘tarish kerak bo‘lgan daraja ko‘rsatkichiga aytiladi.*

Agar $a > 0$, $a \neq 1$ bo‘lib, $a^x = N$ bo‘lsa, x soni N sonning a asos bo‘yicha logarifmi bo‘ladi. Logarifmning ta’rifidan, birinchidan, $x = \log_a N$ va $a^x = N$ tengliklarning ikkalasi ham a, x, N sonlari orasidagi bog‘lanishlarni ifodalaydi, ikkinchidan, darajaning xossasiga ko‘ra $N > 0$ bo‘lishi kerak, uchinchidan, agar $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$ bo‘lsa, u holda

$$a^{\log_a N} \equiv N. \qquad (1)$$

(1) formula logarifm ta’rifining matematik tilda yozuvini ifodalaydi va *asosiy logarifmik ayniyat* deyiladi.

Masalan,

$$5^{\log_5 6} = 6; \ \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 7} = 7; \ 17^{\log_{17}\frac{4}{5}} = \frac{4}{5}.$$

Logarifmik ayniyat yordamida $x = \log_5 48$ soni $5^x = 48$ tenglamaning ildizi bo‘lishini ko‘rsatish mumkin. Haqiqatan ham, $5^{\log_5 48} = 48$.

Sonning logarifmini topish amali *logarifmlash* deyiladi.

1-misol. $\log_{32} 64$ ni hisoblang.

Yechish. $\log_{32} 64 = x$ bo‘lsin deylik. Logarifmning ta’rifiga ko‘ra: $32^x = 64$.

$32=2^5$, $64=2^6$ bo'lgani uchun $2^{5x}=2^6$, bundan $5x=6$, $x=\frac{6}{5}$.

2-misol. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5\log_2 3}$ ni hisoblang.

Yechish. Darajaning xossasi va asosiy logarifmik ayniyatdan foydalanamiz:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-5\log_2 3}=(-2^{-2})^{-5\log_2 3}=2^{(-2)(-5\log_2 3)}=2^{10\log_2 3}=$$

$$=(2^{\log_2 3})^{10}=3^{10}.$$

3-misol. $\log_{\frac{1}{4}}\left(x-\frac{1}{2}\right)=-2$ tenglamani yeching.

Yechish. Logarifmning ta'rifiga ko'ra $x-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$ tenglamani olamiz va uni yechamiz:

$$x-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2^2}\right)^{-2}\Rightarrow x-\frac{1}{2}=(2^{2})^{-2}\Rightarrow x-\frac{1}{2}=2^4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{2}=16\Rightarrow x=16,5.$$

Keyingi ishlarimizning barchasida a asosga nisbatan hamma vaqt $a>0$ va $a\neq 1$ shartlar qo'yilgan deb hisoblanadi.

Logarifmning ba'zi xossalarini keltiramiz.

1. Asos musbat bo'lganda manfiy sonlarning logarifmlari mavjud emas. Haqiqatan, logarifmning ta'rifiga ko'ra $\log_a N=x$ bo'lsa, $a^x=N$ bo'ladi. $a>0$ bo'lganda x har qanday bo'lsa ham, $a^x>0$ bo'ladi. Buning ma'nosi: asos a (musbat) va ko'rsatkich (logarifm) x qanday bo'lsa ham, a^x funksiya, ya'ni N hamisha musbat son demakdir.

2. a asos har qanday son bo'lganda birning logarifmi nol bo'ladi. Haqiqatan ham, noldan farqli a son har qanday bo'lganda $a_0=1$ bo'ladi. Ammo ta'rifga ko'ra $\log_a 1=0$ demakdir.

3. Agar $a>1$ bo'lsa, u holda birdan katta sonlarning logarifmlari musbat, birdan kichik sonlarning ligarifmlari esa manfiydir. Ma'lumki, $a>1$ bo'lganda $x>0$ bo'lsa,

$a^x = N > 1$, agar $x < 0$ bo'lsa, u holda $a^x = N < 1$. Ammo x ta'rifga ko'ra N sonining logarifmidir. Demak, $N > 1$ bo'lganda, uning logarifmi $x > 0$, $N < 1$ bo'lgan holda uning logarifmi $x < 0$.

4. Asosning logarifmi 1 ga teng. Haqiqatan ham, $a^1 = a$, bundan $\log_a a = 1$.

5. Asos birdan katta bo'lganda katta songa katta logarifm mos keladi va $a > 1$ bo'lganda x ning ortishi bilan a^x ham orta boradi. x ning ikki xil qiymatini x_1 va x_2 bilan, a^x ifodaning ularga mos kelgan qiymatlarini N_1 va N_2 bilan belgilasak: agar $x_2 > x_1$ bo'lsa, $a^{x_2} > a^{x_1}$, $N_2 > N_1$. Ammo N_1 sonning logarifmi $x_1 > N_2$ sonining logarifmi x_2. Demak, $\log_a N_2 > \log_a N_1$ bo'lsa, $N_2 > N_1$ bo'ladi.

Logarifmlarning 1 — 5- xossalarini keyinchalik y funksiyaning grafigi yaqqol tasdiqlashini ko'ramiz.

5. Logarifmlash va potensirlash qoidalari. Berilgan ifodani logarifmlash deganda ifodaning logarifmini uning tarkibiga kirgan komponentlarining logarifmlari orqali ifodalash tushuniladi. Logarifmlashga teskari masala *potensirlash* deyiladi. Logarifmik ifodalarni potensirlash degani berilgan sonlarning logarifmlari orasidagi bog'lanish bo'yicha berilgan sonlar orasidagi bog'lanishni topish demakdir, ya'ni logarifmi berilgan logarifmik ifodaga teng bo'lgan ifodani topishdan iborat.

Logarifmlar ishtirok etgan ifodalarni almashtirishda, hisoblashlarda, tenglamalar va tengsizliklarni yechishda logarifmlarning turli xossalaridan foydalaniladi. Bulardan asosiylarini ko'rib o'tamiz.

Har qanday holatda $a > 1$, $a \neq 1$ va har qanday musbat $N_1 > 0$, $N_2 > 0$, $N > 0$ va r haqiqiy son uchun quyidagi tengsizliklar o'rinli:

$$\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2; \qquad (1)$$

$$\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \log_a N_1 - \log_a N_2; \qquad (2)$$

$$\log_a N^r = r \log_a N; \qquad (3)$$

$$\log_a \sqrt[n]{N} = \log_a N^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a N \frac{\log_a N}{n}, \ (n \in N). \quad (4)$$

(1) formulani isbotlash uchun asosiy logarifmik ayniyatdan foydalanamiz:

$$N_1 = a^{\log_a N_1}, \quad N_2 = a^{\log_a N_2}. \quad (5)$$

Bu ayniyatlarni hadlab ko‘paytirib, topamiz:

$$N_1 \cdot N_2 = a^{\log_a N_1} \cdot a^{\log_a N_2} = a^{\log_a N_1 + \log_a N_2}.$$

Logarifmning ta’rifiga ko‘ra

$$\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2.$$

Shunday qilib, ko‘paytmaning logarifmi ko‘paytuvchilar logarifmlarining yig‘indisiga teng.

(2) formulani isbotlash uchun (5) formulalardan foydalanamiz. Ularni hadlab bo‘lib, topamiz:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{a^{\log_a N_1}}{a^{\log_a N_2}} = a^{\log_a N_1 - \log_a N_2}.$$

Demak, ta’rifga ko‘ra $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$.

Bo‘linmaning logarifmi bo‘linuvchi va bo‘luvchi logarifmlarining ayirmasiga teng.

(3) formulani isbotlash uchun $N = a^{\log_a N}$ ayniyatdan foydalanamiz: $x^r = (a^{\log_a N})^r = a^{r \log_a N}$. Bundan, ta’rifga ko‘ra $\log_a N^r = r \log_a N$.

Darajaning logarifmi daraja ko‘rsatkichi bilan shu daraja asosining logarifmi ko‘paytmasiga teng.

(4) formulani isbotlash uchun $\sqrt[n]{N} = N^{\frac{1}{n}}$ bo‘lganligi tufayli darajaning logarifmi to‘g‘risidagi qoidani qo‘llaymiz:

$$\log_a \sqrt[n]{N} = \log_a N^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a N = \frac{\log_a N}{n}.$$

Ildizning logarifmi ildiz ostidagi son logarifmining ildiz ko‘rsatkichiga bo‘linganiga teng.

Agar $N_1 N_2 > 0$, $N \neq 0$ bo'lsa, (1)—(3)- formulalarning qo'llanish chegarasini kengaytirish mumkin, ya'ni quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi:

$$\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a|N_1| + \log_a|N_2|,$$

$$\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \log_a|N_1| - \log_a|N_2|,$$

$$\log_a N^r = r\log_a|N|, \quad r \in R.$$

Endi ifodalarni logarifmlash va potensirlashga doir misollar qaraymiz.

4-misol. $x = 3a^3b$ ifodani 2 asosga ko'ra logarifmlang:

$$\log_2 x = \log_2(3a^3b) = \log_2 3 + \log_2 a^3 + \log_2 b =$$
$$= \log_2 3 + 3\log_2 a + \log_2 b.$$

5-misol. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ifodani 3 asosga ko'ra logarifmlang:

$$\log_3 S = \log_3[p(p-a)(p-b)(p-c)]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\log_3[p(p-a)(p-b)(p-c)] = \frac{1}{2}\log_3 p + \frac{1}{2}\log_3(p-a) +$$
$$+ \frac{1}{2}\log_3(p-b) + \frac{1}{2}\log_3(p-c).$$

5-masala. Agar $l = 100$ sm, $g = 981{,}5$ sm/s va $\pi = 3{,}142$ bo'lsa, T vaqtni $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ formula bo'yicha toping.

Yechish. Berilgan ifodani $a = 10$ asosga ko'ra logarifmlaymiz:

$$\log_{10} T = \log_{10}\left[\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \log_{10}\pi + \frac{1}{2}\log_{10} l - \frac{1}{2}\log_{10} g =$$
$$= \log_{10} 3{,}142 + \frac{1}{2}\log_{10} 100 - \frac{1}{2}\log_{10} 981{,}5 =$$
$$= 0{,}4971 + \frac{1}{2}\cdot 2 - 2{,}992\cdot\frac{1}{2} = 0{,}4971 + 1 - 1{,}496 =$$
$$= 1{,}4971 - 1{,}496 = 0{,}0011.$$

$\log_{10} T = 0{,}0011$. Ta'rifga asosan $T = 1{,}002$ s.

7-misol. $\log_2 x = 2\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 b;$

$$\log_2 x = \log_2 a^2 + \log_2 b^{\frac{1}{2}}, \quad x = a^2 b^{\frac{1}{2}} = a^2\sqrt{b}.$$

6. O‘nli va natural logarifmlar. Sonli ifodalarning logarifmlarini hisoblashda, logarifmik ifodalarni almashtirishlarda logarifmning asosiy xossalari va qoidalaridan keng foydalaniladi. Amaliyotda turli asosli logarifmlar ishlatiladi. O‘nli va natural logarifmlardan hisoblashlarda kengroq foydalaniladi. Bunday logarifmlar uchun maxsus jadvallar tuzilgan. Logarifmlar mikrokalkulatorlar orqali ham topiladi.

Sonning o‘nli logarifmi deb shu sonning 10 asosga ko‘ra logarifmiga aytiladi va $\log_{10}N$ o‘rniga lg N yoziladi.

Sonning natural logarifmi deb, shu sonning e asosga ko‘ra logarifmiga aytiladi, bu yerda e — qiymati taqriban 2,718 ga teng irratsional son. Bu logarifmda $\log_e N$ o‘rniga ln N yoziladi. e irratsional soni matematikada va uning tatbiqlarida muhim ahamiyatga ega. Bu son, ayniqsa, matematikaning nazariy va amaliy masalalarini yechishda muhim rol o‘ynaydi. e sonini istalgan aniqlikda

$$e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} + \ldots$$

yig‘indining taqribiy qiymati sifatida aniqlash mumkin. e sonini mikrokalkulatorda hisoblash quyidagi dastur bo‘yicha bajariladi:

1 $\boxed{F}$ $\boxed{e^x}$ 2,71828182845.

O‘nli logarifmdan natural va boshqa asosli logarifmlarga va, aksincha, o‘tishga to‘g‘ri keladi. Logarifmlarning bir asosdan boshqa asosga o‘tish formulasini keltirib chiqaramiz va isbotlaymiz.

Agar $N > 0,\ b > 0,\ b \neq 1$ bo‘lsa, u holda

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}. \qquad (6)$$

(6) ayniyat yangi asosga o‘tish formulasi deb ataladi.

$M=\frac{1}{\log_b a}=\log_a b$ ko‘paytuvchi *o‘tish moduli* deyiladi. (6) formulani isbotlash uchun asosiy logarifmik ayniyatdan foydalanamiz va uning ikkala qismini b asosga ko‘ra logarifmlaymiz:

$$\log_b a^{\log_a N}=\log_b N.$$

Darajaning logarifmi xossalaridan foydalanib, quyidagini olamiz:

$$\log_a N\cdot\log_b a=\log_b N \Rightarrow \log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

(6) formuladan $b=10$ va $b=e$ bo‘lganda o‘nli va natural logarifmlar orasidagi bog‘lanishni topish mumkin:

$$\log_a N=\frac{\lg N}{\lg a},\ \log_a N=\frac{\ln N}{\ln a}. \qquad (7)$$

$N>0$ bo‘lganda $\ln N$ va $\lg N$ orasidagi bog‘lanishni o‘rnatuvchi sonli munosabatlarni ham olish mumkin. Buning uchun $N=e^{\ln N}$ ayniyatning ikkala qismini ham 10 asosga ko‘ra logarifmlaymiz: $\lg N=\ln N\cdot\lg e$.

Agar $M=\lg e$ desak, $\lg N=M\ln N$ munosabatni olamiz. Bu yerda M soni natural logarifmdan o‘nli logarifmga o‘tish moduli deb ataladi. Uning son qiymatini hisoblaymiz:

$$M=\lg e=\frac{1}{\ln 10}=\frac{1}{2{,}3026}=0{,}434294.$$

Shuningdek, o‘nli logarifmdan natural logarifmga o‘tish modulini ham hisoblash mumkin:

$$M'=\lg 10=\frac{1}{M}=\frac{1}{\lg e}=\frac{1}{0{,}4343}=2{,}3026.$$

Shunday qilib, sonning natural logarifmidan uning o‘nli logarifmiga o‘tish uchun sonning natural logarifmini 0,4343 ga ko‘paytirish kifoya. Sonning o‘nli logarifmidan natural logarifmiga o‘tish uchun esa sonning o‘nli logarifmini 2,3026 ga ko‘paytirish kerak ekan. (6) formuladan foydalanib, quyidagi munosabatlarni ham o‘rnatish mumkin:

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1, \qquad (8)$$

$$\log_{a^k} N = \frac{1}{k}\log_a N, \ (k \in R), \qquad (9)$$

$$\log_a N = \log_{a^\mu} N^\mu, \ (\mu \in R). \qquad (10)$$

Haqiqatan, (6) da $N = b$ desak, (8) tenglikni olamiz:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

(9) formulani olish uchun (9) ning chap qismida a^k asosli logarifmdan a asosli logarifmga o‘tamiz:

$$\log_{a^k} N = \frac{\log_a N}{\log_a a^k} = \frac{\log_a N}{k\log_a a} = \frac{1}{k}\log_a N.$$

Shuningdek, (10) formulani olish uchun (6) ning o‘ng qismida a^μ asosli logarifmdan a asosli logarifmga o‘tamiz:

$$\log_{a^\mu} N^\mu = \frac{\log_a N^\mu}{\log_a a^\mu} = \frac{\mu\log_a N}{\mu\log_a a} = \frac{\log_a N}{\log_a a} = \log_a N.$$

8-misol. $\lg x = 3\lg(a+b) - 2\lg(a-b)$;

$$\lg x = \lg\frac{(a+b)^3}{(a-b)^2} \Rightarrow x = \frac{(a+b)^3}{(a-b)^2}.$$

9-misol. $\lg x = 5\lg m + \frac{1}{2}\left[\lg(m+n) + \frac{1}{3}\lg(m-n) - \lg m - \lg n\right],$

$$\lg x = \lg m^5 + \frac{1}{2}\lg\frac{(m+n)\sqrt[3]{m-n}}{mn} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lg x = \sqrt{\frac{(m+n)\sqrt[3]{m-n}}{mn}}m^5 \Rightarrow x = m^5\sqrt{\frac{(m+n)\sqrt[3]{m-n}}{mn}}.$$

10-misol. $\log_{0,3}9 - 2\log_{0,3}10$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10 = \log_{0,3} 9 - \log_{0,3} 10^2 =$$

$$= \log_{0,3}\frac{9}{100} = \log_{0,3} 0,09 = \log_{0,3}(0,3)^2 = 2\log_{0,3} 0,3 = 2 \cdot 1 = 2.$$

11-misol. $49^{1\ \frac{1}{4}\log_7 25}$ ni hisoblang.

Yechish. $49=7^2$ bo‘lishini va darajani darajaga ko‘tarish uchun daraja ko‘rsatkichlar ko‘paytirilishini e’tiborga olamiz:

$$49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}=(7^2)^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}=7^{2-\frac{1}{2}\log_7 5^2}=$$
$$=7^{2-\log_7 5}=7^{\log 7\, 49-\log_7 5}=7^{\log_7 \frac{49}{5}}=\frac{49}{5}=9{,}8.$$

12-misol. Agar $\lg 2=0{,}3010$ bo‘lsa, $\lg 12500$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\lg 12500=\lg\frac{100000}{8}=\lg 10^5-\lg 2^3=5\lg 10-3\lg 2=$$
$$=5-3\cdot 0{,}3010=5-0{,}9030=4{,}0970.$$

13-misol. Agar $\log_5 2=a$ va $\log_5 3=b$ bo‘lsa, $\log_5 72$ ni a va b orqali ifodalang.

