В. П. МИНОРСКИЙ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКАДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги олий техника ўқув юртлари учун ўқув қўлланмаси сифатида рухсат этган

Русча ўн биринчи нашрига мувофиқ учинчи нашри

«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
ТОШКЕНТ — 1977

51
М 52 **Минорский В. П.**
Олий математикадан масалалар тўплами.
(Олий техника ўқув юртлари
учун ўқув қўлланма.) Русча
II нашрига мувофиқ 3 нашри. Т.,
«Ўқитувчи», 1977.
368 б.

Минорский В. П. Сборник задач
по высшей математике.

51 (075)

$М\frac{20203-287}{353.\ 06.\ 77}146-77$

УЧИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИДАН

Бу «Тўпламда» техника олий ўқув юртлари олий математика курси программасини тўла ўз ичига олувчи аналитик геометрия ва математик анализдан масалалар ва мисоллар берилган ва улар методик жиҳатдан тақсимланган.

Ҳар бир параграфнинг бошида шу параграфдаги масалаларни ечиш учун зарур бўлган формула, таъриф ва бошқа қисқача назарий маълумотлар келтирилган.

«Тўпламнинг» ҳар бир параграфи охирида (чизиқдан сўнг) умумий материалнинг қарийб учдан бир қисми ҳажмида, қайтариш учун масалалар келтирилган. Ўқитувчи синфда ишлаш ва уйга бериш учун ёки ёзма ишлар олдидан ўтказиладиган қайтариш учун зарур масалаларни ҳар бир параграфнинг охирида берилган масалалар ичидан танлаб олиши мумкин. Ундан ташқари, масалаларни бу тарзда жойлаштириш сиртдан ўқувчи ёки кечки факультетларда ўқувчи студентларнинг курсни ўзлаштириши учун ечиши зарур бўлган масалалар минимумини аниқлашга имкон беради.

Бу «Тўпламдан» техника олий ўқув юртларида ўқитувчи раҳбарлигида ишлаш учун ҳам, мустақил ўрганиш учун ҳам фойдаланиш мумкин, чунки «Тўпламдаги» масалаларнинг деярли ҳаммасининг жавоби бор, баъзилари эса ечиб кўрсатилган. Ундан ташқари, кўпгина масалаларни ечиш учун текстда ёки жавобларда кўрсатмалар берилган. Қисқача назарий тушунтиришлар ҳам бунга имкон беради.

Китобнинг ушбу нашри унча муҳим бўлмаган тузатишларсиз нашр қилинди.

НАШРИЁТДАН

Олий математика курсига доир масала ва мисоллар тўпламининг ўзбек тилида камлигини эътиборга олиб, автор томонидан берилган изоҳ ва кўрсатмалардан ташқари, таржимон М. Холиқов баъзи масалаларга кўрсатмалар берди. Бу кўрсатмалар студентларга ва айниқса сиртдан ўқувчи студентларга анча кўмак берар деб ишонамиз.

I БОБ

ТЕКИСЛИКДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

1-§. Тўғри чизиқдаги ва текисликдаги нуқтанинг координаталари. Икки нуқта орасидаги масофа

1°. *Ўқдаги* $A(x_1)$ ва $B(x_2)$ нуқталар орасидаги масофа:

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}. \tag{1}$$

2°. *Ўқдаги йўналтирилган AB кесманинг* (алгебраик) катталиги:

$$AB = x_2 - x_1. \tag{2}$$

3°. Текисликдаги $A(x_1;\ y_1)$ ва $B(x_2;\ y_2)$ нуқталар орасидаги масофа:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3}$$

4°. Текисликдаги *йўналтирилган кесманинг ёки боши* $A(x_1;\ y_1)$ ва *охири* $B(x_2;\ y_2)$ бўлган $\overline{BA}$ *векторнинг* координата ўқларидаги проекциялари:

$$\text{пр}_x\overline{AB} = X = x_2 - x_1,\ \text{пр}_y\overline{AB} = Y = y_2 - y_1. \tag{4}$$

1. Сон ўқида $A(-5)$, $B(+4)$ ва $C(-2)$ нуқталар ясалсин ва кесмаларнинг шу ўқдаги AB, BC ва AC катталиклари топилсин. $AB + BC = AC$ эканлиги текширилсин.

2. Олдинги машқ $A(+1)$, $B(-4)$ ва $C(+5)$ нуқталар учун бажарилсин.

3. Учлари $A(-4;\ 2)$, $B(0;\ -1)$ ва $C(3;\ 3)$ нуқталарда бўлган учбурчак ясалсин ва унинг периметри ва бурчаклари аниқлансин.

4. Учлари $A(-3;\ -2)$, $B(0;\ -1)$ ва $C(-2;\ 5)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг тўғри бурчакли эканлиги исбот қилинсин.

5. $A(-4;\ 0)$, $B(-1;\ 4)$ нуқталар ҳамда Oy ўққа нисбатан уларга мос равишда симметрик бўлган A_1, B_1 нуқталар ясалсин. ABB_1A_1 трапециянинг периметри ҳисоблансин.

6. B нуқта биринчи координаталар бурчагининг биссектрисасига нисбатан $A(4;\ -1)$ нуқтага симметрик. AB нинг узунлиги топилсин.

7. $A(2;\ 1)$ нуқтадан ҳам, Oy ўқдан ҳам 5 бирликка узоқлашган нуқта топилсин.

8. Ординаталар ўқида $A(4;\ -1)$ нуқтадан 5 бирликка узоқлашган нуқта топилсин. Бу масаланинг икки ечимга эга эканлигининг сабаби ясаш йўли билан тушунтирилсин.

9. Абсциссалар ўқида $A(a;\ b)$ нуқтадан c бирликка узоқлашган нуқта топилсин. Ечим $c>|b|$, $c=|b|$ ва $c<|b|$ ҳоллар учун текширилсин.

10. Ox ўқда $A(8;\ 4)$ нуқтадан ва координаталар бошидан баравар узоқликда турган нуқта топилсин.

11. Учлари $A(4;\ 3)$, $B(-3;\ 2)$ ва $C(1;\ -6)$ нуқталарда бўлган учбурчакка ташқи чизилган доиранинг маркази ва радиуси топилсин.

12. $A(2;\ 6)$ ва $B(0;\ 2)$ нуқталар берилган. $\overline{AB}$ вектор ва унинг ўқлардаги компонентлари ясалсин ҳамда $\text{пр}_x\overline{AB}$, $\text{пр}_y\overline{AB}$ ва AB узунлиги ҳисоблансин.

13. $A(2;\ 5)$ нуқтага ўқлардаги проекциялари $X=3$ ва $Y=3$ бўлган куч таъсир этади. Шу кучни ифодаловчи $\overline{AB}$ векторнинг охирги нуқтаси ва кучнинг катталиги аниқлансин.

14. $A(-3;\ -2)$ нуқтага Oy ўқдаги проекцияси -1 га тенг ($Y=-1$), Ox ўқдаги проекцияси X эса мусбат бўлган куч таъсир этади. Агар кучнинг катталиги $5\sqrt{2}$ га тенг бўлса, кучни ифодаловчи $\overline{AB}$ векторнинг охирги нуқтаси аниқлансин.

15*. Сон ўқида $A(1)$, $B(-3)$ ва $C(-2)$ нуқталар ясалсин ва ўқдаги AB, BC ва AC кесмаларнинг катталиклари топилсин. $AB+BC+CA=0$ эканлиги текшириб кўрилсин.

16. Текисликда $A(-7;\ 0)$ ва $B(0;\ 1)$ нуқталар ҳамда биринчи координаталар бурчагининг биссектрисасига нисбатан уларга симметрик бўлган A_1 ва B_1 нуқталар ясалсин. ABB_1A_1 трапециянинг периметри ҳисоблансин.

17. Ординаталар ўқида координаталар бошидан ва $A(-2;\ 5)$ нуқтадан баравар узоқликда турган нуқта топилсин.

---

* Ҳар параграф охирида чизиқдан сўнг уйда ечиш ва қайтариш учун масалалар берилган.

18. Абсциссалар ўқида $A(-2;\ 3)$ нуқтадан $3\sqrt{5}$ бирликка узоқлашган нуқта топилсин.

19. Учлари $A(-3;\ -1)$, $B(5;\ 3)$ ва $C(6;\ -4)$ нуқталарда бўлган учбурчакка ташқи чизилган доиранинг маркази ва радиуси аниқлансин.

20. $A(x_1;\ y_1)$ ва $B(x_2;\ y_2)$ нуқталар берилган. Координаталар бошига $\overline{OA}$ ва $\overline{OB}$ векторлар билан ифодаланувчи кучлар таъсир этади. Уларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{OC}$ ясалсин ва унинг бирорта координаталар ўқидаги проекцияси, қўшилувчиларнинг шу ўқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг экани исбот қилинсин.

21. $A(1;\ 2)$, $B(3;\ 5)$, $C(5;\ 2)$ ва $D(2;\ -2)$ нуқталар берилган. A нуқтага $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ва $\overline{AD}$ кучлар таъсир этади. Тенг таъсир этувчи кучнинг ўқлардаги проекциялари ва унинг катталиги топилсин.

2-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Учбурчак ва кўпбурчакнинг юзи

1°. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. $A(x_1;\ y_1)$ ва $B(x_2;\ y_2)$ нуқталар берилган AB кесмани $AN:NB=\lambda$ нисбатда бўлувчи $N(x;\ y)$ нуқтанинг координаталари ушбу:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \tag{1}$$

формулалар билан аниқланади. Хусусий ҳолда кесмани тенг иккига, яъни $\lambda=1:1=1$ нисбатда бўлганда

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{2}$$

2°. Учлари $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$, $\ldots$, $F(x_n;\ y_n)$ нуқталарда бўлган кўпбурчак юзи:

$$S=\pm\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} x_n & y_n\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right] \tag{3}$$

га тенг.

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$ кўринишдаги ифода $x_1y_2-x_2y_1$ га тенг бўлиб, *2-тартибли детерминант дейилади**.

22. $A(-2;\ 1)$ ва $B(3;\ 6)$ нуқталар ясалсин. AB кесмани $AN:NB=3:2$ нисбатан бўлувчи $N(x;\ y)$ нуқта топилсин.

---

* Детерминантлар IV бобда тўла баён этилади.

23. $A(-2;\ 1)$ ва $B(3;\ 6)$ нуқталар берилган. AB кесма $AN:NB = -3:2$ нисбатда «бўлинсин».

24. Ox ўқнинг $A(x_1)$ ва $B(x_2)$ нуқталарига m_1 ва m_2 массалар жойлаштирилган. Бу система массаларининг маркази топилсин.

25. Ox ўқнинг $A(x_1)$, $B(x_2)$ ва $C(x_3)$ нуқталарига мос равишда m_1, m_2 ва m_3 массалар жойлаштирилган. Бу система массаларининг маркази

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

нуқтада экани кўрсатилсин.

26. Узунлиги 40 *см* ва оғирлиги 500 *г* бўлган бир жинсли стерженнинг учларига оғирликлари 100 ва 400 *г* шарлар осилган. Шу системанинг оғирлик маркази аниқлансин.

27. $A(-2;\ 4)$, $B(3;\ -1)$ ва $C(2;\ 3)$ нуқталарга мос равишда 60, 40 ва 100 *г* массалар қўйилган. Шу система массаларининг маркази аниқлансин.

28. Учлари $A(2;\ -1)$, $B(4;\ 3)$ ва $C(-2;\ 1)$ нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг ўрталари аниқлансин.

29. Учлари $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 0)$ ва $B(0;\ 6)$ нуқталарда бўлган учбурчакда OC медиана ва OD биссектриса узунликлари аниқлансин.

30. Учлари $A(1;\ -1)$, $B(6;\ 4)$ ва $C(2;\ 6)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг оғирлик маркази топилсин.

Кўрсатма. Учбурчакнинг оғирлик маркази медианаларининг кесишган нуқтасида ётади.

31. Учлари $A(2;\ 0)$, $B(5;\ 3)$ ва $C(2;\ 6)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

32. $A(1;\ 1)$, $B(-1;\ 7)$ ва $C(0;\ 4)$ нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётиши кўрсатилсин.

33. Учлари $A(3;\ 1)$, $B(4;\ 6)$, $C(6;\ 3)$ ва $D(5;\ -2)$ нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

---

34. $A(-3;\ -1)$ ва $B(4;\ 6)$ нуқталарга мос равишда 30 ва 40 *кг* параллел кучлар таъсир этади. AB кесмада ўша кучларнинг тенг таъсир этувчисининг қўйилган нуқтаси топилсин.

35. $O(0;\ 0)$, $A(2;\ -5)$ ва $B(4;\ 2)$ нуқталарга мос равишда 500, 200 ва 100 *г* массалар жойлаштирилган. Бу система массаларининг маркази аниқлансин.

екториясининг тенгламаси ёзилсин. Ҳаракат траекторияси ясалсин.

56. 1) $2x+5y+10=0$; 2) $y=3-2x-x^2$; 3) $y^2 = 4-x$ чизиқларнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари аниқлансин. Чизиқлар ясалсин.

57. Ox ўқдан ва $F(0;\ 2)$ нуқтадан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин ва тенгламаси бўйича чизиқ ясалсин.

58. $F_1(-2;\ -2)$ ва $F(2;\ 2)$ нуқталаргача бўлган масофаларининг айирмаси 4 га тенг нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Тенгламаси бўйича чизиқ ясалсин.

4-§. Тўғри чизиқнинг: 1) бурчак коэффициентли тенгламаси; 2) умумий тенгламаси; 3) кесмалар бўйича тенгламаси

1°. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

$$y = kx + b, \tag{1}$$

k параметр тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғиш бурчаги α нинг тангенсига тенг бўлиб ($k=\operatorname{tg}\alpha$), тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти, баъзан қиялиги дейилади. b параметр бошланғич ордината ёки Oy ўқ ажратган кесма катталиги.

2°. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси:

$$Ax + By + C = 0. \tag{2}$$

Хусусий ҳоллар:

а) $C=0$ бўлса, $y=-\frac{A}{B}x$ — тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади;

б) $B=0$ бўлса, $x=-\frac{C}{A}=a$ — тўғри чизиқ Ox ўққа параллел бўлади;

в) $A=0$ бўлса, $y=-\frac{C}{B}=b$ — тўғри чизиқ Oy ўққа параллел бўлади;

г) $B=C=0$ бўлса, $Ax=0$ ёки $x=0$ — тўғри чизиқ Oy ўқдан иборат;

д) $A=C=0$ бўлса, $By=0$ ёки $y=0$ — тўғри чизиқ Ox ўқдан иборат.

3°. Тўғри чизиқнинг ўқлардан ажратган кесмалар бўйича тенгламаси

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{3}$$

Бу ерда a ва b — тўғри чизиқнинг ўқлардан кесган кесмаларининг катталиклари.

$m_{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{2(OA^2+OB^2)-AB^2} = 5$

59. Oy ўқдан $b=3$ кесма ажратиб, Ox ўқ билан 1) 45°; 2) 135° бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқлар ясалсин. Ўша тўғри чизиқларнинг тенгламалари ёзилсин.

60. Oy ўқдан $b=-3$ кесма ажратиб, Ox ўқ билан 1) 60°; 2) 120° бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқлар ясалсин. Бу тўғри чизиқларнинг тенгламалари ёзилсин.

61. Координаталар бошидан ўтиб, Ox ўқ билан: 1) 45°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 120°; 5) 135° бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқларнинг тенгламалари ёзилсин.

62. Координаталар бошидан ва $(-2; 3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ ясалсин ва унинг тенгламаси ёзилсин.

63. 1) $2x-3y=6$; 2) $2x+3y=0$; 3) $y=-3$; 4) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ тўғри чизиқларнинг ҳар қайсиси учун k ва b параметрлар аниқлансин.

64. 1) $3x+4y=12$; 2) $3x-4y=0$; 3) $2x-5=0$; 4) $2y+5=0$ тўғри чизиқлар ясалсин.

65. $A(2; 3)$ нуқтадан ўтиб, Ox ўқ билан 45° бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқнинг k ва b параметрлари аниқлансин. Бу тўғри чизиқнинг тенгламаси ёзилсин.

66. 1) $2x-3y=6$; 2) $3x-2y+4=0$ тўғри чизиқларнинг тенгламалари ўқлардан ажратган кесмаларига нисбатан ёзилсин.

67. $O(0; 0)$ ва $A(-3; 0)$ нуқталар берилган. Бир томони OA кесмадан иборат бўлган ва диагоналлари $B(0; 2)$ нуқтада кесишувчи параллелограмм ясалган. Параллелограмм томонларининг ва диагоналларининг тенгламалари ёзилсин.

68. $A(4; 3)$ нуқтадан ўтувчи ва координаталар бурчагидан юзи 3 кв. бирликка тенг учбурчак кесувчи тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

69. $y=-2$ ва $y=4$ тўғри чизиқлар $3x-4y-5=0$ тўғри чизиқни мос равишда A ва B нуқталарда кесиб ўтади. $\overline{AB}$ вектор ясалсин, унинг узунлиги ва ўқлардаги проекциялари аниқлансин.

70. $A(3; 5)$, $B(2; 7)$, $C(-1; -3)$ ва $D(-2; -6)$ нуқталар $y=2x-1$ тўғри чизиқда ётадими, ё ўша тўғри чизиқдан «юқорироқда» ёки «қуйироқда» жойлашганми?

71. 1) $y>3x+1$; 2) $y<3x+1$; 3) $2x+y-4\geqslant 0$ ва 4) $2x+y-4<0$ тенгсизликлар қандай геометрик маънога эга?

72. Нуқталарининг координаталари ушбу

1) $y<2-x$, $x>-2$, $y>-2$;

2) $y > 2 - x, \ x < 4, \ y < 0;$

3) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} < 1, \ y \geqslant x + 2; \ x \geqslant -4$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи соҳалар ясалсин*.

73. $M(x; \ y)$ нуқта шундай ҳаракат қиладики, унинг $A(-a; \ a)$ ва $B(a; \ -a)$ нуқталаргача бўлган масофалари квадратларининг айирмаси $4a^2$ га тенг бўлиб қола беради. Нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

74. Ox ўқдаги проекцияси *m бирлик/секунд* тезлик билан Oy ўқдаги проекцияси *n бирлик/секунд* тезлик билан ҳаракат қилувчи $M(x; \ y)$ нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин. Нуқтанинг бошланғич вазияти:

$$M_0(a; \ b).$$

75. 1) $b = -2$, $\varphi = 60°$ ва 2) $b = -2$, $\varphi = 120°$ параметрлар билан берилган тўғри чизиқлар ясалсин ва уларнинг тенгламалари ёзилсин.

76. $(-2; \ 3)$ нуқтадан ўтиб, Ox ўқ билан 45° бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг k ва b параметрлари аниқлансин.

77. Асослари 8 ва 2 *см* бўлган тенг ёнли трапециянинг ўткир бурчаги 45°. Трапециянинг катта асосини Ox ўқ, унинг симметрия ўқини Oy ўқ деб олиб, томонларининг тенгламалари ёзилсин.

78. Диагоналлари 10 ва 6 *см* бўлган ромбнинг катта диагоналини Ox ўқ, кичик диагоналини Oy ўқ деб олиб, унинг томонларининг тенгламалари ёзилсин.

79. $(-4; \ 6)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ координаталар бурчагидан юзи 6 кв. бирликка тенг учбурчак ажратади. Бу тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

80. $x = -3$ тўғри чизиққа нисбатан Ox ўқдан икки марта узоқроқда ҳаракат қилувчи $M(x; \ y)$ нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

81. $x = -1$ ва $x = 3$ тўғри чизиқлар $y = 2x + 1$ тўғри чизиқни A ва B нуқталарда кесиб ўтади. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлиги ва ўқлардаги проекциялари аниқлансин.

$\frac{1}{4}\sqrt{6^2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2$

* Ҳар бир нуқтасининг координаталари маълум бир шартларни (масалан, тенгсизликларни) қаноатлантирадиган xOy текисликнинг қисми «соҳа» дейилади. Агар соҳа чегарасида ётувчи нуқталар ҳам унга қарашли бўлса соҳа *ёпиқ* дейилади. Акс ҳолда соҳа *очиқ* дейилади.

5-§. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Берилган нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси

1°. $y = k_1x + b_1$ тўғри чизиқдан $y = k_2x + b_2$ тўғри чизиққача соат стрелкасига қарши йўналишда ҳисобланувчи φ бурчак

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \tag{1}$$

формула билан аниқланади.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ ва } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар учун (1) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Параллеллик шарти: $k_1 = k_2$ ёки $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Перпендикулярлик шарти: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ ёки $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

2°. Берилган $A(x_1;\ y_1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2}$$

3°. Берилган икки $A(x_1;\ y_1)$ ва $B(x_2;\ y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{3}$$

4°. Параллел бўлмаган икки $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ва $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини топиш учун уларнинг тенгламаларини биргаликда ечиш керак.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

ни ҳосил қиламиз.

82. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчак аниқлансин:

1) $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = \frac{1}{2}x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - y + 7 = 0, \\ 2x - 3y + 1 = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ y = 3x - 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x+2y=0, \\ 6x+4y+9=0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x-4y=6, \\ 8x+6y=11; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1. \end{cases}$

83. $3x-2y+7=0$, $6x-4y-9=0$, $6x+4y-5=0$, $2x+3y-6=0$ тўғри чизиқлардан параллел ва перпендикуляр бўлганлари кўрсатилсин.

84. $A(2;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси ёзилсин. Шу дастадан Ox ўқ билан: 1) 45°, 2) 60°, 3) 135°, 4) 0° бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқлар танлаб олинсин ва улар ясалсин.

85. $A(-2;\ 5)$ нуқта ва $2x-y=0$ тўғри чизиқ ясалсин. A нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси ёзилсин ва ўша дастадан берилган тўғри чизиққа: 1) параллел; 2) перпендикуляр бўлган тўғри чизиқлар танлаб олинсин.

86. $2x-5y-10=0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталаридан бу тўғри чизиққа перпендикулярлар чиқарилган. Уларнинг тенгламалари ёзилсин.

87. $A(-1;\ 3)$ ва $B(4;\ -2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

88. Учлари $A(-2;\ 0)$, $B(2;\ 6)$ ва $C(4;\ 2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг BD баландлиги ва BE медианаси ўтказилган. AC томон, BE медиана ва BD баландликнинг тенгламалари тузилсин.

89. Учбурчак томонлари $x+2y=0$, $x+4y-6=0$, $x-4y-6=0$ тенгламалар билан берилган. Унинг ички бурчаклари топилсин.

Кўрсатма. Учбурчакнинг ички бурчакларини топиш учун томонларининг бурчак коэффициентларини камаювчи $k_1>k_2>k_3$ тартибда ёзиб, $\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$, $\frac{k_2-k_3}{1+k_2k_3}$, $\frac{k_3-k_1}{1+k_1k_3}$ формулалар бўйича ўша бурчакларнинг тангенсларини ҳисоблаш керак. Бунга, учбурчак учларидан бирини координаталар бошида жойлаштириб, чизмадан ишонч ҳосил қилинсин.

90. Координаталар бошидан ўтиб, $y=4-2x$ тўғри чизиқ билан 45° бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

91. $A(-1;\ 1)$ нуқтадан ўтиб, $2x+3y=6$ тўғри чизиқ билан 45° бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

92. Ox ўқ билан $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ бурчак ташкил этувчи ёруғлик нури $A(5;\ 4)$ нуқтадан чиқади ва шу ўқдан қайтади. Тушувчи ва қайтувчи нурларнинг тенгламалари ёзилсин.

Кўрсатма. Нурнинг тушиш ва қайтиш бурчакларининг тенглигидан фойдаланилсин.

93. Учбурчак томонлари $x + 3y = 0$, $x = 3$, $x - 2y + 3 = 0$ тенгламалар билан берилган. Унинг учлари ва бурчаклари аниқлансин.

94. $3x + 2y = 6$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасидаги кесмаси тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси бўлиб ҳисобланади. Агар учбурчак тўғри бурчагининг учи берилган тўғри чизиқдан «юқорироқда» ётиши маълум бўлса, ўша уч топилсин.

Кўрсатма. Тўғри чизиқ Ox ўқни $A(2;\ 0)$ нуқтада, Oy ўқни эса $B(0;\ 3)$ нуқтада кесади. Учбурчак тўғри бурчагининг учини $M(x,\ y)$ деб олсак, $MA = MB$ ва $(AB)^2 = 2(MA)^2$ эканидан фойдаланиш керак.

95. Учлари $A(-2;\ 0)$, $B(2;\ 4)$ ва $C(4;\ 0)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Унинг томонлари, AE медианаси, AO баландлигининг тенгламалари ёзилсин ва AE медиана узунлиги топилсин.

96. Учлари $A(0;\ 7)$, $B(6;\ -1)$ ва $C(2;\ 1)$ нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг тенгламалари ёзилсин ва бурчаклари топилсин.

97. $2x - y + 8 = 0$ тўғри чизиқ Ox ва Oy ўқларни A ва B нуқталарда кесиб ўтади. N нуқта AB ни $AN:NB = 3:1$ нисбатда бўлади. AB тўғри чизиққа N нуқтадан чиқарилган перпендикулярнинг тенгламаси ёзилсин.

98. Томонлари $x + y = 4$, $3x - y = 0$, $x - 3y - 8 = 0$ тенгламалар билан берилган учбурчак ясалсин, унинг бурчаклари ва юзи топилсин.

99. Учлари $A(-4;\ 2)$, $B(2;\ -5)$ ва $C(5;\ 0)$ нуқталарда бўлган учбурчак медианаларининг кесишган нуқтаси ва баландликларининг кесишган нуқтаси топилсин.

100. $A(-5;\ 6)$ нуқтадан Ox ўқ билан $\varphi = \operatorname{arctg}(-2)$ бурчак ташкил этувчи ёруғлик нури чиқади ва Ox ўқдан қайтади, сўнгра Oy ўқдан қайтади. Бу учала нурнинг тенгламалари ёзилсин.

Кўрсатма. 16-бетдаги 92-масалага берилган кўрсатмага қаралсин.

6-§. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа. Биссектрисаларнинг тенгламалари. Берилган икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси

1°. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0. \tag{1}$$

Бунда p — координаталар бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр (нормал) узунлиги, β эса ўша перпендикулярнинг Ox ўққа оғиш бурчаги. Тўғри чизиқнинг $Ax + By + C = 0$ умумий тенгламасини нормал кўринишга келтириш учун унинг барча ҳадларини

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

нормаллаштирувчи кўпайтувчига кўпайтириш керак. M нинг ишораси тенгламадаги озод ҳад C нинг ишорасига тескари қилиб олинади.

2°. $(x_0;\ y_0)$ нуқтадан тўғри чизиққача бўлган d масофани топиш учун *тўғри чизиқ нормал тенгламасининг чап томонидаги ўзгарувчи координаталар ўрнига* $(x_0;\ y_0)$ *координаталарни қўйиб, ҳосил бўлган соннинг абсолют қийматини оламиз, яъни*

$$d = |x_0\cos\beta + y_0\sin\beta - p|. \tag{2}$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2'}$$

3°. $Ax + By + C = 0$ ва $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар биссектрисаларининг тенгламалари:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}. \tag{3}$$

4°. Берилган икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси:

$$\alpha(Ax + By + C) + \beta(A_1x + B_1y + C_1) = 0. \tag{4}$$

$\alpha = 1$ деб олиш мумкин, у ҳолда биз (4) дастадан берилган тўғри чизиқлардан иккинчисини йўқотган бўламиз, яъни у вақтда (4) дан иккинчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қила олмаймиз.

101. 1) $3x - 4y - 20 = 0$, 2) $x + y + 3 = 0$, 3) $y = kx + b$ тўғри чизиқларнинг тенгламалари нормал кўринишга келтирилсин.

102. Нормал узунлиги $p = 2$ ва унинг Ox ўққа оғиш бурчаги β: 1) 45°, 2) 135°, 3) 225°, 4) 315° бўлган тўғри чизиқлар ясалсин. Бу тўғри чизиқларнинг тенгламалари ёзилсин.

103. $A(4;\ 3)$, $B(2;\ 1)$ ва $C(1;\ 0)$ нуқталардан $3x+4y-10=0$ тўғри чизиққача бўлган масофалар топилсин. Нуқталар ва тўғри чизиқ ясалсин.

104. Координаталар бошидан $12x-5y+39=0$ тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин.

105. $2x-3y=6$ ва $4x-6y=25$-тўғри чизиқлар ўзаро параллел эканлиги кўрсатилсин ва улар орасидаги масофа аниқлансин.