Yechish.

$$\log_5 72=\log_5(8\cdot 9)=\log_5(2^3\cdot 3^2)=$$
$$=\log_5 2^3+\log_5 3^2=3\log_5 2+2\log_5 3=3a+2b.$$

14-misol. $\log_2 5\,\log_5 10\,\log_{10} 16$ ni hisoblang.

Yechish. (6) formuladan foydalanib, berilgan ifodadagi logarifmlarni 2 asosli logarifm orqali ifodalaymiz:

$$\log_2 5\log_5 10\log_{10} 16=\log_2 5\frac{\log_2 10}{\log_2 5}\cdot\frac{\log_2 16}{\log_2 10}=\log_2 16=4.$$

15-misol. Agar $\log_{14}28=a$ bo‘lsa, $\log_{49}16$ ni hisoblang.

Yechish. (10) formuladan va darajaning logarifmini topish formulasidan foydalanamiz:

$$\log_{49}16=\log_{\sqrt{49}}\sqrt{16}=\log_7 4=2\log_7 2,$$

agar $\log_7 2=x$ desak, $\log_{49}16=2x$ bo‘ladi. $\log_{14}28$ da 7 asosga o‘tamiz:

$$\log_{14} 28 = \frac{\log_7 28}{\log_7 14} \cdot \frac{\log_7(2^7 \cdot 7)}{\log_7(2 \cdot 7)} = \frac{2\log_7 2 + \log_7 7}{\log_7 2 + \log_7 7} = \frac{2x+1}{x+1}.$$

Shartga ko‘ra $\log_{14} 28 = a$. Bunday holda $\frac{2x+1}{x+1} = a$ tenglamaga ega bo‘lamiz va uni x ga nisbatan yechamiz: $x = \frac{a-1}{2-a}$. Shunday qilib, $\log_{49} 16 = 2x = \frac{2(a-1)}{2-a}$.

16-misol. Agar $\log_{30} 3 = a$ va $\log_{30} 5 = b$ bo‘lsa, $\log_{30} 8$ ni toping.

Yechish. 30 asosli logarifmdan 2 asosli logarifmga o‘tamiz:

$$\log_{30} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 30} = \frac{\log_2 3}{\log_2(2 \cdot 3 \cdot 5)} = \frac{3\log_2 2}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5} = \frac{3}{1 + \log_2 3 + \log_2 5},$$

$$\log_{30} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 30} = \frac{\log_2 3}{1 + \log_2 3 + \log_2 5} = a,$$

$$\log_{30} 5 = \frac{\log_2 5}{1 + \log_2 3 + \log_2 5} = b.$$

Oxirgi ikkita tenglikdan $\log_2 3$ va $\log_2 5$ ni topamiz:

$$\log_2 3 = \frac{a}{1-a-b}; \ \log_2 5 = \frac{b}{1-a-b}.$$

Natijada

$$\log_{30} 8 = \frac{3}{1 + \log_2 3 + \log_2 5} = \frac{3}{1 + \frac{a}{1-a-b} + \frac{b}{1-a-b}} = 3(1-a-b).$$

Agar $8 = \left(\frac{30}{3 \cdot 5}\right)^3$ bo‘lishini topsak, masala yengil hal qilinadi: $\log_{30} 8 = 3(\log_{30} 30 - \log_{30} 5 - \log_{30} 3) = 3(1 - a - b)$.

17-misol. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ tenglikni isbotlang.

Yechish. Berilgan tenglikni c asos bo‘yicha logarifmlaymiz:

$$\log_c b \log_c a = \log_c a \log_c b.$$

Bu tenglikdan $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ tenglik kelib chiqadi.

7. Logarifmik funksiya, uning xossalari va grafigi.

Ta'rif. *$y = \log_a x$ ko'rinishdagi funksiya* ***logarifmik funksiya*** *deyiladi.*

Bu yerda $a > 0$, $a \neq 1$, x — argument. Logarifmning ta'rifiga ko'ra $y = \log_a x$ ifoda $a^y = x$ ifodani ham bildiradi, ya'ni bu ifodalar a, x, y sonlar orasidagi bog'lanishlarni ifodalaydi. $y = \log_a x$ logarifmik funksiya $y = a^x$ ko'rsatkichli funksiyaga nisbatan teskari funksiyadir. Logarifmik funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz.

1. Logarifmik funksiya x ning barcha musbat qiymatlarida aniqlangan (asos musbat bo'lganda nol va manfiy sonlar logarifmga ega emas). Haqiqatan, logarifmning ta'rifiga ko'ra, har bir x musbat son a asos bo'yicha logarifmga ega.

2. Logarifmik funksiyaning qiymatlari sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iboratdir. Haqiqatan ham, istalgan y ning haqiqiy qiymatida logarifmning ta'rifiga ko'ra $\log_a(a^y) = y$ tenglik o'rinli, ya'ni $y = \log_a x$ funksiya $x_0 = a^{y_0}$ nuqtada y_0 qiymatni qabul qiladi.

3. $a > 1$ bo'lganda logarifmik funksiya o'suvchi, ya'ni agar $0 < x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda $\log_a x_1 < \log_a x_2$ bo'ladi.

Haqiqatan, asosiy logarifmik ayniyatdan foydalanib, $x_2 > x_1$ shartni bunday yozish mumkin: $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$. Bu tengsizlikdan $a > 1$ asosli darajaning xossasiga ko'ra $\log_a x_2 > \log_a x_1$ bo'lishi kelib chiqadi. Endi $0 < a < 1$ bo'lganda logarifmik funksiya kamayuvchi, ya'ni $0 < x_1 < x_2$ bo'lsa, $\log_a x_1 > \log_a x_2$ bo'lishini isbotlaymiz.

Buning uchun $x_2 > x_1$ shartni $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$ ko'rinishda yozamiz. $0 < a < 1$ bo'lgani uchun $\log_a x_2 > \log_a x_1$ bo'ladi.

4. Agar $a > 1$ bo'lsa, u holda $y = \log_a x$ funksiya $x > 1$ bo'lganda musbat qiymatlar, $0 < x < 1$ bo'lganda esa manfiy qiymatlar qabul qiladi. Agar $0 < a < 1$ bo'lsa, u holda $y = \log_a x$ funksiya $0 < x < 1$ bo'lganda musbat qiymatlar, $x > 1$ bo'lganda esa manfiy qiymatlar qabul qiladi. Bu esa

$y = \log_a x$ funksiyaning $x = 1$ bo‘lganda nolga teng qiymat qabul qilishi, $x > 0$ bo‘lib, $a > 1$ bo‘lsa, o‘suvchiligidan hamda $0 < a < 1$ bo‘lsa, kamayuvchiligidan kelib chiqadi.

5. Logarifmik funksiya uchun: agar $a > 1$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} < \log_a \frac{x_1 + x_2}{2},$$

agar $0 < a < 1$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} < \log_a \frac{x_1 + x_2}{2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, bunda $0 < x_1 < x_2$.

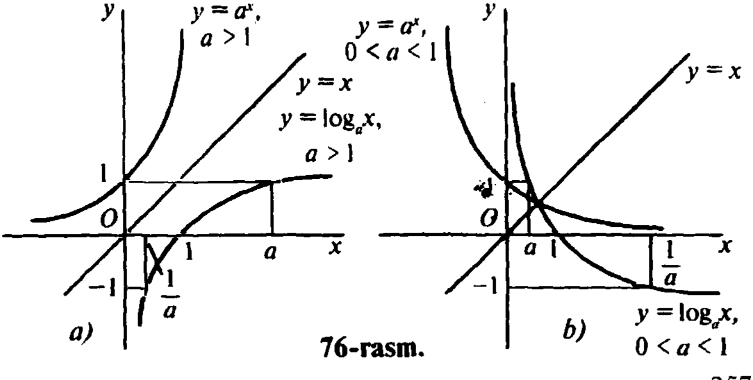
6. Logarifmik funksiya uchun eng xarakterli xossani

$$\log_a (x_1 \times x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

formula o‘ynaydi.

7. $y = \log_a x$ logarifmik funksiya va $y = a^x$ ko‘rsatkichli funksiya o‘zaro teskari funksiyalar bo‘lgani uchun ularning grafiklari birinchi va uchinchi koordinatalar burchaklarining bissektrisasiga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘ladi. Logarifmik funksiyaning grafigi abssissalar o‘qini (1; 0) nuqtada kesib o‘tadi (76- rasm).

76- *a* rasmda $a > 1$ bo‘lganda, 76- *b* rasmda esa $0 < a < 1$ bo‘lganda logarifmik funksiyaning grafiklari tasvirlangan. Bu grafiklar logarifmik funksiyaning yuqorida qaralgan xossalari haqida to‘liq tasavvur beradi.



76-rasm.

Endi logarifmik funksiya xossalarining qo'llanilishiga doir misollar qaraymiz.

18-misol. $y=\lg(x^2-9)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. $\lg(x^2-9)$ ifoda $x^2-9>0$, ya'ni $x^2>9$ bo'lganda ma'noga ega bo'ladi. Bu tengsizlikni yechib, $x>3$ yoki $x<-3$ bo'lishini topamiz. Funksiyaning aniqlanish sohasi $]-\infty; -3[$ va $]3; +\infty[$ oraliqlarning birlashmasidan iborat: $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.

19-misol. $y=\lg(x-3)+\lg(x+3)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi oldingi misoldan farq qilib, har bir ifoda uchun logarifmning mavjud bo'lish shartini e'tiborga olsak, quyidagi tengsizliklar sistemasini yechish bilan topiladi:

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x+3>0 \end{cases} \Rightarrow 3\begin{cases} x>3, \\ x>-3 \end{cases} \Rightarrow x>3.$$

Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $]3; +\infty[$ oraliqdan iborat.

20-misol. $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ funksiyaning toq ekanligini ko'rsating.

Yechish. Berilgan funksiya barcha haqiqiy sonlar, ya'ni simmetrik sonlar to'plamida aniqlangan: $x\in]-\infty; +\infty[$.

$$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})=\lg\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=$$
$$=-\lg(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$

ya'ni $f(-x)=-f(x)$ bo'lgani uchun berilgan funksiya toq.

21-misol. Sonlarni taqqoslang:

1) $a=\log_{\frac{1}{2}}3$ va $b=\log_3 1{,}1$; 3) $\log_3 75$ va $\log_2 22$;

2) $a=\log_2 3$ va $b=\log_3 2$; 4) $\log_3 70$ va $\log_2 20$.

Yechish. 1) $a = \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, $b = \log_3 1{,}1 >$ $> \log_3 1 = 0$, demak, $a < 0$, $b > 0$, ya'ni $a < b$ bo'ladi;

2) $a = \log_2 3 > \log_2 2 > 1$, $b = \log_3 2 < \log_3 3 = 1$. Shunday qilib, $a > 1$, $b < 1$, demak, $a > b$;

$$3)\quad \log_3 75 = \log_3(81-6) = \log_3\left[81\left(1-\frac{2}{27}\right)\right] =$$

$$= 4 + \log_3\left(1-\frac{2}{27}\right) < 4;$$

$$\log_2 22 = \log_2(16+6) = \log_2\left(16\left(1+\frac{3}{8}\right)\right) = 4 + \log_2\left(1+\frac{3}{8}\right) > 4;$$

demak, $\log_3 75 < \log_2 22$;

$$4)\quad \log_3 70 = \log_3(81-11) = \log_3\left[81\left(1-\frac{11}{81}\right)\right] =$$

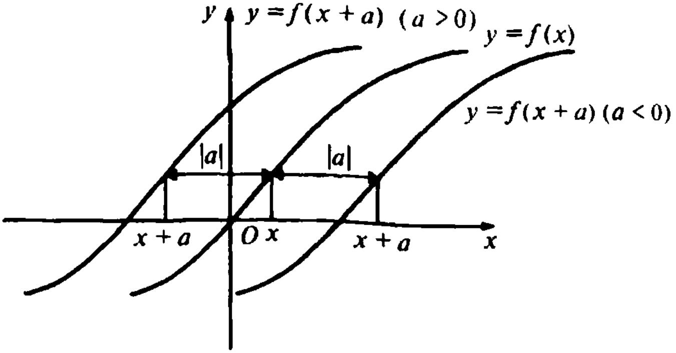
$$= 4 + \log_3\left(1-\frac{11}{281}\right) < 4;$$

$$\log_2 20 = \log_2(16+4) = \log_2\left(16\left(1+\frac{1}{4}\right)\right) = 4 + \log_2\left(1+\frac{1}{4}\right) > 4,$$

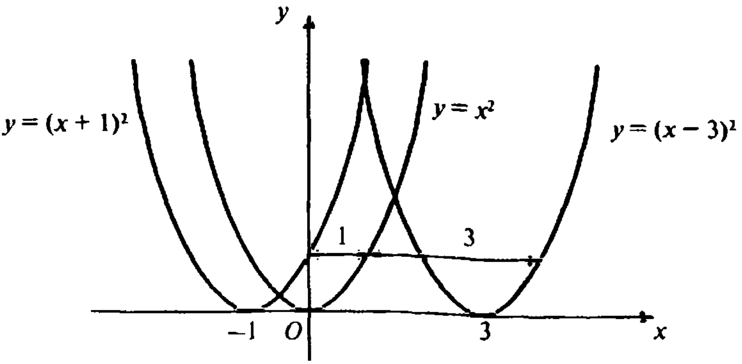
demak, $\log_3 70 < \log_2 20$.

7- §. Funksiyalarning grafiklarini almashtirish

Biror oraliqda berilgan $y = f(x)$ funksiyaning grafigini yasash uchun oldin bu funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami (o'zgarish sohasi), juft va toqligi, o'sishi va kamayishi, davriyligi va chegaralanganligi (chegaralanmaganligi) va funksiyaning boshqa xarakterli xossalari tekshirilib aniqlanadi. Bunday hol juda ko'p hisoblashlarni talab qiladi va vaqt ko'p ketadi. Quyidagi savolning paydo bo'lishi tabiiy. Bitta koordinatalar sistemasida $y = f(x)$ funksiya grafigini bilgan holda $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$, $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, $y = kf(ax + b) + c$ funksiyalarning grafiklarini yasab bo'lmasmikin? Mumkin ekan. $y = f(x)$ funksiyaning grafigini harakatlantirib, cho'zib, qisib yuqorida keltirilgan funksiyalarning grafiklarini yasash mumkin.



77-rasm.

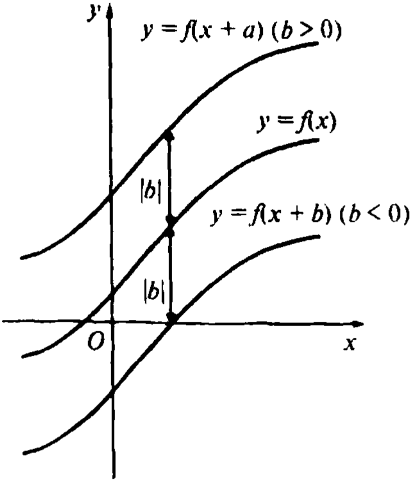


78-rasm.

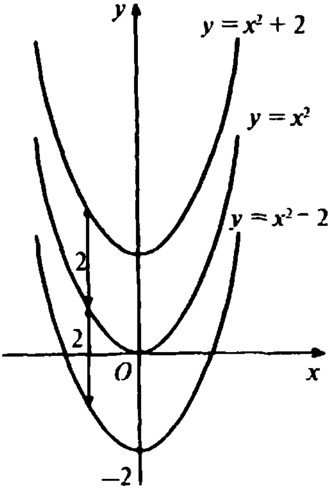
1. $y=f(x+a)$ (a — berilgan son) funksiyaning grafigini yasash uchun $y=f(x)$ funksiya grafigini abssissalar o‘qi bo‘ylab $|a|$ masofaga, agar $a>0$ bo‘lsa, musbat yo‘nalishda, agar $a<0$ bo‘lsa, manfiy yo‘nalishda parallel ko‘chirish kerak (77- rasm).

1-misol. $y=(x-3)^2$ va $y=(x+1)^2$ funksiyalar grafiklarini yasang.

Yechish. $y=x^2$ funksiya grafigini yasaymiz. $y=(x-3)^2$ funksiya grafigini yasash uchun $y=x^2$ funksiya grafigini abssissalar o‘qi bo‘ylab uch birlik masofaga musbat yo‘nalishda parallel ko‘chirish bilan olamiz.



79-rasm.



80-rasm.

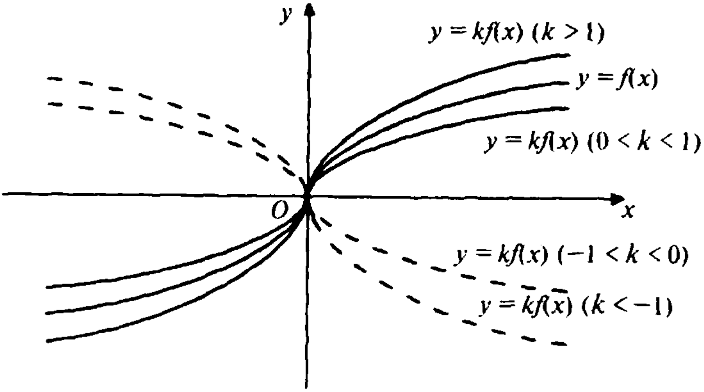
$y=(x+1)^2$ funksiya grafigini $y=x^2$ funksiya grafigidan hosil qilish uchun $y=x^2$ funksiya grafigini abssissalar o‘qi bo‘ylab bir birlik masofaga manfiy yo‘nalishda parallel ko‘chirish kerak (78- rasm).