Кўрсатма. Берилган тўғри чизиқлардан биттасининг исталган нуқтасини олиб, ўша нуқтадан иккинчи тўғри чизиққача бўлган масофани топиш керак.

106. $y=kx+5$ тўғри чизиқ координаталар бошидан $d=\sqrt{5}$ масофа узоқликда бўлса, k топилсин.

107. $4x-3y=0$ тўғри чизиқдан 4 бирлик узоқликдаги нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

108. $8x-15y=0$ тўғри чизиққа параллел бўлиб, $A(4;\ -2)$ нуқтадан 4 бирлик узоқликдаги тўғри чизиқнинг тенгламаси ёзилсин.

109. $2x+3y=12$ ва $3x+2y=12$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар биссектрисаларининг тенгламалари ёзилсин.

110. $3x+4y=12$ ва $y=0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар биссектрисаларининг тенгламалари ёзилсин.

111. $M(x;\ y)$ нуқта $y=4-2x$ тўғри чизиққа нисбатан $y=2x-4$ тўғри чизиқдан уч марта узоқроқда ҳаракат қилади. Ўша нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

112. $2x+y+6=0$ ва $3x+5y-15=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси M ва $N(1;\ -2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси (M нуқтани топмасдан) ёзилсин.

113. $5x-y+10=0$ ва $8x+4y+9=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси M дан ўтиб $x+3y=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламаси (M нуқтани топмасдан) ёзилсин.

Кўрсатма. M дан ўтувчи изланган тўғри чизиқ тенгламаси $\alpha(5x-y+10)+\beta(8x+4y+9)=0$ бўлсин. α ва β бу тўғри чизиқнинг $x+3y=0$ га параллел эканлигидан фойдаланиб топилади.

---

114. Учлари $A(-3;\ 0)$, $B(2;\ 5)$ ва $C(3;\ 2)$ нуқталарда бўлган учбурчак BD баландлигининг узунлиги топилсин.

115. $A(2;\ 4)$ нуқтадан ўтувчи ва координаталар бошидан $d=2$ узоқликда бўлган тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

Кўрсатма. φ бурчак тўғри чизиқнинг $x\cos\varphi+y\sin\varphi-2=0$ нормал тенгламасидаги x ва y нинг ўрнига A нинг координаталарини қўйиб топилади.

116. $A(-4; -3)$, $B(-5; 0)$, $C(5; 6)$ ва $D(1; 0)$ нуқталар трапециянинг учлари бўлиши текширилсин ва унинг баландлиги топилсин.

117. Координаталар бошидан $A(2; 2)$ ва $B(4; 0)$ нуқталаргача масофалари бир хил бўлган тўғри чизиқ ўтказилган. Бу масофа топилсин.

118. $x + 2y - 5 = 0$ тўғри чизиқдан $\sqrt{5}$ масофа узоқликда бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

119. $y = -x$ тўғри чизиққа нисбатан $y = x$ тўғри чизиқдан икки марта узоқроқда ҳаракат қилувчи $M(x; y)$ нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

120. $2x - 3y + 5 = 0$ ва $3x + y - 7 = 0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси $M(x; y)$ дан ўтувчи ва $y = 2x$ тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламаси (M нуқтани топмасдан) ёзилсин.

Кўрсатма. 113-мисол учун берилган кўрсатмага қаралсин.

7-§. Тўғри чизиққа доир аралаш масалалар

121. Координаталар бошидан, $x + y = a$ ва $x = 0$ тўғри чизиқлар билан юзи a^2 га тенг учбурчак ясовчи тўғри чизиқ ўтказилсин.

Кўрсатма. Изланган тўғри чизиқ тенгламаси $y = kx$ кўринишда бўлсин. $x + y = a$ ва $y = kx$ нинг кесишган нуқтасини топгандан сўнг, учбурчак юзининг формуласидан k ни топиш керак.

122. $A(-4; 0)$ ва $B(0; 6)$ нуқталар берилган. AB кесма ўртасидан Oy ўқдагига қараганда Ox ўқдан икки баравар катта кесма ажратувчи тўғри чизиқ ўтказилсин.

123. $A(-2; 0)$ ва $B(2; -2)$ нуқталар берилган. OA кесмани томон деб олиб, диагоналлари B нуқтада кесишувчи $OACD$ параллелограмм ясалган. Параллелограмм томонларининг, диагоналларининг тенгламалари ёзилсин ва CAD бурчак топилсин.

124. $y = 2x$, $y = -2x$ ва $y = x + b$ тўғри чизиқлар ҳосил қилган учбурчакнинг юзи ва бурчаклари топилсин.

125. Координаталар бошидан $2x + y = a$ тўғри чизиқ билан тенг ёнли учбурчак ҳосил қилувчи икки ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилган. Шу учбурчакнинг юзи топилсин.

Кўрсатма. $2x+y=3$ билан $y=kx$ ва $y=-\frac{x}{k}$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталари M ва N нинг координатларини топгандан сўнг $OM=ON$ тенгликдан k ни топиш керак.

126. Учбурчак AB томонининг тенгламаси $x-3y+3=0$ ва AC томонининг тенгламаси $x+3y+3=0$ ҳамда AD баландлигининг асоси $D(-1;\ 3)$ берилган бўлса, учбурчакнинг ички бурчаклари топилсин.

127. Тенг ёнли учбурчак ён томонларининг тенгламалари $3x+y=0$ ва $x-3y=0$ ҳамда асосидаги $(5;\ 0)$ нуқта берилган. Учбурчакнинг периметри ва юзи топилсин.

Кўрсатма. Учбурчакнинг бир учи $A(0,\ 0)$ дан иборат. Қолган икки учини, яъни $B(x_1,\ y_1)$ ва $C(x_2,\ y_2)$ учларини топишда, улар билан $(5,\ 0)$ нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётишидан ва $2(AB)^2=(BC)^2$ тенгликдан фойдаланиш керак.

128. ABC учбурчакда: 1) AB томонининг тенгламаси $3x+2y=12$; 2) BN баландликнинг тенгламаси $x+2y=4$; 3) AN баландликнинг тенгламаси $4x+y=6$ берилган. N — баландликларнинг кесишган нуқтаси. AC ва BC томонларнинг ҳамда CN баландликнинг тенгламалари ёзилсин.

129. Параллелограмм томонларидан иккитаси $y=x-2$ ва $5y=x+6$ тенгламалар билан берилган. Диагоналлари эса координаталар бошида кесишади. Параллелограммнинг қолган икки томонининг ва диагоналларининг тенгламалари ёзилсин.

130. Учбурчак $A(0;\ -4)$, $B(3;\ 0)$ ва $C(0;\ 6)$ учлари билан берилган. C учидан A бурчакнинг биссектрисасигача бўлган масофа топилсин.

131. $M(x;\ y)$ нуқта шундай ҳаракат қиладики, ундан $y=2x$ ва $y=-\frac{x}{2}$ тўғри чизиқларгача бўлган масофаларнинг йиғиндиси ўзгармас бўлиб, $\sqrt{5}$ га тенг. Ўша нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

132. Нуқталарининг координаталари:

1) $x-2<y<0$ ва $x>0$;
2) $-2\leqslant y\leqslant x\leqslant 2$;
3) $2<2x+y<8$, $x>0$ ва $y>0$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи соҳалар ясалсин.

133. Параллелограммнинг AB ва BC томонлари мос равишда $2x-y+5=0$ ва $x-2y+4=0$ тенгламалар билан берилган, диагоналлари $M(1;\ 4)$ нуқтада кесишади. Унинг баландликларининг узунликлари топилсин.

134. Тенг ёнли ва тўғри бурчакли учбурчак тўғри бурчагининг учи $C(3; -1)$ ва гипотенузасининг тенгламаси $3x - y + 2 = 0$ берилган. Қолган учлари топилсин.

Кўрсатма. 125-масалага берилган кўрсатмага қаранг.

135. Учбурчакнинг икки учи $A(-4; 3)$ ва $B(4; -1)$ ҳамда баландликларининг кесишган нуқтаси $M(3; 3)$ берилган. Учинчи учи C топилсин.

136. Ромб икки томонининг тенгламалари $x + 2y = 4$ ва $x + 2y = 10$ ҳамда диагоналларидан бирининг тенгламаси $y = x + 2$ маълум бўлса, ромб учларининг координаталари ҳисоблансин.

137. Учбурчакнинг $A(0; 2)$ учини ҳамда BM ва CM баландликларининг $x + y = 4$ ва $y = 2x$ тенгламаларини билган ҳолда учбурчак томонларининг тенгламалари ёзилсин, бунда M—баландликларининг кесишган нуқтаси.

138. $A(5; 7)$ нуқта ва $x + 2y - 4 = 0$ тўғри чизиқ берилган. 1) A нуқтанинг берилган тўғри чизиқдаги проекцияси B топилсин; 2) ўша тўғри чизиққа нисбатан A га симметрик C нуқта топилсин.

Кўрсатма. AB перпендикулярнинг тенгламасини ёзиб, уни берилган тўғри чизиқ тенгламаси билан биргаликда ечиб B нуқта топилади: B нуқта эса AC нинг ўртасидир.

139. $2x + y - 6 = 0$ тўғри чизиқ ва унда ординаталари $y_A = 6$ ва $y_B = -2$ бўлган икки A ва B нуқта берилган. AOB учбурчак AD баландлигининг тенгламаси ёзилсин, унинг узунлиги ва $\angle DAB$ топилсин.

8- §. Айлана

Маркази $C(a; b)$ нуқтада ва радиуси R бўлган **айлана тенгламаси** қуйидагича ёзилади:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{1}$$

Агар (1) тенгламадаги қавсларни очсак, у ҳолда тенглама

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \tag{2}$$

кўринишга келади.

(2) тенгламадан қайтадан (1) тенгламага ўтиш учун (2) тенгламанинг чап томонидаги тўла квадратдан иборат ифодаларни ажратиш керак, яъни

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p. \tag{3}$$

140. Маркази $C(-4;\ 3)$, радиуси $R=5$ бўлган айлана тенгламаси ёзилсин ва у ясалсин. $A(-1;\ -1)$, $B(3;\ 2)$, $O(0;\ 0)$ нуқталар бу айланада ётадими?

141. $A(-4;\ 6)$ нуқта берилган. Диаметри OA кесмадан иборат айлана тенгламаси ёзилсин.

142. 1) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$; 2) $x^2+y^2-8x=0$; 3) $x^2+y^2+4y=0$ айланалар ясалсин.

143. $x^2+y^2+5x=0$ айлана ва $x+y=0$ тўғри чизиқ ясалсин ва уларнинг кесишган нуқталари топилсин.

144. $A(1;\ 2)$ нуқтадан ўтувчи ва координата ўқларига уринувчи айлана тенгламаси ёзилсин.

145. $x^2+y^2+4x-6y=0$ айлананинг Oy ўқ билан кесишган нуқталарига ўтказилган радиуслари орасидаги бурчак топилсин.

146. $A(-1;\ 3)$, $B(0;\ 2)$ ва $C(1;\ -1)$ нуқталардан ўтувчи айлана тенгламаси ёзилсин.

Кўрсатма. Изланаётган айлананинг тенгламасини $x^2+y^2+mx+ny+p=0$ кўринишда ёзиб, ундаги x ва y лар ўрнига берилган ҳар бир нуқтанинг координаталарини қўйгандан сўнг m, n ва p ларни топиш керак.

147. $A(4;\ 4)$ нуқтадан ва $x^2+y^2+4x-4y=0$ айлана билан $y=-x$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқталаридан ўтувчи айлана тенгламаси ёзилсин.

148. $y=-\sqrt{-x^2-4x}$ эгри чизиқнинг жойлашиш соҳаси аниқланиб, шакли чизилсин.

149. $x^2+y^2-8x-4y+16=0$ айланага координаталар бошидан ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин.

150. $A(a;\ 0)$ нуқта берилган. M нуқта шундай ҳаракат қиладики, $\triangle OMA$ да OMA бурчак доимо тўғри бурчак бўлиб қолади. M нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

151. $A(-6;0)$ ва $B\ (2;\ 0)$ нуқталар берилган. Шундай нуқталарнинг геометрик ўрни топилсинки, улардан OA ва OB кесмалар тенг бурчаклар остида кўринсин.

Кўрсатма. Ўзгарувчи нуқтани M деб олсак, OM кесма AMB бурчакнинг биссектрисаси бўлади. Изланган тенгламани чиқариш учун учбурчак ички бурчагининг биссектрисаси қарши томонни бўлиши ҳақидаги теоремадан фойдаланиш керак.

152. $M(x;\ y)$ нуқта шундай ҳаракатланадики, ундан $A(-a;\ 0)$, $B(0;\ a)$ ва $C(a;\ 0)$ нуқталаргача бўлган масофалар квадратларининг йиғиндиси $3a^2$ га тенг бўлиб қолаверади. Нуқта траекториясининг тенгламаси ёзилсин.

окуслари Ox ўқда ётувчи эллипс координата ўқларига нисбатан симметрик бўлиб, $M(-4; \sqrt{21})$ нуқтадан ўтади ва $\varepsilon = \frac{3}{4}$ эксцентриситетга эга. Эллипс тенгламаси ёзилсин ва M нуқтанинг фокал радиуслари топилсин.

171. $x^2 + 2y^2 = 18$ эллипснинг ўқлари орасидаги бурчакни тенг иккига бўлувчи ватар узунлиги топилсин.

172. Агар эллипснинг фокуслари орасидаги масофа унинг катта ва кичик ярим ўқларининг учлари орасидаги масофага тенг бўлса, унинг эксцентриситети ε топилсин.

173. $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипсга учларидан бири эллипс катта ярим ўқининг учи билан устма-уст тушувчи мунтазам учбурчак ички чизилган. Учбурчакнинг қолган икки учининг координаталари аниқлансин.

$x^2 + 8x + y^2 - 12y = 0$

Кўрсатма. Учбурчак томонларидан бурчак коэффициенти $k = \operatorname{tg} 30°$ бўлганининг тенгламасини ёзиб, унинг эллипс билан кесишган нуқталарини топиш керак.

$R = \sqrt{52} =$

174. $9x^2 + 25y^2 = 225$ эллипсда шундай $M(x; y)$ нуқта топилсинки, ундан ўнг фокусгача бўлган масофа чап фокусгача бўлган масофадан 4 марта катта бўлсин.

175. $x^2 + y^2 = 36$ айланадаги барча нуқталарнинг ординаталарини уч баравар қисқартишдан ҳосил бўлган янги эгри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

176. $M(x; y)$ нуқта, $x = -4$ тўғри чизиққа нисбатан $F(-1; 0)$ нуқтага икки баравар яқинроқда ҳаракат қилади. Унинг траекторияси аниқлансин.

177. Узунлиги ўзгармас $a + b$ га тенг AB кесма шундай ҳаракат қиладики, унинг A учи Ox ўқ бўйича ва B учи Oy ўқ бўйича сирғанади. Бу кесмани $BM = a$ ва $MA = b$ бўлакларга бўлувчи M нуқтанинг траекторияси аниқлансин (Леонардо да Винчининг эллиптик циркули).

178. $x^2 + y^2 = b^2$ ва $x^2 + y^2 = a^2$ айланалар берилган ($b < a$). Ихтиёрий OBA нур уларни мос равишда B ва A нуқталарда кесади; бу нуқталардан координата ўқларига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқлар ўзаро M нуқтада кесишгунча давом эттирилади. $M(x; y)$ нуқталарнинг геометрик ўрни аниқлансин.

Кўрсатма. OBA нур тенгламасини $y = kx$ деб олиб, унинг айланалар билан кесишган $B(x_1, y_1)$ ва $A(x_2, y_2)$ нуқталарини топиш керак. $M(x, y)$ нуқталар эса $y = y_2$ ва $x = x_1$ ҳамда $x = x_2$ ва $y = y_1$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталаридан иборат.

179. Эллипс фокусларининг биридан катта ўқининг учларигача бўлган масофалар 5 ва 1 га тенг. Унинг энг содда тенгламаси ёзилсин.

180. Координата ўқларига нисбатан симметрик эллипс $M(2\sqrt{3};\ \sqrt{6})$ ва $A(6;\ 0)$ нуқталардан ўтади. Унинг тенгламаси ёзилсин, эксцентриситети ва M нуқтадан фокусларгача бўлган масофалар топилсин.

181. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг ўқларида ясалган тўғри тўртбурчак диагонали бўйича йўналган ватарининг узунлиги топилсин.

182. $x^2+4y^2=4$ эллипснинг, маркази шу эллипснинг «юқори» учида бўлган ва унинг фокусларидан ўтувчи айлана билан умумий нуқталари топилсин.

183. $x=-5$ тўғри чизиқда $x^2+5y^2=20$ эллипснинг «чап» фокусидан ва «юқори» учидан баравар узоқликда бўлган нуқта топилсин.

184. $x^2+5y^2=20$ эллипснинг радиус-векторлари ўзаро перпендикуляр бўлган нуқтаси топилсин.

Кўрсатма. Изланган нуқталар берилган эллипснинг, маркази координаталар бошида бўлган ва эллипснинг фокусларидан ўтувчи айлана билан кесишган нуқталаридан иборатдир.

185. $x^2+y^2=4$ айланадаги ҳар бир нуқтанинг абсциссаси икки баравар орттирилган. Ҳосил бўлган эгри чизиқ аниқлансин.

186. $x=9$ тўғри чизиққа нисбатан $A(1;\ 0)$ нуқтага уч марта яқинроқ бўлиб ҳаракат қилувчи M нуқтанинг траекторияси аниқлансин.

10- §. Гипербола

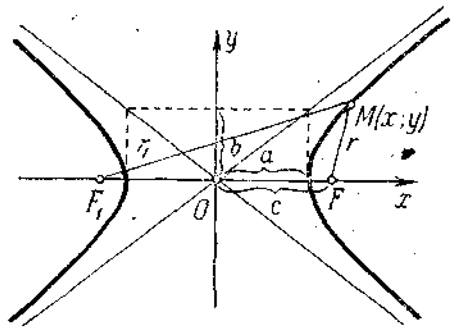
Гипербола деб *шундай нуқталарнинг геометрик ўрнига айтиладики, уларнинг ҳар биридан берилган икки F ва F_1 нуқтагача* (фокусларгача) *бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас $2a$ $(0<2a<F_1F)$ миқдордан иборатдир.*

Гиперболанинг *каноник* (энг содда) тенгламаси:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

1) тенглама билан берилган гипербола координата ўқларига нисбатан симметрикдир (2- чизма).

Гипербола Ox ўқни учлар деб аталувчи $A(a;\ 0)$, $A_1(-a;\ 0)$ нуқталарда кесади, Oy ўқ билан эса кесишмайди. a параметр ҳақиқий ярим ўқ, b эса мавҳум ярим ўқ дейилади. $c=\sqrt{a^2+b^2}$ параметр марказдан фокусгача бўлган масофани билдиради. $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ гиперболанинг



2- чизма.

эксцентриситети дейилади. $y=\pm\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқлар гиперболанинг *асимптоталари* дейилади. $M(x; y)$ нуқталардан фокусларгача бўлган *масофалар (фокал радиус-векторлар)*:

$$r=|\varepsilon x-a|,\quad r_1=|\varepsilon x+a| \tag{2}$$

формулалар билан аниқланади.

Агар $a=b$ бўлса, гипербола *тенг томонли* гипербола деб аталади. Унинг тенгламаси $x^2-y^2=a^2$, асимптоталарининг тенгламалари эса $y=\pm x$ *бўлади*. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *ва* $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ *гиперболалар қўшма* гиперболалар дейилади.

187. $x^2-4y^2=16$ гипербола ва унинг асимптоталари ясалсин. Гиперболанинг фокуслари, эксцентриситети ва асимптоталари орасидаги бурчак топилсин.

188. $x^2-4y^2=16$ *гиперболада ординатаси* 1 *га тенг* M нуқта олинган. Ундан фокусларгача бўлган масофалар топилсин.

189. 1) Фокуслари орасидаги масофа $2c=10$, учлари орасидаги масофа $2a=8$; 2) ҳақиқий ярим ўқи $a=2\sqrt{5}$, эксцентриситети $\varepsilon=\sqrt{1,2}$ бўлган гиперболанинг каноник тенгламаси ёзилсин.

190. Гипербола координата ўқларига нисбатан симметрик бўлиб, $M(6; -2\sqrt{2})$ нуқтадан ўтади ва $b=2$ мавҳум ярим ўққа эга. Унинг тенгламаси ёзилсин ҳамда M нуқтадан фокусларгача бўлган масофалар топилсин.

191. Учлари $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипснинг фокусларида, фокуслари эса унинг учларида бўлган гиперболанинг тенгламаси ёзилсин.

192. Координата ўқларига нисбатан симметрик, $M(2a;$ $a\sqrt{3})$ нуқтадан ўтувчи ва эксцентриситети $\varepsilon=\sqrt{2}$ бўлган гипербола тенгламаси ёзилсин.

193. $y^2=a^2+x^2$ гипербола ясалсин, унинг фокусларининг координаталари ва асимптоталари орасидаги бурчак топилсин.

194. $x^2-4y^2=16$ гиперболага $A(0;\ -2)$ нуқтадан ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин.

195. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболанинг фокусидан асимптоталаригача бўлган масофалар ва асимптоталари орасидаги бурчак топилсин.

196. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболага ички чизилган квадратнинг томони топилсин ва қандай гиперболаларга квадратни ички чизиш мумкинлиги текширилсин.

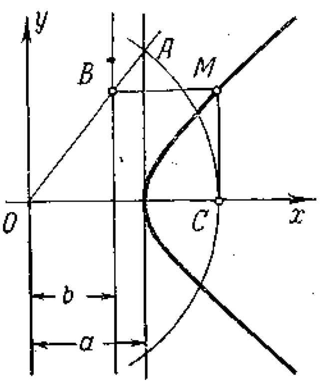
197. Асимптотаси ҳақиқий ўқи билан: 1) $60°$, 2) α бурчак ташкил этувчи гиперболанинг эксцентриситети топилсин.

198. $y=-\sqrt{9+x^2}$ эгри чизиқнинг жойлашиш соҳаси аниқлансин. Эгри чизиқ чизилсин.

199. $F(4;\ 0)$ нуқтага нисбатан $x=1$ тўғри чизиққа икки марта яқинроқ бўлиб ҳаракат қилувчи $M(x;\ y)$ нуқтанинг траекторияси аниқлансин.

200. $A(-1;\ 0)$ ва $B(2;\ 0)$ нуқталар берилган. $M(x;\ y)$ нуқта шундай ҳаракат қиладики, $\triangle AMB$ даги B бурчак A бурчакдан икки баравар катта бўлиб қолаверади. Ҳаракат траекторияси аниқлансин.

Кўрсатма. A, B ва M нуқта координаталарига кўра $\operatorname{tg} A$ ва $\operatorname{tg} B$ ни топгандан сўнг $\angle B=2\angle A$ эканлигидан фойдаланиш керак.



3- чизма.

201. $A(a;\ 0)$ нуқта берилган. Oy ўқ бўйича B нуқта ҳаракат қилади. Ox ўққа параллел бўлган BE тўғри чизиқда AB кесмага тенг қилиб BM ва BM_1 кесмалар қўйилган. M ва M_1 нуқталарнинг геометрик ўрни аниқлансин.

202. $x=\pm b$ ва $x=\pm a$ $(b<a)$ тўғри чизиқлар берилган. Ихтиёрий OA нур (3-чизма) $x=b$ (ёки $x=-b$) тўғри чизиқни B нуқтада ва $x=a$ (ёки $x=-a$) тўғри чизиқни

A нуқтада кесади. OA радиус билан Ox ўқни C нуқтада кесувчи ёй ўтказилган. B ва C нуқталардан мос равишда Ox ва Oy ўқларга параллел ҳамда M нуқтада кесишувчи тўғри чизиқлар ўтказилган. M нуқталарнинг геометрик ўрни аниқлансин.

Кўрсатма. Нур билан Ox ўқ ва $x = \pm b$, $x = \pm a$ тўғри чизиқлар орасида ҳосил бўлган учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланилсин.

203. Бирор учидан фокусларигача масофалари 9 ва 1 га тенг бўлган гиперболанинг каноник тенгламаси ёзилсин.

204. Маркази $x^2 - 3y^2 = 12$ гиперболанинг ўнг фокусида бўлган, координаталар бошидан ўтувчи айлана билан шу гипербола асимптоталарининг кесишган нуқталари топилсин.

205. $M\left(6; \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ нуқтадан ўтувчи, координата ўқларига нисбатан симметрик бўлган гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқи $a = 4$. Гиперболанинг чап фокусидан асимптоталарига туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

206. $9x^2 - 16y^2 = 144$ гиперболада ўнг фокусга нисбатан чап фокусга икки марта яқинроқ бўлган нуқта топилсин.

207. $x^2 - y^2 = 4$ гиперболада фокал радиус-векторлар ўзаро перпендикуляр бўлган нуқта топилсин. (184-масалага берилган кўрсатмага қаралсин.)

208. M нуқта $9x^2 - 16y^2 = 144$ гиперболанинг фокуслари орасидаги масофани $F_1M : MF = 2:3$ нисбатда бўлади. Бунда F_1 — гиперболанинг чап фокуси. M нуқтадан Ox ўқ билан $135°$ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқ ўтказилган. Шу тўғри чизиқнинг гипербола асимптоталари билан кесишган нуқталари топилсин.

209. $x = -2$ тўғри чизиққа нисбатан $F(-8; 0)$ нуқтадан икки баравар узоқроқда ҳаракат қилувчи M нуқтанинг траекторияси аниқлансин.

210. $A(-a; 0)$ ва $B(2a; 0)$ нуқталар берилган. P нуқта шундай ҳаракат қиладики, PAB бурчак APB учбурчакнинг APC ташқи бурчагидан уч марта кичик бўлиб қола беради. P нуқтанинг ҳаракат траекторияси аниқлансин.

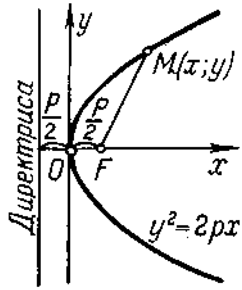
Кўрсатма. $\angle APC = 3\angle PAB$ бўлгани учун $\angle PBA = 2\angle PAB$ ёки $\angle B = 2\angle A \cdot \operatorname{tg} A = \frac{y}{x+a}$; $\operatorname{tg} B = \frac{y}{2a - x}$ ва $\operatorname{tg} 2B = \frac{2\operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$ тенгликлардан изланган тенгламани топиш мумкин.

11- §. Парабола

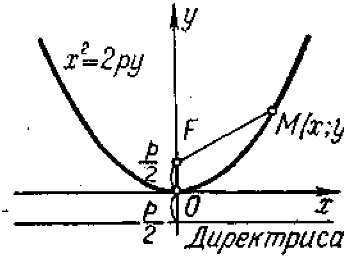
Берилган нуқтадан (фокусдан) *ва берилган тўғри чизиқдан* (директрисадан) *бир хил узоқликда бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни* **парабола** *дейилади.*

Параболанинг *каноник* тенгламаси қуйидаги икки кўринишга эга:
1) $y^2 = 2px$ — Ox ўққа нисбатан симметрик парабола (4-чизма).
2) $x^2 = 2py$ — Oy ўққа нисбатан симметрик парабола (5-чизма).

Ҳар икки ҳолда ҳам параболанинг *учи*, яъни симметрия ўқида ётувчи нуқтаси, координаталар бошида бўлади.



4- чизма.



5- чизма.

парабола $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ фокус ва $x = -\frac{p}{2}$ директрисага эга; унинг $M(x;\ y)$ нуқтасининг фокал радиус-вектори $r = x + \frac{p}{2}$. $x^2 = 2py$ парабола $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$ фокус ва $y = -\frac{p}{2}$ директрисага эга; унинг $M(x;\ y)$ нуқтасининг фокал радиус-вектори $r = y + \frac{p}{2}$.

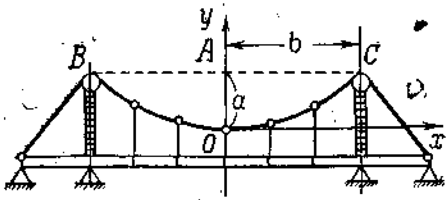
211. $F(0;\ 2)$ нуқтадан ва $y = 4$ тўғри чизиқдан бир хил узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин. Бу эгри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари топилсин ва у ясалсин.

212. Координаталар бошидан ва $x = -4$ тўғри чизиқдан бир хил узоқликда бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин. Бу эгри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари топилсин ва у ясалсин.

213. 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -4x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -4y$ тенгламалар билан берилган параболалар ҳамда уларнинг фокуслари, директрисалари ясалсин ва директрисаларининг тенгламалари ёзилсин.

214. 1) $(0;\ 0)$ ва $(1;\ -3)$ нуқталардан ўтувчи ва Ox ўққа нисбатан симметрик; 2) $(0;\ 0)$ ва $(2;\ -4)$ нуқталардан ўтувчи ва Oy ўққа нисбатан симметрик бўлган парабола тенгламаси ёзилсин.

215. Осма кўприкнинг канати (симдан эшилган йўғон арқон) парабола шаклига эга (6-чизма). Агар канатнинг эгилиши $AO = a$, равоқ узунлиги $BC = 2b$ бўлса, унинг чизмада кўрсатилган ўқларга нисбатан тенгламаси ёзилсин.



6- чизма.

216. Маркази $y^2 = 2px$ параболанинг фокусида бўлиб, парабола директрисасига уринувчи айлана тенгламаси ёзилсин. Парабола ва айлананинг кесишган нуқталари топилсин.

217. $x^2 + y^2 + 4y = 0$ айлана ва $x + y = 0$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқталаридан ўтиб, Oy ўққа нисбатан симметрик бўлган параболанинг ва унинг директрисасининг тенгламалари ёзилсин. Айлана, тўғри чизиқ ва парабола ясалсин.

218. $y^2 = 6x$ параболада фокал радиус-вектори 4,5 га тенг бўлган нуқта топилсин.

219. Прожекторнинг ойнали сирти параболанинг ўз симметрия ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган. Ойнанинг диаметри 80 *см*, чуқурлиги 10 *см*. Нурларнинг параллел даста шаклида қайтиши учун ёруғлик манбаи параболанинг фокусида ўрнатилиши керак бўлса, ёруғлик манбаи парабола учидан қандай масофада ўрнатилиши керак?

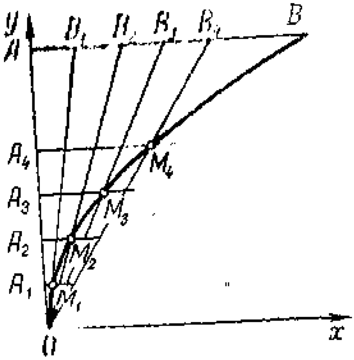
220. $y = -\sqrt{x}$ эгри чизиқнинг жойлашиш соҳаси аниқлансин. Бу эгри чизиқ ясалсин.

221. $y^2 = 2px$ парабола учидан ўтиши мумкин бўлган барча ватарлар ўтказилган. Бу ватарлар ўрталари геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

Кўрсатма. Ўтказилган ватарларнинг ўрта нуқталарини (ξ, η) билан белгиласак, $\xi = \frac{x}{2}$, $\eta = \frac{y}{2}$. Бу тенгликлар ва $y^2 = 2px$ тенгламадан x ва y ларни йўқотсак, изланган тенглама ҳосил бўлади.

222. $x^2 + y^2 = 2ax$ айланага ва Oy ўққа уринувчи айлаланалар марказларининг геометрик ўрни аниқлансин.

Кўрсатма. Берилган айлана марказини O_1, уринувчи айланалар марказларини $M(x; y)$ ва радиусларини эса R билан белгилайлик. $MO_1 = R + a$, $R = x$ ва $MO_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ муносабатлардан фойдаланиб изланган тенглама топилади.



7- чизма.

223. $A(0;\ a)$ ва $B(a;\ a)$ нуқталар берилган. OA ва AB кесмалар $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ва $B_1, B_2, B_3, \ldots$ нуқталар билан n та тенг бўлакларга бўлинган (7-чизма). M_k нуқта OB_k нур билан A_kM_k ($A_kM_k \parallel Ox$) тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси бўлсин. Бундай M_k нуқталарнинг $y^2 = ax$ параболада ётиши кўрсатилсин. Шу усул билан $y^2 = 4x$; $y^2 = 5x$; $y^2 = 3x$ параболалар ясалсин.

---

224. Координаталар бошидан ва $x = 4$ тўғри чизиқдан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин. Бу эгри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари топилсин ва эгри чизиқ ясалсин.

225. $F(2;\ 0)$ нуқтадан ва $y = 2$ тўғри чизиқдан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин. Параболанинг учи, унинг Ox ўқ билан кесишган нуқтаси топилсин ва у ясалсин.

226. 1) (0; 0) ва (—1; 2) нуқталардан ўтувчи ва Ox ўққа нисбатан симметрик бўлган; 2) (0; 0) ва (2; 4) нуқталардан ўтувчи ва Oy ўққа нисбатан симметрик бўлган параболанинг тенгламаси ёзилсин.

227. $y = x$ тўғри чизиқ билан $x^2 + y^2 + 6x = 0$ айла-нинг кесишган нуқталаридан ўтувчи ва Ox ўққа нис- симметрик бўлган параболанинг ва унинг директрисa тенгламалари ёзилсин. Тўғри чизиқ, парабола ва ясалсин.

228. $y^2 = 2px$ параболага мунтазам учбурчак ички чизилган. Учбурчак учларининг координаталари аниқлансин (173-масала) учун берилган кўрсатмага қаралсин).

229. $y^2 = 8x$ параболага $A(0;\ -2)$ нуқтадан ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин.

230. $y^2 = -4x$ параболанинг фокусидан Ox ўқ билан 120° бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқ ўтказилсин. Ўша тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин ва ҳосил бўлган ватарнинг узунлиги топилсин.

12-§. Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг директрисалари, диаметрлари ва уларга ўтказилган уринмалар

1°. Oy ўққа параллел ва ундан $\frac{a}{\varepsilon}$ масофада жойлашган тўғри чизиқлар $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ эллипснинг ва $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболанинг **директрисалари** дейилади, бунда ε — эгри чизиқнинг эксцентриситети.

Директрисаларнинг тенгламалари:

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Директрисаларнинг хоссаси: *эгри чизиқ ихтиёрий нуқтасининг фокусгача ва мос директрисагача масофаларининг нисбати эксцентриситетга тенг:*

$$\frac{r}{d}=\varepsilon. \tag{2}$$

2°. **Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг диаметри** деб, *параллел ватарлар ўрталарининг геометрик ўрнига* айтилади. Эллипс билан гиперболанинг диаметрлари уларнинг марказларидан ўтувчи тўғри чизиқлар кесмаларидан ва нурларидан иборат бўлса, параболанинг диаметрлари эса унинг ўқига параллел нурлардан иборатдир.

$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ эгри чизиқлар учун оғмаликлари $k=\operatorname{tg}\alpha$ бўлган ватарларни тенг бўлувчи **диаметрнинг тенгламаси**

$$y=\pm\frac{b^2}{a^2k}x \tag{3}$$

бўлса, $y^2=2px$ парабола учун

$$y=\frac{p}{k} \tag{4}$$

бўлади.

Эллипс ва гиперболада бир диаметр иккинчи диаметрга параллел бўлган ватарларни тенг иккига бўлса, бундай икки диаметр *ўзаро қўшма* дейилади. Қўшма диаметрларнинг бурчак коэффициентлари k ва k_1 ўзаро

$$kk_1=-\frac{b^2}{a^2} \text{ (эллипс учун)}$$

$$kk_1=\frac{b^2}{a^2} \text{ (гипербола учун)}$$

тенгликлар билан боғлангандир.

3°. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$ эллипсга ўтказилган уринманинг тенгламаси:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1;$$

$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right)$ *гиперболага ўтказилган уринманинг тенгламаси:*

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1;$$

$(y^2=2px)$ параболага ўтказилган уринманинг тенгламаси $y\cdot y_0=p(x+x_0)$ дан иборатдир, бу ерда $(x_0;\ y_0)$ — уриниш нуқтаси.

231. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипс ва унинг директрисалари ясалсин. Эллипснинг $x=-3$ абсциссасидан ўнг фокусигача ва ўнг директрисасигача бўлган масофалар топилсин.

232. $\frac{x^2}{16^2}-\frac{y^2}{9}=1$ гипербола ва унинг директрисалари ясалсин, гиперболанинг $x=5$ абсциссасидан чап фокусигача ва чап директрисасигача бўлган масофалар топилсин.

233. Катта ярим ўқи 2 га тенг, директрисалари $x=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$ тўғри чизиқлардан иборат эллипснинг каноник тенгламаси ёзилсин.

234. Асимптоталари $y=\pm x$, директрисалари эса $x=\pm\sqrt{6}$ бўлган гиперболанинг тенгламаси ёзилсин.

235. $x^2+4y^2=16$ эллипс, унинг $y=\frac{x}{2}$ диаметри ва унга қўшма диаметри ясалсин. Ясалган ярим диаметрларнинг a_1 ва b_1 узунликлари топилсин.

236. $x^2-4y^2=4$ гипербола, унинг $y=-x$ диаметри ва унга қўшма диаметри ясалсин, шунингдек ўша диаметрлар орасидаги бурчак топилсин.

237. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс диаметрларидан ўзига қўшма диаметрга тенг бўлганининг узунлиги топилсин.

238. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболанинг асимптотаси Ox ўқ билан 60° бурчак ташкил этади. Гиперболанинг $y=2x$ диаметрига қўшма диаметрининг тенгламаси ёзилсин. Гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқи учун ихтиёрий a кесма олиб, эгри чизиқ ва унинг диаметрлари ҳамда берилган диаметрга параллел ватарлари ясалсин.

239. $y^2=2x$ параболанинг Ox ўқ билан 45° бурчак ташкил этувчи ватарлари ўрталарининг геометрик ўрни аниқлансин.

240. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипс берилган $(-2;\ 1)$ нуқта орқали шу нуқтада тенг иккига бўлинувчи ватар ўтказилсин.

241. $y^2 = -4x$ парабола берилган. $(-2; -1)$ нуқта орқали шу нуқтада тенг иккига бўлинувчи ватар ўтказилсин.

242. Агар a ва b — эллипснинг ярим ўқлари, a_1 ва b_1 эса қўшма диаметрлари яримларининг узунликлари, φ улар орасидаги бурчак бўлса, 235- масала учун Аполлоний теоремаси, яъни $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ ва $a_1 b_1 \sin\varphi = ab$ экани текширилсин.

243. 1) $x^2 + 4y^2 = 16$; 2) $3x^2 - y^2 = 3$; 3) $y^2 = 2x$ эгри чизиқларнинг абсциссаси $x_0 = 2$ нуқтасида ўтказилган уринмаларининг тенгламалари ёзилсин.

244. Агар $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсга уринма бўлса, $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$ тенгликнинг бажарилиши исбот қилинсин.

Кўрсатма. $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ ва $Ax + By + C = 0$ тенгламалар коэффициентларининг пропорционал бўлишидан фойдаланиб, x_0 ва y_0 ни топиб, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламага қўйиш керак.

245. $x^2 + 4y^2 = 20$ эллипснинг биринчи координата бурчагининг биссектрисасига параллел бўлган уринмаларининг тенгламалари ёзилсин.

246. $x^2 + 2y^2 = 8$ эллипсга $(0; 6)$ нуқтадан ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин.

247. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг координата ўқларидан тенг кесмалар ажратувчи уринмасининг тенгламаси ёзилсин.

248. Агар $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболага уринма бўлса, $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$ тенгликнинг бажарилиши исбот қилинсин (244-масалага берилган кўрсатмага қаралсин).

249. $4x^2 - 9y^2 = 36$ гиперболанинг $x + 2y = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган уринмаларининг тенгламалари ёзилсин.

250. Эллипснинг бирор нуқтасига ўтказилган нормал ўша нуқта фокал радиус векторлари орасидаги бурчакнинг биссектрисаси бўлиши исбот қилинсин.

251. Гиперболанинг бирор нуқтасига ўтказилган уринма ўша нуқта фокал радиус векторлари орасидаги бурчакнинг биссектрисаси бўлиши исбот қилинсин.

252. Парабола фокусидан чиққан нурлар параболадан қайтганда унинг ўқига параллел бўлиши исбот қилинсин.

Кўрсатма. M нуқтадан ўтувчи нормал тенгламасини ёзиб, унинг абсциссалар ўқи билан кесишган N нуқтасини топиб, $FM = FN$ экани исботлансин, бу ерда F — параболанинг фокуси.

---

253. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ гипербола асимптоталарининг унинг директрисалари билан кесишган нуқталари топилсин.

254. $x^2 + 4y^2 = 16$ эллипс, унинг $y = x$ диаметри ҳамда унга қўшма диаметри ясалсин. Шу диаметрлар орасидаги бурчак топилсин.

255. $x^2 - 4y^2 = 16$ гиперболанинг Ox ўқ билан 45° бурчак ташкил этувчи ватарлари ўрталарининг геометрик ўрни аниқлансин.

256. $4x^2 - y^2 = 4$ гипербола берилган. (2; 2) нуқта орқали шу нуқтада тенг иккига бўлинувчи ватар ўтказилсин.

257. $x^2 + 2y^2 = 6$ эллипсда ординатаси 1, абсциссаси манфий бўлган M нуқта олинган. Ўша нуқтадан ўтувчи уринма билан OM тўғри чизиқ орасидаги бурчак топилсин.

258. Агар $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқ $y^2 = 2px$ параболага уринма бўлса, $B^2p = 2AC$ тенгликнинг бажарилиши исбот қилинсин (244-масалага берилган кўрсатмага қаралсин).

259. $y^2 = 8x$ параболанинг $x + y = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлган уринмасининг тенгламаси ёзилсин.

13-§. Декарт координаталарини алмаштириш. $y = ax^2 + bx + c$ ва $x = ay^2 + by + c$ параболалар. $xy = k$ гипербола

1°. Берилган системадаги (x; y) координаталарни қуйидаги формулалар ёрдами билан янги системадаги (X; Y) координаталарга алмаштириш мумкин:

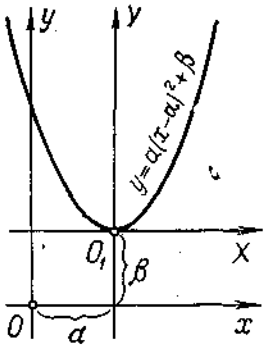
1) ўқларни параллел силжитиб, координаталар боши O_1 (α; β) нуқтага кўчирилганда

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta; \tag{1}$$

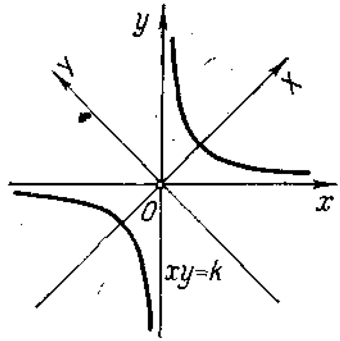
2) координаталар бошини қўзғатмасдан ўқларнинг йўналишини φ бурчакка бурганда

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \quad y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi. \tag{2}$$

2°. Координаталар боши O_1 (α; β) нуқтага кўчирилса $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ тенглама $Y = aX^2$ кўринишга келади, бу эса учи O_1(α; β) нуқтада бўлиб, симметрия ўқи Oy ўққа параллел (8-чизма) бўлган параболадир. $y = ax^2 + bx + c$ тенглама ўнг томонида тўлиқ квадратдан иборат бўлган



8- чизма.



9- чизма.

қисмни ажратсак, олдинги ҳолга келади, шунинг учун у ҳам параболани аниқлайди. $a > 0$ бўлганда эса парабола учидан пастга қараган бўлади.

3°. Ўқларнинг йўналиши $\varphi = 45°$ га бурилса, $xy = k$ тенглама $X^2 - Y^2 = 2k$ кўринишга келтирилади. Демак, берилган тенглама xOy системага нисбатан асимптоталари координата ўқларидан иборат бўлган *тенг томонли гиперболани* билдиради (9- чизма). $(x - \alpha)$ $(y - \beta) = k$ тенглама координаталар бошини O_1 (α; β) нуқтага кўчириш билан $XY = k$ кўринишга келтирилади. Шунинг учун у ҳам тенг томонли гиперболани аниқлайди (9- чизма).

260. 1) Координата ўқларини параллел кўчирганда A (3; 1) нуқта янги (2; — 1) координаталарга эга бўлади. Эски ва янги координаталар системалари ҳамда A нуқта ясалсин.

2) Координата ўқларининг йўналишини маълум бир ўткир бурчакка бурганда, A (2; 4) нуқтанинг янги системадаги абсциссаси 4 га тенг бўлади. Ўша бурчак топилсин. Иккала система ва A нуқта ясалсин.

261. Координата бошини кўчириб,

1) $\frac{(x-2)^2}{4} + (y + 1^2) = 1$; 2) $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$;

3) $(y + 2)^2 = 4\,(x - 3)$; 4) $2y = -(x + 2)^2$;

5) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3$; 6) $y^2 - 8y = 4x$;

7) $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24$; 8) $x^2 + 6x + 5 = 2y$

тенгламалар соддалаштирилсин, эски ва янги координата ўқлари ва эгри чизиқлар ясалсин.

262. Координата ўқларини 45° га буриб,

1) $5x^2-6xy+5y^2=32$; 2) $3x^2-10xy+3y^2+32=0$ тенгламалар соддалаштирилсин. Эски ва янги координата ўқлари ҳамда эгри чизиқлар ясалсин.

263. Нуқталари бўйича $xy=-4$ эгри чизиқ ясалсин ва координата ўқларини $45°$ га буриб, эгри чизиқ тенгламаси янги системада ёзилсин.

264. Координаталар бошини кўчириб, 1) $xy-2x=6$; 2) $xy-2x-y+8=0$; 3) $xy-x+2y=6$; 4) $xy+2x=$ $=3y$ эгри чизиқларнинг тенгламалари $xy=k$ кўринишга келтирилсин.

265. Ушбу параболалар ясалсин:
1) $y=(x-2)^2$; 2) $y=(x-2)^2+3$; 3) $y=(x+2)^2$; 4) $y=$ $=(x+2)^2-3$.

266. Тенгламаларнинг ўнг томонларида тўлиқ квадратларни ажратиш йўли билан
1) $y=x^2-4x+5$; 3) $y=-x^2+3x-2$
2) $y=x^2+2x+3$; параболалар ясалсин.

267. Ушбу
1) $y=4x-x^2$ ва 2) $2y=3+2x-x^2$
параболалар ясалсин ва уларнинг Ox ўқ билан кесишган нуқталари топилсин.

268. Фонтандан отилиб чиққан сув оқими, сув чиққан O нуқтадан ўтувчи вертикалдан 0,5 *м* масофада 4 метрга кўтарилади. O нуқтадан 0,75 *м* масофада оқимнинг Ox горизонталдан баландлиги аниқлансин.

269. Oy ўққа нисбатан симметрик, ундан b кесма, Ox ўқдан a ва $-a$ кесмалар ажратувчи парабола тенгламаси тузилсин.

Кўрсатма. Параболанинг $y=Ax^2+Bx+C$ кўринишдаги тенгламасига берилган $(-a;\ 0)$, $(a;\ 0)$ ва $(0;\ b)$ нуқталарнинг координаталарини қўйиб, ҳосил бўлган тенгламалардан A, B ва C ларни топиш керак.

270. $y=ax^2+bx+c$ парабола $O\ (0;\ 0)$, $A(-1;-3)$ ва $B\ (-2,4)$ нуқталардан ўтади. Диаметри, параболанинг Ox ўқдан ажратган кесмасидан иборат бўлган айлана тенгламаси тузилсин.

271. Координата ўқларини қандай бурчакка бурганда
1) $x^2-xy+y^2-3=0$; 2) $5x^2-4xy+2y^2-24=0$
тенгламалардаги xy ҳадлар йўқолади? Эски ва янги координаталар системалари ҳамда эгри чизиқлар ясалсин.

272. v_0 бошланғич тезлик билан горизонтга φ бурчак остида отилган ўқ ҳаракатининг траекторияси аниқлансин.

Ўқнинг учиш узоқлиги ва траекториясининг энг юқори нуқтаси аниқлансин (ҳавонинг қаршилиги эътиборга олинмасин).

273. F (4; 0) нуқтагача бўлган масофасининг $x=-2$ тўғри чизиққача бўлган масофасига нисбати 2 га тенг бўлган M (x; y) нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

274. Агар координаталар боши $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг чап учига ёки $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболанинг ўнг учига кўчирилса, ҳар икки тенглама ҳам $y^2=2px+qx^2$ кўринишга келтирилади, бунда $p=\frac{b^2}{a}$, $q=\varepsilon^2-1$. Буни исбот қилинг.

275. 274- масаланинг натижасига асосан: 1) $y^2=x-\frac{1}{4}x^2$; 2) $y^2=x+\frac{1}{4}x^2$; 3) $y^2=x$ эгри чизиқларнинг эксцентриситетлари ва типлари (турлари) аниқлансин. Биринчи ва иккинчиси учун Ox ўқ билан кесишган нуқталарни ҳамда a ва b параметрларни топиб, эгри чизиқлар ясалсин.

---

276. Тўлиқ квадратларни ажратиб ва координаталар бошини кўчириш орқали қуйидаги чизиқларнинг тенгламалари соддалаштирилсин:

1) $2x^2+5y^2+12x+10y+13=0$;
2) $x^2-y^2+6x+4y-4=0$;
3) $y^2+4y=2x$;
4) $x^2-10x=4y-13$.

Эски ва янги ўқлар ҳамда эгри чизиқлар ясалсин.

277. Координата ўқларини 45° бурчакка буриб, $3x^2-2xy+3y^2-8=0$ тенглама соддалаштирилсин. Эски координаталар системасида фокусларнинг координаталари аниқлансин.

278. Диаметри $y=3-2x-x^2$ параболанинг Ox ўқдан ажратган кеемасидан иборат бўлган айлана тенгламаси ёзилсин. Иккала эгри чизиқ ясалсин.

279. Диаметри $xy=8$ гиперболанинг $x+y=6$ тўғри чизиқдан ажратган кесмадан иборат бўлган айлана тенгламаси ёзилсин. Учала чизиқ ясалсин.

280. Тенгламаси $y=x^2+6x+5$ бўлган параболанинг учи A нуқтада бўлиб, B — унинг Oy ўқ билан кесишган

нуқтаси. AB кесманинг ўртасидан чиқарилган перпендикуляр тенгламаси тузилсин.

281. Ox ўққа нисбатан симметрик, ундан -4, Oy ўқдан эса 4 ва -4 кесмалар ажратувчи парабола тенгламаси ёзилсин.

Кўрсатма. Парабола тенгламаси $x = ay^2 + c$ кўринишда бўлиши керак (нима учун?).

282. Координата ўқлари билан кесишган нуқталари бўйича қуйидаги:

1) $3y = 9 - x^2$; 2) $y^2 = 9 - 3x$;
3) $y^2 = 4 + x$; 4) $x^2 = 4 + 2y$

параболалар ясалсин.

283. F (4; 0) нуқтагача бўлган масофасининг $x = 10$ тўғри чизиққача бўлган масофасига нисбати $\frac{1}{2}$ га тенг M (x; y) нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

14-§. 2-тартибли эгри чизиқларга доир аралаш масалалар

284. Диаметри $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасидаги кесмасидан иборат бўлган айлана тенгламаси ёзилсин.

285. $x^2 + y^2 + ay = 0$ айлана марказидан $y = 2(a - x)$ тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин.

286. $x^2 + y^2 = 2ax$ айлана марказидан уни A ва B нуқталарда кесувчи ва $x + 2y = 0$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказилган. $\triangle AOB$ нинг юзи топилсин.

287. Берилган B нуқтага нисбатан берилган A нуқтадан m марта узоқроқ бўлган M нуқталарнинг геометрик ўрни $m = 1$ бўлганда тўғри чизиқ, $m \neq 1$ бўлганда айлана экани кўрсатилсин.

288. AB кесма $OA = a$ ва $OB = b$ бўлакларга бўлинган. OA ва OB кесмалар тенг бурчаклар остида кўринувчи нуқталарнинг геометрик ўрни $a = b$ бўлганда тўғри чизиқ бўлиб, $a \neq b$ бўлганда айлана (Аполлоний айланаси) бўлиши кўрсатилсин.

289. Ҳаракатдаги M (x; y) нуқтадан $y = kx$ ва $y = -kx$ тўғри чизиқларгача бўлган масофалар квадратларининг йиғиндиси a^2 га тенг. Ўша нуқта траекторияси аниқлансин.

290. Ox ўққа ва $x = -5$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик эллипс $(-1;\ 1{,}8)$ ва $(-5;\ 3)$ нуқталардан ўтади. Эллипснинг тенгламаси ёзилсин ва ўзи ясалсин.

Кўрсатма. Эллипс тенгламасини $\frac{(x+5)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ кўринишда излаш керак. Бу тенгламага берилган нуқталарнинг координаталарини қўйиб, ҳосил бўлган тенгламалардан a ва b ларни топамиз.

291. $x^2 - y^2 = a^2$ гиперболага ички чизилган тенг томонли учбурчакнинг юзи топилсин.

Кўрсатма. Учбурчакнинг бир учи гиперболанинг ўнг учида ётса қолган икки учи гиперболанинг чап шохчасидаги (ёки аксинча) Ox ўққа нисбатан симметрик нуқталардан иборат бўлади.

292. Учлари $x^2 + 3y^2 = 12l^2$ эллипс билан $x^2 - 3y^2 = 6l^2$ гиперболанинг кесишган нуқталаридан иборат бўлган тўртбурчакнинг диагоналлари орасидаги бурчак топилсин.

293. *Маркази координаталар бошида бўлган айлана* $x^2 - y^2 = a^2$ гиперболанинг фокусларидан ўтади. Айлананинг гипербола асимптоталари билан кесишган нуқталари топилсин.

294. $xy = -4$ ва $x^2 - y^2 = 6$ гиперболалар ясалсин. A ва B — ўша гиперболаларнинг кесишувчи шохчаларининг учлари, C эса уларнинг қолган икки шохчаларининг кесишиш нуқтаси бўлса, $\triangle ABC$ нинг юзи ҳисоблансин.

295. Гиперболанинг ихтиёрий нуқтасидан асимптоталаригача бўлган масофаларнинг кўпайтмаси ўзгармас $\frac{a^2b^2}{c^2}$ миқдорга тенг эканлиги исбот қилинсин.

296. Координата ўқларидан $a = b = 2$ кесмалар ажратувчи тўғри чизиққа $y = -\frac{x^2}{8}$ парабола фокусидан туширилган перпендикулярнинг узунлиги ва тенгламаси топилсин.

297. $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипс ва $x^2 = 6y$ парабола ясалсин, ҳамда асослари эллипснинг катта ўқи ва эллипс билан параболанинг умумий ватаридан иборат бўлган трапециянинг юзи топилсин.

298. Маркази $y^2 = 2px$ параболанинг фокусида бўлган шундай айлана чизилганки, эгри чизиқларнинг умумий ватари параболанинг учидан ва фокусидан тенг узоқлашган. Шу айлананинг тенгламаси ёзилсин.

299. Координата ўқларидан a ва b кесмалар ажратувчи тўғри чизиққа $by = x^2 + 2ax + a^2 + b^2$ парабола учидан туширилган перпендикулярнинг узунлиги ва тенгламаси топилсин.

300. Координаталар ўқлари билан кесишган нуқталари бўйича $4y = 12 - x^2$ ва $4x = 12 - y^2$ параболалар ясалсин ва уларнинг умумий ватарининг узунлиги топилсин.

301. Учлари $y = 4 - x^2$ параболанинг Ox ўқ ва $y = 3x$ тўғри чизиқ билан кесишган нуқталарида бўлган тўртбурчакнинг юзи топилсин.

302. Координаталар бошидан ва $y = \frac{x^2}{a} - 2x + a$ параболанинг координата ўқлари билан кесишган нуқталаридан ўтувчи айлана тенгламаси ёзилсин.

303. $x^2 + 4y^2 = 16$ эллипс берилган. Унинг A (4; 0) учидан ўтиши мумкин бўлган барча ватарлар ўтказилган. Ўша ватарлар ўрталарининг геометрик ўрни аниқлансин ва эгри чизиқлар ясалсин.

Кўрсатма. Ватарлар ўрта нуқталарининг координаталари $x = \frac{x_2 + 4}{2}$, $y = \frac{y_2}{2}$ дан иборат. Бундан x_2 ва y_2 ларни топиб, эллипс тенгламасига қўйиш керак.