2. $y=f(x)+b$ funksiyaning grafigini yasash uchun $y=f(x)$ funksiya grafigini ordinatalar o‘qi bo‘ylab $|b|$ masofaga, agar $b>0$ bo‘lsa, musbat yo‘nalishda, agar $b<0$ bo‘lsa, manfiy yo‘nalishda parallel ko‘chirish kerak (79- rasm).

2-misol. $y=x^2-2$, $y=x^2+2$ funksiyalar grafiklarini yasang.

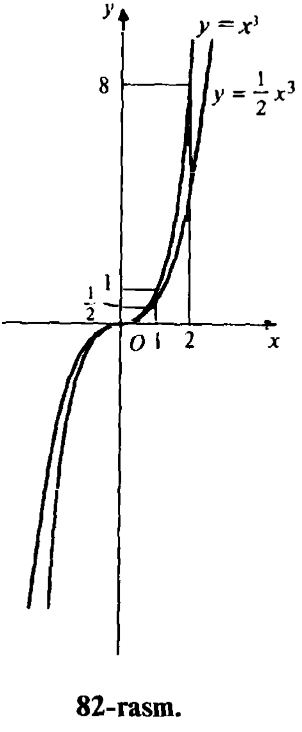
Yechish. $y=x^2$ funksiya grafigini yasaymiz. $y=x^2+2$ funksiyaning grafigi $y=x^2$ funksiya grafigini ordinatalar o‘qi bo‘ylab ikki birlik yuqoriga parallel ko‘chirish bilan olinadi. $y=x^2-2$ funksiya grafigi $y=x^2$ funksiya grafigini ordinatalar o‘qi bo‘ylab ikki birlik pastga parallel ko‘chirishdan hosil qilinadi (80- rasm).

3. $y=kf(x)$ $(k>0)$ funksiya grafigini yasash uchun $y=f(x)$ funksiya grafigi ustidagi nuqtalarning ordinatalarini Oy o‘qi bo‘ylab, $k>1$ bo‘lsa, cho‘zish, agar $k<1$



81-rasm.

bo‘lsa, qisish kerak. Agar $k < 0$ bo‘lsa, u holda ko‘rsatilgan almashtirishlar Ox o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lishi ham e’tiborga olinadi (81-rasm).



82-rasm.

Bunday holda k va $\frac{1}{k}$ sonlari mos ravishda *cho‘zish* va *qisish koeffitsiyentlari* deyiladi.

3-misol. $y=\frac{1}{2}x^3$ funksiya grafigini $y=x^3$ funksiya grafigidan foydalanib yasang.

Yechish. $y=\frac{1}{2}x^3$ funksiya grafigi $y=x^3$ funksiya grafigidan quyidagicha hosil qilinadi: $y=x^3$ funksiya grafigi ustidagi nuqtalarning ordinatalari Oy o‘q bo‘yicha $k=2$ marta qisiladi (82- rasm).

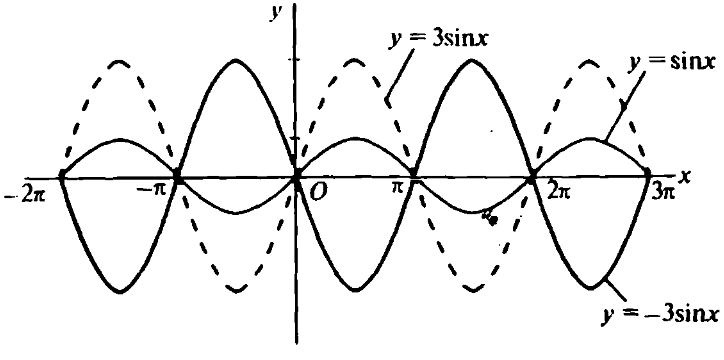
Nuqtalar ordinatalari qiymatlarining nisbati 2 ga teng. Bu quyidagi jadvalda ham o‘z aksini topgan:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y=x^3$	...	-27	-8	-1	0	1	8	27	...
$y=\frac{1}{2}x^3$	...	$-13{,}5$	-4	$-0{,}5$	0	0,5	4	13,5	...

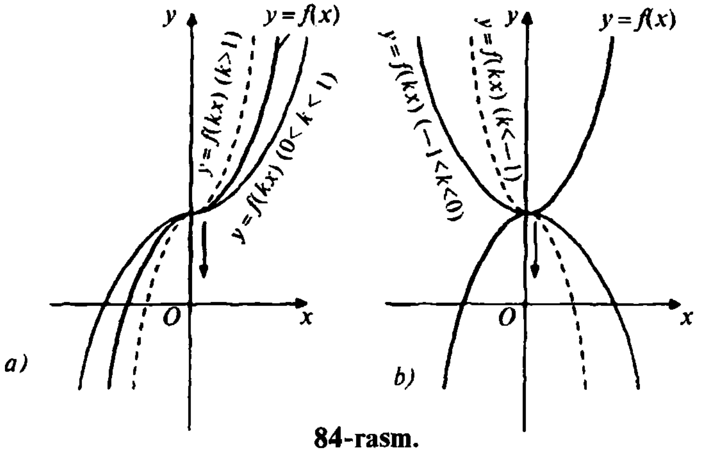
4-misol. $y=\sin x$ funksiya grafigidan foydalanib, $y=-3\sin x$ funksiya grafigini yasang.

Yechish. $y=\sin x$ funksiya grafigini yasaymiz. Bu funksiya grafigini Oy o'qi bo'yicha $k=3$ marta cho'zamiz. Natijada $y=3\sin x$ funksiya grafigini olamiz. Undan keyin Oy o'qiga nisbatan $y=3\sin x$ funksiya grafigiga simmetrik bo'lgan grafikni yasaymiz. Bu grafik $y=-3\sin x$ funksiya grafigi bo'ladi (83-rasm).

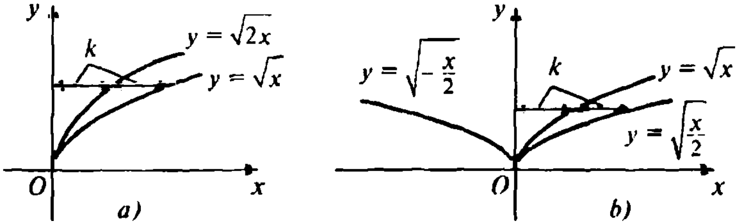
4. $y=f(kx)$ $(k>0)$ funksiyaning grafigini $y=f(x)$ grafigidan hosil qilish uchun $y=f(x)$ funksiyaning grafigini yasash kerak; bu grafik ustidagi nuqtalarning ordinatalarini o'zgarishsiz qoldirib, ularning abssissalarini Ox o'qi bo'yicha $k>1$ bo'lganda k marta kamaytirish (qisish), $0<k<1$ bo'lganda esa $\frac{1}{k}$ marta oshirish (cho'zish) kerak (84-*a* rasm). Agar $k<0$ bo'lsa, u holda (yuqorida) ko'rsatilgan almashtirishlar Oy o'qiga nisbatan simmetrik bo'lishi ham e'tiborga olinadi (84-*b* rasm).



83-rasm.



84-rasm.



85-rasm.

5-misol. $y=\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{-\frac{x}{2}}$ funksiyalar grafiklarini $y=\sqrt{x}$ funksiya grafigidan foydalanib yasang.

Yechish. $y=\sqrt{x}$ funksiya grafigini yasaymiz. Keyin bu grafikni *Ox* o‘qi bo‘ylab ikki marta qissak, $y=\sqrt{2x}$ funksiya grafigini hosil qilamiz (85- *a* rasm).

Agar $y=\sqrt{x}$ funksiya grafigini *Ox* o‘qi bo‘yicha ikki marta cho‘zsak, $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$ funksiya grafigini hosil qilamiz. Keyin bu funksiya grafigini *Oy* o‘qqa nisbatan simmetrik akslantirib, $y=\sqrt{-\frac{x}{2}}$ funksiya grafigini hosil qilamiz (85- *b* rasm).

8- §. Modul bilan bog‘liq bo‘lgan funksiyalarning grafiklari

$y=f(x)$ funksiyaning grafigi berilgan bo‘lsin.

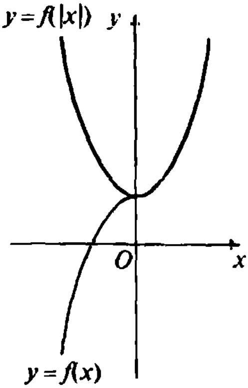
A. $y=f(|x|)$ funksiyaning grafigini yasash uchun $y=f(x)$ funksiya grafigining $x<0$ yarimtekislikda yotgan qismini o‘zgarishsiz qoldirib, $x\geq 0$ yarimtekislikdagi qismini ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik akslantirish yetarli.

Haqiqatan, $y=f(|x|)$ funksiya — juft. Uning uchun har qanday x uchun $f(|-x|)=f(|x|)$ ayniyat bajariladi, ya’ni bunday funksiyaning grafigi Oy o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘ladi. $x\geq 0$ bo‘lganda $y=f(|x|)=f(x)$ bo‘ladi va $y=f(|x|)$ hamda $y=f(x)$ funksiyalarning grafiklari $x>0$ yarimtekislikda ustma-ust tushadi. Bundan $y=f(|x|)$ funksiya grafigini yasashning yuqorida izohlangan usuli kelib chiqadi (86- rasm).

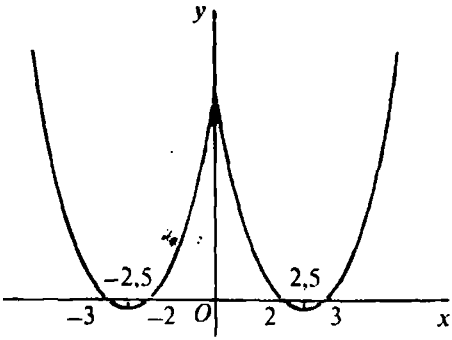
1 - misol. $y=x^2-5|x|+6$ funksiya grafigini yasang.

Yechish. $y=x^2-5x+6$ funksiyaning grafigini $x>0$ bo‘lgan hollar uchun yasaymiz (87- rasm).

Undan keyin yasalgan grafikni Oy o‘qqa nisbatan simmetrik akslantirib, $y=x^2-5|x|+6$ funksiyaning grafigini olamiz. $y=x^2-5x+6$ funksiya grafigi parabola bo‘lib, uchi



86-rasm.



87-rasm.

(2,5; –0,25) nuqtada yotadi. Bu funksiya ikkita nolga ega: $x_1=2$ va $x_2=3$. Uning grafigi ordinatalar o'qini (0; 6) nuqtada kesadi. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi simmetrik sonlar to'plamidan iborat bo'lib, juft funksiyalar, ya'ni

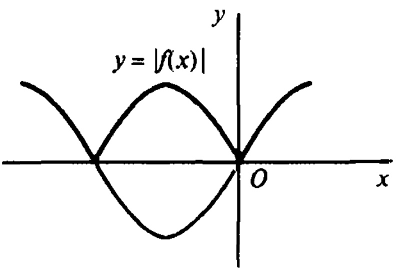
$$y(-x)=(-x)^2-5|-x|+6=x^2-5|x|+6=y(x).$$

Demak, uning grafigi Oy o'qqa nisbatan simmetrik bo'ladi.

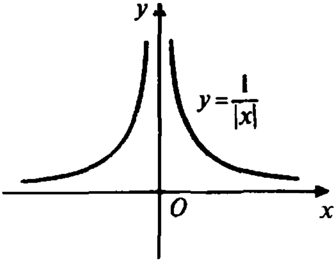
B. $y=|f(x)|$ funksiyaning grafigini yasash uchun $y=f(x)$ funksiya grafigining $y\geq 0$ bo'lgan hollar uchun qismini yasab, grafikning $y<0$ bo'lgan hollar uchun o'zgarishsiz qolgan qismini abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik akslantirish kerak (88- rasm).

2-misol. $y=\frac{1}{|x|}$ funksiya grafigini yasang.

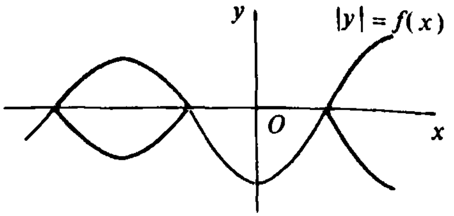
Yechish. $y=\frac{1}{x}$ funksiya grafigini yasaymiz. Berilgan funksiya juft, ya'ni $\frac{1}{|-x|}=\frac{1}{|x|}$; aniqlanish sohasi simmetrik sonlar to'plamidan iborat: $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ +\infty[$. Uning grafigi Oy o'qqa nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi. $y=\frac{1}{x}$ funksiya grafigining abssissalar o'qidan pastda yotgan qismini abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik akslantirib, $y=\frac{1}{|x|}$ funksiya grafigining boshqa tarmog'ini hosil qilamiz (89- rasm).



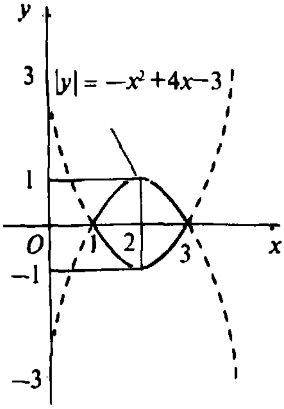
88-rasm.



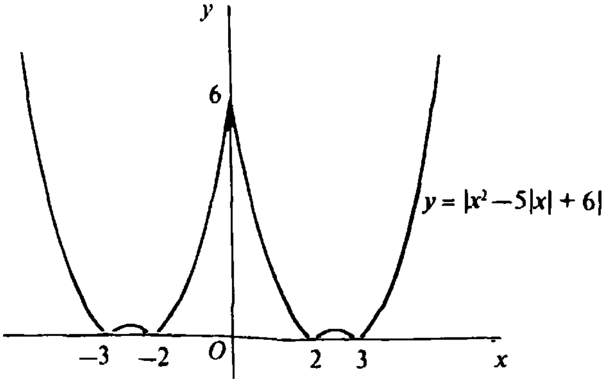
89-rasm.



90-rasm.



91-rasm.



92-rasm.

D. $|y| = f(x)$ funksiyaning grafigini yasash uchun $y = f(x)$ funksiya grafigining $f(x) \geq 0$ tengsizlik bajariladigan oraliqlardagi qismlarini yasab, bu qismlarni Ox o'qqa nisbatan simmetrik akslantirish kerak, grafikning $f(x) < 0$ tengsizlik bajariladigan oraliqlardagi qismlarini tashlash kerak (90- rasm).

3-misol. $|y| = -x^2 + 4x - 3$ funksiyaning grafigini yasang.

Yechish. $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ bo'lganda yoki $1 \leq x \leq 3$ bo'lganda $y = -x^2 + 4x - 3$ funksiya grafigini yasaymiz. Keyin yasalgan grafikni Ox o'qqa nisbatan simmetrik akslantiramiz. Natijada berilgan funksiyaning grafigini yasagan bo'lamiz (91- rasm).

$y=|f(|x|)|$, $|y|=|f(x)|$, $|y|=f(|x|)$, $|y|=|f(|x|)|$ funksiyalarning grafiklarini yasash uchun A, B, D almashtirishlarni ketma-ket qo'llash kerak.

4- misol. $y=|x^2-5|x|+6|$ funksiya grafigini yasang.

Yechish. $y=x^2-5|x|+6$ funksiya grafigini yasaymiz. Bu funksiya grafigini A bandda yasagan edik (92- rasm).

Bundan keyin esa bu funksiya grafigining $y<0$ bo'lgan oraliqdagi qismlarini abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik akslantirib, izlanayotgan grafikni hosil qilamiz.

VI BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$. Javob. $]-3;\ 3[$.

2. $y=\frac{1-x}{3\sqrt[2]{3x-6}}$. Javob. $]-\infty;\ 2[\ \cup\ ]2;\ +\infty[$.

3. $y=\sqrt[4]{\frac{|x-4|}{x^2-8}}$. Javob. $]-\infty;\ -2\sqrt{2}[\ \cup\ ]2\sqrt{2};\ +\infty[$.

4. $y=\frac{2}{|x|-3}+\frac{1}{x}$.

Javob. $]-\infty;\ 3[\ \cup\ ]-3;\ 0[\ \cup\ ]0;\ 3[\ \cup\ ]3;\ +\infty[$.

5. $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$. Javob. $]-\infty;\ 0[$.

6. $y=\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$. Javob. $\varnothing$.

7. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}+\frac{1}{\sqrt{10+9x-x^2}}$.

Javob. $]-1;\ 1[\ \cup\ ]2;\ 10[$.

8. $y=\sqrt{x^2-6x}+\sqrt{5x^2+2x}$.

Javob. $]-\infty; -2/5[\,\cup 0 \cup\,]6; +\infty[$.

9. $y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$. Javob. $]-1; 1[\,\cup\,]2; +\infty[$.

Quyidagi funksiyalarning qiymatlari to‘plamini (sohasini) toping:

10. $y=\arcsin x$. Javob. $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

11. $y=\sin x\cos x$. Javob. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

12. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. Javob. $]-\infty; 2[\,\cup\,]2; +\infty[$.

13. $y=x+\dfrac{1}{x}$. Javob. $]-\infty; 2[\,\cup\,]2; +\infty[$.

14. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$. Javob. $[0; 2]$.

15. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$. Javob. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

16. $y=\dfrac{x^2-5}{2x-4}$. Javob. $]-\infty; +\infty[$.

17. $y=\sqrt{-x^2+x+2}$. Javob. $0\le y\le\frac{3}{2}$.

18. $y=\dfrac{1}{2^x-1}$. Javob. $]-\infty; -1[\,\cup\,]0; +\infty[$.

19. $y=\sin x+\cos x$. Javob. $-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$.

20. $y=\lg(1-2\cos x)$. Javob. $-\infty<y\le\lg 3$.

21. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$. Javob. $\left[-\frac{1}{2}; 0\right[\,\cup\,\left]0; \frac{1}{2}\right]$.

22. $y=\dfrac{6x}{x^2+1}$. Javob. $-3\le y\le 3$.

Quyidagi funksiyalardan qaysilari juft, qaysilari toq ekanligini aniqlang:

23. $y=3x^2+4|x|-5$. Javob. Juft.

24. $y=\dfrac{2x}{x^2+|x|+1}$. Javob. Toq.

25. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$. Javob. Juft ham emas, toq ham emas.

26. $y=\dfrac{|x|}{x}$. Javob. Toq.

27. $y=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$. Javob. Juft.

28. $y=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$. Javob. Toq.

29. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}$. Javob. Juft.

30. $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$. Javob. Toq.

31. $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$. Javob. Toq.

Quyidagi funksiyalarning monotonlik oraliqlarini toping:

32. $y=2x-1$. Javob. $]-\infty;+\infty[$.

33. $y=x^2$.

Javob. $]-\infty;0[$ da kamayadi, $]0;+\infty[$ da o'sadi.

34. $y=x^2+2x+5$.

Javob. $]-\infty;-1[$ da kamayadi, $]-1;+\infty[$ da o'sadi.

35. $y=|x|$.

Javob. $]-\infty;0[$ da kamayadi, $]0;+\infty[$ da o'sadi.

36. $y=x^4+6x^2+10$.

Javob. $x>0$ bo'lsa o'sadi, $x<0$ bo'lsa kamayadi, $x\in R$.

37. $y=\operatorname{arctg}x+x$. Javob. O'sadi, $x\in R$.

38. $y=x^3+\arcsin x$. Javob. O'sadi, $x\in R$.

39. $y=\lg x^3+x^5$. Javob. O'sadi.

40. $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$.

Javob. $x<-2$ bo'lsa o'sadi, $x>-2$ bo'lsa kamayadi.

41. $y = \lg(x^2 - 6x + 10)$.

Javob. $x < 2$ bo‘lsa kamayadi, $x > 2$ bo‘lsa o‘sadi,

42. $y = x^2 - x$.

Javob. $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ da kamayadi, $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ da o‘sadi.

43. $y = \frac{x+1}{x-1}$. Javob. $]-\infty; 1 [\cup] 1; +\infty[$ da kamayadi.

44. $y = \frac{x}{2+\sqrt{x+1}}$. Javob. $]-1; +\infty[$ da o‘sadi.

45. $y = \frac{1}{1+x^2}$ funksiyaning $(-\infty; +\infty)$ da chegaralanganligini ko‘rsating. Javob. $0 < y \leq 1$.

46. $y = e^{-x^2}$ funksiya R haqiqiy sonlar to‘plamida chegaralanganligini ko‘rsating. Javob. $0 < y \leq 1$.

47. $y = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ funksiya R haqiqiy sonlar to‘plamida chegaralanganligini ko‘rsating.

Quyidagi funksiyalarning eng kichik va eng katta qiymatlarini toping:

48. $y = x^2 + 2x - 3$.

49. $y = 2x^2 - x - 2$.

50. $y = x^2 + x + 5$.

51. $y = 3 - x + 2x^2$.

52. $y = -x^2 + 2x - 1$.

53. $y = -2x^2 + x + 3$.

54. $y = 1 + 3x - x^2$.

55. P sonini shunday ikkita qo‘shiluvchi ko‘rinishida ifodalangki, ularning ko‘paytmasi eng katta bo‘lsin.

56. P sonini shunday ikkita sonning ayirmasi ko‘rinishida ifodalangki, ularning ko‘paytmasi eng kichik bo‘lsin.

57. l uzunlikdagi simdan shunday to‘g‘ri to‘rtburchak yasash kerakki, uning yuzi katta bo‘lsin. To‘g‘ri to‘rtburchakning o‘lchamlari qanday bo‘ladi?

Javob. Tomoni $\frac{l}{4}$ ga teng kvadrat.

58. Perimetri $2p$ ga teng bo‘lgan barcha doiraviy sektorlardan yuzi eng kattasini toping. Javob. $R=\frac{p}{2}$.

Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang.

59. $y=-x^2+3x-2.$

60. $y=\frac{2x+1}{x-1}.$

61. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}.$

62. $y=\frac{4}{\sqrt{|x|}}.$

63. $y=\lg|x|.$

64. $y=|\lg|x||.$

65. $|y|=x-2.$

66. $y=\frac{1}{2}x^2-3|x|+2.$

67. $y=|x-1|+|x+3|.$

68. $y=|x^2-3x+5|.$

69. $y=\frac{x}{x-1}.$

70. $y=\frac{1}{1+x^2}.$

71. $y=\frac{x}{1+x^2}.$

72. $y=e^{-x^2}.$

73. $y=\frac{1}{x^2}.$

74. $y=\frac{1}{1-x^2}.$

75. $y=\sqrt{1-x^2}.$

76. $y=\sqrt{x^2-1}.$

Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalarni toping, ularning aniqlanish sohalarini ko‘rsating:

77. $y=3x.$ Javob. $-\infty<x<+\infty.$

78. $y=5-2x.$ Javob. $-\infty<x<+\infty.$

79. $y = x^2 - 2$. Javob. $-2 \le x < +\infty$.

80. $y = \frac{1}{2-x}$. Javob. $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$.

81. $y = x^2 - 4x$. Javob. $-4 \le x < +\infty$.

82. $y = x$. Javob. $-\infty < x < +\infty$.

83. $y = \frac{1}{x}$. Javob. $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$.

84. $y = \sqrt{x}$. Javob. $0 < x < +\infty$.

85. $y = \sqrt[3]{x+1}$. Javob. $-\infty < x < +\infty$.

86. $y = \sqrt[3]{x^2+1}$. Javob. $1 \le x < +\infty$.

87. $y = \arcsin x^2$. Javob. $y = \pm\sqrt{\sin x};\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

88. $y = 2^x - 1$. Javob. $y = \log_2(x+1);\ -1 < x < +\infty$.

89. $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$.

Javob. $y = \frac{a^{2x}-1}{2a^x},\ -\infty < x < +\infty$.

90. $y = \frac{1-x}{1+x}$. Javob. $y = \frac{1-x}{1+x}$.

91. $y = \arccos x^2$. Javob. $y = \sqrt{\cos x};\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

VII BOB

KO‘RSATKICHLI, LOGARIFMIK TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR

1- §. Ko‘rsatkichli va logarifmik tenglamalar

1. Ko‘rsatkichli tenglamalar va ularni yechish usullari. Ko‘rsatkichli tenglamalarda noma’lum daraja ko‘rsatkichida ishtirok etadi. Ko‘rsatkichli tenglamalarni yechishda ko‘rsatkichli funksiyaning xossalaridan foydalaniladi.

1. Eng sodda ko‘rsatkichli tenglamani qaraylik:

$$a^x = b, \qquad (1)$$

bunda $a > 0$ va $a \neq 1$. $y = a^x$ ko‘rsatkichli funksiyaning aniqlanish sohasi musbat sonlar to‘plamidan iborat bo‘lishini e’tiborga olsak, (1) tenglama $b < 0$ yoki $b = 0$ bo‘lganda yechimga ega emas.

$b > 0$ bo‘lsin. $y = a^x$ funksiya $(-\infty; +\infty)$ oraliqda $a > 1$ bo‘lganda o‘suvchi ($0 < a < 1$ da kamayuvchi) bo‘lib, barcha musbat sonlarni qabul qiladi. Bunday holda $a > 0$, $a \neq 1$ va $b > 0$ bo‘lganda (1) tenglama yagona ildizga ega bo‘ladi. Uni topish uchun b ni $b = a^c$ ko‘rinishda tasvirlash kerak. Ravshanki, c soni $a^x = a^c$ tenglamaning yechimi $x = c$ bo‘ladi (VI bob, 75- rasm). Bordi-yu b ni $b = a^c$ ko‘rinishda ifodalab bo‘lmasa va $b > 0$ bo‘lsa, u holda (1) tenglama $x = \log_a b$ yagona yechimga ega bo‘ladi.

1-misol. $49^x = \frac{1}{343}$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani ikki usul bilan yechamiz.

1-usul. $49^x = 343^{\ 1} \Rightarrow (7^2)^x = (7^3)^{-1} \Rightarrow 7^{2x} = 7^{-3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

2-usul. $x = \log_{49} \frac{1}{343} = -\log_{49} 343 = -\log_{7^2} 343 =$

$$= -\frac{1}{2}\log_7 7^3 = -\frac{3}{2}\log_7 7 = -\frac{3}{2}.$$

Javob. $x = -\frac{3}{2}.$

2-misol. $4^{x+2} - 10 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{x+3} - 11 \cdot 2^{2x}$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani (1) ko'rinishga keltirib, yechimini topamiz:

$$4^{x+2} + 11 \cdot 2^{2x} = 2 \cdot 3^{x+3} + 10 \cdot 3^x \Rightarrow 4^x(4^2 + 11) =$$

$$= 3^x(2 \cdot 3^3 + 10) \Rightarrow 27 \cdot 4^x = 64 \cdot 3^x \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow x = 3.$$

Javob. $x = 3.$

3-misol. $10^{4x} = 5{,}75$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani $a^x = a^c$ ko'rinishga keltirib bo'lmaydi. Bunday hollarda tenglamani logarifm jadvallari yoki mikrokalkulator yordamida yechish mumkin:

$$10^{4x} = 5{,}75 \Rightarrow 4x \lg 10 = \lg 5{,}75 \Rightarrow 4x = \lg 5{,}75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\lg 5{,}75}{4} = \frac{0{,}7597}{4} = 0{,}1899.$$

Javob. $x \approx 0{,}1899.$

2. Ushbu

$$a^{f(x)} = b \ (a > 0,\ a \neq 1) \qquad (2)$$

ko'rinishdagi tenglama $t = f(x)$ almashtirish bilan (1) ko'rinishga keltiriladi.

4-misol. $3^{x^2-1} = 27$ tenglamani yeching.

Yechish. 1-usul. $x^2 - 1 = t$ desak, berilgan tenglama $3^t = 27$ ko'rinishni oladi. Bu tenglama $t = 3$ ildizga ega.

Bundan

$$x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 2$$

ni topamiz.

Bunday almashtirishning zaruriyati ham yo‘q. Berilgan tenglamani to‘g‘ridan to‘g‘ri ham yechish mumkin.

2-usul. $3^{x^2-1}=3^3 \Rightarrow x^2-1=3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=2.$

3-usul. $x^2-1=\log_3 27 \Rightarrow x^2-1=3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=-2,\ x_2=2.$

3. Ushbu

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \quad (a>0,\ a\neq 1) \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi tenglamani qaraylik.

(3) tenglamani yechish quyidagi teoremaga asoslanadi.

1-teorema. ***Agar $a>0$, $a\neq 1$ bo‘lsa, u holda (3) tenglama $f(x)=g(x)$ tenglamaga teng kuchli bo‘ladi.***

5-misol. $2^{x^2}\cdot 5^{x^2}=0{,}001\cdot(10^{3-x})^2$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani (3) ko‘rinishga keltiramiz:

$$(2\cdot 5)^{x^2}=10^{-3}\cdot 10^{6-2x} \Rightarrow 10^{x^2}=10^{3-2x}.$$

Teoremaga ko‘ra $x^2=3-2x$ tenglamaga ega bo‘lamiz va uni yechamiz:

$$x^2+2x-3=0,$$
$$x_1=-3,\quad x_2=1.$$

Ikkala topilgan ildiz ham berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $x=-3$ va $x=1$.

6-misol. $(0{,}6)^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani ham (3) ko‘rinishga keltirib olamiz:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2(x^2-12)}=\left(\frac{3}{5}\right)^9 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{24-2x^2}=\left(\frac{3}{5}\right)^9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{24-2x^2+x}=\left(\frac{3}{5}\right)^9 \Rightarrow 24-2x^2+x=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 15 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{4} = \frac{1 \pm 11}{4},$$

$$x_1 = -\frac{5}{2},\ x_2 = 3.$$

Ikkala ildiz ham berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $x_1 = -\frac{5}{2}$ va $x_2 = 3$.

4. (3) tenglamaning umumiyroq holini qaraymiz.

$$a^{f(x)} = b^{\varphi(x)}, \qquad (4)$$

bunda $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ f(x)$ va $\varphi(x)$ —berilgan funksiyalar.

(4) tenglamani biror c $(c > 1,\ c \neq 1)$ asosga ko‘ra logarifmlab,

$$f(x) \log_c a = \varphi(x) \log_c b \qquad (5)$$

ko‘rinishga keltiramiz.

Agar (5) tenglamani yechish imkoniyati bo‘lsa, u holda (4) tenglamani yechgan bo‘lamiz.

7-misol. $7x = 5^{x+1}$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning har ukkala qismini 5 asosga ko‘ra logarifmlaymiz: $x \log_5 7 = (x+1)\log_5 5$, bu yerdan x ni topamiz:

$$x = \frac{1}{\log_5 7 - 1} = \frac{1}{\log_5 7 - \log_5 5} = \frac{1}{\log_5 \frac{7}{5}} = \log_{\frac{7}{5}} 5.$$

Javob. $x = \log_{\frac{7}{5}} 5$.

5. Ushbu

$$F(a^{f(x)}) = 0 \ (a > 0,\ a \neq 1) \qquad (6)$$

ko‘rinishdagi tenglama $a^{f(x)} = t$ almashtirish bilan $f(t) = 0$ tenglamaga keltiriladi; undan keyin esa $f(t) = 0$ tenglama $a^{f(x)} = t_1,\ a^{f(x)} = t_2,\ \ldots,\ a^{f(x)} = t_n$ tenglamalar to‘plamiga keltiriladi, bunda $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ — $F(t) = 0$ tenglamaning ildizlari. Agar bu tenglamalarni yechish imkoniyati bo‘lsa, u holda (6) tenglamani ham yechish imkoniyati bo‘lib qolishi mumkin.

8-misol. $2^{x^2+1}+2^{x^2\;1}=40$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning ko‘rinishini o‘zgartiramiz:

$$2^{x^2}\cdot 2+2^{x^2}\cdot\frac{1}{2}=40,$$

$2^{x^2}=t$ desak,

$$2t+\frac{1}{2}t=40\Rightarrow\frac{5}{2}t=40\Rightarrow t=16$$

bo‘ladi. Bundan

$$2^{x^2}=16\Rightarrow 2^{x^2}=2^4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x_1=-2,\ x_2=2.$$

Ikkala ildiz ham berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $x=-2$ va $x=2$.

6. Ko‘pchilik tenglamalar

$$a^{2x}+a^x=b \tag{7}$$

ko‘rinishdagi tenglamaga keltiriladi. (7) tenglama esa $a^x=t$ almashtirish bilan $t^2+t-b=0$ kvadrat tenglamaga keltiriladi. Bu kvadrat tenglamaning t_1 va t_2 ildizlari topiladi. Natijada (7) tenglamani yechish $a^x=t_1$ va $a^x=t_2$ sodda tenglamalarni yechishga keltiriladi.

9-misol. $3^{2x}-5\cdot 3^x+6=0$ tenglamani yeching.

Yechish. $3^x=t$ desak, $t^2-5t+b=0$ kvadrat tenglamaga ega bo‘lamiz.

Uning ildizlari $t_1=2$ va $t_2=3$ bo‘ladi. Endi quyidagi sodda tenglamalarni yechamiz: 1) $3^x=3$, $x_1=1$; 2) $3^x=2$, $x_2=\log_3 2$.

Topilgan ikkala ildiz ham berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $x=1$ va $x_2=\log_3 2$.

10-misol. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamaning ko‘rinishini o‘zgartirib, yangi o‘zgaruvchi kiritamiz:

$$9^{x^2}\cdot 9^{-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0\Rightarrow\frac{1}{9}\cdot 3^{2x^2}-36\cdot\frac{1}{27}\cdot 3^{x^2}+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{2x^2}-12\cdot 3^{x^2}+27=0.$$

Agar $3^{x^2} = y$ desak, yangi y o‘zgaruvchiga nisbatan $y^2 - 12y + 27 = 0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu tenglama $y_1 = 3$, $y_2 = 9$ ildizlarga ega. Bunday holda quyidagi sodda ko‘rsatkichli tenglamalarga ega bo‘lamiz va ularni yechamiz:

$$3^{x^2} = y_1 \Rightarrow 3^{x^2} = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 1;$$

$$3^{x^2} = y_1 \Rightarrow 3^{x^2} = 9 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{2};\ x_4 = \sqrt{2}.$$

Topilgan to‘rtala ildiz ham berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $x = -\sqrt{2};\ x = -1,\ x = 1,\ x = \sqrt{2}.$

11-misol. $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$ tenglamani yeching.

Yechish. $2+\sqrt{3} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \left(2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$ tenglikdan foydalanamiz:

$$(2+\sqrt{3})^x + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^x} = 4.$$

Agar $(2+\sqrt{3})^x = y$ desak, y ga nisbatan $y^2 - 4y + 1 = 0$ tenglamaga ega bo‘lamiz va uni yechamiz: $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$, $y_1 = 2-\sqrt{3}$, $y_2 = 2+\sqrt{3}$.

Endi quyidagi sodda tenglamalarni yechamiz:

1) $(2+\sqrt{3})^x = y_1,$

$(2+\sqrt{3})^x = 2-\sqrt{3},$

$(2+\sqrt{3})^x = (2+\sqrt{3})^{-1},$

$x_1 = -1.$

2) $(2+\sqrt{3})^x = y_2,$

$(2+\sqrt{3})^x = 2+\sqrt{3},$

$x_2 = 1.$

Ikkala topilgan ildiz ham berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $x = -1$ va $x = 1$.

7. Ko'rsatkichli tenglamalarni ko'paytuvchilarga ajratish bilan ham yechish mumkin.

12-misol. $5^{1+2x}+6^{1+x}=30+150^x$ tenglamani yeching.