304. Ҳаракатдаги M (x; y) нуқтадан координата бурчакларининг биссектрисаларигача бўлган масофалар квадратларининг айирмаси 8 га тенг. Ўша нуқта траекторияси аниқлансин.

305. A (3; 4) нуқтадан ўтувчи ва Ox ўққа уринувчи айланалар марказлари геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин.

306. $x^2 - y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$ тенглама тўлиқ квадратдан иборат ҳадларини ажратиб ҳамда координаталар бошини кўчириб соддалаштирилсин. Эски ва янги координата ўқлари ҳамда эгри чизиқ ясалсин.

307. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ гиперболанинг ўнг фокусидан унинг барча нуқталарига ўтказилган фокал радиус-векторлари ўрталарининг геометрик ўрни топилсин.

308. Фокуслари F (a; a) ва F_1 ($-a$; $-a$) нуқталарда бўлган ва A (a; $-a$) нуқтадан ўтувчи эллипс тенгламаси ёзилсин. Тенгламани координата ўқларини 45° га буриб соддалаштирилсин.

309. Координаталар ўқларини $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$ бурчакка буриб $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 20$ тенглама соддалаштирилсин. Эски ва янги координата ўқлари ҳамда эгри чизиқ ясалсин.

310. $3x+4y=0$ тўғри чизиққача ва Ox ўққача бўлган масофалари квадратларининг айирмаси ўзгармас 2,4 га тенг бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

311. $F\left(\frac{p}{\varepsilon+1};0\right)$ нуқтагача масофасининг $x=-\frac{p}{\varepsilon(\varepsilon+1)}$ тўғри чизиққача масофасига нисбати ε га тенг бўлган $M(x;\ y)$ нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

312. Координаталари

1) $R^2 < x^2+y^2 < 4R^2$ ва $x^2 > \frac{R^2}{4}$;

2) $x^2-y^2 > a^2$ ва $x^2 < 4a^2$;

3) $xy > a^2$ ва $|x+y| < 4a$;

4) $2x < y^2+4y$ ва $x^2+y^2+4x+4y < 0$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталардан тузилган соҳалар ясалсин.

15-§. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг умумий тенгламаси

1°. Иккинчи тартибли чизиқ деб

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

умумий кўринишда ёзилган иккинчи даражали тенглама билан аниқланувчи эгри чизиққа айтилади.

(1) тенгламанинг коэффициентларидан қуйидаги иккита:

$$\delta=\begin{vmatrix} A & Б \\ B & C \end{vmatrix} \quad \text{ва} \quad \Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

детерминантни тузамиз.

Δ — детерминант (1) тенгламанинг *дискриминанти*, δ *эса унинг юқори тартибли ҳадларининг дискриминанти* дейилади. Δ ва δ ларнинг қийматларига қараб (1) тенглама қуйидаги геометрик шаклларни аниқлайди:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Эллипс (ҳақиқий ёки мавҳум)	Нуқта
$\delta < 0$	Гипербола	Иккита кесишувчи тўғри чизиқ
$\delta = 0$	Парабола	Иккита параллел тўғри чизиқ (ҳақиқий ёки мавҳум)

2°. (1) тенгламани марказга нисбатан алмаштириш*. Агар $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$ бўлса, эгри чизиқ координаталари

$$\Phi'_x(x;\ y) = 0,\quad \Phi'_y(x;\ y) = 0 \qquad (2)$$

тенгламалардан топилувчи бирдан-бир марказга эга бўлади, бунда $\Phi(x;\ y)$ — (1) тенгламанинг чап томони. Координаталар бошини $O_1(x_0;\ y_0)$ (10- чизма) марказга кўчириб, (1) тенгламани

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + C_1y_1^2 + F_1 = 0 \qquad (3)$$

кўринишга келтирамиз, бунда

$$F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F = \frac{\Delta}{\delta}. \qquad (4)$$

3°. (3) тенгламани симметрия ўқларига келтириш. O_1x_1 ва O_1y_1 ўқларни бирор φ бурчакка буриб (10- чизма), (3) тенглама

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + F_1 = 0 \qquad (5)$$

каноник кўринишга келтирилади.

A_1 ва C_1 коэффициентлар

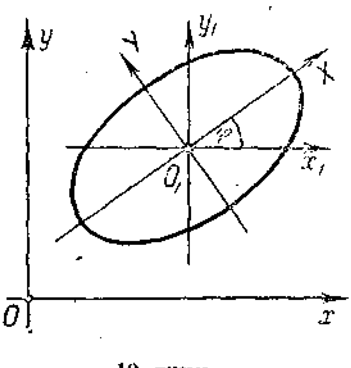
$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + \delta = 0 \qquad (6)$$

тенгламанинг илдизларидан иборат.

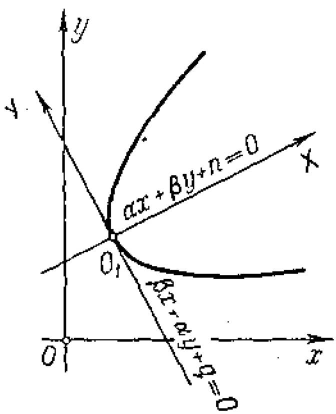
Буриш бурчаги φ

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A_1 - C} \qquad (7)$$

формуладан топилади.



10- чизма.



11- чизма.

* Бу параграфда ва бундан сўнг ҳам тенгламани алмаштириш деганда, координаталарни алмаштириш усули билан эгри чизиқларнинг тенгламаларини соддалаштиришни тушуниш керак.

4°. **Марказсиз эгри чизиқларнинг тенгламаларини алмаштириш.** Агар $\delta = 0$ бўлса, эгри чизиқ марказга эга бўлмайди ёки аниқ марказга эга бўлмайди. У ҳолда эгри чизиқнинг тенгламасини

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (8)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

I ҳол. D ва E лар α ва β ларга пропорционал: $D = m\alpha$, $E = m\beta$ у ҳолда (8) тенглама

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2m(\alpha x + \beta y) + F = 0$$

кўринишга келади, бундан

$$\alpha x + \beta y = m \pm \sqrt{m^2 - F}$$

иккита тўғри чизиқ ҳосил бўлади.

II ҳол. D ва E лар α ва β ларга пропорционал эмас. У ҳолда (8) тенгламани

$$(\alpha x + \beta y + n)^2 + 2m(\beta x - \alpha y + q) = 0 \qquad (9)$$

кўринишда ёзиш мумкин. m, n ва q параметрлар (8) ва (9) тенгламаларнинг коэффициентларини таққослаш асосида топилади.

O_1X ўқ сифатида $\alpha x + \beta y + n = 0$ тўғри чизиқни, O_1Y ўқ сифатида эса $\alpha x - \alpha y + q = 0$ тўғри чизиқни қабул қилиб (11- чизма),
$Y = \dfrac{\alpha x + \beta y + n}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, $X = \dfrac{\beta x - \alpha y + q}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ ларни топамиз. Бундан сўнг (9) тенглама $Y^2 = 2pX$ кўринишга келади. Бунда $p = \dfrac{|m|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. (9) тенгламага асосан O_1X ўқни шундай ярим текисликка йўналтириш керакки, унда $\beta x - \alpha y + q$ учҳаднинг ишораси m нинг ишорасига тескари бўлсин.

313. Ушбу

1) $4x^2 - y^2 = 0$; 2) $4x^2 + y^2 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$; 4) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$;

5) $x^2 + xy = 0$; 6) $y^2 - 16 = 0$; 7) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

тенгламаларнинг геометрик маънолари аниқлансин.

314. Ушбу

1) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$;

2) $x^2 - y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$;

3) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 6x - 3y - 8 = 0$

эгри чизиқларнинг марказлари топилсин ва тенгламалари марказга нисбатан алмаштирилсин.

315. Координата ўқларини буриб, ушбу

1) $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 24$; 2) $2x^2 + 4xy - y^2 = 12$

эгри чизиқларнинг тенгламалари каноник кўринишга келтирилсин ва эгри чизиқлар ясалсин.

316. Ушбу

1) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$;

2) $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$

тенгламалар каноник кўринишга келтирилсин ва эгри чизиқлар ясалсин.

317. Қуйидаги эгри чизиқларнинг тенгламалари каноник кўринишга келтирилсин ва чизиқлар ясалсин:

1) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$;

2) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$.

318. δ ва Δ дискриминантларга қараб ушбу

1) $x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 14y + 15 = 0$;

2) $x^2 + 2xy + 4y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$;

3) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y + 2 = 0$

тенгламаларнинг геометрик маънолари аниқлансин. Биринчи ва учинчи тенгламаларни y га нисбатан ечиб, шу тенгламалар билан аниқланувчи эгри чизиқлар ясалсин.

319. $y = \dfrac{3x^2 - 12x + 4}{4x - 8}$ эгри чизиқ тенгламаси каноник кўринишга келтирилсин ва эгри чизиқ ясалсин.

320. Маркази O_1 (1; 2) нуқтада бўлган ва координаталар боши ҳамда (0;4) ва (1; — 1) нуқталардан ўтувчи 2-тартибли эгри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

321. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ тенглама парабола ёйини аниқлаши кўрсатилсин. Парабола ясалсин ва учи аниқлансин.

Кўрсатма. Координата ўқлари $\varphi = -45°$ бурчакка бурилсин.

322. Ҳар биридан F $(m; n)$ нуқтагача бўлган масофанинг $x\cos\alpha + y\sin\alpha - q = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофага нисбати ε га тенг бўлган M $(x; y)$ нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Бу тенглама коэффициентларини $A, B, C, \ldots$ лар орқали белгилаб, $A + C$ ва $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ инвариантлар аниқлансин.

---

323. Ушбу

1) $x^2 - 4y^2 = 0$;

2) $x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 12 = 0$;

3) $x^2 + 5xy - 6y^2 = 0$

тенгламаларнинг геометрик маънолари аниқлансин.

324. Ушбу

1) $x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$;

2) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 12x - 12y + 4 = 0$

тенгламалар каноник кўринишга келтирилсин ва эгри чизиқлар ясалсин.

325. Ушбу

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

2) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

тенгламалар каноник кўринишга келтирилсин ва бу тенгламалар билан ифодаланувчи эгри чизиқлар ясалсин.

326. δ ва Δ дискриминантлар бўйича

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$;

2) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x + 10y - 7 = 0$

тенгламаларнинг геометрик маънолари аниқлансин. Тенгламаларнинг ҳар бирини y га нисбатан ечиб, бу тенгламалар билан аниқланувчи чизиқлар ясалсин.

327. Ҳар биридан F (3; 3) нуқтагача бўлган масофанинг $x + y = 0$ тўғри чизиққача масофага нисбати:

1) $\varepsilon = \frac{1}{2}$; 2) $\varepsilon = 2$ га тенг бўлган M (x; y) нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

328. $F\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ нуқтадан ва $x + y = 0$ тўғри чизиқдан баравар узоқликда бўлган M (x; y)-нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин ва у каноник кўринишга келтирилсин.

329. $x - 2y = 2$ тўғри чизиққача ва Ox ўққача бўлган масофалари квадратларининг айирмаси ўзгармас 3,2 га тенг нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Тенглама каноник кўринишга келтирилсин ва эгри чизиқ ясалсин.

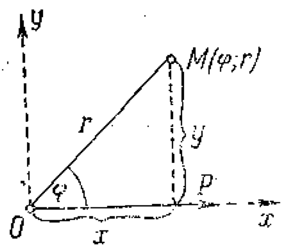
16-§. Қутб координаталари

Текисликда O нуқта — қутб ва OP нур — қутб ўқи берилган бўлсин (12-чизма). У ҳолда M нуқтанинг текисликдаги ўрни

1) $\varphi = \angle MOP$ *қутб бурчак;*

2) $r = OM$ *радиус-вектор*

билан аниқланади, φ билан r орасидаги боғланишни ифодаловчи тенгламани ўрганганда, қутб координаталари φ ва r ҳар қандай мусбат ва манфий қийматлар қабул қилади деб қараш фойдалидир. *Манфий* φ бурчак соат стрелкасининг юриши бўйича ҳисобланса, *манфий* r бўлса, нурнинг ўзи бўйича эмас, унинг қутбнинг иккинчи томонидаги давомида жойлаштирилади.



12- чизма.

Агар қутбни Декарт координаталари системасининг боши, OP қутб ўқини эса Ox ўқ деб қабул этсак, ихтиёрий M нуқтанинг Декарт системасидаги (x; y) координаталари билан унинг (φ; r) қутб координаталари орасидаги боғланиш

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi; \qquad (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \qquad (2)$$

тенгламалар билан ифодаланади.

Агар эллипс, гипербола ва парабола фокусини қутб деб олиб, қутб ўқи эса қутбга энг яқин учига қаратилган йўналишга тескари йўналтирилган фокал симметрия ўқини олсак, бу эгри чизиқларнинг қутб координаталардаги тенгламалари бир хил

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \qquad (3)$$

кўринишда бўлади, бунда ε — эксцентриситет, p — параметр. Эллипс ва гипербола учун $p = \frac{b^2}{a}$.

330. (φ; r) қутб координаталар системасида A (0; 3), $B\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$, D (π; 2), $E\left(\frac{3\pi}{2}; 3\right)$ нуқталар ясалсин.

331. $A\left(\frac{\pi}{2}; -2\right)$, $B\left(-\frac{\pi}{2}; 3\right)$, $C\left(-\frac{\pi}{4}; -4\right)$, $D\left(\frac{2\pi}{3}; -3\right)$ нуқталар ясалсин.

332. $r = 2 + 2\cos\varphi$ чизиқ ясалсин.

Кўрсатма. $\varphi = 0$; $\pm\frac{\pi}{3}$; $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{2\pi}{3}$; π лар учун r қийматларининг жадвали тузилсин.

333.

1) $r = a\varphi$ (Архимед спирали);
2) $r = a(1 - \cos\varphi)$ (кардиоида);
3) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемниската);
4) $r = \frac{a}{\varphi}$ (гиперболик спираль);
5) $r = a(1 + 2\cos\varphi)$ (Паскаль чиғаноғи)

чизиқлар ясалсин (84, 85 ва 90- чизмаларга қаранг).

334. 1) $r = a$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 3) $r = \frac{b}{\sin\varphi}$ чизиқлар ясалсин.

335. 1) Қутб ўқига перпендикуляр бўлиб, ундан a кесма ажратувчи тўғри чизиқ;

2) A $(\alpha;\ a)$ нуқтадан ўтувчи ва қутб ўқига параллел бўлган тўғри чизиқнинг қутб координаталаридаги тенгламалари ёзилсин.

336. A $(\alpha;\ a)$ нуқтадан ўтувчи ва қутб ўқи билан β бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг қутб координаталаридаги тенгламаси ёзилсин.

337. Маркази C $(0;\ a)$ нуқтада ва радиуси a га тенг айлананинг қутб координаталаридаги тенгламаси ёзилсин.

338. 1) $r = 3 - 2\sin 2\varphi$; 2) $r = 2 + \cos 3\varphi$; 3) $r = 1 - \sin 3\varphi$ чизиқлар ясалсин.

Кўрсатма. Олдин $r_{\max}$ ва $r_{\min}$ ларни берадиган бурчаклар аниқлансин.

339. 1) $r = a\sin 3\varphi$ (уч япроқли гул);

2) $r = a\sin 2\varphi$ (тўрт япроқли гул)

чизиқлар ясалсин (86 ва 87- чизмаларга қаранг).

340. Ушбу

1) $x^2 - y^2 = a^2$; 2) $x^2 + y^2 = a^2$;

3) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$; 4) $y = x$;

5) $x^2 + y^2 = ax$; 6) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

чизиқларнинг тенгламалари қутб координаталаридаги тенгламалари билан алмаштирилсин.

Кўрсатма. $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ ларни берилган тенгламаларга қўйиб соддалаштирилсин.

341. Ушбу

1) $r\cos\varphi = a$; 2) $r = 2a\sin\varphi$; 3) $r^2\sin 2\varphi = 2a^2$;

4) $r\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = a\sqrt{2}$; 5) $r = a(1 + \cos\varphi)$

чизиқларнинг тенгламалари декарт координаталаридаги тенгламалари билан алмаштирилсин ва эгри чизиқлар ясалсин.

Кўрсатма. $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ формулалардан фойдаланилсин.

342. Қуйидаги

1) $r = \frac{9}{5-4\cos\varphi}$; 2) $r = \frac{9}{4-5\cos\varphi}$; 3) $r = \frac{3}{1-\cos\varphi}$ иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг каноник тенгламалари ёзилсин.

Кўрсатма. ε ва p нинг қийматларидан фойдаланиб, эгри чизиқларнинг параметрлари топиб олинсин. (48- бетдаги (3) формулага қаранг).

343. Конхоида. $A\left(\frac{\pi}{2}; a\right)$ нуқтадан қутб ўқига параллел қилиб тўғри чизиқ ўтказилган. Ихтиёрий OB нур бу тўғри чизиқни B нуқтада кесади. Нурда B нинг ҳар икки тарафида $BM = BM_1 = b$ кесмалар ажратилган. Қутб координаталарида M ва M_1 нуқталарнинг геометрик ўрни аниқлансин ва эгри чизиқ ясалсин.

Кўрсатма. B нуқтанинг координаталарини (φ; r) деб олсак, $r = \frac{a}{\sin\varphi}$. Изланган геометрик ўриннинг тенгламаси $r = \frac{a}{\sin\varphi} \pm b$ бўлади.

344. Строфоида. $x = a$ тўғри чизиқ Ox ўқни A нуқтада, ихтиёрий OB нурни эса B нуқтада кесади. Нурда B нинг ҳар икки тарафида AB га тенг BM_1 ва BM_2 кесмалар қўйилган. M_1 ва M_2 нуқталар геометрик ўрнининг Декарт ва қутб координаталаридаги тенгламалари ёзилсин (88- чизма).

345. Кассини овали. M(φ; r) нуқта шундай ҳаракат қиладики, ундан $F(0; a)$ ва F_1 (π; a) нуқталаргача бўлган масофалар кўпайтмаси b^2 га тенг бўлиб қолади. Ҳаракатдаги M нуқта траекториясининг қутб координаталаридаги тенгламаси ёзилсин.

346. Кардиоида. $r = a\cos\varphi$ айланани A нуқтада кесувчи ихтиёрий OA нурда A нинг ҳар икки тарафида $AP = AP_1 = a$ кесмалар қўйилган. P ва P_1 нуқталар геометрик ўрнининг Декарт ва қутб координаталаридаги тенгламалари ёзилсин.

347. Кардиоида (эпициклоида). Диаметри a га тенг доира ўзининг диаметридай диаметрли доира бўйича ундан ташқарида қолиб, сирғанмасдан юмалайди. Қутб деб доираларнинг бошланғич вазиятидаги уриниш нуқтасини, қутб ўқи учун эса доираларнинг ўша вазиятидаги марказлари орқали ўтувчи тўғри чизиқни қабул қилиб, юмаловчи айлананинг бошланғич вазиятда қутбда бўлган M нуқтаси чизган эгри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

348. 1) $r=3+2\cos 2\varphi$; 2) $r=3-\sin 3\varphi$; 3) $r=a\cos 2\varphi$ чизиқлар ясалсин (338- масалага берилган кўрсатмага қаранг).

349. 1) $r=4\ (1+\cos\varphi)$; 2) $r=2-\sin\varphi$ чизиқлар ясалсин.

350. Қутб координаталарида берилган $A\ (\alpha;\ a)$ ва $B\ (\beta;\ b)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

Кўрсатма. $M(\varphi;\ r)$ ни тўғри чизиқдаги ихтиёрий нуқта деб, AOM, BOM ва AOB учбурчак юзлари орасидаги муносабат текширилсин.

351. Ушбу

$$1)\ r=\frac{1}{2-\sqrt{3}\cos\varphi};\quad 2)\ r=\frac{1}{2-\sqrt{5}\cos\varphi};\quad 3)\ r=\frac{1}{2-2\cos\varphi}$$

иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг каноник тенгламалари ёзилсин.

352. **Бернулли лемнискатаси.** $M(\varphi;\ r)$ нуқта шундай ҳаракат қиладики, ундан $F(0;\ c)$ ва $F_1(\pi;\ c)$ нуқталаргача бўлган масофалар кўпайтмаси c^2 га тенг бўлиб қолади. Бу нуқта ҳаракат траекториясининг Декарт ва қутб координаталаридаги тенгламалари ёзилсин.

Кўрсатма. Косинуслар теоремасига кўра $FM^2=r^2+c^2-2rc\cos\varphi$ ва $F_1M^2=r^2+c^2+2rc\cos\varphi$, ундан ташқари масала шартига кўра $FM^2\cdot F_1M^2=c^4$.

353. **Паскаль чиғаноғи.** Ихтиёрий OA нур $r=a\cos\varphi$ айланани A нуқтада кесади. OA нурда A нинг ҳар икки тарафида $AP=AP_1=b$ кесмалар қўйилган. P нуқталар геометрик ўрнининг қутб координаталаридаги тенгламаси ёзилсин.

354. **Тўрт япроқли гул.** $AB=2a$ кесманинг учлари Декарт координата ўқлари бўйича сирғанади. Координаталар бошидан AB га OM перпендикуляр туширилган. AB кесманинг ҳар қандай вазиятидаги $M(x;\ y)$ нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

17- §. Учинчи тартибли ва юқори тартибли алгебраик эгри чизиқлар

355. Ушбу

1) $y=\frac{x^3}{3}$ (кубик парабола);

$\left.\begin{array}{l}2)\ y^2=x^3\\ 3)\ y^3=x^2\end{array}\right\}$ (ярим кубик парабола);

4) $y^2 = x(x-4)^2$ (илмоқли парабола)

эгри чизиқлар ясалсин (70—73- чизмаларга қаранг).

356. 1) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (тенг томонли астроида);

2) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,\ b \neq a$ (тенг томонли бўлмаган астроида) эгри чизиқлар ясалсин.

Кўрсатма. Олдин ҳар бир эгри чизиқнинг Ox ва Oy ўқлар билан кесишган нуқталари топилсин, сўнгра биринчи эгри чизиқ билан $y = \pm x$ тўғри чизиқларнинг, иккинчи эгри чизиқ билан $y = \pm \frac{b}{a} x$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталари топилсин (82- чизмага қаранг).

357. $[-1;\ 1]$ кесмада $n = 1, 2, 4$ деб; 1) $y = x^{2n+1}$; 2) $y = x^{2n}$; 3) $x^{2n} + y^{2n} = 1$ эгри чизиқлар ясалсин. $n \to \infty$ да бу эгри чизиқлар қандай синиқ чизиқларга яқинлашади?

Кўрсатма. Биринчи эгри чизиқнинг $y = \frac{x}{2n}$ тўғри чизиқ билан иккинчи эгри чизиқнинг $y = \frac{1}{2n}$ тўғри чизиқ билан ва учинчи эгри чизиқнинг $y = x$ тўғри чизиқ билан кесишган нуқталари топилсин. Масштаб бирлиги учун катак қоғознинг 10 катаги қабул қилинсин.

358. Астроида. $AB = a$ кесманинг учлари координата ўқлари бўйлаб сирғанади. Координата ўқларига параллел AC ва BC тўғри чизиқлар C нуқтада кесишади. C дан AB га CM перпендикуляр туширилган. AB кесманинг барча вазиятлари учун $M(x;\ y)$ нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

359. 1) $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ (циссоида, 89- чизма);

2) $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ ((локон) зулф, 80- чизма) эгри чизиқлар ясалсин.

360. $y^2 = 2px$ параболанинг ҳар бир $P(x_0;\ y_0)$ нуқтаси Ox ўққа параллел қилиб, $PM = \pm OP$ масофага кўчирилган. M нуқталар геометрик ўрни топилсин.

Кўрсатма. $PM = OP$ бўлсин. $y = y_0$, $x - x_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ва парабола тенгламасидан x_0, y_0 ни йўқотиб, изланган тенгламага эга бўламиз.

361. $OA = a$ стержень координаталар боши O атрофида айланади. A нуқтага шарнир билан $AB = 2a$ стержень бириктирилган, унинг B нуқтаси Ox ўқ бўйлаб сирғанади.

AB кесманинг ўртаси M чизган эгри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

Кўрсатма. $A(x_A; y_A)$; $M(x; y)$ ва $B(x_B; 0)$ нуқталарнинг координаталарини боғловчи қуйидаги тенгликларни тузиш мумкин:

1) $x_A + x_B = 2x$; 2) $y_A^2 + x_A^2 = a^2$;
3) $4y^2 + x_A^2 = a^2$; 4) $4a^2 = a^2 + x_B^2 - 2x_B x_A$.

1), 2), 3) ва 4) лардан x_A, x_B ларни йўқотиб, изланган тенгламани ҳосил қиламиз.

362. Циссоида. Ихтиёрий OA нур (89- чизмага қаранг) $x^2 + y^2 = ax$ айланани A нуқтада ва $x = a$ тўғри чизиқни эса B нуқтада кесиб ўтади. Шу нурдан $OM = AB$ кесма ажратилади. M нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси тузилсин.

363. Ихтиёрий OB нур (89- чизма) $x = a$ тўғри чизиқни B нуқтада кесади, C нуқта — B нинг Oy ўқдаги проекцияси, M нуқта C нинг OB даги проекцияси. M нуқталар геометрик ўрни циссоида эканлиги кўрсатилсин.

364. $y^2 = -4ax$ парабола учидан параболага ўтказилган уринмаларнинг ҳар бирига перпендикуляр туширилса, бу перпендикулярлар асосларининг геометрик ўрни циссоида бўлади. Исбот қилинсин.

Кўрсатма. $y^2 = -4ax$ нинг $(x_0; y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма тенгламаси $y - y_0 = -4a(x + x_0)$ дан иборат. У ҳолда парабола учидан уринмага туширилган перпендикуляр тенгламаси $y = \frac{y_0}{4a}x$ бўлади. Бу икки тенгламадан ва парабола тенгламасидан x_0, y_0 ларни йўқотилса, циссоида тенгламаси келиб чиқади.

365. Зулф (локон). Ихтиёрий OA нур $x^2 + y^2 = 2ay$ айланани ва $y = 2a$ тўғри чизиқни мос равишда A ва B нуқталарда кесади. A ва B лардан мос равишда Ox ҳамда Oy ўқларга параллел тўғри чизиқлар ўтказилган ва улар M нуқтада кесиштирилган. M нуқталарнинг геометрик ўрни аниқлансин.

366. Декарт япроғи $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Координата ўқларини 45° бурчакка буриб, бу тенгламани $Y^2 = \frac{X^2(3b - X)}{3(b + X)}$ кўринишга келтириш мумкин эканлиги кўрсатилсин, бунда $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$, янги координаталар системасида бу эгри чизиқнинг жойланиш соҳаси ва унинг симметрияси ҳамда $y = x$ (яъни янги OX ўқ) билан кесишган нуқталари ва асимптотаси аниқланиб, эгри чизиқ ясалсин. Асимптотанинг тенгламаси янги системада $X = -b$, эски системада эса $x + y + a = 0$ экани кўрсатилсин (83- чизмага қаранг).

18- §. Трансцендент эгри чизиқлар

367. Циклоида. Радиуси a бўлган доира сирғанмасдан тўғри чизиқ бўйича юмалайди. Юмаловчи доиранинг бурилиш (79- чизма) бурчаги t ни параметр деб олиб, айлананинг M нуқтаси чизган эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси тузилсин. $t = 0$ бўлганда M нуқта координаталар бошида деб олинсин.

368. Доира ёйилмаси. $x^2 + y^2 = a^2$ айланага ўралган ип таранг қилиб тортилган ҳолда қайтадан ёйилган. Агар ипнинг охирги нуқтаси бошланғич вақтда $(a;\ 0)$ нуқтада бўлса, ипнинг ёйилиш вақтида унинг учи чизган эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси тузилсин. Параметр t деб ўралган ёйнинг радиусга нисбатан ўлчанган узунлиги олинсин.

369. Квадратриса. Oy ўқ билан t бурчак (радиан ўлчовида) ташкил этувчи ихтиёрий OM нур $x = at$ тўғри чизиқни M нуқтада кесади. M нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

370. Эпициклоида. Радиуси r бўлган доира сирғанмасдан радиуси R бўлган доира ташқариси бўйича юмалайди. Юмаловчи айлананинг M нуқтаси чизган эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари тузилсин. ($r = R$ бўлганда эпициклоида кардиоидага айланади. 347- масалага қаранг.)