Yechish. $5^{1+2x}=5\cdot 25^x$, $6^{1+x}=6\cdot 6^x$, $150^x=6^x\cdot 25^x$ bo'lishini e'tiborga olsak, berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi: $5\cdot 25^x+6\cdot 6^x-6^x\cdot 25^x-30=0$.

Bu tenglamaning chap qismini guruhlab ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$5(25^x-6)-6^x(25^x-6)=0,\quad (25^x-6)(5-6^x)=0.$$

Bu tenglama ikkita tenglamaga ajraladi:

1) $25^x-6=0$, $\quad$ 2) $5-6^x=0$,

$25^x=6$, $\quad 6^x=5$,

$x_1=\frac{1}{2}\log_5 6$; $\quad x_2=\log_6 5$.

Topilgan ikkala ildiz ham berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $x=\frac{1}{2}\log_5 6$, $x_2=\log_6 5$.

8. Ushbu

$$a^x+b^x=c^x \tag{8}$$

ko'rinishdagi tenglamani bir xil asosli ko'rsatkichli tenglamaga keltirish *a*, *b* va *c* asoslar orasidagi munosabatlarga bog'liq. Agar *a*, *b* va *c* sonlar biror geometrik progressiyaning ketma-ket uchta hadini tashkil qilsa, ya'ni $a^2=bc$ ($b^2=ac$, $c^2=ba$) tenglik bajarilsa, (8) tenglamani bir xil asosli ko'rsatkichli tenglamaga keltirish mumkin.

13-misol. $16^x+36^x=2\cdot 81^x$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani (8) tenglama bilan taqqoslasak, $a=16$, $b=36$, $c=81$ bo'lib, $b^2=ac\Rightarrow 36^2=16\cdot 81$ tenglik bajariladi. Berilgan tenglamani bir xil asosli ko'rsatkichli tenglamaga keltirish mumkin. Buning uchun tenglamaning har ikkala qismini $36x$ ga hadlab bo'lamiz:

$$\left(\frac{16}{36}\right)^x+1=2\left(\frac{81}{36}\right)^x\Rightarrow\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}+\left(\frac{4}{9}\right)^x-2=0.$$

Agar $\left(\frac{4}{9}\right)^x = y$ desak, $y^2 + y - 2 = 0$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Uning ildizlari $y_1 = 1$, $y_2 = -2$ bo‘ladi. Endi quyidagi sodda tenglamalarni yechamiz:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = y_1 \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^0 = x = 0.$$

$\left(\frac{4}{9}\right)^x = y_2 \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = -2$ — bu tenglama yechimga ega emas.

Javob. $x = 0$.

14-misol. $3^x + 4^x = 5^x$ tenglamani yeching.

$a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Berilgan asoslar uchun $a^2 = bc$, $b^2 = ac$, $c^2 = ab$ tengliklarning birortasi ham bajarilmaydi. Shuning uchun berilgan tenglamani bir xil asosli ko‘rsatkichli tenglamaga keltirib bo‘lmaydi. Sinash usuli bilan berilgan tenglama $x = 2$ yechimga ega ekanligini topamiz. Bu yechimning yagona ekanligini $y_1 = 5^x$ va $y_1 = 3^x + 4^x$ funksiyalarning grafiklarini yasab, ular faqat bitta $x = 2$ abssissali nuqtada kesishishini ko‘rsatish bilan isbotlash mumkin.

2. Daraja-ko‘rsatkichli tenglama. Ushbu

$$(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)} \qquad (9)$$

ko‘rinishdagi tenglama *daraja-ko‘rsatkichli tenglama* deyiladi.

Agar $f(x) > 0$ va $f(x) \neq 1$ bo‘lsa, u holda tenglama ko‘rsatkichli tenglamadek, ko‘rsatkichlarini tenglashtirish bilan yechiladi: $g(x) = h(x)$. Agar $f(x) \leq 0$ yoki $f(x) = 1$ bo‘lib qolsa, bunday holda bir qancha hollarni qarashga to‘g‘ri keladi. Buni aniq misollarda qaraymiz.

15-misol. $(3x-4)^{2x^2+2} = (3x-4)^{5x}$ tenglamani yeching.

Yechish. 1) $3x - 4 = 1$ bo‘lsin. $3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.

Bu holda berilgan tenglama $1^{2x^2+2}=1^{5x}$ ko'rinishni oladi. $3x=5$ tenglamaning $x=\frac{5}{3}$ yechimi berilgan tenglamaning ham yechimi bo'ladi: $x_1=\frac{5}{3}$.

2) $3x-4=-1$ bo'lsin. Bu holda berilgan tenglama

$$(-1)^{2x^2+2}=(-1)^{5x} \qquad (10)$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamani x ning shunday qiymatlari qanoatlantiradiki, $2x^2+2$ va $5x$ ifodalarning qiymatlari butun sonlar bo'lib, ikkalasining ham butun quymatlari yo juft, yoki toq bo'lishi kerak (chunki (-1) ni butun darajaga ko'tarish ma'noga ega). $3x-3=0$ tenglamani yechamiz. U $x=1$ ildizga ega. $x=1$ qiymat (10) tenglamani qanoatlantirmaydi. Shuning uchun $x=1$ qiymat berilgan tenglamaning ildizi bo'lmaydi.

3) $3x-4=0$ bo'lsin. Bu holda berilgan tenglama $0^{2x^2+2}=0^{5x}$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamani $2x^2+2>0$ va $5x>0$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan x ning qiymatlari qanoatlantiradi (chunki 0^r ifoda $r>0$ bo'lganda ma'noga ega). $3x-4=0$ tenglamaning $x=\frac{4}{3}$ ildizi uchun $2x^2+2>0$ va $5x>0$ shartlar bajariladi. Demak, x ning bu qiymati berilgan tenglamaning ildizi bo'ladi: $x_2=\frac{4}{3}$.

4) $3x-4>0$ va $3x-4\neq 1$ bo'lsa, bunday holda berilgan tenglama $2x^2+2=5x$ tenglamani yechish bilan teng kuchli bo'ladi. Bu tenglamani yechamiz:

$$2x^2-5x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=$$
$$=\frac{5\pm3}{4}\Rightarrow x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2}.$$

$x_2=\frac{1}{2}$ berilgan tenglamani qanoatlantirmaydi. Chunki qaralayotgan holda $\left(-\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}=\left(-\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$ munosabat hosil bo'ladi.

Haqiqiy sonlar to‘plamida manfiy sonning maxraji juft son bo‘lgan kasr darajasi qaralmaydi. $x_3 = 2$ soni berilgan tenglamani qanoatlantiradi. Shunday qilib, berilgan tenglama uchta ildizga ega: $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = 2$.

16-misol. $|x|^{x^2-2x} = 1$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning ikkala qismini 10 asosga ko‘ra logarifmlaymiz: $(x^2 - 2x)\lg|x| = 0$.

Bu tenglama quyidagi ikkita tenglamaga ajraladi:

1) $x^2 - 2x = 0.$	2) $\lg|x| = 0,$
$x(x-2) = 0,$	$|x| = 1,$
$x_1 = 0,\ x_2 = 2;$	$x_3 = 1,\ x_4 = -1.$

x ning topilgan qiymatlaridan $x = 0$ berilgan tenglamani qanoatlantirmaydi (0^0 noaniq munosabat vujudga keladi). Shunday qilib, berilgan tenglama uchta ildizga ega: $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

3. Logarifmik tenglamalar va ularni yechish usullari. Noma’lum logarifm belgisi ostida ishtirok etadigan tenglamalar *logarifmik tenglamalar* deyiladi.

Masalan,

$$\lg x = 3,\quad \log_3(x^2 - 12x + 35) - \log_3(x - 6) = 3,$$

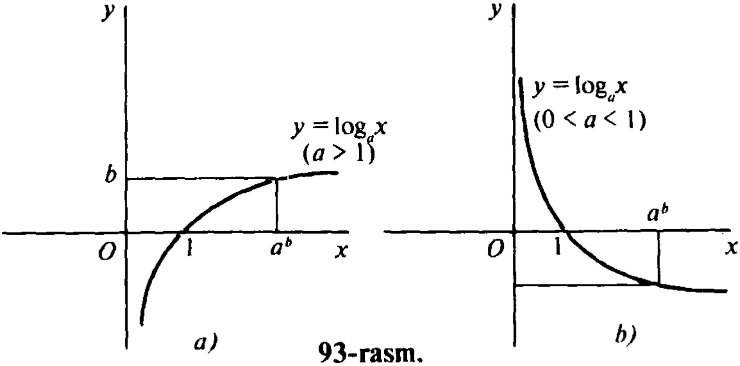
$$\log_{x^2}(x-1) + \log_{x-1} x^2 = 2.$$

Logarifmik tenglamalarni yechishning bir umumiy isuli mavjud emas. Har bir logarifmik tenglamani yechish alohida fikr va mulohaza yuritishni talab qiladi. Logarifmik tenglamalar ham ko‘rsatkichli tenglamalar kabi faqat haqiqiy sonlar to‘plamida qaraladi. Noma’lumning topilgan qiymatlari tenglamaning sharti bo‘yicha albatta tekshirilib ko‘riladi.

1. Eng sodda

$$\log_a x = b \tag{11}$$

logarifmik tenglamani qaraymiz. Ma’lumki logarifmik funksiya $(0; +\infty)$ oraliqda o‘sadi (kamayadi) va shu oraliqda barcha haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi. Agar b soni



93-rasm.

$y = \log_a x$ funksiyaning $(-\infty; +\infty)$ oraliqda qabul qiladigan qiymatlaridan biri bo'lsa, u holda (11) tenglama $(0; +\infty)$ oraliqda bittagina ildizga ega bo'ladi. Bu ildiz (son) logarifmning ta'rifiga ko'ra, a^b dan iborat bo'ladi (93- *a*, *b* rasm).

17-misol. $\log_{\sqrt{2}} \frac{x^2-4x+3}{4} = -2$ tenglamani yeching.

Yechish. Logarifmning ta'rifiga ko'ra

$$\frac{x^2-4x+3}{4} = (\sqrt{2})^{-2} \Rightarrow \frac{x^2-4x+3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamani yechamiz:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}; \ x_1 = 2 - \sqrt{3}; \ x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Topilgan ikkala ildiz ham berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $x = 2 - \sqrt{3}$ va $x = 2 + \sqrt{3}$.

18-misol. $\lg(x-5)^2 + \lg(x+6)^2 = 2$ tenglamani yeching

Yechish. Darajani logarifmlash qoidasini qo'llab, potensirlab,

$$2\lg|x-5| + 2\lg|x+6| = 2 \Rightarrow |x-5| \cdot |x+6| = 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x^2 + x - 30| = 10$$

tenglamani olamiz:

1) agar $x^2+x-30<0$ bo'lsa, u holda

$$x^2+x-30=-10 \Rightarrow x^2+x-20=0$$

bo'ladi. Bundan $x_1=-5$, $x_2=4$ ni topamiz;

2) agar $x^2+x-30>0$ bo'lsa, u holda $x^2+x-30=10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+x-40=0$ bo'ladi. Bu tenglamani yechib, $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{161}}{2}$ ni topamiz.

Topilgan barcha ildizlar berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $x_1=-5$; $x_2=4$; $x_3=\frac{-1-\sqrt{161}}{2}$; $x_4=\frac{-1+\sqrt{161}}{2}$.

2. Ushbu

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \quad (a>0,\ a\neq 1) \qquad (12)$$

tenglamani qaraymiz. (12) tenglamani yechish quyidagi teoremaga asoslanadi.

2-teorema. ***(12) tenglamani yechish***

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases} \qquad (13)$$

aralash sistemani yechish bilan teng kuchli bo'ladi.

19-misol. $\log_4 \frac{2}{x-1}=\log_4(4-x)$ tenglamani yeching.

Yechish. Teoremaga ko'ra

$$\begin{cases} \frac{2}{x-1}=4-x, \\ \frac{2}{x-1}>0, \\ 4-x>0 \end{cases}$$

aralash sistemani olamiz.

Tenglamaning aniqlanish sohasini topaylik. Buning uchun aralash sistemaning keyingi ikkita tengsizliklaridan tashkil topgan tengsizliklar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} \frac{2}{x-1} > 0, \\ 4-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1>0, \\ x-4<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 4.$$

Endi aralash sistema tarkibidagi tenglamani yechamiz:

$$\frac{2}{x-1} = 4-x \Rightarrow 2 = (4-x)(x-1) \Rightarrow 2 = 4x - x^2 - 4 + x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Bu tenglama $x_1 = 2$ va $x_2 = 3$ ildizlarga ega. Ikkala topilgan ildiz ham tenglamaning aniqlanish sohasiga tegishli. Demak, berilgan tenglama $x_1 = 2$ va $x_2 = 3$ ildizlarga ega.

3. Logarifmlik tenglamalarni yechishda logarifmning turli xossalaridan foydalaniladi.

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a \varphi(x) \qquad (14)$$

tenglamani yechishda bu tenglama

$$\log_a [f(x) \cdot g(x)] = \log_a \varphi(x) \qquad (15)$$

ko‘rinishga keltiriladi. Ammo (14) va (15) tenglamalar teng kuchli bo‘lmasligi mumkin. Chunki $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ ifodaning aniqlanish sohasi $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradigan x sonlar to‘plamidan iborat bo‘ladi. $\log_a [f(x) \cdot g(x)]$ ifodaning aniqlanish sohasi $f(x) \cdot g(x) > 0$ tengsizlik bilan berilib, bu tengsizlik esa ikkita $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ va $= \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasiga teng kuchli bo‘ladi. Shunday qilib, (14) tenglamadan (15) tenglamaga o‘tganda (14) tenglamaning aniqlanish sohasi kengayar ekan. Chet ildizlar paydo bo‘lishi mumkin. Shunday ekan, (15) tenglamani yechib, uning ildizlarini topgandan keyin, bu ildizlardan (15) tenglamaning aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lganlarini ajratib olish kerak, ya'ni topilgan yechimlardan $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradiganlarini ajratib olish lozim. Bunday tekshirish logarifmik tenglamalarni yechishning ajralmas qismini tashkil qiladi.

20-misol. $\log_5(3x - 11) + \log_5(x - 27) = 3 + \log_5 8$ tenglamani yeching.

Yechish. Avvalo berilgan tenglamaning aniqlanish sohasini topamiz. Buning uchun quyidagi tengsizliklar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} 3x - 11 > 0, \\ x - 27 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > 11, \\ x > 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > \frac{11}{3}, \\ x > 27 \end{cases} \Rightarrow x > 27.$$

Endi berilgan tenglamaning chap va o'ng qismini potensirlab, uni yechamiz:

$$\log_5(3x - 11) + \log_5(x - 27) = \log_5 125 + \log_5 8,$$

$$\log_5(3x - 11)(x - 27) = \log_5(125 \cdot 8),$$

$$(3x - 11)(x - 27) = 1000,$$

$$3x^2 - 92x - 703 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{46 \pm \sqrt{2116 + 2109}}{3} = \frac{46 \pm \sqrt{4225}}{3} = \frac{46 \pm 65}{3},$$

$$x_1 = 37, \; x_2 = -\frac{19}{3}.$$

Tenglama shartini faqat $x_1 = 37$ ildiz qanoatlantiradi.

$x_2 = -\frac{19}{3}$ esa chet ildizlar.

Demak, berilgan tenglama bitta yechimga ega: $x = 37$.

4. Ushbu

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \qquad (16)$$

ko'rinishdagi tenglamaga keladigan tenglamalarni yechishda logarifmik funksiyaning asosiga qo'yiladigan shartlarni ham e'tiborga olish kerak: $a(x) > 0$, $a(x) \neq 1$.

21-misol. $\log_{x-1}(x^2-5x+10)=2$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani x ning $x-1>0$ va $x-1\neq 1$ shartlar va $(x^2-5x+10)=(x-1)^2$ tenglik bajariladigan qiymatlarigina qanoatlantiradi. Hosil bo‘lgan tenglama birgina $x=3$ ildizga ega. Bu ildiz qo‘yilgan shartlarning barchasini qanoatlantiradi. Demak, berilgan tenglama $x=3$ ildizga ega.

5. Ushbu

$$f(\log_a\varphi(x))=0 \tag{17}$$

ko‘rinishdagi tenglama $\log_a\varphi(x)=t$ almashtirish bilan $f(t)=0$ ko‘rinishga keladi. (17) tenglamadagi $f(t)$ va $\varphi(x)$ — berilgan funksiyalardir.

22-misol. $\frac{1}{5-4\lg(x+1)}+\frac{5}{1+4\lg(x+1)}=2$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasiga x ning $x+1>0$ tengsizlikni va $5-4\lg(x+1)\neq 0$, $1+4\lg(x+1)\neq 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi qiymatlari kiradi.

Agar $\lg(x+1)=t$ desak, berilgan tenglama t ga nisbatan $\frac{1}{5-4t}+\frac{5}{1+4t}=2$ ko‘rinishni oladi. Bu tenglamani yechib, uning ildizlarini topamiz: $t_1=-\frac{1}{2}$, $t_2=1$.

Endi quyidagi sodda tenglamalarni yechamiz:

$$\lg(x+1)=1, \qquad \lg(x+1)=\frac{1}{2},$$

$$x+1=10, \qquad x+1=10^{\frac{1}{2}},$$

$$x_1=9; \qquad x_2=-1+10^{\frac{1}{2}}.$$

Bu topilgan ildizlarning ikkalasi ham tenglama aniqlanish sohasiga oid shartlarning barchasini qanoatlantiradi. Demak, tenglama ikkita yechimga ega: $x_1=9$, $x_2=-1+10^{\frac{1}{2}}$.

23-misol. $\lg(10x)\cdot\lg(0{,}1x)=\lg x^3-3$ tenglamani yeching.