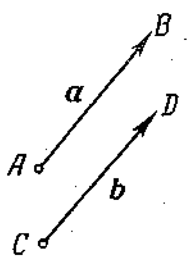
371. Гипоциклоида. Радиуси r бўлган доира сирғанмасдан радиуси $R > r$ доиранинг ички томони бўйича юмалайди. Юмаловчи айлананинг M нуқтаси чизган эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари тузилсин. $\left(r = \frac{R}{4}\right.$ бўлганда гипоциклоида $\left.x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\right.$ астроидага айланади).

II БОБ

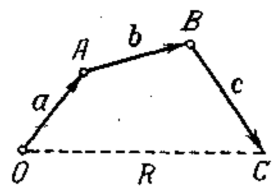
ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ

1- §. Векторларни қўшиш. Векторни скалярга кўпайтириш

1°. Таърифлар. *Йўналтирилган* $\overline{AB}$ кесма (13- чизма) *вектор* дейилади. Бунда A нуқта *векторнинг боши*, B нуқта эса *унинг охири* деб қаралади. Вектор боши ва охири кўрсатилиб тепасига стрелкали чизиқча қўйилган AB кўринишида ёки қандайдир бирор ҳарф, масалан, a (босмада қалин ёзилган, ёзмада эса тепасига чизиқча қўйилган) билан белгиланади. Векторнинг *модули* (узунлиги) $|\overline{AB}|$ ёки $|a|$, ёки AB, ёки a билан белгиланади. Бир тўғри чизиққа параллел бўлган векторлар *коллинеар* векторлар дейилади. Бир текисликка параллел бўлган векторлар *компланар* векторлар дейилади. Агар икки a ва b (13- чизма)



13- чизма.



14- чизма.

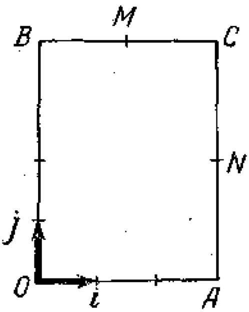
векторлар: 1) *тенг модулга эга*, 2) *ўзаро коллинеар*, 3) *бир томонга йўналган бўлса*, улар *ўзаро тенг* дейилади.

2°. Векторни скалярга кўпайтириш. a векторнинг бирор m *сонга* (скалярга) кўпайтмаси деб, узунлиги $a\,|m|$ га тенг бўлган ва йўналиши эса берилган вектор йўналишидай ($m>0$ бўлганда) ёки унга қарама-қарши ($m<0$ бўлганда) бўлган янги векторга айтилади.

3°. Векторларни қўшиш. Бир неча векторнинг йиғиндиси $a+b+c$ деб шу векторлардан тузилган (14- чизма) $OABC$ синиқ чизиқнинг ёпувчисидан иборат $\overline{OC}=R$ векторга айтилади. Масалан, $\overline{OA}=$

$= a$ ва $\overline{OB} = b$ векторларда ясалган параллелограммнинг бир диагонал вектори $\overline{OC}$ берилган векторларнинг йиғиндиси $a + b$, иккинчи диагонал вектори $\overline{BA}$ эса уларнинг айирмаси $a - b$ дан иборатдир.

4°. Векторнинг ўқдаги проекцияси. a вектор Ox ўқ билан φ бурчак ташкил этсин. У ҳолда *векторнинг бу ўқдаги проекцияси*



15- чизма.

$$\text{пр}_x a = |a| \cos\varphi = a \cos(\widehat{a, Ox}).$$

формула билан аниқланади

Бир неча вектор йиғиндисининг ўқдаги проекцияси қўшилувчи векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенг:

$$\text{пр}_x(a + b) = \text{пр}_x a + \text{пр}_x b.$$

372. $OACB$ тўғри тўртбурчакнинг (15- чизма) OA ва OB томонларига i ва j бирлик векторлар қўйилган. Агар OA нинг узунлиги 3 га ва OB нинг узунлиги 4 га тенг бўлса, $\overline{OA}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BO}$, $\overline{OC}$ ва $\overline{BA}$ векторлар i ва j орқали ифодалансин.

373. 15- чизмада M нуқта BC нинг ўртаси, N нуқта эса AC нинг ўртаси бўлсин. $OA = 3$ ва $OB = 4$ бўлганда $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ ва $\overline{MN}$ векторлар аниқлансин.

374. Текисликда $A\,(0;\ -2)$, $B\,(4;\ 2)$ ва $C\,(4;\ -2)$ нуқталар берилган. Координаталар бошидан $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ кучлар қўйилган. Уларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{OM}$ ясалсин ва унинг ўқлардаги проекциялари ҳамда узунлиги топилсин. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ва $\overline{OM}$ кучлар i ва j бирлик векторлар орқали ифодалансин.

375. Учта компланар m, n ва p бирлик вектор берилган бўлиб, $(\widehat{m, n}) = 30°$ ва $(\widehat{n, p}) = 60°$. $u = m + 2n - 3p$ вектор ясалсин ва унинг модули ҳисоблансин.

Кўрсатма. m, $2n$ ва $-3p$ векторлардан тузилган синиқ чизиқнинг биринчи бўғини учинчи бўғини билан кесишгунча давом эттирилсин.

376. 1) $a + \dfrac{b - a}{2} = \dfrac{a + b}{2}$; 2) $a - \dfrac{a + b}{2} = \dfrac{a - b}{2}$

вектор айниятларнинг тўғрилиги аналитик ва геометрик текширилсин.

377. Учта компланар бўлмаган $\overline{OA} = \boldsymbol{a}, \overline{OB} = \boldsymbol{b}$ ва $\overline{OC} = \boldsymbol{c}$ векторларда параллелепипед ясалган. Унинг мос равишда $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ ва $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$ ларга тенг вектор-диагоналлари кўрсатилсин.

378. 377- масаланинг чизмасидан фойдаланиб, векторлар йиғиндиси учун ўрин алмаштириш хоссаси текширилсин:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}.$$

379. $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$ ва $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$ векторлар берилган. $\overline{OC} = \boldsymbol{c}$ вектор $\triangle OAB$ нинг медианаси. 1) $\boldsymbol{c}$ вектор $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар бўйича, 2) $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{c}$ векторлар бўйича аналитик ва геометрик тарқатилсин.

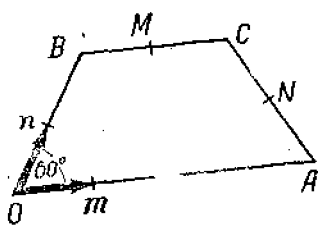
380. M ва N нуқталар $OACB$ тўғри тўртбурчак $BC = 3$ ва $AC = 4$ томонларининг ўрталари бўлсин. $OC = \boldsymbol{c}$ вектор $\overline{OM} = \boldsymbol{a}$ ва $\overline{ON} = \boldsymbol{b}$ векторлар бўйича тарқатилсин.

Кўрсатма. $\boldsymbol{c} = m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}$ шартдаги a, b, c лар ўрнига уларнинг $\boldsymbol{i}$ ва $\boldsymbol{j}$ орқали ифодаларини қўйиб, чап ва ўнг томондаги $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ лар олдидаги коэффициентлар таққослансин.

381. OA томони 3 га тенг бўлган мунтазам $OABCDE$ олтибурчак берилган. $\overline{OA}, \overline{AB}, \overline{BC}$ векторларга қарашли бирлик векторларни $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ ва $\boldsymbol{p}$ лар орқали белгилаб, бу бирлик векторлар орасидаги боғланиш аниқлансин (масалан, $OABC$ трапецияни текшириш орқали). Сўнгра $\overline{OB}$, $\overline{BC}$, $\overline{OD}$ ва $\overline{DA}$ векторлар $\boldsymbol{m}$ ва $\boldsymbol{n}$ векторлар орқали ифода қилинсин.

---

382. Тенг ёнли $OACB$ трапецияда (16- чизма) $\angle BOA = 60°$, $OB = BC = CA = 2$, M ва N — мос равишда BC ва AC томонларнинг ўрталари, $\overline{AC}, \overline{OM}, \overline{ON}$ ва $\overline{MN}$ векторлар $\overline{OA}$ ва $\overline{OB}$ векторларга қарашли $\boldsymbol{m}$ ва $\boldsymbol{n}$ бирлик векторлар орқали ифода қилинсин.



16- чизма.

383. Ўзаро 120° бурчак ташкил этувчи $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар берилган. Агар $a = 3$ ва $b = 4$ бўлса, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} - 1{,}5\boldsymbol{b}$ вектор ясалсин ва унинг модули аниқлансин.

384. Текисликда $A(3;\ 3)$, $B(-3;\ 3)$ ва $C\ (-3;\ 0)$ нуқталар берилган, координаталар бошидан $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ кучлар қўйилган. Уларнинг тенг таъсир этувчиси $\overline{OM}$ ясалсин ва унинг ўқлардаги проекциялари ҳамда катталиги топилсин. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ва $\overline{OM}$ векторлар ўқлардаги i ва j бирлик векторлар орқали ифодалансин.

385. 1) $OACB$ трапецияда: $BC = \frac{1}{3}OA$ ва $BC \parallel OA$. $\overline{OA} = a$ вектор $\overline{OC} = c$ ва $\overline{OB} = b$ векторлар бўйича аналитик ва геометрик ёйилсин.

Кўрсатма. $\triangle OBC$ дан фойдаланиб, c ни b ва a орқали ифодалаш мумкин, сўнгра ҳосил бўлган тенгламани a га нисбатан ечиш керак.

2) Маркази O нуқтада бўлган айлананинг $\smile AC = 90°$ ёйини B нуқта $1:2$ нисбатда бўлади: $\overline{OC} = c$ вектор $\overline{OA} = a$ ва $\overline{OB} = b$ векторлар бўйича тарқатилсин.

2- §. Фазода нуқтанинг ҳамда векторнинг тўғри бурчакли координаталари

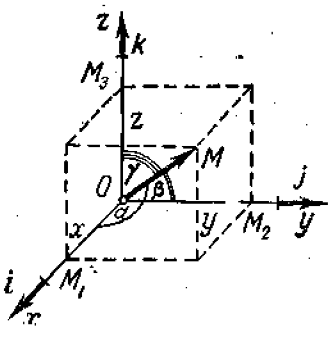
1°. Таъриф. Умумий бошланғич O нуқтага эга ва ўзаро перпендикуляр бўлган учта координата ўқи ва M нуқта берилган бўлсин (17-чизма). Бу *нуқтанинг радиус-вектори* $\overline{OM} = r$ нинг ўқлардаги $OM_1 = x$, $OM_2 = y$ ва $OM_3 = z$ *проекциялари* нуқтанинг ёки $r = \overline{OM}$ векторнинг *тўғри бурчакли координаталари* дейилади.

2°. Фазодаги нуқтанинг радиус-вектори. $\overline{OM} = r$ *радиус-векторнинг модули* ёки узунлиги ушбу:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1}$$

формула билан аниқланади. Координата ўқларидаги i, j, k бирлик векторлар *ортлар* дейилади. Радиус-вектор ортлар орқали қуйидагича ифодаланади.

$$r = xi + yj + zk. \tag{2}$$



17- чизма.

3°. Боши ва охирининг координаталари билан ифодаланган вектор. $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар берилган бўлсин, $u = \overrightarrow{AB}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагилардан иборат:

$$\left.\begin{aligned} \text{пр}_x\overline{AB} &= X = x_2 - x_1, \\ \text{пр}_y\overline{AB} &= Y = y_2 - y_1, \\ \text{пр}_z\overline{AB} &= Z = z_2 - z_1. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(1) ва (2) формулаларга ўхшаш

$$u = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (4)$$

$$u = \overline{AB} = Xi + Yj + Zk \quad (5)$$

формулаларни ёзиш мумкин.

Агар $u = \overline{AB}$ вектор координата ўқлари билан α, β ва γ бурчаклар ташкил этса, у ҳолда

$$\cos\alpha = \frac{X}{u}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{u}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{u}, \quad (6)$$

шу билан бирга

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad (7)$$

яъни ҳар қандай вектор йўналтирувчи косинуслари квадратларининг йиғиндиси 1 га тенг.

(4), (5) ва (6) формулалардан u вектор ўзининг проекциялари ёки *координаталаридан* иборат учта X, Y ва Z сон билан тўлиқ аниқланиши кўринади. Шунинг учун баъзан $u\{X; Y; Z\}$ вектор берилган деб айтадилар ёки ёзадилар.

386. $M(5; -3; 4)$ нуқта ясалсин ва унинг радиус-векторининг узунлиги ҳамда йўналиши аниқлансин.

387. $r = \overline{OM} = 2i + 3j + 6k$ вектор ясалсин ва унинг радиус-векторининг узунлиги ҳамда йўналиши аниқлансин ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ формула бўйича текширилсин).

388. Вектор Ox ва Oz ўқлар билан мос равишда 40° ва 80° бурчак ташкил этади. Бу векторнинг Oy ўқ билан ташкил этган бурчаги топилсин.

389. M нуқтанинг радиус-вектори Ox ўқ билан 45° ва Oy ўқ билан 60° бурчак ташкил этади. Векторнинг узунлиги $r = 6$. Агар M нинг аппликатаси (z) манфий бўлса, унинг координаталари аниқлансин ва $\overline{OM} = r$ вектор i, j, k лар орқали ифодалансин.

390. A (1; 2; 3) ва B (3; -4; 6) нуқталар берилган. $u = \overline{AB}$ вектор ва унинг координата ўқларидаги проекциялари ясалсин ҳамда унинг узунлиги ва йўналиши аниқлансин. u векторнинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари ясалсин.

391. $\overline{OA} = i + j$ ва $\overline{OB} = k - 3j$ векторларда параллелограмм ясалсин ва унинг диагоналлари аниқлансин.

392. $A(2;\ 1;\ -1)$ нуқтага $R=7$ куч қўйилган. Бу кучнинг икки координатаси $X=2$ ва $Y=-3$; ўша кучни ифодаловчи векторнинг йўналиши ва охирги нуқтаси аниқлансин.

393. xOy текисликда $A(4;\ 2)$, $B(2;\ 3)$ ва $C(0;\ 5)$ нуқталар берилган ва $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$ ва $\overline{OC}=\boldsymbol{c}$ векторлар ясалган. $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{c}$ векторлар бўйича аналитик ва геометрик тарқатилсин.

---

394. $A\ (2;\ 2;\ 0)$ ва $B(0;\ -2;\ 5)$ нуқталар берилган. $\overline{AB}=\boldsymbol{u}$ вектор ясалсин ҳамда унинг узунлиги ва йўналиши аниқлансин.

395. $\overline{OM}=\boldsymbol{r}$ вектор координата ўқлари билан бир хил ўткир бурчаклар ташкил этади. Агар векторнинг узунлиги $2\sqrt{3}$ бўлса, бурчаклар аниқлансин ва $\boldsymbol{r}$ вектор ясалсин.

396. Вектор Oy ва Oz ўқлар билан мос равишда 60° ва 120° бурчаклар ташкил этади. Ўша вектор Ox ўқ билан қандай бурчак ташкил этади?

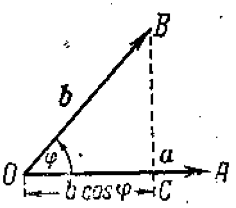
397. Параллелограммнинг кетма-кет учта $A(1;\ -2;\ 3)$, $B(3;\ 2;\ 1)$ ва $C(6;\ 4;\ 4)$ учлари берилган. Унинг тўртинчи учи D топилсин.

Кўрсатма. $\overline{AD}=\overline{BC}$ тенгликдан уларнинг координаталарининг тенглиги ($x-1=6-3$ ва ҳоказо) келиб чиқади.

398. xOy текисликда $\overline{OA}=\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}$, $\overline{OB}=\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$ ва $\overline{OC}=\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$ ясалсин. $\boldsymbol{c}$ вектор $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар бўйича аналитик ва геометрик тарқатилсин.

3- §. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси

1°. **Таъриф.** Икки векторнинг *скаляр кўпайтмаси* деб *шу векторлар модулларининг улар орасидаги бурчак косинуси билан кўпайтмасига* айтилади.



18- чизма.

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ кўринишда белгиланади. Демак,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a.\ \cos\varphi. \qquad (1)$$

18- чизмадан кўринадики, $b\cos\varphi=\text{пр}_a\boldsymbol{b}$. Шунинг учун

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a\cdot b\cos\varphi=a\,\text{пр}_b\,\boldsymbol{b}=b\,\text{пр}_b\,\boldsymbol{a}. \qquad (2)$$

2°. Скаляр кўпайтманинг хоссалари.

I. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ — *ўрин алмаштириш қонуни.*

II. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ — *тарқатиш қонуни.*

III. Агар $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ бўлса, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm a\cdot b$. Хусусий ҳолда, $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a\cdot a\cos 0^\circ=a^2$, бундан

$$a=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}. \qquad (3)$$

IV. Агар $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ бўлса, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a\cdot b\cdot\cos 90^\circ=0$.

V. Ортларнинг скаляр кўпайтмаси:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

VI. Агар векторлар $\boldsymbol{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ ва $\boldsymbol{b}\{b_x, b_y, b_z\}$ координаталар орқали берилган бўлса,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (4)$$

3°. Икки вектор орасидаги бурчак:

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{ab}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (5)$$

Параллеллик шарти: $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$ ёки $\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=m.$

Перпендикулярлик шарти: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ ёки $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$

399. $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ ва $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ векторлар орасидаги бурчак аниқлансин.

400. Учлари $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(1;\ 1;\ 1)$ ва $C(0;\ 0,\ 5)$ нуқталарда бўлган $\triangle ABC$ нинг бурчаклари аниқлансин.

401. $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 2a)$ ва $C(a;\ 0;\ a)$ нуқталар берилган $\overline{OC}$ ва $\overline{AB}$ векторлар ясалсин ва улар орасидаги бурчак топилсин.

402. Текисликда учлари $O(0;\ 0)$, $A(2a;\ 0)$ ва $B(a;\ -a)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Шу учбурчакнинг OB томони билан OM медианаси орасидаги бурчак топилсин.

403. xOy ва yOz бурчакларнинг биссектрисалари орасидаги бурчак топилсин.

404. Квадратнинг учидан қарши томонларни тенг иккига бўлувчи тўғри чизиқлар ўтказилган. Ўша тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин.

405. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ ва $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ векторларда ясалган параллелограмм диагоналлари орасидаги бурчак топилсин.

406. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ ва $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ векторлар берилган. $\text{пр}_b\,\boldsymbol{a}$ ва $\text{пр}_a\,\boldsymbol{b}$ аниқлансин.

407. $(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}+(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k})^2$ ифодадаги қавслар очилсин.

408. 1) Агар m ва n ўзаро 30° бурчак ташкил этувчи бирлик векторлар бўлса, $(m+n)^2$ ҳисоблансин; 2) агар $a=2\sqrt{2}$ ва $b=4$ ҳамда $(\widehat{a, b})=135°$ бўлса, $(a-b)^2$ ҳисоблансин.

409. 1) $(a+b)^2$, 2) $(a+b)^2+(a-b)^2$ ифодалардаги қавслар очилсин ва ҳосил бўлган формулаларнинг геометрик маъноси аниқлансин.

410. Ўзаро компланар a, b ва c векторлар берилган бўлиб, $a=3$, $b=2$, $c=5$ ва $(\widehat{a, b})=60°$, $(\widehat{b, c})=60°$. $u=a+b-c$ вектор ясалсин ва

$$u=\sqrt{(a+b-c)^2}$$

формула бўйича унинг модули ҳисоблансин.

411. Агар O нуқтадан қўйилган ўзаро компланар тўртта кучнинг ҳар бирининг миқдори 10 *кГ* бўлиб, ҳар иккита кетма-кети орасидаги бурчак 45° бўлса, уларнинг тенг таъсир этувчисининг миқдори топилсин.

412. Агар m ва n — ораларидаги бурчаги 60° га тенг бирлик векторлар бўлса, $a=2m+n$ ва $b=m-2n$ векторларда ясалган параллелограмм диагоналларининг узунликлари аниқлансин.

413. $a=2m-n$ вектор берилган бўлиб, бунда m ва n ораларидаги бурчаги 120° га тенг бирлик векторлардир. $\cos(\widehat{a, m})$ ва $\cos(\widehat{a, n})$ топилсин.

414. Мунтазам тетраэдрнинг бир учидан ўтказилган икки текис бурчагининг биссектрисалари орасидаги бурчак аниқлансин.

Кўрсатма. Агар m, n ва p тетраэдрнинг қирралари бўйича йўналтирилган бирлик векторлар бўлса, $m+n$ ва $m+p$ биссектрисалар бўйича йўналтирилган векторлар бўлади.

---

415. Ox, Oy ва Oz ўқларда O дан бошлаб ўзаро тенг $a=4$ кесмалар қўйиб куб ясалсин. Кубнинг юқори ёғининг маркази M, ўнг ён ёғининг маркази эса N бўлсин. $\overline{OM}$ ва $\overline{ON}$ векторлар ҳамда улар орасидаги бурчак аниқлансин.

416. $\overline{OA}=a$ ва $\overline{OB}=b$ векторлар берилган, $a=2$, $b=4$ ва $(\widehat{a, b})=60°$. $\angle OAB$ нинг $\overline{OM}$ медианаси билан OA томони орасидаги бурчак аниқлансин.

417. Томонлари 6 ва 4 *см* бўлган тўғри тўртбурчак учидан қарши томонларини тенг иккига бўлувчи тўғри чизиқлар ўтказилган. Ўша тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак топилсин.

418. Параллелограммнинг кетма-кет учта $A(-3;\ -2;\ 0)$, $B(3;\ -3;\ 1)$ ва $C(5;\ 0;\ 2)$ учлари берилган. Унинг тўртинчи учи D ҳамда $\overline{AC}$ ва $\overline{BD}$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

419. $A(3;\ 3;\ -2)$, $B(0;\ -3;\ 4)$, $C(0;\ -3;\ 0)$ ва $D(0;\ 2;\ -4)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ ва $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{b}$ векторлар ясалсин ҳамда $\text{пр}_a \boldsymbol{b}$ топилсин.

420. Тенг ёнли $OACB$ трапецияда (16- чизма) M ва N нуқталар мос равишда $BC = 2$ ва $AC = 2$ томонларнинг ўрталари. Трапециянинг ўткир бурчаги 60° га тенг. $\overline{OM}$ ва $\overline{ON}$ векторлар орасидаги бурчак аниқлансин.

421. $\boldsymbol{m}$ ва $\boldsymbol{n}$ лар ўзаро 120° бурчак ташкил этувчи бирлик векторлар бўлса, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} + 4\boldsymbol{n}$ ва $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

422. Бир-бирига перпендикуляр бўлган $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларда ясалган тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари орасидаги бурчак

$$\cos\varphi = \pm \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

формула билан аниқланиши кўрсатилсин.

423. Ҳаракатдаги нуқта йўлининг ўқлардаги проекциялари: $s_x = 2\text{м}$, $s_y = 1\text{м}$, $s_z = -2\text{м}$. Таъсир этувчи $\boldsymbol{F}$ кучнинг проекциялари $F_x = 5$ *кГ*, $F_y = 4$ *кГ* ва $F_z = 3$ *кГ*. $\boldsymbol{F}$ кучнинг бажарган иши $A\ (A = \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{s})$ ва $\boldsymbol{F}$ куч билан $\boldsymbol{s}$ йўл орасидаги бурчак ҳисоблансин.

424. Қирраси a бўлган мунтазам тетраэдрнинг бир учидан, унинг вектор-қирралари билан ифодаланувчи учта куч қўйилган. Ўша кучларнинг тенг таъсир этувчиси аниқлансин.

Кўрсатма. Агар $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ ва $\boldsymbol{p}$ лар берилган кучларнинг бирлик векторлари бўлса, изланган миқдор $a\sqrt{(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p})^2}$ га тенг.

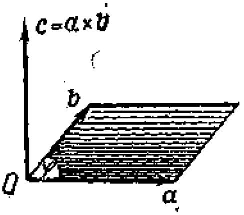
425. Квадрат бир хил тенгликдаги учта бўлакка (полосага) бўлиниб, сўнгра уларни буклаб мунтазам уч бурчакли призма ясалган. Натижада квадратнинг диагоналидан ҳосил бўлган синиқ чизиқнинг икки қўшни бўғинлари орасидаги бурчак топилсин.

4-§. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси

1°. Таъриф. a ва b векторларнинг *вектор кўпайтмаси* деб шундай *учинчи* c векторга айтиладики:

1) у сон қиймати бўйича берилган a ва b векторларда ясалган *параллелограмм юзига тенг модулга эга;*

2) у параллелограмм текислигига *перпендикуляр;*



19-чизма.

3) *у шундай томонга йўналтирилганки, унинг учидан қараганда a вектордан b векторга қараб энг кичик бурилиш соат стрелкасига қарама-қарши бўлади.* a, b ва c векторларнинг бу хилдаги жойланишига *ўнг боғлам* дейилади.

Икки векторнинг вектор кўпайтмаси $a \times b$ кўринишда белгиланади. Шундай қилиб,

агар
$$\begin{cases} 1)\ c\,|a\times b| = a\cdot b\sin\varphi, \\ 2)\ c\perp a \text{ ва } c\perp b, \\ 3)\ a,\ b,\ c \text{ лар ўнг боғлам ҳосил қилса} \end{cases}$$

$$a\times b = c$$

бўлади.

2°. Вектор кўпайтманинг хоссалари:

I. $a\times b = -b\times a$.

II. $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$ — тақсимот қонуни.

III. Агар $a\parallel b$ бўлса, $a\times b = 0$, хусусий ҳолда $a\times a = 0$.

3°. Ортларнинг вектор кўпайтмалари:

$$i\times j = k,\ j\times k = i,\ k\times i = j. \qquad (1)$$

Умуман, ҳар икки қўшни векторнинг қуйидаги тартибдаги

$$\overset{\longrightarrow +}{\underset{\longleftarrow -}{i\ j\ k\ i\ j}}$$

кўпайтмаси (+) ишора билан олинган учинчи векторга, тескари тартибдаги кўпайтмаси эса (—) ишора билан олинган учинчи векторга тенг.

4°. Вектор кўпайтмани кўпайтувчилар координаталари $a\{a_x, a_y, a_z\}$ ва $b\{b_x, b_y, b_z\}$ орқали ифодалаш:

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

5°. a ва b векторларда ясалган параллелограммнинг юзи:

$$S_{\square} = |a\times b|, \qquad (3)$$

шу векторларда ясалган учбурчакнинг юзи:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|a\times b|.$$

426. Агар 1) $a = 3i$; $b = 2k$; 2) $a = i + j$; $b = i - j$; 3) $a = 2i + 3j$; $b = 3j + 2k$ бўлса, $c = a\times b$ вектор

аниқлансин ва ясалсин. Ҳар бир ҳол учун берилган векторларда ясалган параллелограмм юзи ҳисоблансин.

427. Учлари $A(7;\ 3;\ 4)$; $B(1;\ 0;\ 6)$ ва $C(4;\ 5;\ -2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

428. $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ва $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$ векторларда параллелограмм ясалсин ҳамда унинг юзи ва баландлиги аниқлансин.

429. Ушбу

1) $\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{j} \times (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$;

2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a}$;

3) $(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$;

4) $2\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) + 3\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}) + 4\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j})$

ифодалар қавсларни очиб соддалаштирилсин.

430. $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ экани исботлансин ва бу айниятнинг геометрик маъноси аниқлансин.

431. $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар ўзаро $45°$ бурчак ташкил этади. Агар $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 5$ бўлса, $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ ва $3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ векторларда ясалган учбурчакнинг юзи топилсин.

432. $\boldsymbol{m}$ ва $\boldsymbol{n}$ ўзаро $45°$ бурчак ташкил этувчи бирлик векторлар. Диагоналлари $2\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$ ва $4\boldsymbol{m} - 5\boldsymbol{n}$ векторлардан иборат бўлган параллелограммнинг юзи топилсин.

Кўрсатма. Агар $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар параллелограмм томонларидан иборат бўлса, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$ ва $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{m} - 5\boldsymbol{n}$. Бу векторларни вектор кўпайтириб, $2\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ векторни топамиз унинг модули изланган юзанинг иккиланганига тенг.

---

433. $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{k} - 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ ва $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ векторлар ясалсин. $\boldsymbol{c}$ векторнинг модули ҳамда $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларда ясалган учбурчак юзи ҳисоблансин.

434. Учлари $A(1;\ -2;\ 8)$, $B(0;\ 0;\ 4)$ ва $C(6;\ 2;\ 0)$ нуқталарда бўлган учбурчак ясалсин. Унинг юзи ва BD баландлиги ҳисоблансин.

435. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{j}$ ва $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ векторларда ясалган параллелограммнинг юзи ҳисоблансин.

436. $(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = 3\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ эканлиги исботлансин.

437. $\boldsymbol{m}$ ва $\boldsymbol{n}$ ўзаро $30°$ бурчак ташкил этувчи бирлик векторлар бўлса, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n}$ ва $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$ векторларда ясалган параллелограммнинг юзи топилсин.

5-§. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси

1°. Таъриф. a, b ва c *векторларнинг аралаш кўпайтмаси* деб $(a \times b)\cdot c$ кўринишдаги ифодага айтилади.

Агар a, b ва c векторлар ўзларининг координаталари билан берилса, у ҳолда

$$(a \times b)\cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

2°. Аралаш кўпайтманинг хоссалари.

I. Аралаш кўпайтманинг исталган иккита кўпайтувчисининг ўринлари ўзаро алмаштирилса, кўпайтманинг ишораси ўзгаради:

$$(a \times b)\cdot c = -(a \times c)\cdot b = -(c \times b)\cdot a. \qquad (2)$$

II. Агар берилган учта вектордан иккитаси ўзаро тенг ёки параллел бўлса, аралаш кўпайтма 0 га тенг бўлади.

III. «Нуқта» билан кўрсатилган ва «крест» ($\times$) билан кўрсатилган амалларнинг ўринларини алмаштириш мумкин:

$$(a \times b)\cdot c = a\cdot(b \times c);$$

шунинг учун ҳам аралаш кўпайтмани abc кўринишда, яъни қавсларни ва амаллар белгиларини кўрсатмасдан ёзиш қабул қилинган.

3°. a, b ва c векторларда ясалган параллелепипеднинг ҳажми:

$$V = \pm abc \begin{cases} + \text{ векторлар ўнг боғлам ташкил этса,} \\ - \text{ векторлар чап боғлам ташкил этса.} \end{cases}$$

a, b ва c векторларда ясалган пирамиданинг ҳажми:

$$V_{\text{пир}} = \pm \frac{1}{6} abc.$$

4°. Компланарлик шарти. Агар a, b ва c векторлар *ўзаро компланар* бўлса, $abc = 0$, ва аксинча, сўнгги тенглик бажарилса, берилган уч вектор ўзаро компланар бўлади. Шунинг билан бирга a, b ва c орасида $c = ma + nb$ кўринишдаги чизиқли боғланиш мавжуд бўлади.

438. $a = 3i + 4j$, $b = -3j + k$, $c = 2j + 5k$ векторларда параллелепипед ясалсин ҳамда унинг ҳажми ҳисоблансин. Берилган (a, b, c) векторлар қайси боғламни ташкил этади?

439. Учлари $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(5;\ 2;\ 0)$, $B(2;\ 5;\ 0)$ ва $C(1;\ 2;\ 4)$ нуқталарда бўлган пирамида ясалсин ҳамда унинг ҳажми, ABC ёғининг юзи ва шу ёққа туширилган баландлиги ҳисоблансин.

440. $A(2;\ -1;\ -2)$, $D(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$ ва $D(5;\ 0;\ -6)$ нуқталарнинг бир текисликда ётиши кўрсатилсин.

441. $a = -i + 3j + 2k$, $b = 2i - 3j - 4k$, $c = -3i + 12j + 6k$ векторларнинг ўзаро компланар экани кўрсатилсин. c вектор a ва b векторлар бўйича тарқатилсин.

442. 1) $(a + b)\cdot[(a + c) \times b] = -abc$;

2) $(a + 2b - c)\cdot[(a - b) \times (a - b - c)] = 3abc$

эканлиги исбот қилинсин.

443. Узунликлари 2 га тенг бўлган ва координаталар бурчакларининг биссектрисалари бўйича йўналган $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ векторларда ясалган тетраэдрнинг ҳажми топилсин.

---

444. Учлари $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$ ва $D(2; 3; 8)$ нуқталарда бўлган пирамида ясалсин ҳамда унинг ҳажми ва ABC ёғига туширилган баландлиги ҳисоблансин.

445. $a = i + j + 4k$, $b = i - 2j$ ва $c = 3i - 3j + 4k$ векторлар ясалсин ва улар ўзаро компланар эканлиги кўрсатилсин. Бу векторлар орасидаги чизиқли боғланиш топилсин.

446. Берилган параллелепипеднинг ёқларининг диагоналларида ясалган параллелепипед ҳажми дастлабки параллелепипед ҳажмининг иккиланганига тенг экани кўрсатилсин.

447. m, n ва p бирлик векторлар берилган. Агар $(\widehat{m, n}) = (\widehat{p, (m \times n)}) = \alpha$ бўлса, $(m \times n)\cdot p = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ экани исботлансин.

448. Ҳар қандай a, b ва c векторлар $a - b$, $b - c$ ва $c - a$ векторлар ўзаро компланар бўлади. Бу мулоҳаза аналитик ва геометрик (a, b ва c векторлардан тузилган параллелепипедни қараб) исботлансин.

449. $OABCO_1A_1B_1C_1$ параллелепипед пастки асосининг учта учи $O(0; 0; 0)$, $A(2; -3; 0)$ ва $C(3; 2; 0)$ ҳамда OO_1 қиррага қарши бўлган BB_1 ён қиррада ётувчи юқори асосининг учи $B_1(3; 0; 4)$ берилган. Ўша параллелепипеднинг ҳажми ҳисоблансин.

III БОБ

ФАЗОДАГИ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

1-§. Текисликнинг тенгламаси

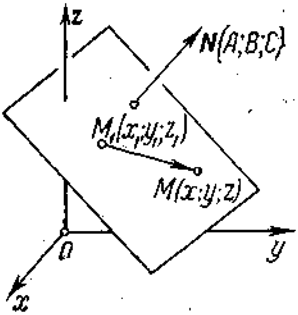
1°. $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан ўтувчи ва $N\{A;\ B;\ C\}$ векторга перпендикуляр текислик тенгламаси.

$M(x;\ y;\ z)$ текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин (20-чизма). У ҳолда $\overline{M_1M} \perp N$ ва икки векторнинг перпендикулярлик шартига кўра

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (1)$$

2°. Текисликнинг умумий тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$



20-чизма.

$N\{A;\ B;\ C\}$ вектор (1) ёки (2) текисликка *нормал* вектор дейилади.

3°. $Ax+By+Cz+D=0$ тенгламанинг махсус ҳоллари:

I. $D=0$ бўлганда, $Ax+By+Cz=0$ — текислик координаталар бошидан ўтади.

II. $C=0$ бўлганда, $Ax+By+D=0$ — текислик Oz ўққа параллел.

III. $C=D=0$ бўлганда, $Ax+By=0$ — текислик Oz ўқдан ўтади.

IV. $B=C=0$ бўлганда, $Ax+D=0$ — текислик yOz текисликка параллел.

V. Координата текисликларининг тенгламалари: $x=0$, $y=0$ ва $z=0$.

4°. Текисликнинг координата ўқларидан ажратган кесмалар бўйича тенгламаси:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (3)$$

450. 1) $5x-2y+3z-10=0$; 2) $3x+2y-z=0$;
3) $3x+2z=6$; 4) $2z-7=0$
текисликлар ясалсин.

451. $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ текислик ясалсин ва унга нормал векторнинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари топилсин.

452. $M_1(0;\ -1;\ 3)$ ва $M_2(1;\ 3;\ 5)$ нуқталар берилган. M_1 нуқтадан ўтувчи ва $N = \overline{M_1M_2}$ векторга перпендикуляр текислик тенгламаси ёзилсин.

453. $M(a;\ a;\ 0)$ нуқтадан ўтувчи ва $\overline{OM}$ векторга перпендикуляр текислик тенгламаси ёзилсин ва текислик ясалсин.

454. $A\left(a;\ -\frac{a}{2};\ a\right)$ ва $B\left(0;\ \frac{a}{2};\ 0\right)$ нуқталардан тенг узоқликда бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

455. $M_1(0;\ 1;\ 3)$ ва $M_2(2;\ 4;\ 5)$ нуқталардан ўтувчи ва Ox ўққа параллел текислик тенгламаси ёзилсин ва текислик ясалсин.

456. Ox ўқдан ва $M_1(0;\ -2;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси ёзилсин ва текислик ясалсин.

457. Oz ўқдан ва $M_1(2;\ -4;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси ёзилсин ва текислик ясалсин.

458. Oy ўққа параллел, Ox ва Oz ўқлардан a ва c кесмалар ажратувчи текислик тенгламаси ёзилсин. Текислик ясалсин.

459. $M(2;\ -1;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи ва координата ўқларидан тенг кесмалар ажратувчи текислик тенгламаси ёзилсин.

460. $M_1(-4;\ 0;\ 4)$ нуқтадан ўтувчи ва Ox ва Oy ўқлардан $a = 4$ ва $b = 3$ кесмалар ажратувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

---

461. 1) $2x + y - z + 6 = 0$; 2) $x - y - z = 0$; 3) $y - 2z + 8 = 0$; 4) $2x - 5 = 0$; 5) $x + z = 1$; 6) $y + z = 0$ текисликлар ясалсин.

462. $2x - 2y + z - 6 = 0$ текислик ясалсин ва унга нормал векторнинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари топилсин.

463. $M(-1;\ 2;\ 3)$ нуқтадан OM га перпендикуляр текислик ўтказилган. Унинг тенгламаси ёзилсин.

464. Oy ўқдан ва $(4;\ 0;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин. Текислик ясалсин.

465. Oz ўққа параллел ҳамда $M_1(2;\ 2;\ 0)$ ва $M_2(4;\ 0;\ 0)$ нуқталардан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин. Текислик ясалсин.

466. $M(1;\ -3;\ 5)$ нуқтадан ўтувчи ва Oy ва Oz ўқлардан Ox ўқдагидан кўра икки марта катта кесма ажратувчи текислик тенгламаси ёзилсин.

2-§. Текисликка доир асосий масалалар

1°. Икки текислик орасидаги бурчак

$$\cos\varphi = \pm\frac{NN_1}{NN_1} = \pm\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{NN_1} \qquad (1)$$

формуладан топилади, бунда N ва N_1 мос равишда $Ax + By + Cz + D = 0$ ва $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ текисликларга нормал векторлар.

Параллеллик шарти:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}. \qquad (2)$$

Перпендикулярлик шарти:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \qquad (3)$$

2°. $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтадан $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликкача бўлган масофа:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{N}. \qquad (4)$$

3°. Берилган икки текисликнинг кесишган чизиғидан ўтувчи барча текисликлар дастасининг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0. \qquad (5)$$

$\alpha = 1$ деб олиш мумкин, у ҳолда (5) дастадан берилган текисликлардан иккинчисини чиқариб ташлаган бўламиз.

467. 1) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ ва $x + z - 6 = 0$;
2) $x + 2z - 6 = 0$ ва $x + 2y - 4 = 0$
текисликлар орасидаги бурчак топилсин.

468. $(2;\ 2;\ -2)$ нуқтадан ўтувчи ва $x - 2y - 3z = 0$ текисликка параллел текислик топилсин.

469. $(-1;\ -1;\ 2)$ нуқтадан ўтувчи ва $x - 2y + z - 4 = 0$ ҳамда $x + 2y - 2z + 4 = 0$ текисликларга перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

470. $(0;\ 0;\ a)$ нуқтадан ўтувчи ва $x - y - z = 0$ ҳамда $2y = x$ текисликларга перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

471. $M_1(-1; -2; 0)$ ва $M_2(1; 1; 2)$ нуқталардан ўтувчи ҳамда $x+2y+2z-4=0$ текисликка перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

472. $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ ва $M_3(1; 1; 4)$ нуқта лардан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

473. Oz ўқдан $2x+y-\sqrt{5}z=0$ текислик билан $60°$ бурчак ташкил этувчи текислик ўтказилсин.

474. $(5; 1; -1)$ нуқтадан $x-2y-2z+4=0$ текисликкача бўлган масофа топилсин.

475. $(4; 3; 0)$ нуқтадан $M_1(1; 3; 0)$, $M_2(4; -1; 2)$ ва $M_3(3; 0; 1)$ нуқталардан ўтувчи текисликкача бўлган масофа топилсин.

476. $4x+3y-5z-8=0$ ва $4x+3y-5z+12=0$ параллел текисликлар орасидаги масофа топилсин.

Кўрсатма. Биринчи текисликда ихтиёрий, масалан $(2; 0; 0)$ нуқта олиб, ундан иккинчи текисликкача бўлган масофа топилсин.

477. 1) $x-2y+2z-5=0$ текисликка параллел ва ундан 2 бирлик узоқликда бўлган текисликлар тенгламалари ёзилсин.

2) $2x+2y=z$ ва $z=0$ текисликлар орасидаги икки ёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи текисликлар тенгламалари ёзилсин ҳамда берилган ва изланган текисликлар ясалсин.

478. 1) $2x-y+3z-6=0$ ва $x+2y-z+3=0$ текисликларнинг кесишган чизиғидан ва $(1; 2; 4)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси ёзилсин.

2) $x=y$ ва $z=0$ текисликларнинг кесишган тўғри чизиғидан ўтувчи ўзаро перпендикуляр иккита текисликдан биттаси $(0; 4; 2)$ нуқтадан ҳам ўтади. Тўғри чизиқ ва изланган текисликлар топилсин.

479. $2x-y+3z-9=0$; $x+2y+2z-3=0$; $3x+y-4z+6=0$ текисликларнинг кесишган нуқтаси топилсин.

---

480. $(2; -1; 1)$ нуқтадан ўтувчи ва $3x+2y-z+4=0$ ва $x+y+z-3=0$ текисликларга перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин. Текислик ясалсин.

481. $(0; -5; 0)$ ва $(0; 0; 2)$ нуқталардан ўтувчи ҳамда $x+5y+2z-10=0$ текисликка перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин. Текислик ясалсин.

482. $O(0;\ 0;\ 0)$, $M_1(a;\ -a;\ 0)$ ва $M_2(a;\ a;\ a)$ нуқталардан ўтувчи текислик билан xOy текислик орасидаги бурчак топилсин.

483. Координаталар бошидан $M_1(a;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ a;\ 0)$ ва $M_3(a;\ a;\ a)$ нуқталардан ўтувчи текисликкача бўлган масофа топилсин.

484. Ox ўқдан ўтувчи ва $y = x$ текислик билан $60°$ бурчак ташкил этувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

485. $(a;\ b;\ c)$ нуқтадан, координаталар ўқларидан a, b ва c кесмалар ажратувчи текисликкача бўлган масофа топилсин.

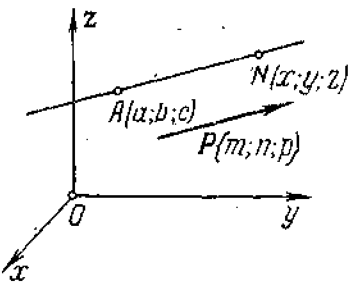
486. $2x + 2y + z - 8 = 0$ текисликка параллел ва ундан $d = 4$ масофада бўлган текисликларнинг тенгламалари ёзилсин.

487. $4x - y + 3z - 6 = 0$ ва $x + 5y - z + 10 = 0$ текисликларнинг кесишган чизиғидан ўтувчи ва $2x - y + 5z - 5 = 0$ текисликка перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

3-§. Тўғри чизиқ тенгламалари

1°. $A(a;\ b;\ c)$ нуқтадан ўтувчи ва $\boldsymbol{P}\{m;\ n;\ p\}$ векторга параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламалари. $N(x;\ y;\ z)$ — тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин (21-чизма). У ҳолда $\overline{AN} \parallel \boldsymbol{P}$ ва икки векторнинг параллеллик шартига кўра:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \qquad (1)$$



21-чизма.

(1) тенгламалар тўғри чизиқнинг *каноник* тенгламалари дейилади. $\boldsymbol{P}\{m;\ n;\ p\}$ вектор тўғри чизиқнинг *йўналтирувчи* вектори дейилади.

2°. (1) тенгламадаги ҳар бир нисбатни t параметрга тенглаб, тўғри чизиқнинг

$$\left.\begin{aligned} x &= mt + a, \\ y &= nt + b, \\ z &= pt + c \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

кўринишдаги параметрик тенгламаларига эга бўламиз.

3°. *Икки нуқтадан ўтувчи* тўғри чизиқ тенгламалари:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3)$$

4°. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламалари:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

5°. (4) тенгламалардан бир марта y ни, иккинчи марта x ни йўқотиб, тўғри чизиқнинг проекциялари бўйича ёзилган тенгламаларига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= mz + a, \\ y &= nz + b. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(5) тенгламаларни ушбу

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-0}{1}$$

каноник кўринишда ёзиш мумкин.

488.

$$1) \begin{cases} x = z + 5 \\ y = 4 - 2z \end{cases} \text{ ва } 2) \left\{ \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} \right.$$

тўғри чизиқларнинг xOy ва xOz текисликлардаги излари топилсин ва тўғри чизиқлар ясалсин.

Кўрсатма. Тўғри чизиқнинг тенгламаларида 1) $z = 0$; 2) $y = 0$ деб фараз қилиш керак.

489. $\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z - 13 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{aligned}\right\}$ тўғри чизиқ тенгламаларини: 1) проекциялари бўйича; 2) каноник кўринишда ёзилсин. Тўғри чизиқнинг координата текисликларидаги излари топилсин ҳамда тўғри чизиқ ва унинг проекциялари ясалсин.

490. $A(4;\ 3;\ 0)$ нуқтадан ўтувчи ва $P\{-1;\ 1;\ 1\}$ векторга параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин. Тўғри чизиқнинг yOz текисликдаги изи топилсин ва тўғри чизиқ ясалсин.

491. $x = 4$, $y = 3$ тўғри чизиқ ясалсин ва унинг йўналтирувчи вектори топилсин.

492.

$$1) \begin{cases} y = 3 \\ z = 2, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = 2 \\ z = x + 1, \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 4 \\ z = y \end{cases}$$

тўғри чизиқлар ясалсин ва уларнинг йўналтирувчи векторлари аниқлансин.

493. $A(-1;\ 2;\ 3)$ ва $B(2;\ 6;\ -2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин ва унинг йўналтирувчи косинуслари топилсин.

494. $A(2;\ -1;\ 3)$ ва $B(2;\ 3;\ 3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ ясалсин ва унинг тенгламалари ёзилсин.

495. $A(4;\ -3;\ 1)$ нуқтадан чиқиб $V\{2;\ 3;\ 1\}$ тезлик билан ҳаракат қилувчи $M(x;\ y;\ z)$ нуқта траекториясининг тенгламалари ёзилсин.

496. 1) (—2; 1; —1) нуқтадан ўтувчи ва $\boldsymbol{P}\{1; -2; 3\}$ векторга параллел бўлган;

2) $A(3; -1; 4)$ ва $B(1; 1; 2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламалари ёзилсин.

497. $(a; b; c)$ нуқтадан ўтувчи ва: 1) Oz ўққа параллел; 2) Oz ўққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин.

498. $x = 2z - 1$; $y = -2z + 1$ тўғри чизиқ билан (1; —1; —1) нуқта ва координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ орасидаги бурчак топилсин.

499.

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин.

Кўрсатма. Берилган тўғри чизиқлардан ҳар бирининг йўналтирувчи векторини, текисликлар нормал векторларининг вектор кўпайтмаси ($\boldsymbol{P} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}_1$) сифатида аниқлаш мумкин.

500. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ тўғри чизиқнинг $x = z + 1$, $y = 1 - z$ тўғри чизиққа перпендикуляр экани кўрсатилсин.

501. (—4; 3; 0) нуқтадан ўтувчи ва $\left.\begin{matrix} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{matrix}\right\}$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин.

502. (2; —3; 4) нуқтадан Oz ўққа туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

Кўрсатма. Изланган тўғри чизиқ (0; 0; 4) нуқтадан ҳам ўтади.

503. $N(2; -1; 3)$ нуқтадан $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$ тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин.

Кўрсатма. $A(-1; -2; 1)$— тўғри чизиқдаги нуқта; $\boldsymbol{P}\{3; 4; 5\}$ — тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори. У вақтда

$$d = AN \sin\alpha = \frac{AN\,|\boldsymbol{P} \times \overline{AN}|}{P \cdot AN} = \frac{|\boldsymbol{P} \times \overline{AN}|}{P}.$$

504. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ ва $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$

параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофа топилсин.

505. $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}$ тўғри чизиқнинг координата текисликларидаги излари топилсин ва тўғри чизиқ ясалсин.

506. $\begin{cases} 2x+y+8z-16=0 \\ x-2y-z+2=0 \end{cases}$ тўғри чизиқ тенгламалари:

1) проекциялари бўйича; 2) каноник кўринишда ёзилсин. Тўғри чизиқнинг координаталар текисликларидаги излари топилсин, тўғри чизиқ ва унинг проекциялари ясалсин.

507. $A(0;\ -4;\ 0)$ нуқтадан ўтувчи ва $\boldsymbol{P}\{1;\ 2;\ 3\}$ векторга параллел тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин; тўғри чизиқнинг xOz текислигидаги изи топилсин ва тўғри чизиқ ясалсин.

508. $x=3,\ z=5$ тўғри чизиқ ясалсин ва унинг йўналтирувчи вектори топилсин.

509. $x+y-z=0,\ y=x$ тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори ва координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари топилсин (499-масалага берилган кўрсатмага қаранг).

510. $(2;\ -3;\ 4)$ нуқтадан Oy ўққа туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

511. $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ ва $\begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ z=3x \end{cases}$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин.

512. $(-1;\ 2;\ -2)$ нуқтадан ўтувчи ва $x-y=2,\ y=2z+1$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин.

513. $M(3;\ 0;\ 4)$ нуқтадан $y=2x+1;\ z=2x$ тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин (503-масалага қаранг).

4-§. Тўғри чизиқ ва текислик

1°. $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ тўғри чизиқ билан $Ax+By+Cz+D=0$ текислик орасидаги бурчак:

$$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{P}|}{NP}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{NP}. \quad (1)$$

Уларнинг параллеллик шарти ($\boldsymbol{N}\parallel\boldsymbol{P}$):

$$Am+Bn+Cp=0. \quad (2)$$

Уларнинг перпендикулярлик шарти ($\boldsymbol{N}\perp\boldsymbol{P}$):

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \quad (3)$$

2°. Текислик билан тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси. Тўғри чизиқ тенгламаларини $x = mt + a$, $y = nt + b$, $z = pt + c$ параметрик кўринишда ёзиб, текисликнинг $Ax + By + Cz + D = 0$ тенгламасидаги x; y; z ларнинг ўрнига уларнинг t га нисбатан ёзилган қийматларини қўямиз. Ҳосил бўлган тенгламадан t_0 ни, сўнгра кесишган нуқта координаталари x_0, y_0, z_0 ни топамиз.

3°. Икки тўғри чизиқнинг бир текисликда ётиш шарти:

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

514. $y = 3x - 1$, $2z = -3x + 2$ тўғри чизиқ билан $2x + y + z - 4 = 0$ текислик орасидаги бурчак топилсан.

515. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}$ тўғри чизиқ $2x + y - z = 0$ текисликка параллел эканлиги, $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ тўғри чизиқ эса шу текислик устида ётиши кўрсатилсин.

516. $(-1;\ 2;\ -3)$ нуқтадан ўтувчи ва $x = 2$, $y - z = 1$ тўғри чизиққа перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

517. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ тўғри чизиқдан ва $(3;\ 4;\ 0)$ нуқтадан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

518. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ тўғри чизиқдан ўтувчи ва $2x + 3y - z = 4$ текисликка перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

519. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ ва $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ параллел тўғри чизиқлардан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

520. Координаталар бошидан ўтувчи ва $4y = 3x$, $y = 0$ ва $z = 0$ текисликлар билан тенг бурчаклар ташкил этувчи тўғри чизиқ тенгламалари ёзилсин ва ўша бурчаклар топилсин.

521. $x = 2t - 1$, $y = t + 2$, $z = 1 - t$ тўғри чизиқнинг $3x - 2y + z = 3$ текислик билан кесишган нуқтаси топилсин.

522. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ тўғри чизиқнинг $x + 2y + 3z - 29 = 0$ текислик билан кесишган нуқтаси топилсин.

523. $(3;\ 1;\ -1)$ нуқтанинг $x + 2y + 3z - 30 = 0$ текисликдаги проекцияси топилсин.

524. $(2;\ 3;\ 4)$ нуқтанинг $x = y = z$ тўғри чизиқдаги проекцияси топилсин.

525. Ушбу:

1) $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ ва $\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}$;

2) $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ ва $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$

параллел бўлмаган тўғри чизиқлар орасидаги энг қисқа масофа топилсин.

Кўрсатма. Умумий ҳолда тўғри чизиқларни учрашмайдиган деб фараз қилиб, улар ётган ўзаро параллел текисликларни чизамиз. A $(a;$ $b;$ $c)$ *ва* A_1 $(a_1;$ $b_1;$ $c_1)$ нуқталардан $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}=P$ $\{m;$ $n;$ $p\}$ *ва* $\overline{AC}=\overline{A_1C_1}=P_1$ $\{m_1; n_1; p_1\}$ векторларни ўтказамиз. $ABCA_1B_1C_1$ призманинг баландлиги изланган масофа бўлади.

526. $\left.\begin{array}{l}x=z-2\\ y=2z+1\end{array}\right\}$ ва $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{1}$

тўғри чизиқларнинг кесишувчи эканлиги кўрсатилсин ва улар ётган текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

527. (2; 1; 0) нуқтадан $x=3z-1$; $y=2z$ тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

528. A (0; 0; 4) ва B (2; 2; 0) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ ва $x+y-z=0$ текислик ясалсин. Тўғри чизиқнинг текислик билан кесишган нуқтаси ва улар орасидаги бурчак топилсин.

529. $y=z$ текислик, $\left.\begin{array}{l}x=-z+1\\ y=2\end{array}\right\}$ тўғри чизиқ ясалсин ва: 1) уларнинг кесишган нуқтаси; 2) улар орасидаги бурчак топилсин.

530. (3; 1; —1) нуқтанинг $3x+y+z-20=0$ текисликдаги проекцияси топилсин.

531. (1; 2; 8) нуқтанинг $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z$ тўғри чизиқдаги проекцияси топилсин.

532. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3}$ ва $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$ параллел тўғри чизиқлардан ўтувчи текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

533. $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1}$ ва $\left.\begin{array}{l}x=3z-4\\ y=z+2\end{array}\right\}$ тўғри чизиқларнинг кесишувчи эканлиги кўрсатилсин, уларнинг кесишиш нуқтаси топилсин.

534. (1; 0; —1) нуқтадан $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-3}$ тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг тенгламалари ёзилсин.

535. $x=-2y=z$ ва $x=y=2$ тўғри чизиқлар орасидаги энг қисқа масофа топилсин.

5-§. Сферик ва цилиндрик сиртлар

1°. Маркази $C(a;\ b;\ c)$ нуқтада ва радиуси R бўлган сферик сиртнинг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{1}$$

2°. z иштирок этмаган $F(x;\ y)=0$ тенглама, *ясовчилари O_z ўққа параллел цилиндрик сиртни аниқлайди*. Шунга ўхшаш 1) $F(y;\ z)=0$ ва 2) $F(x;\ z)=0$ тенгламаларнинг ҳар бир ясовчилари 1) Ox, 2) Oy ўқларга параллел бўлган цилиндрик сиртларни аниқлайди.

3°. Йўналтирувчиси $F(x;\ y)=0$, $z=0$, ясовчилари эса $\boldsymbol{P}\{m;\ n;\ p\}$ векторга параллел бўлган цилиндрик сирт тенгламаси. Ихтиёрий ясовчининг тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z}{p}$$

дан иборат, бундаги $(x_0;\ y_0;\ 0)$—йўналтирувчида ётувчи нуқта. Сўнгги тенгликлардан x_0; y_0 ни топиб, йўналтирувчининг тенгламасига қўйсак, цилиндрик сиртнинг

$$F\left(x-\frac{m}{p}z,\ y-\frac{n}{p}z\right)=0 \tag{2}$$

тенгламасини ҳосил қиламиз.

536. 1) $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$; 2) $x^2+y^2+z^2=2az$ сфераларнинг маркази ва радиуси топилсин ҳамда иккинчи сферанинг тасвири ясалсин.

537. $3x-2y+6z-18=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ текисликлардан ҳосил бўлган тетраэдрнинг ичига чизилган сферик сиртнинг тенгламаси ёзилсин.