Yechish. x noma’lumga berish mumkin bo‘lgan qiymatlar $x>0$ tengsizlikni qanoatlantirishi kerak. Tenglamaning ko‘rinishini o‘zgartiramiz. $\lg x = t$ desak, t ga nisbatan $(1+t)(t-1) = 3t-3$ tenglamani olamiz. Bu tenglamani yechib, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ ildizlarni topamiz.

Endi quyidagi sodda tenglamalarni yechamiz:

1) $\lg x = 1$, 2) $\lg x = 2$,

$x_1 = 10$; $x_2 = 100$.

Bu ildizlar $x > 0$ shartni qanoatlantiradi. Demak, ular berilgan tenglamaning ildizlari bo‘ladi.

4. Logarifm-ko‘rsatkichli tenglama. Agar noma’lum daraja ko‘rsatkichda logarifm belgisi ostida ishtirok etsa, u holda bunday tenglamalar *logarifm-ko‘rsatkichli tenglamalar* deyiladi. *Logarifm-ko‘rsatkichli* tenglamalar ko‘pchilik hollarda uning ikkala qismini logarifmlab, logarifmik tenglamalarga keltirilib yechiladi.

24-misol. $x^{\log_2 x^3 \cdot \log_2^2 x - 3} = x^{-1}$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi, ya’ni x noma’lumga berish mumkin bo‘lgan qiymatlar $x > 0$ tengsizlikni qanoatlantirishi kerak.

Berilgan tenglamaning ikkala qismini 2 asosga ko‘ra logarifmlaymiz:

$$(3\log_2 x - \log_2^2 x - 3)\log_2 x = -\log_2 x,$$

$$\log_2 x(3\log_2 x - \log_2^2 x - 2) = 0.$$

Bu tenglama quyidagi ikkita tenglamaga tarqaladi:

1) $\log_2 x = 0 \Rightarrow x_1 = 2^0 \Rightarrow x_1 = 1$;

2) $3\log_2 x - \log_2^2 x - 2 = 0 \Rightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1, \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Topilgan barcha ildizlar tenglamaning aniqlanish sohasiga tegishli va ular tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$.

25-misol. $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$(6^{\log_6 x})^{\log_6 x}+x^{\log_6 x}=12.$$

Asosiy logarifmik ayniyatdan foydalansak, $6^{\log_6 x}=x$ ekanligidan

$$x^{\log_6 x}+x^{\log_6 x}=12 \Rightarrow x^{\log_6 x}=6.$$

Bu tenglamaning ikkala qismini 6 asosga ko‘ra logarifmlab, $\log_6^2 x=1$ tenglamani olamiz. Bundan $\log_6 x=-1$ va $\log_6 x=-1$ tenglamalarni yechib, $x_1=\frac{1}{6}$ va $x_2=6$ ni topamiz.

Berilgan tenglama $x>0$ bo‘lganda aniqlangan bo‘ladi. Bu shartni topilgan yechimlar qanoatlantiradi.

Javob. $x_1=\frac{1}{6}$, $x_2=6$.

26-misol. $6^{\log_2 \frac{x}{98}}\cdot 14^{\log_2 7}=1$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $x>0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonlar to‘plamidan iborat. Berilgan tenglamaning ikkala qismini 2 asosga ko‘ra logarifmlab, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\log_2^2 x-(1+2\log_2 7)\log_2 x+\log_2 7+\log_2^2 7=0.$$

Bu tenglamada $\log_2 x=y$ desak,

$$y^2-(1+2\log_2 7)y+\log_2 7=0$$

kvadrat tenglamani olamiz. Uni yechib, topamiz: $y_1=\log_2 7$, $y_2=1+\log_2 7$. Endi quyidagi soddaroq tenglamalarni yechamiz:

1) $\log_2 x=y_1$,	2) $\log_2 x=y_2$,
$\log_2 x=\log_2 7$,	$\log_2 x=1+\log_2 7$,
$x_1=7$;	$\log_2 x=\log_2 14$,
	$x_2=14$.

Topilgan ikkala ildiz ham tenglamaning aniqlanish sohasiga tegishli. Tenglama ikkita yechimga ega: $x_1=7$, $x_2=14$.

2-§. Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalar sistemalari

Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalar sistemasini yechishda ham algebraik tenglamalar sistemalarini yechishda qo'llanilgan usullardan (o'zgaruvchilarni almashtirish, algebraik qo'shish, yangi noma'lum kiritish va h.k.) foydalanish mumkin. Bunda birorta usulni sistemani yechishga qo'llashdan oldin sistema tarkibiga kirgan har bir tenglamani soddaroq ko'rinishga keltirish lozim.

1-misol. $\begin{cases} 64^{2x}+64^{2y}=12, \\ 64^{x+y}=4\sqrt{2} \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. $u=64^x$, $\upsilon=64^y$ desak, u va υ ga nisbatan

$$\begin{cases} u^2+\upsilon^2=12, \\ u\upsilon=4\sqrt{2} \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bu sistema 4 ta yechimga ega:

$$\begin{cases} u_1=2, \\ \upsilon_1=2\sqrt{2}; \end{cases} \begin{cases} u_2=2\sqrt{2}, \\ \upsilon_2=2; \end{cases} \begin{cases} u_3=-2, \\ \upsilon_3=-2\sqrt{2}; \end{cases} \begin{cases} u_4=-2\sqrt{2}, \\ \upsilon_4=-2. \end{cases}$$

Ammo $u=64^x$, $\upsilon=64^y$ bo'lgani uchun, $u>0$, $\upsilon>0$ bo'ladi. Shuning uchun topilgan 4 ta yechimdan dastlabki 2 tasini olamiz. Demak, berilgan sistemani yechish quyidagi 2 ta tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi:

$$\begin{cases} 64^x=2, \\ 64^y=2\sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 64^x=2\sqrt{2}, \\ 64^y=2. \end{cases}$$

Birinchi sistemani yechib, $x_1=\frac{1}{6}$, $y_1=\frac{1}{4}$ ni, ikkinchi sistemani yechib esa $y_2=\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{1}{6}$ ni topamiz.

Javob. $\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{4}\right)$ va $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{6}\right)$.

2-misol. $\begin{cases} x^y = 40, \\ x^{\lg y} = 4 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Berilgan sistema tenglamalarining aniqlanish sohasi koordinatalar tekisligining $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$ shartlarni qanoatlantiradigan nuqtalari to‘plamidan iborat. Sistema tenglamalarining har birini 10 asosga ko‘ra logarifmlaymiz va quyidagi sistemani olamiz:

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 1 + \lg 4, \\ \lg x \cdot \lg y = \lg 4. \end{cases}$$

Bu sistemani kvadrat tenglama ildizlarining xossalaridan foydalanib yechish mumkin. Bunda $\lg x$ va $\lg y$ lar

$$t^2 - (1 + \lg 4)t + \lg 4 = 0$$

tenglamaning ildizlari bo‘ladi. Bu tenglamaning ildizlarini topamiz: $t_1 = 1$, $t_2 = \lg 4$. Natijada berilgan sistemani yechish, quyidagi ikkita tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi:

$$\begin{cases} \lg x = 1, \\ \lg y = \lg 4; \end{cases} \begin{cases} \lg y = \lg 4, \\ \lg y = 1. \end{cases}$$

Birinchi sistema $x_1 = 10$, $y_1 = 4$; ikkinchi sistema esa $x_2 = 4$, $y_2 = 10$ yechimga ega.

Bu yechimlar berilgan sistema tenglamalarini qanoatlantiradi.

Javob. (10; 4) va (4; 10).

3-misol. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{y}} = x^4 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistemaning ikkinchi tenglamasidan $y > 0$ bo‘lishi, birinchisidan esa $x > 0$ bo‘lishi kelib chiqadi. Sistema tenglamalarining har birining ikkala qismini 10 asosga ko‘ra logarifmlaymiz: $\begin{cases} \sqrt{y} \lg x = \lg y, \\ \sqrt{y} \lg y = 4 \lg x. \end{cases}$

Bu sistemaning ikkinchi tenglamasidan foydalanib, lg$x$ ni lg$y$ orqali ifodalash mumkin: $\lg x = \frac{1}{4}\sqrt{y}\lg y \cdot \lg x$ ning bu ifodasini sistemaning birinchi tenglamasidagi lg$x$ ning o‘rniga qo‘yamiz:

$$\sqrt{y} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{y}\lg y = \lg y \Rightarrow \frac{1}{4}y\lg y - \lg y = 0 \Rightarrow \lg y\left(\frac{y}{4} - 1\right) = 0.$$

Oxirgi tenglama ikkita tenglamaga ajraladi: $\lg y = 0$ va $\frac{y}{4} - 1 = 0$. Bu tenglamalarni yechib, topamiz: $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Uning topilgan qiymatlariga mos keluvchi x ning qiymatlarini topamiz: $y = 1$ bo‘lganda $\lg x = 0$ bo‘ladi. Bundan $x_1 = 1$ bo‘lishi kelib chiqadi. $y = 4$ bo‘lganda $\lg x = \lg 2$ bo‘lib, $x_2 = 2$ bo‘ladi.

Bu topilgan $x_1 = 1$ va $y_1 = 1$, $x_2 = 2$ va $y_2 = 4$ juftlar berilgan sistema tenglamalarini qanoatlantiradi.

Javob. (1; 1) va (2; 4).

4-misol. $\begin{cases} \log_{0,5}(y - x) - \log_2 \frac{1}{y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. $\log_{0,5}(y - x)$ ifodada 2 asosga o‘tamiz:

$$\log_{\frac{1}{2}}(y - x) = \frac{\log_2(y - x)}{\log_2 2^{\,l}} = -\log_2(y - x),$$

bu tenglikdan foydalanib, sistemaning birinchi tenglamasidan y ni x orgali ifodalaymiz:

$$\log_2(y - x) + \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2 \frac{y}{y - x} = 2 \Rightarrow \frac{y}{y - x} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 4y - 4x \Rightarrow 3y = 4x \Rightarrow \frac{4}{3}x.$$

y uchun topilgan ifodani sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo‘yib topamiz:

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 25 \Rightarrow 25x^2 = 25 \cdot 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3; \; y_{1,2} = \pm 4.$$

Sistema tenglamalarining aniqlanish sohasidan $y-x>0$ yoki $y>x$ va $y>0$ bo‘lishi kelib chiqadi. x va y ning topilgan qiymatlaridan 3 va 4 bu shartlarni bajaradi. Demak, sistema birgina (3; 4) juftdan iborat bo‘lgan yechimga ega.

5-misol. $\begin{cases} \log_4 xy + 3\dfrac{\log_4 x}{\log_4 y} = 0, \\ \log_4 \dfrac{x}{y} - \log_4 x \cdot \log_4 y = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema tenglamalarining ko‘rinishini o‘zgartiramiz:

$$\begin{cases} \log_4 x \cdot \log_4 y + \log_4^2 y + 3\log_4 x = 0, \\ \log_4 x - \log_4 y - \log_4 x \cdot \log_4 y = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Bu sistema tenglamalarini hadlab qo‘shib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$\log_4^2 y - \log_4 y + 4\log_4 x = 0 \Rightarrow \log_4 x = \frac{1}{4}(\log_4 y - \log_4^2 y).$$

$\log_4 x$ ning topilgan ifodasini (*) sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo‘yamiz va $\log_4^3 y - 2\log_4^2 y - 3\log_4 y = 0$ tenglamani hosil qilamiz, uni ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$\log_4 y(\log_4^2 y - 2\log_4 y - 3) = 0,$$

$$\log_4 y(\log_4 y - 3)(\log_4 y + 1) = 0.$$

Bu tenglama uchta tenglamaga ajraladi:

1) $\log_4 y = 0$, 2) $\log_4 y = 3$, 3) $\log_4 y = -1$,

$y_1 = 1$; $y_2 = 64$; $y_3 = \frac{1}{4}$.

y ning bu qiymatlariga mos keluvchi x ning qiymatlarini topamiz: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{8}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Sistema tenglamalarining aniqlanish sohasini tahlil qilib, $x>0$ va $x \neq 1$, $y>0$ va $y \neq 1$ bo‘lishini aniqlaymiz.

Shunday qilib, berilgan tenglamalar sistemasi $\left(\frac{1}{8}; 64\right)$ va $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ yechimlarga ega bo'ladi.

3- §. Ko'rsatkichli va logarifmik tengsizliklar

1. Ko'rsatkichli tengsizliklar va ularni yechish usullari.

1. Ko'rsatkichli tengsizliklarni yechish ko'pincha $a^x > a^b$ yoki $a^x < a^b$ ko'rinishdagi tengsizliklarni yechishga keltiriladi. Bu tengsizliklarni yechish $y = a^x$ funksiyaning monotonlik xossasiga ($a > 1$ da o'sadi, $0 < a < 1$ da kamayadi) asoslanadi.

1-misol. $2^x < 16$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikni $2^x < 2^4$ ko'rinishda yozamiz. $a = 2 > 1$ bo'lgani uchun $y = 2^x$ funksiya o'suvchi bo'ladi. Demak, $x < 4$ da $2^x < 2^4$ tengsizlik bajariladi. $x \geq 4$ da esa $2^x \geq 2^4$ tengsizlik bajariladi. Shunday qilib, $2^x < 2^4$ tengsizlik $x < 4$ da to'g'ri, $x \geq 4$ da esa noto'g'ri tengsizlik bo'ladi, ya'ni $2^x < 16$ tengsizlik $x < 4$ bo'lganda va faqat shunday bo'lgandagina bajariladi.

Javob. $x < 4$.

2-misol. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \sqrt{27}$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikni

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \sqrt{3^3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

ko'rinishda yozamiz. $a = \frac{1}{3} < 1$ bo'lgani uchun $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ funksiya kamayuvchi bo'ladi. Shuning uchun oxirgi tengsizlik $x < -\frac{2}{3}$ bo'lgandagina va shunday bo'lganda bajariladi.

Javob. $x < -\frac{2}{3}$.

2. Ko'pgina ko'rsatkichli tengsizliklar

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad (a > 0,\ a \neq 1) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tengsizlikni yechishga keltiriladi. (1) tengsizlikni yechish quyidagi teoremalarga asoslanadi.

1-teorema. ***Agar $a > 1$ bo‘lsa, u holda $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ tengsizlik $f(x) > g(x)$ tengsizlikka teng kuchli bo‘ladi.***

2-teorema. ***Agar $0<a<1$ bo‘lsa, u holda $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ tengsizlik $f(x) > g(x)$ tengsizlikka teng kuchli bo‘ladi.***

3-misol. $(0,(4))^{x^2-1} > (0,(6))^{x^2+6}$ tengsizlikni yeching.

Yechish. $0,(4)=\frac{4}{9}$, $0,(6)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ bo‘lishini e’tiborga olib, berilgan tengsizlikning ko‘rinishini o‘zgartiramiz:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+6} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2(x^2-1)} > \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+6}.$$

$a=\frac{2}{3}<1$ bo‘lgani uchun 2-teoremaga ko‘ra $2x^2-2< < x^2+6$.

Bu tengsizlikni yechamiz:

$$x^2<8 \Rightarrow |x|<2\sqrt{2} \Rightarrow -2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}.$$

x ning topilgan bu qiymatlari berilgan tengsizlikning ham yechimlari bo‘ladi.

Javob. $x \in]-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}[$.

4-misol. $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} < 8^{\frac{x-3}{3x-7}}$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikni $\left(\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\right)$ quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin: $2^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} < 2^{\frac{3(x-3)}{3x-7}}$.

1-teoremaga ko‘ra bu tengsizlik

$$\frac{3x-1}{3(x-1)} < \frac{3(x-3)}{3x-7}$$

tengsizlikka teng kuchli bo‘ladi. Bu tengsizlikni yechamiz:

$$\frac{3x+1}{3(x-1)} - \frac{3x-9}{3x-7} < 0 \Rightarrow \frac{12x-20}{(3x-3)(3x-7)} < 0.$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$f(x)=\frac{x-\frac{5}{3}}{(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)}<0.$$

Oxirgi tengsizlikni intervallar usuli bilan yechamiz:

$f(x)=\frac{x-\frac{5}{3}}{(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)}$, ifoda $x=\frac{5}{3}$ nuqtada nolga aylanadi:

$x=1$ va $x=\frac{7}{3}$ nuqtalarda aniqlanmagan.

Bu nuqtalar koordinatalar to‘g‘ri chizig‘ini 4 ta qismga bo‘ladi: $]-\infty;\ 1[\cup\left]1;\ \frac{5}{3}\right[\cup\left]\frac{5}{3};\ \frac{7}{3}\right[\cup\left]\frac{7}{3};\ +\infty\right[$:

agar $x\in]-\infty;\ 1[$ bo‘lsa, u holda $f(x)<0$ bo‘ladi;

agar $x\in\left]1;\ \frac{5}{3}\right[$ bo‘lsa, u holda $f(x)>0$ bo‘ladi;

agar $x\in\left]\frac{5}{3};\ \frac{7}{3}\right[$ bo‘lsa, u holda $f(x)<0$ bo‘ladi;

agar $x\in\left]\frac{7}{3};\ +\infty\right[$ bo‘lsa, u holda $f(x)>0$ bo‘ladi (94- rasm).

94-rasm.

Berilgan tengsizlikning yechimlari to‘plami:

$$]-\infty;\ 1[\cup\left]\frac{5}{3};\ \frac{7}{3}\right[.$$

3. Endi $a^{2x}+a^x>b$, $a^{2x}+a^x<b$, $a^{2x}+a^x\geq b$, $a^{2x}+a^x\leq b$ tengsizliklarga keltirilib yechiladigan tengsizliklarga misollar qaraymiz.