538. $B(-4;\ 0;\ 0)$ нуқтага нисбатан $A(2;\ 0;\ 0)$ нуқтага икки марта яқинроқ бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

539. $\left.\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=a \end{matrix}\right\}$ айланадан ва $(a;\ a;\ a)$ нуқтадан ўтувчи сферик сиртнинг тенгламаси ёзилсин.

Кўрсатма. Изланган тенглама

$$x^2+y^2+z^2-a^2+\lambda(x+y+z-a)=0$$

кўринишда бўлиши керак.

540. Координаталарнинг чап системасида

1) $y^2+z^2=4$; 2) $y^2=ax$; 3) $xz=4$; 4) $x^2+y^2=ax$

сиртлар ясалсин.

541. $x=a$, $y=0$ тўғри чизиқдан ва yOz текисликдан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Топилган сирт ясалсин.

542. $x^2+y^2+z^2-2ax=0$ сфера ташқарисида чизилган, ясовчилари мос равишда: 1) Ox ўққа; 2) Oy ўққа; 3) Oz ўққа параллел учта цилиндрик сиртнинг тенгламалари ёзилсин.

543. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=16 \\ x^2+y^2&=4x \end{aligned}\right\}$

Вивиани эгри чизиғининг $x=0$; 2 ва 4 бўлгандаги нуқталарини ясаб, координаталар чап системасининг биринчи октантида унинг шакли чизилсин. Эгри чизиқнинг xOz текисликдаги проекцияси парабола экани кўрсатилсин.

544. $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=10y \\ x+2y+2z-19&=0 \end{aligned}\right\}$

айлананинг маркази ва радиуси топилсин.

Кўрсатма. Айлананинг маркази шар марказининг текисликдаги проекциясидир (530-масалага қаранг.)

545. Йўналтирувчиси $y^2=4x$, $z=0$ чизиқдан иборат ва ясовчиси $P\{1; 2; 3\}$ векторга параллел бўлган цилиндрик сиртнинг тенгламаси ёзилсин.

546. Биринчи октантда $(x+y)^2+az=a^2$ сирт, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=h\leqslant a$ текисликлар билан ҳосил қилган кесимлари бўйича ясалсин ҳамда у, ясовчилари $x+y=a$, $z=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган цилиндрик сирт эканлиги кўрсатилсин.

547. $x^2+y^2+z^2=4z$ шар $x=0$, $y=z$ тўғри чизиққа параллел нурлар билан ёритилган. Шарнинг xOy текисликдаги соясининг шакли аниқлансин.

Кўрсатма. Шар сиртига уринма бўлган нурлардан тузилган цилиндрик сирт тенгламасини ёзиш керак. Унинг йўналтирувчиси деб, шар марказидан ўтувчи ва нурларга перпендикуляр текислик билан шар сиртининг кесишишидан ҳосил бўлган чизиқ қабул қилинсин.

---

548. $x^2+y^2+z^2-2x+y-3z=0$ сиртнинг маркази C дан ўтувчи ва OC тўғри чизиққа перпендикуляр текисликнинг тенгламаси ёзилсин.

549. (0; —3; 0) нуқтага нисбатан координаталар бошидан икки баравар узоқроқ бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

550. $x^2+y^2+z^2=4(x-2y-2z)$ шар сиртини унинг марказдан ўтувчи ва $x=0$, $y+z=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр текислик билан кесишдан ҳосил бўлган кесимининг $z=0$ текисликдаги проекцияси топилсин.

Кўрсатма. Шар сиртининг тенгламасини $(x-2)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=36$ (1) кўринишда ёзиш мумкин. Шар маркази $C(2; -4; -4)$ нуқтадан ўтувчи ва $x=0$, $y+z=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр текислик тенгламаси $y=z$ (2) дан иборат. У ҳолда изланган тенгламани топиш учун (1) ва (2) дан z ни йўқотиш керак.

551. Координаталарнинг чап системасида

1) $z=4-x^2$; 2) $y^2+z^2=4z$; 3) $y^2=x^2$

сиртлар ясалсин.

552. Координаталар чап системасининг биринчи октантида $x^2+z^2=a^2$ ва $x^2+y^2=a^2$ цилиндрларнинг кесишган эгри чизиғи ясалсин.

Кўрсатма. xOz ва xOy текисликларда йўналтирувчи айлананинг чоракларини ясаб, уларни тенг бўлакларга (масалан, 4 га) бўлиб, бўлиниш нуқталаридан ўзаро кесишгунча цилиндрларнинг ясовчилари ўтказилсин (64- чизмага қаранг).

553. Йўналтирувчиси $x^2+y^2=4x$, $z=0$ чизиқдан иборат бўлган ва ясовчиси $P\{1; 1; 1\}$ векторга параллел бўлган цилиндрик сиртнинг тенгламаси ёзилсин.

554. $y^2=x$, $z=0$, $z=4$, $x=4$ сиртлар билан чегараланган жисм ясалсин ва унинг $x=4$ текисликда ётувчи ёғи диагоналларининг тенгламалари ёзилсин.

6- §. Конус сиртлар ва айланиш сиртлари

1°. Конус сиртлар. *Конус сиртнинг* учи координаталар бошида бўлсин ва $z=h$ текисликда ётувчи $F(x, y)=0$ *йўналтирувчига* эга бўлсин. *Ясовчисининг тенгламалари* $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{h}$ *бўлади*, бундаги $(x_0; y_0; h)$—йўналтирувчининг нуқтасидир. Бундан x_0, y_0 ни топиб $F(x; y)=0$ тенгламага қўйсак, *учи координаталар бошида бўлган конус сирт тенгламасига эга бўламиз.*

$$F\left(\frac{xh}{z}, \frac{yh}{z}\right)=0 \qquad (1)$$

Агар конуснинг учи $(a;\ b;\ c)$ нуқтада бўлса, тенглама

$$F\left[\frac{(x-a)\ (h-c)}{z-c}+a,\ \frac{(y-b)\ (h-c)}{z-c}+b\right]=0 \qquad (2)$$

кўринишга эга бўлади.

(1) *тенглама* $x,\ y,\ z$ га нисбатан *бир жинсли, (2) тенглама* эса $(x-a)$, $(y-b)$ *ва* $(z-c)$ *га нисбатан бир жинслидир*. Тенгламанинг *бир жинсли эканидан* унинг *конус сирт* тенгламаси эканини билиш мумкин.

2°. Айланиш сиртлари:

Эгри чизиқ тенгламалари	Айланиш ўқи	Айланиш сирти тенгламаси
$\begin{cases} F\ (x,\ y)=0 \\ z=0 \end{cases}$	Ox Oy	$F\ (x,\ \sqrt{y^2+z^2})=0$ $F\ (\sqrt{x^2+z^2},\ y)=0$

Эгри чизиқ тенгламалари	Айланиш ўқи	Айланиш сирти тенгламаси
$\begin{cases} F(x,\ z)=0 \\ y\ =0 \end{cases}$	Ox Oz	$F\ (x,\ \sqrt{y^2+z^2})=0$ $F\ (\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$
$\begin{cases} F\ (y,\ z)=0 \\ x\ =0 \end{cases}$	Oy Oz	$F\ (y,\ \sqrt{x^2+z^2})=0$ $F\ (\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$

555. Учи координаталар бошида ва йўналтирувчиси $x^2+y^2=a^2,\ z=c$ дан иборат конус сирт тенгламаси ёзилсин. Сиртнинг тасвири ясалсин.

556. Учи $A(0;\ -a;\ 0)$ нуқтада ва йўналтирувчиси $x^2=2py,\ z=h$ бўлган конус сиртнинг тенгламаси ёзилсин. Сиртнинг тасвири ясалсин.

557. $x^2+(y-a)^2-z^2=0$ конуснинг учи, унинг $z=a$ текисликдаги йўналтирувчиси аниқлансин ҳамда конус ясалсин.

558. $x^2=2yz$ конуснинг учи ва унинг $z=h$ текисликдаги йўналтирувчиси аниқлансин ҳамда конус ясалсин.

559. $(a^2-x^2)\,y^2=h^2z^2$ *коноид** ёки *понанинг* сирти уни $z=0,\ y=h,\ x=\pm c\,(c\leqslant a)$ текисликлар билан кесишдан

* Тўғри чизиқнинг берилган эгри ва тўғри чизиқлар билан кесишиб, берилган текисликка параллел ҳаракат қилишидан ҳосил бўлган сирт *коноид* дейилади.

ҳосил бўлган кесимлар бўйича текширилсин ва коноид $z \geqslant 0$ соҳада ясалсин.

560. $z = x^2$, $y = 0$ эгри чизиқнинг: а) Oz ўқ атрофида; б) Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламаси ёзилсин. Иккала сирт ясалсин.

561. Oz ўқ атрофида: 1) $z = e^{-x^2}$, $y = 0$ эгри чизиқнинг; 2) $z = \frac{4}{x^2}$, $y = 0$ эгри чизиқнинг айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламаси ёзилсин. Иккала сирт (координаталарнинг чап системасида) ясалсин.

562. Учи $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқтада ва йўналтирувчиси $\begin{cases} x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 25 \\ y = 3 \end{cases}$ бўлган конус сиртнинг тенгламаси ёзилсин ҳамда сирт ясалсин.

563. Учи $C(0;\ -a;\ 0)$ нуқтада, йўналтирувчиси $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y + z = a \end{matrix}\right\}$ бўлган конус сиртнинг тенгламаси ёзилсин ва сирт ясалсин.

Кўрсатма. Ясовчининг тенгламалари $\frac{x}{x_0} = \frac{y+a}{y_0+a} = \frac{z}{z_0}$ дан иборат. $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ йўналтирувчида ҳам ётади, уларни ёзилган тенгламалардан топиб, йўналтирувчининг тенгламаларига қўйсак, изланган тенглама ҳосил бўлади.

564. $x = 0$, $z = y$ тўғри чизиқнинг: а) Oy ўқ атрофида; б) Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламаси ёзилсин ва иккала сирт ясалсин.

565. $z^2 = xy$ конуснинг $x + y = 2a$ текислик билан кесими эллипс эканлиги кўрсатилсин ва унинг ярим ўқлари топилсин.

7- §. Эллипсоид, гиперболоидлар ва параболоидлар

1°. Каноник тенгламалар. Цилиндрик сиртлардан бошқа қуйидаги каноник (энг содда) тенгламалар билан аниқланувчи олтита асосий иккинчи тартибли сиртлар бор:

I. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — *эллипсоид.*

II. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — *бир ковакли гиперболоид.*

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ — *икки ковакли гиперболоид.*

III. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ — *иккинчи тартибли конус.*

IV. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ — *эллиптик параболоид,*
$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ — *гиперболик параболоид.* } ($pq>0$ бўлганда)

2°. Тўғри чизиқли ясовчилар. *Бир кавакли гиперболоиднинг* ҳар бир нуқтасидан унинг *иккита тўғри чизиқли ясовчиси:*

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{array}\right\}\quad \text{ва}\quad \left.\begin{array}{l}\gamma\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\delta\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \delta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\gamma\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{array}\right\}$$

ўтади.

Гиперболик параболоиднинг ҳар бир нуқтасидан *ҳам унинг иккита тўғри чизиқли ясовчиси* ($p>0$ ва $q>0$ бўлганда) ўтади:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta\\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha z\end{array}\right\}\quad \text{ва}\quad \left.\begin{array}{l}\gamma\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\delta z\\ \delta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\gamma\end{array}\right\}$$

3°. Доиравий кесимлар. *Эллиптик* кесимга эга бўлган ҳар бир сиртда *доиравий* кесимлар ҳам бўлади. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг ($a>b>c$ бўлганда) энг катта доиравий кесими $x^2+y^2+z^2=b^2$ сферада ётади. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ эллиптик параболоиднинг учидан ўтувчи доиравий кесими $x^2+y^2+z^2=2pz$ сферада ётади ($p>q$ бўлганда).

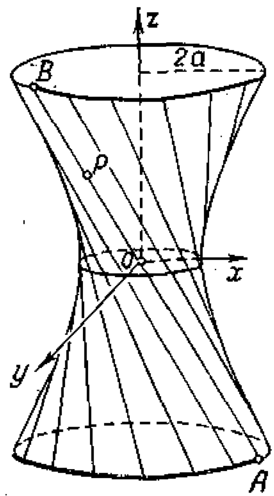
566. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$, $y=0$ эллипснинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламаси ёзилсин.

567. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$ сирт ясалсин ва унинг: 1) $z=3$; 2) $y=1$ текисликлар билан кесимларининг юзлари топилсин.

568. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ эгри чизиқнинг: а) Oz ўқ; б) Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламаси ёзилсин. Иккала сирт (координаталарнинг чап системасида) ясалсин.

569. 1) $x^2+y^2-z^2=4$; 2) $x^2-y^2+z^2+4=0$ сиртлар ясалсин.

570. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1$ гиперболоид ясалсин ва унинг $(4;\ 1;\ -3)$ нуқтадан ўтувчи ясовчилари топилсин.



22- чизма.

571. Ипдан ясалган цилиндр модели, устки доирасини (22-чизма) $\alpha°$ бурчакка буриб «ўралган». Агар ҳосил бўлган «чизиқли» сирт асосларининг доиралари $z = \pm c$ текисликларда, марказлари эса Oz ўқда ётса ва радиуслари $2a$ га тенг бўлса, ўша сирт тенгламаси ёзилсин. $\alpha = 90°$, $120°$, $180°$ бўлгандаги хусусий ҳоллар қаралсин.

Кўрсатма. $P(x; y; z)$ нуқта $A(2a\cos t;\ 2a\sin t;\ -c)$ ва $B[2a\cos(t+\alpha);\ 2a\sin(t+\alpha);\ c]$ нуқталар орасидаги масофани $AP: PB = c + z) : (c - z)$ нисбатда бўлади.

572. $az = x^2$, $y = 0$ параболанинг (Oz) ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламаси ёзилсин. $z = a$, $x = 0$, $y = 0$ текисликлар билан ҳосил қилган кесимлари бўйича сирт ясалсин.

573. 1) $2z = x^2 + \frac{y^2}{2}$;

2) $z = c\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ сиртлар ясалсин.

574. $x^2 - y^2 = 4z$ сирт (координаталарнинг чап системасида) ясалсин ва унинг $(3;\ 1;\ 2)$ нуқтадан ўтувчи ясовчилари топилсин.

575. Ҳар биридан $x = 2a$ текисликкача бўлган масофанинг $F(a;\ 0;\ 0)$ нуқтагача бўлган масофага нисбати $\sqrt{2}$ га тенг бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Сирт ясалсин.

576. Ҳар биридан $F(0;\ 0;\ 2a)$ нуқтагача бўлган масофанинг $z = a$ текисликкача бўлган масофага нисбати $\sqrt{2}$ га тенг бўлган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Сирт ясалсин.

577. $F(-a;\ 0;\ 0)$ нуқтадан ва $x = a$ текисликдан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин.

578. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ эллипсоиднинг энг катта доиравий кесими топилсин.

579. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=z$ эллиптик параболоиднинг координаталар бошидан ўтувчи доиравий кесимлари аниқлансин.

---

580. Ушбу

1) $x^2+y^2+z^2=2az$; 6) $x^2=2az$;
2) $x^2+y^2=2az$; 7) $x^2=2yz$;
3) $x^2+z^2=2az$; 8) $z=2+x^2+y^2$;
4) $x^2-y^2=2az$; 9) $(z-a)^2=xy$;
5) $x^2-y^2=z^2$; 10) $(z-2x)^2+4(z-2x)=y^2$

сиртлардан ҳар бирининг номи аниқлансин ва улар ясалсин.

581. $x^2-y^2+z^2=4$ гиперболоиднинг (2; 4; 4) нуқтадан ўтувчи чизиқли ясовчиларининг тенгламалари ёзилсин.

582. $z=-\frac{a}{2}$ текисликдан ва $F\left(0;\ 0;\ \frac{a}{2}\right)$ нуқтадан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Сирт ясалсин.

583. $z=\frac{3a}{2}$ текисликдан ва $F\left(0;\ 0;\ \frac{a}{2}\right)$ нуқтадан тенг узоқлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси ёзилсин. Сирт ясалсин.

584. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{3z^2}{25}=1$ гиперболоиднинг энг кичик доиравий кесимлари топилсин.

585. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$ гиперболик параболоиднинг (4; 3; 0) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар ясовчиларининг тенгламалари ёзилсин.

IV БОБ

ОЛИЙ АЛГЕБРА

1- §. Детерминантлар

1°. Детерминантлар. *2-тартибли детерминант* деб $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ символ билан белгиланувчи ва

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \qquad (1)$$

тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади.

3-тартибли детерминант деб, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ символ билан белгиланувчи ва

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \cancel{c_1} \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади.

(2) тенгликнинг ўнг томонидаги 2-тартибли детерминантларнинг ҳар бири берилган учинчи тартибли детерминантнинг битта сатри ва битта устунини ўчиришдан ҳосил бўлади ва улар ўша детерминантнинг *минорлари* деб аталади. (2) формула эса 3-тартибли детерминантни биринчи сатри элементлари бўйича ёйиш формуласи дейилади.

2°. Детерминантларнинг хоссалари.

I. Детерминантнинг сатрларини устунлари билан алмаштиришдан унинг қиймати ўзгармайди.

II. Детерминантнинг иккита параллел қаторларини ўзаро алмаштирганда детерминант қийматининг ишораси ўзгаради.

I ва II хоссалардан равшанки, детерминантнинг исталган қаторини биринчи сатр ўрнига келтириш мумкин, шунинг учун уни исталган қатор элементлари бўйича ёйиш мумкин.

III. Иккита параллел қатори бир хил бўлган детерминант нолга тенг.

IV. Бир қатор элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

V. Детерминантнинг бирор қаторининг элементларига унга параллел қатор элементларини ихтиёрий бир хил сонга кўпайтириб қўшишдан детерминант қиймати ўзгармайди. Масалан:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+mc_1 & b_1+nc_1 & c_1 \\ a_2+mc_2 & b_2+nc_2 & c_2 \\ a_3+mc_3 & b_3+nc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Бу хоссага асосланиб, 3-тартибли детерминантнинг исталган қаторида иккита ноль ҳосил қилиш мумкин, бунинг натижасида детерминантнинг ўша қатор элементлари бўйича ёйилмаси соддалашади.

3°. Учлари $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;y_3)$ нуқталарда бўлган **учбурчак юзи**:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Қуйидаги детерминантлар ҳисоблансин:

586. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$. 587. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$. 588. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$.

589. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$. 590. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

591. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$.

Қуйидаги детерминантлар биринчи устун элементлари бўйича ёйиб ҳисоблансин:

592. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. 593. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$.

Қуйидаги детерминантлар ноллар энг кўп бўлган қатор элементлари бўйича ёйиб ҳисоблансин:

594. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$. 595. $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$.

Қуйидаги детерминантлар соддалаштирилсин ва ҳисоблансин:

596. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$. 597. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$.

598. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$. 599. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$.

600. $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. 601. $\begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

602. Учлари $A(2;\ 3)$, $B(4;\ -1)$ ва $C(6;\ 5)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

603. $A(1;\ 3)$, $B(2;\ 4)$ ва $C(3;\ 5)$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётадими?

604. 1) $(x_1;\ y_1)$ ва $(x_2;\ y_2)$; 2) $(2;\ 3)$ ва $(-1;\ 5)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси 3-тартибли детерминант ёрдами билан ёзилсин.

Қуйидаги детерминантлар соддалаштирилсин ва ҳисоблансин:

605. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. 606. $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$.

607. $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$. 608. $\begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

Кўрсатма. 607-мисолда олдин a ни детерминант белгисидан ташқарига чиқариб, сўнгра биринчи ва иккинчи сатрдан учинчи сатрни айириш $(x-z)$ ва $(y-z)$ ни детерминант белгиси ташқарисига чиқариш керак.

609.

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

тенглик исботлансин.

610. Ушбу

$$1)\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 2)\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

тенгламалардан x топилсин ва илдизларни детерминантга қўйиб текширилсин.

2-§. Чизиқли тенгламаларнинг системалари

1°. Икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системаси

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ шарт бажарилганда

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (2)$$

ечимларга эга.

2°. Бир жинсли уч номаълумли иккита тенглама системаси

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ушбу

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = -k\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

формулалар билан аниқланувчи ечимларга эга, бундаги k — ихтиёрий сон.

3°. Бир жинсли уч номаълумли учта тенглама системаси

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

унинг детерминанти $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ бўлса, нолга тенг бўлмаган ечимларига эга бўлади ва аксинча.

4°. **Икки номалумли учта чизиқли тенглама системаси,**

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1,\\ a_2x + b_2y = c_2,\\ a_3x + b_3y = c_3. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$ бўлганда ва унинг ҳеч қайси иккита тенгламаси ўзаро зид бўлмаса, биргаликда бўлади.

5°. **Уч номаълумли учта чизиқли тенглама системаси**

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2,\\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

унинг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

нолдан фарқли бўлганда бирдан-бир

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} \qquad (8)$$

ечимга эга бўлади, бунда

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6°. **Биргаликда бўлмаган ва аниқмас тенгламалар системаси.** (7) тенгламаларнинг чап томонларини X_1, X_2, X_3 лар билан белгилайлик, системанинг детерминанти $\Delta = 0$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

I. Δ детерминантнинг қандайдир иккита сатрининг элементлари бир-бирига *пропорционал*, масалан $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = m$. У ҳолда $X_2 = mX_1$ ва

1) агар $d_2 \neq md_1$ бўлса, *система биргаликда эмас* (биринчи икки тенглама *бир-бирига зид*);

2) агар $d_2 = md_1$ бўлса, *система аниқмас* (агар биринчи ва учинчи тенгламалар бир-бирига зид бўлмаса).

II. Δ детерминантда пропорционал элементларга эга бўлган сатрлар йўқ. У ҳолда нолга тенг бўлмаган шундай m ва n сонлар мавжудки, $mX_1 + nX_2 = X_3$ ва

1) агар $md_1 + nd_2 \neq d_3$ бўлса, *система биргаликда* эмас;

2) агар $md_1 + nd_2 = d_3$ бўлса, *система аниқмас.*

m ва n сонларни мулоҳазалар ёрдами билан ёки $a_1m + a_2n = a_3$, $b_1m + b_2n = b_3$, $c_1m + c_2n = c_3$ тенгламалардан топиш мумкин.

Детерминантлар ёрдами билан қуйидаги тенгламалар системалари ечилсин:

611. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 5y = 40. \end{cases}$ 612. $\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ ax - 2y = 2. \end{cases}$

613. $\begin{cases} 5x + 2y = 4. \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$ 614. $\begin{cases} mx - ny = (m - n)^2 \\ 2x - y = n \ (m \neq 2n \end{cases}$

бўлганда)

Қуйидаги тенгламалар системалари ечилсин:

615. $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x + 5y - 4z + 5 = 0 \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases}$ 616. $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$

617. $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$ 618. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases}$

619. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0. \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$ 620. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \\ 3x + y - z = 1. \end{cases}$

621. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases}$ 622. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10. \end{cases}$

623. 1) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3x + y = 9 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$ ва 2) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ x + 2y = 4 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$

тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишадими? Иккала ҳолда ҳам чизиқлар ясалсин.

Қуйидаги чизиқли тенгламалар системалари ечилсин:

624. $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y = 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$ 625. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$

626. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 0. \end{cases}$ 627. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

$$628. \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases} \qquad 629. \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11. \end{cases}$$

3- §. Комплекс сонлар

1°. Таърифлар. x ва y ҳақиқий сонлар, i эса қандайдир бир символ бўлса, $x + yi$ ифода *комплекс* сон дейилади, бунда қуйидаги шартлар қабул қилинган деб ҳисобланади.

1) $x + 0i = x$; $0 + yi = yi$ ва $1i = i$; $-1i = -i$.

2) фақат $x = x_1$, $y = y_1$ бўлгандагина, $x + yi = x_1 + y_1 i$ бўлади.

3) $(x + yi) + (x_1 + y_1 i) = (x + x_1) + (y + y_1)i$,

4) $(x + yi)(x_1 + y_1 i) = (xx_1 - yy_1) + (xy_1 + x_1 y_1)i$.

1) ва 4) шартлардан i нинг даражалари ҳосил бўлади:

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i;\ i^4 = 1,\ i^5 = i \text{ ва ҳоказо.} \qquad (1)$$

$x + yi$ комплекс сонда $x = 0$, $y \neq 0$ бўлса, у *мавҳум сон* дейилади. i сон мавҳум бирлик дейилади.

2°. Комплекс сонлар устида бажариладиган амаллар. Комплекс сонларни қўшиш, айириш, кўпайтириш ва даражага кўтариш амаллари, шу амалларни кўпҳадлилар устида бажариш қоидалари асосида бажарилади, бунда i соннинг даражаларини (1) формулалар бўйича алмаштириш зарур.

Комплекс сонларни бўлиш, комплекс сондан илдиз чиқариш амаллари мос равишда кўпайтириш ва даражага кўтариш амалларига тескари амаллар сифатида аниқланади.

3°. Комплекс соннинг тригонометрик кўриниши. $x + yi$ комплекс сон икки ҳақиқий $(x; y)$ сон билан аниқланади, шунинг учун ҳам у текисликдаги M $(x; y)$ нуқта ёки унинг $r = \overline{OM}$ (12- чизма) радиус-вектори билан ифодаланади. Бу векторнинг узунлиги $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ комплекс соннинг *модули*, вектор билан Ox ўқ орасидаги φ бурчак эса комплекс соннинг *аргументи* дейилади. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ бўлгани учун:

$$x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

4°. Тригонометрик кўринишда берилган комплекс сонлар устида бажариладиган амаллар:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = (rr_1)[\cos(\varphi + \varphi_1) + i\sin(\varphi + \varphi_1)], \qquad (3)$$

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)} = \frac{r}{r_1}[\cos(\varphi - \varphi_1) + i\sin(\varphi - \varphi_1)], \qquad (4)$$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (5)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad (6)$$

бунда $k = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1)$.

(5) ва (6) формулалар Муавр формулалари дейилади.

5°. Эйлер формуласи:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \quad (7)$$

6.° Комплекс соннинг логарифми қуйидагича ёзилади:

$$\ln z = \ln k + i\varphi_0 + i2k\pi, \quad (8)$$

φ нинг $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи қиймати φ_0 бўлади. $\ln r + i\varphi_0$ ифода логарифмнинг *бош қиймати* дейилади.

630. 1) $(2+3i\,e\;(3-2i)$; 2) $(a+bi)(a-bi)$; 3) $(3-2i)^2$;

4) $(1+i)^3$; 5) $\frac{1+i}{1-i}$; 6) $\frac{2i}{1+i}$

амаллар бажарилсин.

631. 1) $x^2+25=0$; 2) $x^2-2x+5=0$; 3) x^2+4x+ $+13=0$ тенгламалар ечилсин ва илдизлар тенгламага қўйилиб текширилсин.

Қуйидаги комплекс сонлар векторлар билан тасвирлансин ва уларнинг модуллари ва аргументлари аниқлансин ҳамда тригонометрик кўринишда ёзилсин:

632. 1) $z=3$; 2) $z=-2$; 3) $z=3i$; 4) $z=-2i$.

633. 1) $z=2-2i$; 2) $z=1+i\sqrt{3}$; 3) $z=-\sqrt{3}-i$.

634. 1) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$.

635. 632—634-масалаларда берилган сонлар $re^{\varphi i}$ кўринишда ёзилсин ($-\pi<\varphi\leqslant\pi$ бўлганда).

636. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи z нуқталарнинг соҳалари ясалсин:

1) $|z|<3$; 2) $|z|<2$ ва $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$;

3) $2<|z|<4$ ва $-\pi<\varphi<-\frac{\pi}{2}$.

637. $|z_1-z_2|$ ифода z_1 ва z_2 нуқталар орасидаги масофа эканлиги кўрсатилсин.

638. $z_0=-2+3i$ нуқта берилган. $|z-z_0|<1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи z нуқталарнинг соҳаси ясалсин.

639. z сонга қўшма бўлган сон $\bar{z}$ билан белгиланади. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ эканлиги исботлансин.

640. Қуйидагилар Муавр формуласи билан ҳисоблансин:

1) $(1+i)^{10}$; 2) $(1-i\sqrt{3})^6$; 3) $(-1+i)^5$;

4) $\left(1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4$; 5) $(\sqrt{3}+i)^3$.

641. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos3\alpha+i\sin3\alpha$ айниятдан фойдаланиб, $\sin3\alpha$ ва $\cos3\alpha$ лар α бурчакнинг функциялари орқали ифодалансин.