5-misol. $2^{2x+2} - 0{,}75 \cdot 2^{x+2} < 1$ tengsizlikni yeching

Yechish. $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ munosabatdan foydalanib tengsizlikning ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$2^{2x} \cdot 2^2 - 0{,}75 \cdot 2^x \cdot 2^2 - 1 < 0 \Rightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 1 < 0.$$

Agar $2^x = t$ desak, t ga nisbatan $4t^2 - 3t - 1 < 0$ kvadra tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlik uchhadning ildizla oralig'ida bajariladi:

$$4t^2 - 3t - 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{3 \pm 5}{8},$$

$$t_1 = -\frac{1}{4};\ t_2 = 1,$$

$$-\frac{1}{4} < t < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} < 2^x < 1 \Rightarrow -\infty < 2^x < 2^0 \Rightarrow -\infty < x < 0.$$

Javob. $-\infty < x < 0.$

6-misol. $3b^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x > 0$ tengsizlikni yeching

Yechish. Tengsizlikning har ikkala qismini 9^x g bo'lamiz:

$$\left(\frac{36}{9}\right)^x - 2\left(\frac{18}{9}\right)^x - 8 > 0 \Rightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 > 0.$$

Agar $2^x = t$ desak, $t^2 - 2t - 8 > 0$ kvadrat tengsizlikk ega bo'lamiz. Bu kvadrat uchhadning ildizlarini topamiz $t_1 = -2$; $t_2 = 4$. Olingan kvadrat tengsizlik $]-\infty; -2[$ va $]4; +\infty$ oraliqlarda bajariladi. Ammo $2^x = t > 0$ bo'lganligi tufayl $]-\infty; -2[$ oraliq masala mazmuniga mos kelmaydi. Demak

$$2^2 < t < +\infty \Rightarrow 4 < 2^x < +\infty \Rightarrow 2^2 < 2^x < +\infty \Rightarrow 2 < x < +\infty.$$

Javob. $x \in]2; +\infty[.$

4. $(f(x))^{g(x)} \overset{\geq}{<} (f(x))^{h(x)}$ ko'rinishdagi daraja-ko'rsat kichli tengsizliklarga keltirilib yechiladigan aniq misolla qaraymiz.

7-misol. $\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} < 1$ tengsizlikni yeching.

Yechish. $4x^2 + 2x + 1$ kvadrat uchhadning dis kriminanti manfiy, ya'ni $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$

x^2 oldidagi koeffitsiyent musbat, ya'ni $a = 4 > 0$ bo'lganligi uchun x ning barcha haqiqiy qiymatlarida $4x^2 + 2x + 1 > 0$ bo'ladi.

Bunday holda berilgan tengsizlikning o'ng qismini $(4x^2 + 2x + 1)^0$ ko'rinishda ifodalash mumkin va tengsizlik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2\ \ x} < \left(4x^2+2x+1\right)^0 . \qquad (*)$$

Bu tengsizlikka yuqoridagi ikkala teoremani ham qo'llab bo'lmaydi. Chunki $4x^2 + 2x + 1 > 0$ bo'lganda $4x^2 + 2x + 1$ ifoda va 1 sonidan qaysi biri katta bo'lishini aniqlay olmaymiz. Agar $4x^2 + 2x + 1 > 1$ bo'lsa, (*) tengsizlikka 1-teoremani, agar $4x^2 + 2x + 1 < 1$ bo'lsa, unga 2- teoremani qo'llash mumkin. Demak, ikkita hol bo'lishi mumkin: $0 < 4x^2 + 2x + 1 < 1$ yoki $4x^2 + 2x + 1 > 1$.

Shunday qilib, (*) tengsizlik quyidagi ikkita tengsizliklar sistemasini yechishga keltiriladi:

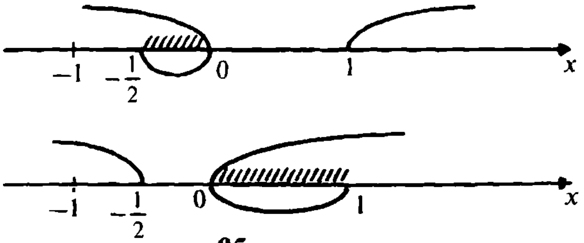
$$\begin{cases} 4x^2+2x+1<1, \\ x^2-x>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2+2x+1>1, \\ x^2-x<0. \end{cases}$$

Bu tengsizliklar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} x\left(x+\frac{1}{2}\right)<0, \\ x(x-1)>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}<x<0, \\ \{-\infty<x<0\} \cup \{1<x<+\infty\}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\left(x+\frac{1}{2}\right)>0, \\ x(x-1)<0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left\{-\infty<x<-\frac{1}{2}\right\} \cup \{0<x<+\infty\}, \\ 0<x<1. \end{cases}$$

Javob. $\left]-\frac{1}{2};\ 0\right[\cup]0;\ 1[$ (95-rasm).



95-rasm.

8-misol. $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x} > 1$ tengsizlikni yechin

Yechish. Bu tengsizlik 7- misoldagi tengsizlikk qarama-qarshi ma'nodagi tengsizlikdir. Bu tengsizlikı yechishda ham yuqoridagidek mulohazalar yuritiladi.

Javob. $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]1; +\infty\right[$.

2. Logarifmik tengsizliklar va ularni yechish usullar

1. Logarifmik funksiyaning xossalarini o'rganishd $\log_a x < b$ va $\log_a x \geq b$ ko'rinishdagi tengsizliklarni qaraga edik. Quyida ularga oid misollar qaraymiz.

9-misol. $\log_3 x < 4$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Agar $4 = \log_3 3^4 = \log_3 81$ bo'lishini e'tibor olsak, berilgan tengsizlikni quyidagicha yozish mumkiı $\log_3 x < \log_3 81$. $y = \log_3 x$ funksiya $x > 0$ da aniqlangan v o'suvchi bo'lganligidan $\log_3 x < \log_3 81$ tengsizlik $x > 0$ v $x < 81$ da bajariladi.

Javob. $0 < x < 81$.

10-misol. $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 4$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikdan teng kuchli ten sizlikka o'tamiz: $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4$. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ funksi $x > 0$ da aniqlangan va kamayuvchi, shuning uchu berilgan tengsizlik $x > 0$ va $x \leq \frac{1}{16}$ da bajariladi.

Javob. $0 < x \leq \frac{1}{16}$.

2. Murakkab logarifmik tengsizliklarni yechishning oddiy usuli ularga nisbatan sodda tengsizliklarga yoki tengsizliklar sistemasiga o‘tishdan iboratdir.

Ko‘pchilik logarifmik tengsizliklar

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad (a > 0,\ a \neq 1) \qquad (2)$$

ko‘rinishdagi tengsizlikka keltirilib yechiladi. (2) tengsizlikni yechish esa quyidagi teoremalarga asoslanadi.

3-teorema. ***Agar $a > 1$ bo‘lsa, u holda* (2) *tengsizlik***

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \qquad (3)$$

tengsizliklar sistemasiga teng kuchli bo‘ladi.

4-teorema. ***Agar $0 < a < 1$ bo‘lsa, u holda* (2) *tengsizlik***

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \qquad (4)$$

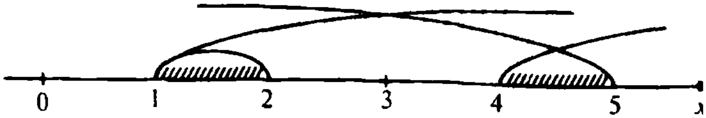
tengsizliklar sistemasiga teng kuchli bo‘ladi.

11-misol. $\log_3 \frac{3}{x-1} > \log_3(5-x)$ tengsizlikni yeching.

Yechish. $a = 3 > 1$. 3-teoremaga ko‘ra berilgan tengsizlik quyidagi tengsizliklar sistemasiga teng kuchli bo‘ladi:

$$\begin{cases} \frac{3}{x-1} > 0, \\ 5-x > 0, \\ \frac{3}{x-1} > 5-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{(x-1)^2} > 0, \\ x < 5, \\ \frac{3}{x-1} - 5 + x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x < 5, \\ \frac{(x-2)(x-4)}{x-1} > 0. \end{cases}$$

Sistemaning oxirgi tengsizligini intervallar usuli bilan yechamiz. $f(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{x-1}$ ifoda $x = 2$ va $x = 4$ da nolga aylanadi, $x = 1$ da aniqlanmagan $-]-\infty;\ 1[\cup]1;\ 2[\cup \cup]2;\ 4[\cup]4;\ +\infty[$:



96- rasm.

agar $x \in]-\infty; 1[$ bo‘lsa, u holda $f(x) < 0$ bo‘ladi;
agar $x \in]1; 2[$ bo‘lsa, u holda $f(x) > 0$ bo‘ladi;
agar $x \in]2; 4[$ bo‘lsa, u holda $f(x) < 0$ bo‘ladi;
agar $x \in]4; +\infty[$ bo‘lsa, u holda $f(x) > 0$ bo‘ladi (96- rasn

Demak, $\left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < 5, \\ 1 < x < 2, \\ 4 < x < +\infty. \end{array}\right.$

Javob. $]1; 2[\cup]4; 5[$.

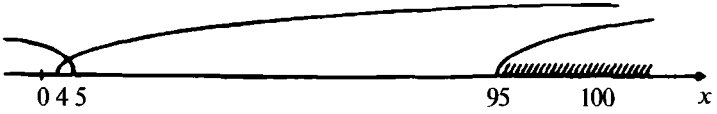
12-misol. $\log_{0,1}(x^2 + 75) - \log_{0,1}(x - 4) \le -2$ ten sizlikni yeching.

Yechish. $-2 = \log_{0,1}0,1^{-2} = \log_{0,1}100$ bo‘lishini e’ borga olsak, tengsizlik $\log_{0,1}(x^2 + 75) \le \log_{0,1}(100(x -$ ko‘rinishni oladi. $a = 0,1 < 1$ bo‘lgani uchun 4- teorema ko‘ra quyidagi tengsizliklar sistemasiga ega bo‘lamiz va yechamiz (97- rasm):

$$\begin{cases} x^2 + 75 > 0, \\ 100(x-4) > 0, \\ x^2 + 75 \ge 100(x-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ x > 4, \\ x^2 - 100x + 475 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ x > 4, \\ -\infty < x \le 5,95 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Javob. $]4; 5[\cup]95; +\infty[$.



97- rasm.

13-misol. $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$ tengsizlikni yeching.

Yechish. $x > 1$ va $0 < x < 1$ bo‘lgan hollarni alohida qaraymiz. Berilgan tengsizlikni quyidagicha yozamiz:

$$\log_x \frac{x+3}{x-1} > \log_x x. \qquad (*)$$

$x > 1$ bo‘lganda berilgan tengsizlikka 3- teoremani, $0 < x \leq 1$ bo‘lganda esa 4- teoremani qo‘llash mumkin. (*) tengsizlik quyidagi 2 ta tengsizliklar sistemasiga teng kuchli bo‘ladi:

$$\begin{cases} x > 1, \\ \frac{x+3}{x-1} > 0, \\ \frac{x+3}{x-1} > x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2} > 0, \\ \frac{x^2-2x-3}{x-1} > 0 \end{cases}$$

va

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{x+3}{x-1} > 0, \\ \frac{x+3}{x-1} < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2} > 0, \\ \frac{x^2-2x-3}{x-1} > 0. \end{cases}$$

Bu tengsizliklar sistemalarini yechib, berilgan tengsizlikning yechimlar to‘plamini topamiz.

Javob.]1; 3[.

14-misol. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10$ tengsizlikni yechir

Yechish. $5^{\log_5 x} = x$ bo‘lishini e’tiborga olsa $5^{\log_2^2 x} = (5^{\log_5 x})^{\log_5 x} = x^{\log_5 x}$ bo‘ladi va berilgan tengsiz $x^{\log_5 x} + x^{\log_5 x} < 10 \Rightarrow x^{\log_5 x} < 5$ ko‘rinishni oladi.

$x > 0$ bo‘lishini e’tiborga olib, oxirgi tengsizlikni ikkala qismini 5 asosga ko‘ra logarifmlaymiz va oling tengsizlikni yechamiz:

$$\log_5 x \cdot \log_5 x < 1 \Rightarrow \log_5^2 x < 1 \Rightarrow |\log_5 x| < 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -1 < \log_5 x < 1 \Rightarrow \log_5 5^{\ 1} < \log_5 x < \log_5 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5^{\ 1} < x < 5 \Rightarrow \frac{1}{5} < x < 5.$$

Javob. $\left]\frac{1}{5};\ 5\right[$.

15-misol. $25^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \le 30$ tengsizlik ham 1 misoldagi tengsizlik singari yechiladi.

Javob. [0,2; 5].

16-misol. $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(2^{x+2} - 4^x) \le -2$ tengsizlikni yechi

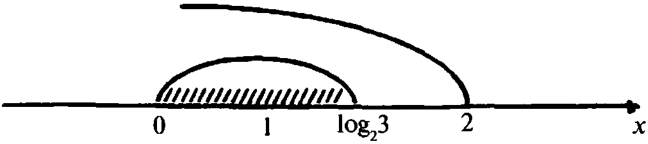
Yechish. $-2 = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2} = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^{2} = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ bo‘lishini e’tiborga olib, berilgan tengsizlikni quyidagic yozamiz: $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(2^{x+2} - 4^x) \le \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} 3.$

$a = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$ va 4- teoremaga ko‘ra, logarifmni mavjudlik shartini e’tiborga olsak, oxirgi tengsizlik c yidagi tengsizliklar sistemasiga teng kuchli bo‘ladi:

$$\begin{cases} 2^{x+2} - 4^x > 0, \\ 2^{x+2} - 4^x \ge 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 2^x - 2^x \cdot 2^x > 0, \\ 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x(4 - 2^x) > 0, \\ 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 3 \end{cases}$$

Sistemaning birinchi tengsizligini yechamiz:

$$4 - 2^x > 0 \Rightarrow 2^x < 2^2 \Rightarrow x < 2.$$



98-rasm.

Ikkinchi tengsizligini yechamiz. $2^x = y$ desak, $y^2 - 4y + 3 \leq 0$ tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlik $y^2 - 4y + 3$ kvadrat uchhadning ildizlari oralig'ida bajariladi: $y^2 - 4y + 3 = 0$ tenglama $y_1 = 1$ va $y_2 = 3$ ildizlarga ega (98-rasm). Demak:

$$1 \leq y \leq 3 \Rightarrow 1 \leq 2^x \leq 3 \Rightarrow 2^0 \leq 2^x \leq 2^{\log_2 3} \Rightarrow 0 \leq x \leq \log_2 3.$$

Javob. $0 \leq x \leq \log_2 3$.

17-misol. $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(2^{x+2} - 4^x) \geq -2$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Bu tengsizlik $\begin{cases} 2^x(4 - 2^x) > 0, \\ 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 3 \geq 0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasini yechishga keltiriladi.

Javob. $]-\infty; 0] \cup [\log_2 3; 2]$.

18-misol. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$ va $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \leq -2$ tengsizliklar ham 16 va 17- misollardagi tengsizliklar singari yechiladi.

VII BOBGA DOIR MISOL VA MASALALAR

Quyidagi ko'rsatkichli tenglamalarni yeching:

1. $5x = 625$.

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64}$.

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

4. $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt{4^{2-x}}$.

5. $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$.

6. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$.

7. $3^{6-x}=3^{3x-2}$. **8.** $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

9. $\sqrt{3^x}=9$. **10.** $2^{x^2+2x-0,5}=4\sqrt{2}$.

11. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{9}{16}$.

12. $2^{x^2}\cdot5^{x^2}=0,001\cdot(10^{3-x})^2$. Javob. -3; 1.

13. $(0,6)^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$. Javob. 3; $-\frac{5}{2}$

14. $10^x-5^{x-1}\cdot2^{x-2}=950$. Javob. 3.

15. $2\cdot7^{3x}-5\cdot49^{3x}+3=0$. Javob. 0.

16. $9^{x^2-1}-36\cdot3^{x^2-3}+3=0$. Javob. -1; 1; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$

17. $3\cdot5^{2x-1}-2\cdot5^{x-1}=0,2$.

18. $2^{3x}\cdot3^x-2^{3x-1}\cdot3^{x+1}=-288$. Javob. 2.

19. $\frac{2^x+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$. Javob. 3.

20. $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}=315$.

21. $2^{x-1}+2^{x-2}-2^{x-3}=448$. Javob. 9.

22. $8^x+27^x=125^x$. Javob. $\frac{1}{3}$.

23. $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4$. Javob. -1; 1.

24. $4^x+6^x=2\cdot9^x$. Javob. 0.

25. $3^x\cdot8^{\frac{x}{x+2}}=6$. **26.** $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1$

27. $|x|^{x^2-2x}=1$. Javob. -1; 1;

28. $(x-2)^{x^2-x}=(x-2)^{12}$. Javob. -3; 1; 2; 3;

29. $(2x-5)^{2x^2-x}=(2x-5)^{14x-28}$.

Javob. 2; 2,5; 3; 3,5;

Quyidagi ko'rsatkichli tengsizliklarni yeching:

30. $3^x>9$. **31.** $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\frac{1}{4}$.

32. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} < 2.$ **33.** $4^{x} < \frac{1}{2}.$

34. $2^{3x} \geq \frac{1}{2}.$ **35.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leq \frac{1}{9}.$

36. $5^{x-1} \leq \sqrt{5}.$ **37.** $3^{\frac{x}{2}} > 9.$

38. $3^{x^2-4} \geq 1.$ **39.** $2^{-x^2+2x} < 4.$

40. $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7}.$ **41.** $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x} < \frac{121}{169}.$

42. $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28.$ **43.** $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17.$

44. $2^{2x-1} + 2^{2x-3} + 2^{2x-3} \geq 448.$ **45.** $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \leq 624.$

46. $9^{x} - 3^{x} - 6 > 0.$

47. $4^{x} - 2^{x} < 12.$ Javob. $x < 2.$

48. $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^{x} - 1 > 0.$

49. $3 \cdot 9^{x} + 11 \cdot 3^{x} < 4.$ Javob. $x < -1.$

50. $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}.$ **51.** $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3,75}.$

52. $3^{4x+3} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}}.$ Javob. $[-3; -1].$

53. $\left(\frac{1}{4}\right)^{10x} > 64^{2\frac{2}{3}-x^2}.$ **54.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > 2,5.$

55. $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{x} > \frac{3}{16}.$ Javob. $]-2; \infty[.$

56. $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28.$ Javob. $]-\infty; 1[.$

57. $\pi^{x} - \pi^{2x} \geq 0.$ **58.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0.$

59. $4^{x} - 2^{x+1} - 8 > 0.$ Javob. $]2; \infty[.$

60. $\left(\frac{1}{36}\right)^{x} - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leq 0.$ Javob. $]-1; \infty[.$

61. $(0,5)^{x-2} > 6.$ Javob. $]-\infty; 1-\log_2 3[.$

62. $2^{x^2-6x-2,5} > 16\sqrt{2}.$ Javob. $]-\infty; -1] \cup [7; \infty[.$

63. $0,3^{2+4+\ldots+2x} > 0,3^{72}.$ Javob. 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

64. $4^{x+1,5}+9^x<9^{x+1}$. Javob. $]0;\infty[$.

65. $25\cdot 2^x-10^x+5^x>25$. Javob. $]0;\ 2[$.

66. $\frac{1}{3^x+5}<\frac{1}{3^{x+1}-1}$. Javob. $]-1;\ 1[$.

67. $8^{x+1}-8^{2x-1}>30$. Javob. $\left]\frac{2}{3};\ \log_8 60\right[$.

Quyidagi logarifmik tenglamalarni yeching:

68. $\lg x=2-\lg 5$.

69. $\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=2-\lg 25$.

70. $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$. Javob. 4.

71. $\frac{\lg x}{1-\lg 2}=2$.

72. $\log_{(x-1)}(x^2-5x+10)=2$. Javob. 3.

73. $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right)=\lg\frac{1}{2}-\lg x$.

74. $\frac{1}{12}\lg^2 x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\lg x$. Javob. 10; 0,0001.

75. $\lg x=-\lg(6-x^2)$.

76. $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$. Javob. 13.

77. $0,5\lg(2x-1)+\lg\sqrt{x-9}=1$.

78. $\lg\lg\lg x=0$. Javob. 10^{10}.

79. $\log_2\log_3\log_4 x=0$. Javob. 64.

80. $x^x=x$.

81. $x^{\lg x}=10$. Javob. 0,1; 10.

82. $x^{\lg x+2}=1000$. **83.** $x^{2-\frac{\lg x}{2}}=100$.

84. $\lg x^{\lg x}=1$. **85.** $100^{\lg(x+20)}=10000$

86. $0,1x^{\lg x-2}=100$. Javob. 1000.

87. $0,1^{-(x^2-5x+8)}=100$. Javob. 2; 3.

88. $\lg 9^{-1} + x\lg\sqrt[3]{3^{5x-7}} = 0.$ **89.** $x^{1-0,25\lg x} = 10.$

90. $\log\left(3^{\sqrt{\frac{x(x-4)}{x-3}}} + 1\right) = 1.$ **91.** $\lg 10^{\lg(x^2+21)} - 1 = \lg x.$

92. $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6.$

93. $2\log_4 x + 2\log_x 4 = 5.$ **94.** $\log_x 25 - 3\log_{25} x = 1.$

95. $\log_2(x-1)^2 - \log_{0.5}(x-1) = 9.$ Javob. 9.

96. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$ Javob. 16.

97. $\lg(x + 1,5) = -\lg x.$ Javob. 0,5.

98. $\lg(4,5 - x) = \lg 4,5 - \lg x.$ Javob. 1,5.

99. $\log_{\sqrt{2}} \frac{x^2-4x+3}{4} = -2.$

100. $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)} = 3.$ Javob. 2; 3.

101. $\log_4 \log_2 \log_3(2x-1) = \frac{1}{2}.$ Javob. 41.

102. $\log_x 2 + \log_2 x = 2,5.$ Javob. $\sqrt{2}$; 4.

103. $\log_{0.5}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8.$ Javob. 2^{-7}; 2.

104. $x^{\lg x} = 1000x^2.$ Javob. 10^{-1}; 10^3.

105. $16^{\log_x 2} = 8x.$ Javob. 2^{-4}; 2.

106. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}.$ Javob. 100.

107. $(0,4)^{\lg^2 x+1} = (6,25)^{2-\lg x^3}.$

108. $x^{1-\lg x} = 0,01.$ Javob. 0,1; 100.

109. $\log_3 (x-1)(2x-1) = 0.$ Javob. 0; 1,5.

110. $5^{\frac{1}{x}} + 125 = 30 \cdot 5^{\frac{1}{2x}}.$ Javob. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$.

Quyidagi logarifmik tengsizliklarni yeching:

111. $\log_3(x + 2) < 3.$ **112.** $\log_8(4 - 2x) \geq 2.$

113. $\log_3(x + 1) < -2.$ **114.** $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq -2.$

115. $\log_{\frac{1}{5}}(4-3x) \geq -1$. **116.** $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x) < -2$.

117. $\lg x > \lg 8 + 1$. **118.** $\lg x > 2 - \lg 4$.

119. $\log_2(x-4) < 1$. **120.** $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

121. $\log_{15}(x-3) + \log_{15}(x-5) < 1$.

122. $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(12-x) \geq -2$.

Javob. $2 < x \leq 3$; $11 \leq x < 12$.

123. $\log_5 \frac{3x-2}{x^2+1} > 0$. **124.** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2+3}{x-7} < 0$.

125. $\lg(3x-4) < \lg(2x+1)$.

126. $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

127. $\log_8(x^2-4x+3) < 1$.

128. $\log_6(x^2-3x+2) \geq 1$.

129. $\log_3(x^2+2x) > 1$.

130. $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2,5x+7) < -1$.

131. $\lg(x^2-8x+13) > 0$.

132. $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7) < 0$.

133. $\log_2(x^2+2x) < 3$.

134. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geq -3$.

135. $\log_{0,2}x - \log_5(x-2) < \log_{0,2}3$.

136. $\lg x - \log_{0,1}(x-1) > \log_{0,1}0,5$. Javob. $x > 2$.

137. $\log^2_{0,2} x - 5\log_{0,2} x < -6$.

138. $\log^2_{0,1} x + \log_{0,1} x > 4$.

Javob. $0 < x < 0,1$; $x > 10000$.

139. $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} < 1$.

140. $\log_3(2-3^{-x}) < x+1-\log_3 4$.

141. $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0.$

142. $\log_{\sqrt{6}}(x-4)+\log_{\sqrt{6}}(x+1) \le 2.$

143. $\log_{3\sqrt{2}}(x-5)+\log_{3\sqrt{2}}(x+12) \le 2.$

Javob. $5 < x \le 6.$

144. $\log_3(8x^2+x) > 2+\log_3 x^2 + \log_3 x.$

145. $\log_2 x+\log_2(x-3) > \log_2 4.$ Javob. $x > 4.$

146. $\log_{\frac{1}{5}}(x-10)-\log_{\frac{1}{5}}(x+1) \ge -1.$

147. $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10)-\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+4) \ge -2.$

Javob. $-4 < x < -3.$

148. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2}-4^x) \ge -2.$

149. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x) \ge -2.$

Javob. $x \le 0,\ \log_6 5 \le x < 1.$

150. $\log_5(x+3) \ge \log_{x+3}625.$

Javob. $3;\ ]-3; 2,96] \cup [22; \infty[.$

Quyidagi ko‘rsatkichli va logarifmik tenglamalar sistemasini yeching:

151. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648, \\ 3^x \cdot 2^y = 432. \end{cases}$ Javob. (3; 4).

152. $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1. \end{cases}$ Javob. (2; 1).

153. $\begin{cases} 14^x - 63y = 0, \\ 17^x - 87y = 0. \end{cases}$ Javob. $(\approx 1,663; \approx 1,276).$

154. $\begin{cases} x - y = 90, \\ \lg x + \lg y = 3. \end{cases}$

155. $\begin{cases} \lg x + \lg y = 5, \\ \lg x - \lg y = 3. \end{cases}$ Javob. (10000; 10).

156. $\begin{cases} x^y - y^x = 0, \\ x^2 - y^3 = 0. \end{cases}$ **157.** $\begin{cases} x^{x+y} - y^{12} = 0, \\ y^{x+y} - x^3 = 0. \end{cases}$

158. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{y}} = x^4. \end{cases}$ **159.** $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 23, \\ (x+y)\cdot 2^{y-x} = 3. \end{cases}$

160. $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 2. \end{cases}$ Javob. (16; 25); (25; 16)

161. $\begin{cases} \log_x \log_2 \log_x y = 0, \\ \log_y 9 = 1. \end{cases}$ Javob. (3; 9).

162. $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 12, \\ 3^{\lg(2y-x)} = 1. \end{cases}$ Javob. (17; 9).

163. $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 675, \\ \log_{\sqrt{5}}(3x - 2y) = 2. \end{cases}$ Javob. (3; 2).

164. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$

Javob. (–1; 1), (1; 1), $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\ \sqrt[3]{9}\right)$.

165. $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$

166. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4. \end{cases}$ Javob. (2; 6).

167. $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

Javob. (4,5; 0,5).

168. $\begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 15 - 1, \\ 10^{\lg(3x+2y)} = 39. \end{cases}$ Javob. (9; 6).

169. Radioaktiv yemirilish boshlanishi oldidan 1 g radioaktiv modda bor edi. Agar bu moddaning yarimyemirilish davri 3 minut bo‘lsa, necha minutdan keyin uning 0,125 grami qoladi? (Javob. 9 min.)

170. Qandaydir miqdordagi radioaktiv modda bor edi. 30 kun davomida bu moddaning 50% miqdori yemirilishi ma’lum. Necha kundan keyin modda boshlang‘ich miqdorining 1% i qoladi? (Javob. 200 kun.)

171. *m* milligramm radioaktiv modda radioaktiv yemirilish boshlanganidan *t* minut o‘tganidan keyin *n* milligramm qoldi. Bu moddaning yarimyemirilish davrini toping.

(Javob. $T = \frac{t \ln 2}{\text{In } m - \text{In } n}$.)

172. Radioaktiv moddaning yarimyemirilish davri 1 soatga teng. Necha soatdan keyin uning miqdori 10 marta kamayadi? Agar radioaktiv moddaning yarimyemirilish davri 1550 yil bo‘lsa, 1000 yildan keyin uning qanday qismi qolishini hisoblang.

(Javob. $\frac{1}{\lg 2}$ soat $= 3,322$ soat; $0,6394$.)

173. Ikkita jism bir xil 100°C temperaturaga ega. Ular ochiq havoga chiqarilib qo‘yildi (havo temperaturasi 0° C). 10 minutdan keyin bir jism temperaturasi 80° C, ikkinchisiniki esa 64° C bo‘ldi. Sovish boshlangandan necha minut keyin jismlar temperaturalari farqi 25° C bo‘ldi? (Javob. 15,6115 min.)

174. $\frac{3}{8x-k} = \frac{1}{kx-2}$ tenglama ildizlari musbat bo‘ladigan k ning qiymatlarini aniqlang. (Javob. $\frac{8}{3} < k < 4,\ 4 < k < 6.$

175. m ning qanday qiymatlarida $\begin{cases}3x-6y=1,\\5x+my=2\end{cases}$ tenglamalar sistemasi manfiy yechimlarga ega bo'ladi? (Javob. $m>-10$.)

176. a ning qanday qiymatlarida $(a-2)x^2-2ax+2a$ $-3=0$ tenglama faqat musbat yechimlarga ega bo'ladi? (Javob. $2<a<6$.)

177. m ning qanday qiymatlari uchun $4x^2-2x+m=$ tenglama ildizlari -1 va 1 orasida yotadi?

(Javob. $-2<m<\frac{1}{4}$.)

178. a ning qanday qiymatlarida $x^2-2ax+2a^2-4a$ $+3=0$ tenglama ildizlaridan biri 1 dan kichik, ikkinchis 2 dan katta bo'ladi? (Javob. $2-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<2$.)

179. a ning qanday qiymatlarida $\begin{cases}x^2+y^2+2x\le 1\\x-y+a=0\end{cases}$ aralash sistema yagona yechimga ega bo'ladi? Sh yechimni toping. (Javob. $a=\pm1$; $(-2;1)$ va $(0;-1)$.)

180. a ning shunday qiymatini topingki,

$$x^2+(a-1)x-2a=0$$

tenglama ildizlari kvadratlarining yig'indisi eng kichik bo'lsin. (Javob. $a=-1$.)

181. $3(a+1)x^2-6(a^2+a+1)x+7(a^3-1)<0$ tengsizlikni x ga nisbatan yeching.

182. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$ tenglamani x g nisbatan yeching. (Javob. $b\ge a$ da $x=a$; $b<a$ da $x=b$.

ADABIYOT

1. Sh. O.Alimov, Y.M.Kolyagin va boshq. Algebra. O‘rta maktabning 9- sinfi uchun darslik. T., „O‘qituvchi“, 1996.

2. Sh. O.Alimov, Y.M.Kolyagin va boshq. Algebra va analiz asoslari. O‘rta maktabning 10 — 11- sinflari uchun darslik. T., „O‘qituvchi“, 1996.

3. A.N.Kolmogorov va boshq. Algebra va analiz asoslari. O‘rta maktabning 10 — 11- sinflari uchun o‘quv qo‘llanma. T., „O‘qituvchi“, 1990.

4. N.Y.Vilenkin va boshq. Algebra va matematik analiz, 10- sinf. Matematika chuqur o‘rganiladigan maktablar va sinflar uchun. T., „Q‘qituvchi“, 1992.

5. Н.Я.Виленкин и др. Алгебра и математический анализ для 11 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М., „Просвещение“, 1993.

6. T. A. Azlarov va boshq. Matematikadan qo‘llanma. Maktab o‘qituvchilari uchun qo‘llanma. 2-qism. T., „O‘qituvchi“, 1990.

7. S.X.Sirojiddinov, M.M.Mamatov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T., „O‘qituvchi“, 1980.

8. M.Axadova. O‘rta osiyolik mashhur olimlar va ularning matematikaga doir ishlari. T., „O‘qituvchi“, 1983.

9. T.Yoqubov, S.Kallibekov. Matematik mantiq elementlari. Pedagogika institutlari va universitetlarning matematika fakultetlari talabalari uchun o‘quv qo‘llanma. T., „O‘qituvchi“, 1996.

10. Ф.П.Яремчук, П.А.Рудченко. Алгебра и элементарные функции. Справочник. Киев, „Наукова думка“, 1976.

11. В.В.Вавилов и др. Задачи по математике. Начала анализа. Справочное пособие. М., „Наука“, 1990.

12. В.Н.Литвиненко, А.Т.Мордкович. Практикум по решению математических задач. Учебное пособие для студентов педагогических институтов по математическим специальностям. М., „Просвещение“, 1984.

13. Б.М.Ивлев и др. Задачи повыщенной трудности по алгебре и началам анализа. Учебное пособие для 10 — 11 классов средней школы. М., „Просвешение“, 1990.

14. А.Т.Цыпкин, А.И.Пинский. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. М., „Наука“, 1989.

15. М.Л.Галицкий и др. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. М., „Просвещение“, 1986.

16. A.P.Tarasov. Oliy matematika kursi. Texnikumlar uchun. T., „O‘qituvchi“, 1975.

17. I.L.Zaysev. Oliy matematika kursi. Texnikumlar uchun. „O‘rta va oliy maktab“, T., 1963.

18. Под. ред. Г.Н.Яковлева. Алгебра и начала анализа. Математика для техникумов. Ч. I, II. М., „Наука“, 1981.

19. Р.А.Калнин. Курс алгебры. Для техникумов. М., 1954.

20. А.А.Дадаян, И.А.Новик. Алгебра и начала анализа. Минск, 1980.

21. И.И.Валуцэ, Г.Д.Дилигул. Математика для техникумов. М., „Наука“, 1980.

22. И.Ф.Суворов. Курс высшей математики. Для техникумов. М., „Высщая школа“, 1967.

MUNDARIJA

I BOB. TO‘PLAMLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

II BOB. HAQIQIY SONLAR

III BOB. KOMPLEKS SONLAR

IV BOB. KO‘PHADLAR. RATSIONAL IFODALAR. BIR NOMA’LUMLI TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR. TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR SISTEMALARI

V BOB. MATEMATIK INDUKSIYA USULI

VI BOB. FUNKSIYALAR

VII BOB. **KO‘RSATKICHLI, LOGARIFMIK TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR**

22.I **Meliqulov A. va boshq.**
M41 **Matematika, I qism.** Kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma. / Mualliflar: A.Meliqulov, P.Qurbonov, P.Ismoilov. O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi, O‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi markazi. — Toshkent.: „O‘qituvchi“ NMIU, 2014. — 320 b.
UO‘K
BBK 22.Iya722

MELIQULOV ABDUXALIL,
QURBONOV PARDA,
ISMOILOV PARDA

MATEMATIKA

I qism

Kasb-hunar kollejlari uchun
o‘quv qo‘llanma

3- nashri

„O‘qituvchi“ nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent — 2014

Muharrir *N. G‘oipov*
Tex. muharrir *S. Nabiyeva*
Musahhih *M. Ibrohimova*
Kompyuterda sahifalovchilar: *M. Salimova, K. Hamidullayeva*

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi 28.12.2014.
Bichimi $84\times108^{1}/_{32}$. Kegli 11 shponli. Times TAD garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi. Bosma taboq 20,0.
Shartli b.t. 16,80. Hisob-nashriyot t. 16,5. 3324 nusxada bosildi.
Buyurtma № 265-14.

O‘zbekiston Matbuot va axborot agentligining „O‘qituvchi“
nashriyot-matbaa ijodiy uyi. Toshkent — 206, Yunusobod dahasi,
Yangishahar ko‘chasi, 1-uy. Shartnoma № 07-76-14.