642. $z=\sqrt[6]{1}$ нинг барча қийматлари топилсин ва радиуси 1 га тенг доира ясаб, топилган қийматлар радиус-векторлар билан тасвирлансин.

643. 1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[6]{-1}$; 4) $\sqrt[3]{-2+2i}$ топилсин.

644. 1) $\sqrt{i}$; 2) $\sqrt[3]{-1+i}$; 3) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$ топилсин.

645. 1) $x^3+8=0$; 2) $x^4+4=0$ икки ҳадли тенгламалар ечилсин.

646. 1) $\ln(-2)$; 2) $\ln(1+i)$; 3) $\ln i$; 4) $\ln(x+yi)$; 5) $\ln(2-2i)$ логарифмнинг бош қиймати топилсин.

647. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$ йиғинди топилсин.

Кўрсатма. Эйлер формуласига асосан $\sin x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$ ва ҳоказо алмаштиришлар бажарилсин.

648. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx$ йиғинди топилсин.

649. $x^5-1=(x-1)(x^2-2x\cos 72^\circ+1)(x^2-2x\cos 144^\circ+$ $+1)$ айният исботлансин.

---

650. Қуйидагиларни ҳисобланг:

1) $\frac{4-3i}{4+3i}$; 2) $(a+bi)^3-(a-bi)^3$.

Қуйидаги мисолларда комплекс сонлар векторлар билан тасвирлансин, уларнинг модуллари ва аргументлари топилсин ҳамда улар тригонометрик кўринишда ва $re^{\varphi i}$ (бунда $-\pi<$ $<\varphi\leqslant\pi$) кўринишда ёзилсин:

651. 1) $z=4+4i$; 2) $z=-1+i\sqrt{3}$; 3) $z=1-i$.

652. 1) $z=5$; 2) $z=-i$; 3) $z=-\sqrt{2}-\sqrt{-2}$.

653. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи z нуқталарнинг соҳалари ясалсин:

$$1<|z|<3 \text{ ва } \frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}.$$

654. $z_0=3-4i$ нуқта берилган. $|z-z_0|<5$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи z нуқталарнинг соҳаси ясалсин.

655. Қуйидагилар Муавр формуласи билан ҳисоблансин:

1) $(1-i)^6$; 2) $(2+i\sqrt{12})^5$; 3) $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$.

656. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4=\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha$ айниятдан фойдаланиб, $\sin 4\alpha$ ва $\cos 4\alpha$ лар α бурчак функциялари орқали ифодалансин.

657. Ушбу 1) $\sqrt[4]{-1}$ ва 2) $\sqrt[5]{1}$ илдизларнинг барча қийматлари топилсин ҳамда улар радиус-векторлар билан тасвирлансин.

658. 1) $x^3-8=0$; 2) $x^6+64=0$; 3) $x^4-81=0$ тенгламалар ечилсин.

659. $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ \dots\ +\cos(2n-1)x$ йиғинди ҳисоблансин (647- масалага қаралсин).

4- §. Юқори даражали тенгламалар. Тенгламаларни тақрибий ечиш

1°. $x^3+ax^2+bx+c=0$ (1) тенглама кубик тенглама дейилади.

Агар x_1, x_2, x_3 лар (1) тенгламанинг илдизлари бўлса, тенгламани $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бундан $a=-(x_1+x_2+x_3)$, $b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $c=-x_1x_2x_3$.

$x^3+ax^2+bx+c=0$ тенглама $x=z-\frac{a}{3}$ алмаштириш ёрдами билан $z^3+pz+q=0$ кўринишга келтирилади. $z^3+pz+q=0$ тенглама ушбу

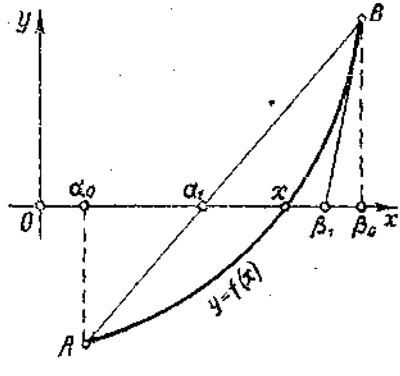
$$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=u+v$$

Кардано формуласи билан ечилади.

I. Агар $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ бўлса, у ҳолда $z_1=u_1+v_1$; $z_{2,3}=-\frac{u_1+v_1}{2}\pm\frac{u_1-v_1}{2}i\sqrt{3}$ бўлади, бунда u_1 ва v_1 лар u ва v илдизларнинг ҳақиқий қийматлари.

II. Агар $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ бўлса, у ҳолда $z_1=\frac{3q}{p}$; $z_2=z_3=-\frac{3q}{2p}=-\frac{z_1}{2}$ бўлади.

III. Агар $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ бўлса, у ҳолда $z_1=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}$, $z_{2,3}=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\pm 120^\circ\right)$ бўлади, бундаги $\cos\varphi=-\frac{q}{2}:\sqrt{\frac{-p^3}{27}}$.



23-чизма.

2°. $f(x)=0$ **тенгламанинг ҳақиқий илдизини ажратиш.** Агар $f(a)$ ва $f(b)$ нинг ишоралари ҳар хил ва $f(x)$ эса $[a, b]$ кесмада узлуксиз ҳамда шу кесма ичида $f'(x) \neq 0$ ҳосилага эга бўлса, $f(x)=0$ тенгламанинг a-ва b орасида бирдан бир илдизи жойлашган бўлади. Бундан ташқари, $[a, b]$ кесмада $f''(x) \neq 0$ деб ҳисоблаймиз.

3°. $f(x)=0$ **тенгламани тақрибий ечишнинг ватарлар усули.** α_0 — тенглама илдизини ажратувчи $[a, b]$ кесманинг икки учидан ўшанисики, унда $f(\alpha_0)\cdot f''(\alpha_0) < 0$ шарт бажарилади. У ҳолда AB ватар билан Ox ўқнинг кесишган нуқтаси α_1 (23-чизма) тенглама илдизи x нинг тақрибий қиймати бўлади:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{f(\alpha_0)}{k},$$

бунда $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

4°. **Уринмалар (Ньютон) усули.** β_0 — $[a, b]$ кесманинг икки учидан ўшанисики, унда $f(\beta_0)\cdot f''(\beta_0) > 0$ шарт бажарилади. У ҳолда, $y = f(x)$ эгри чизиқнинг $[\beta_0; f(\beta_0)]$ нуқтасига ўтказилган *уринма* билан Ox ўқнинг кесишган нуқтаси β_1 (23-чизма) тенглама илдизи x нинг тақрибий қиймати бўлади:

$$\beta_1 = \beta_0 - \frac{f(\beta_0)}{k_1},$$

бунда

$$k_1 = f'(\beta_0).$$

Ватар ва уринма усулларини янгидан татбиқ этиб, ушбу

α	β	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	k	k_1	$\Delta\alpha$	$\Delta\beta$
..	..	..	..	..	..	..	..

(2)

жадвални тузиш мумкин. Бунда k ва k_1 — мос равишда ватар ва уринманинг бурчак коэффициентларидир, $\Delta\alpha$ ва $\Delta\beta$ бўлса,

$$\Delta\alpha = -\frac{f(\alpha)}{k} \quad \text{ва} \quad \Delta\beta = -\frac{f(\beta)}{k_1}$$

тенгликлар билан аниқланади.

(2) жадвалда ҳосил бўладиган α ва β қийматларнинг кетма-кетликлари изланган илдизга яқинлашади.

5°. *Итерациялар усули.* Агар $f(x)=0$ тенгламани $x = \varphi(x)$ кўринишга келтириш мумкин бўлса, ундан ташқари, тенглама илдизининг қандайдир бир атрофида $|\varphi'(x)| < 0 \leqslant 1$ бўлса ва x_0 — шу атрофдаги ихтиёрий бир сон бўлса, у ҳолда тақрибий ечимларнинг яқинлашувчи кетма-кетлиги:

$$x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(x_1),\ x_3 = \varphi(x_2)...$$

бўлади.

660, 661- мисолларда берилган тенгламалар озод ҳадларининг бутун кўпайтувчилари орасидан тенгламанинг битта илдизи x_1 ни топиб, сўнгра тенглама чап томонини $(x - x_1)$ га бўлиб, қолган илдизлар топилсин.

660. 1) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$; 2) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$ тенгламаларнинг ечимлари

$$x_1 + x_2 + x_3;\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3;\ x_1 x_2 x_3$$

ифодаларни тузиб, текширилсин.

661. 1) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$; 2) $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$; 3) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$; 4) $4x^3 - 4x^2 + x - 1 = 0$.

Қуйидаги тенгламалар Кардано формуласи бўйича ечилсин:

662. 1) $z^3 - 6z - 9 = 0$; 2) $z^3 - 12z - 16 = 0$.

663. 1) $z^3 - 12z - 8 = 0$; 2) $z^3 + 6z - 7 = 0$.

664. $x^3 + 9x^2 + 18x + 9 = 0$.

665. $f(x) = x^4 - x - 10 = 0$ тенглама берилган. $x = 0, 1, 2, ...$ лар учун $f(x)$ ишораларининг жадвалини тузиб, мусбат илдиз чегаралари аниқлансин ва уни 0,01 аниқлик билан ватарлар ҳамда уринмалар усули бўйича ҳисоблансин.

666. $y = \frac{x^3}{3}$ функция графиги ясалсин, $x^3 - 6x + 3 = 0$ тенглама илдизларининг чегаралари графикдан аниқлансин ҳамда илдизлар учинчи хона бирлиги аниқлиги билан ҳисоблансин.

667. Итерациялар (кетма-кет яқинлашишлар) усули билан: 1) $x^3 + 60x - 80 = 0$; 2) $2^x = 4x$; 3) $x^3 + l^2x + l^3 = 0$; 4) $x^4 - 2x - 2 = 0$ тенгламаларнинг ҳақиқий илдизлари топилсин.

---

668. 1) $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ тенгламаларнинг озод ҳадлари бутун кўпайтувчилари орасидан тенгламанинг битта илдизини топиб, тенглама ечилсин. Текшириш учун $\sum x_i$, $\sum x_i x_\alpha$ ва $x_1 x_2 x_3$ ифодалар тузилсин.

669. 1) $z^3+18z-19=0$; 2) $z^3-6z-4=0$;
3) $z^2-3z+2=0$; 4) $x^3+6x^2+9x+4=0$

тенгламалар Кардано формуласи бўйича ечилсин.

670. $y=\frac{x^4}{5}$ функция графигини ясаб, $x^4+3x-15=0$ тенглама илдизларининг чегаралари аниқлансин ва илдизлар 0,01 аниқлик билан ҳисоблансин.

671. 0,01 аниқлик билан 1) $x^3+50x-60=0$, 2) $x^3+x-32=0$ тенгламаларнинг мусбат илдизлари топилсин.

672. Итерациялар усули билан $x=\sqrt[3]{8-2x}$ формулага асосан кетма-кет яқинлашишларни (логарифмик линейка ёрдами билан) ҳисоблаб, $x^3+2x-8=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизи топилсин.

V БОБ

АНАЛИЗГА КИРИШ

1-§. Ўзгарувчи миқдорлар ва функциялар

1°. Интерваллар. $a<x<b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x сонлар тўплами *оралиқ* дейилади ва (a, b) билан белгиланади. $a \leqslant x \leqslant b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x сонлар тўплами *сегмент* дейилади ва $[a, b]$ билан белгиланади.

Оралиқ ва *сегмент* (кесма) *интервал* деган умумий ном билан юргизилади. Ўзаро эквивалент

$$x^2 < a^2 \text{ ёки } |x| < a \text{ ёки } -a < x < a$$

тенгсизликлар ($a > 0$ бўлганда) нолга нисбатан симметрик оралиқларни билдиради.

2°. Ўзгарувчи миқдорлар ва функциялар. Агар ўзгарувчи x нинг ҳар бир қийматига битта сон мос келтирилган бўлса, у ҳолда ўша сонлар тўплами билан аниқланган y ўзгарувчи x нинг бир қийматли *функцияси* дейилади. Бунда ўзгарувчи x *аргумент*, аргумент қийматларининг берилган тўплами эса функциянинг *аниқланиш соҳаси* дейилади.

y нинг x функцияси экани символик $y=f(x)$, $y=F(x)$ ёки $y=\varphi(x)$ ва шунга ўхшаш кўринишда ёзилади. $f(x)$ ёки $F(x)$ ва шунга ўхшаш *символ* x ва y ўзгарувчиларнинг мослик қонунини белгилайди, хусусий ҳолда, x нинг қийматига мос келадиган y нинг қийматини топиш учун x устида бажариш керак бўлган *амаллар* ёки операциялар *тўпламини* билдириши мумкин.

673. 1) $|x|<4$; 2) $x^2 \leqslant 9$; 3) $|x-4|<1$;
4) $-1<x-3 \leqslant 2$; 5) $x^2>9$; 6) $(x-2)^2 \leqslant 4$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи x нинг ўзгариш интерваллари ясалсин.

674. Ўзгарувчиларнинг $[-1;\ 3]$; $(0,\ 4)$; $[-2,\ 1]$ ўзгариш интерваллари тенгсизликлар орқали ёзилсин ва ясалсин.

675. $x=1-\frac{1}{t}$ ўзгарувчининг ўзгариш интервали аниқлансин, бундаги t бирдан кичик бўлмаган ҳар қандай қийматни қабул қилади ($t \geqslant 1$).

676 — 678- масалаларда $|x| \leqslant 3$ сегментда берилган функцияларнинг графиклари нуқталар бўйича ясалсин:

676. 1) $y = 2x$; 2) $y = 2x + 2$; 3) $y = 2x - 2$.

677. 1) $y = x^2$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = x^2 - 1$.

678. 1) $y = \frac{x^3}{3}$; 2) $y = \frac{x^3}{3} + 1$; 3) $y = \frac{x^3}{3} - 1$.

679. 1) $y = \frac{6}{x}$; 2) $y = 2^x$; 3) $y = \log_2 x$

функцияларнинг графиклари ясалсин. Бу эгри чизиқларнинг координата ўқларига нисбатан вазиятларида қандай хусусиятларни кўриш мумкин?

680. 1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$

функцияларнинг графиклари y нинг энг катта, энг кичик ва нолга тенг қийматлар қабул этувчи нуқталар бўйича ясалсин. Бу эгри чизиқлар ординаталарини қўшиб, ўша чизманинг ўзида $y = \cos x + \sin x$ функция графиги ясалсин.

681. $y = 4x - x^2$ функциянинг илдизлари x_1 ва x_2 топилсин ҳамда унинг $[x_1 - 1,\ x_2 + 1]$ сегментдаги графиги ясалсин.

682. 1) $y = |x|$; 2) $y = -|x-2|$; 3) $y = |x| - x$

функцияларнинг графиклари ясалсин.

683 — 686- масалалардаги функцияларнинг ҳақиқий қийматларини аниқловчи соҳалар топилсин ва уларнинг графиклари ясалсин:

683. 1) $y = \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{9 - x^2}$; 3) $y = \sqrt{4x - x^2}$.

684. 1) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4+x}$; 2) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$.

685. 1) $y = \frac{x(2 \pm \sqrt{x})}{4}$; 2) $y = \pm x\sqrt{4-x}$.

686. 1) $y = -\sqrt{2\sin x}$; 2) $y = -\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2}$.

687. 1) $f(x) = x^2 - x + 1$ бўлса, $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(a+1)$ ҳисоблансин; 2) $\varphi(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$ бўлса, $\varphi(0)$, $\varphi(-1)$, $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{\varphi(x)}$ ҳисоблансин.

688. $F(x) = x^2$ бўлса, 1) $\frac{F(b) - F(a)}{b-a}$; 2) $F\left(\frac{a+h}{2}\right) - F\left(\frac{a-h}{2}\right)$ ҳисоблансин.

689. $f(x) = x^2$; $\varphi(x) = x^3$ бўлса, $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(y)}$ ҳисоблансин.

690. $F(x, y) = x^3 - 3xy - y^2$ бўлса, $F(4, 3)$ ва $F(3, 4)$ ҳисоблансин.

691. Агар $f(-x) = f(x)$ бўлса, $f(x)$ функция *жуфт*, агар $f(-x) = -f(x)$ бўлса — *тоқ* дейилади. Ушбу 1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; 2) $\varphi(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$; 3) $F(x) = a^x + \frac{1}{a^x}$;

4) $\Phi(x) = a^x - \frac{1}{a^x}$; 5) $\Psi(x) = x\sin^2 x - x^3$; 6) $f_1(x) = x + x^2$

функциялардан қайсилари жуфт, қайсилари тоқ эканлиги кўрсатилсин.

692. Қандайдир $f(x)$ функция графигининг исталган ватарининг ўртаси шу функция графигидан юқорироқда ётади. Функциянинг бу хоссаси тенгсизлик орқали ёзилсин. $f(x) = x^2$ функциянинг ўша хоссага эга эканлиги текширилсин.

693. Элементар функциялардан қайсиси

$$f(1) = 0,\ f(a) = 1;\ f(xy) = f(x) + f(y)$$

хоссаларга эга?

694. Элементар функциялардан қайсиси

$$f(0) = 1,\ f(1) = a,\ f(x + y) = f(x)\ f(y)$$

хоссаларга эга?

---

695. 1) $|x| < 3$; 2) $x^2 \leqslant 4$; 3) $|x - 2| < 2$; 4) $(x - 1)^2 \leqslant 4$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи x нинг ўзгариш интерваллари ясалсин.

696. $x = 2 + \frac{1}{t}$ ўзгарувчининг ихтиёрий $t \geqslant 1$ қийматлар қабул қилгандаги ўзгариш интервали аниқлансин.

697. Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

1) $y = 4 - \frac{x^3}{2}$ нинг $|x| \leqslant 2$ сегментда;

2) $y = 3{,}5 + 3x - \frac{x^2}{2}$ нинг абсциссалар ўқи билан кесишган нуқталари орасида.

698. Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

1) $y = x - 4 + |x - 2|$ нинг $[-2{,}5]$ сегментда;
2) $y = 1 - \cos x$ нинг $|x| \leqslant 2\pi$ сегментда.

699. 1) $y = -\frac{4}{x}$; 2) $y = 2^{-x}$

функцияларнинг графиклари ясалсин.

700. 1) $y=\sqrt{4-x^2}$; 2) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}$;

3) $y=1-\sqrt{2\cos 2x}$; 4) $y=\dfrac{4}{1+\sqrt{x^2-4}}$

функциялар ҳақиқий қийматларининг аниқланиш соҳалари топилсин ва уларнинг графиклари ясалсин.

701. 1) Агар $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$ бўлса, $f(0)$; $f(-2)$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; $f(x-1)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ҳисоблансин.

2) агар $\varphi(x)=x^3$ бўлса, $\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{h}$ ҳисоблансин;

3) агар $f(x)=4x-x^2$ бўлса, $f(a+1)-f(a-1)$ ҳисоблансин.

2- §. Сонлар кетма-кетлиги. Чексиз кичик ва чексиз катта ўзгарувчилар. Ўзгарувчининг лимити. Функция лимити

1°. Сонлар кетма-кетлиги. Ўзгарувчи x ушбу

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{1}$$

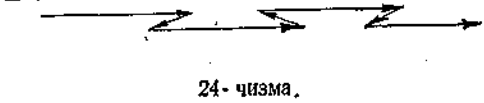
қийматларни кетма-кет қабул қилсин. Бундай *номерланган сонлар тўплами кетма-кетлик* дейилади. (1) кетма-кетликнинг тузилиш қонуни n-ҳад формуласи билан берилади.

Масалан: $x_n=n+(-1)^n$ бўлсин; $n=1, 2, 3, \ldots$ деб олсак,

$$0,\ 3,\ 2,\ 5,\ 4,\ 7,\ \ldots \tag{2}$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади.

Агар ўзгарувчи x фақат (2) кетма-кетликнинг қийматларинигина қабул қилмасдан, 0 билан 3 орасидаги барча қийматлари (ўса бориб), 3 билан 2 орасидаги (камая бориб) барча қийматларни ҳам қабул қилади ва ҳоказо деб фараз қилсак, x нинг ўзгаришини $M(x)$ нуқтанинг Ox ўқидаги ҳаракати билан тасвирлаш мумкин. 24- чизмада (2) кетма-кетлик билан берилган x нинг ўзгариши тасвирланган.



24- чизма.

Бундан сўнг ўзгарувчи $x=f(n)$ кетма-кетлик билан ёки умумий ҳолда $a \leqslant t < b$ интервалдан аниқланган $x=f(t)$ функция билан берилган деб ҳисоблаймиз. Агар $t > t_0$ бўлса, $x=f(t)$ қиймат $x_0=f(t_0)$ дан *кейин келади* деб шарт қилинади (хусусий ҳолда t вақтни билдириши ҳам мумкин).

2° Чексиз кичик ўзгарувчи. Агар ҳар қандай мусбат ε сон учун ўзгарувчининг шундай α_0 қиймати мавжуд бўлсаки, α нинг ундан сўнгги ҳар бир қийматининг абсолют миқдори ε дан кичик бўлса, α ўзгарувчи *чексиз кичик* дейилади.

Агар α чексиз кичик бўлса, у нолга *интилади* дейилади ва $\alpha \to 0$ кўринишда ёзилади.

3°. Чексиз катта ўзгарувчи. Агар ҳар қандай мусбат c сон учун ўзгарувчининг шундай қиймати мавжуд бўлсаки, x нинг ундан сўнгги ҳар бир қийматнинг абсолют миқдори c дан катта бўлса, x ўзгарувчи *чексиз катта* дейилади. Бу $x \to \infty$ кўринишда ёзилади.

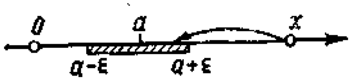
Шунинг билан бирга, агар x нинг x_0 дан кейинги барча қийматлари ўз белгиларини сақласа, у ҳолда $x \to +\infty$ (ёки $x \to -\infty$) деб ёзилади.

Чексиз катта ўзгарувчига тескари миқдор чексиз кичик миқдор ва аксинча (чексиз кичик ўзгарувчига тескари миқдор чексиз катта миқдор) бўлади.

4°. Ўзгарувчининг лимити. Агар ўзгармас a ва ўзгарувчи x орасидаги айирма чексиз кичик миқдор, яъни агар $x = a + \alpha$ бўлса, ўзгармас a *ўзгарувчи* x нинг *лимити* дейилади, $\lim x = a$, ва аксинча.

Агар a ўзгарувчи x нинг лимити бўлса, у ҳолда ўзгарувчи x ўзгармас a га *интилади* деб ҳам айтадилар ва $x \to a$ ёки $x \to a - 0$ (агар x ҳар доим a дан *чапда* қолса) ёки $a \to a + 0$ (агар x ҳар доим a дан *ўнгда* қолса) кўринишда ёзадилар.

$(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ оралиқ a сонниниг ε *атрофи дейилади*. Агар ҳар қандай мусбат ε сон учун шундай x қиймат топиш мумкин бўлсаки, x нинг ундан кейинги барча қийматлари a сонининг ε *атрофига* жойлашса, x ўзгарувчи a га *интилади* дейиш мумкин (25- чизма).



25- чизма.

Агар $x \to +\infty$ (ёки $x \to -\infty$) бўлса, у ҳолда ўзгарувчи x нинг лимити $+\infty$ га (ёки $-\infty$ га) тенг дейдилар ва

$$\lim x = +\infty \text{ (ёки } \lim x = -\infty\text{)}$$

деб ёзадилар.

5°. Функциянинг лимити. Агар x нинг a га тенг бўлмасдан унга интилишидан ҳар доим $f(x)$ нинг b га *интилиши келиб чиқса*, b сон $f(x)$ *функциянинг* x нинг a га *интилгандаги лимити* дейилади. Буни $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ кўринишда ёзадилар.

Юқорида келтирилган таъриф, a ёки b ларни $+\infty$ ёки $-\infty$ символлар билан алмаштирилгандаги қуйидаги махсус ҳолларни ҳам ўз ичига олади:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b,\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ ва ҳоказо.}$$

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ ни (ёки $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ ни) $f(x)$ функциянинг x нинг a га *чапдан* (ёки *ўнгдан*) *интилгандаги лимити* деймиз.

702. $n = 0, 1, 2, \ldots$ деб

$$\alpha = \frac{1}{2^n},\quad \alpha = -\frac{1}{2^n},\quad \alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

ўзгарувчилар қийматларининг кетма-кетлиги ёзилсин ва уларнинг ўзгариши график усулда тасвирлансин. n нинг қайси қийматларидан бошлаб ўзгарувчилардан ҳар қайсисининг модули 0,001 дан, берилган мусбат ε дан кичик бўлади ва шундай бўлиб қола беради?

703. $x = 1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ўзгарувчи қийматларининг кетма-кетлиги ёзилсин ва унинг ўзгариши график усулда тасвирлансин. n нинг қайси қийматидан бошлаб $x - 1$ нинг модули 0,01 дан, берилган мусбат ε дан кичик бўлади ва шундай бўлиб қола беради?

704. 3 га олдин 1 ни, сўнгра 0,1 ни, ундан сўнг 0,01 ни ва ҳоказо қўшиб (ёки айириб) ўзгарувчи x нинг $x \to 3+0$ ёки $x \to 3-0$ лимитларга яқинлашиши «ўнли» кетма-кетликлар билан ёзилсин.

705. «Ўнли» кетма-кетликлар билан ўзгарувчиларнинг $x \to 5+0$, $x \to 5-0$, $x \to -2+0$, $x \to -2-0$, $x \to 1+0$, $x \to 1-0$, $x \to 1{,}2+0$, $x \to 1{,}2-0$ лимитларга яқинлашишлари ёзилсин.

706. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ экани кўрсатилсин. x ва x^2 қийматларининг жадваллари билан тушунтирилсин.

Кўрсатма. $x = 2 + \alpha$ деб, бунда α чексиз кичик, $x^2 - 4$ айирма тузилсин ва унинг чексиз кичикка тенглиги исбот қилинсин.

707. $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) = 5$ экани исбот қилинсин. Берилган $\varepsilon > 0$ сон бўйича шундай энг катта $\delta > 0$ топилсинки, 3 сонининг δ атрофидаги ҳар қандай x учун $(2x - 1)$ функциянинг қиймати 5 сонининг ε атрофида бўлсин. График усулда тушунтирилсин.

708. $\lim\limits_{x \to -1} (3 - 2x - x^2) = 4$ экани исбот қилинсин. Функциянинг қиймати ўз лимитидан $\varepsilon = 0{,}0001$ дан кичик сонга фарқ қилиши учун x нинг қийматини -1 сонининг қандай энг катта δ атрофидан олиш керак?

709. α чексиз кичик бўлганда, $\sin \alpha$ ҳам чексиз кичик экани исбот қилинсин.

Кўрсатма. Чизма ясалсин ва $|\sin \alpha| < |\alpha|$ экани кўрсатилсин.

710. $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$ экани кўрсатилсин.

Кўрсатма. $x = a + \alpha$ деб, $\sin x - \sin a$ айирма тузилсин.

711. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+4}{x} = 3$ экани исбот қилинсин. $x = 1, 10, 100, 1000, \ldots$ бўлганда x ва $\frac{3x+4}{x}$ ларнинг қийматлари жадваллари билан тушунтирилсин.

Кўрсатма. x чексиз каттага интилганда $(x\to\infty)$ $\frac{3x+4}{x} - 3$ айирма чексиз кичик экани кўрсатилсин.

712. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x-3}{2x+1} = 2$ экани исбот қилинсин. x нинг қандай қийматлари учун функция ўз лимитидан 0,001 дан кўра кичик сонга фарқ қилади?

713. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{2+4x^2} = -0,5$ экани исбот қилинсин. Қандай x лар учун функциянинг қийматлари ўз лимитидан 0,01 дан кўра кичик сонга фарқ қилади?

714. $\frac{1}{3} - 0,3$; $\frac{1}{3} - 0,33$; $\frac{1}{3} - 0,333, \ldots, \frac{1}{3} - \underbrace{0,333\ldots3}_{n\ \text{рақам}}$ айирмаларни тузиб, $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{0,333\ldots3}_{n\ \text{рақам}} = \frac{1}{3}$ экани исбот қилинсин.

715. 1) $x = \frac{n}{n+1}$; 2) $x = -\frac{n}{n+1}$; 3) $x = \frac{(-1)^n n}{n+1}$;

4) $x = \frac{8\cos n\frac{\pi}{2}}{n+4}$; 5) $x = \frac{2n+(-1)^n}{n}$;

6) $x = 2^{-n} a \cos n\pi$

ўзгарувчилар қийматларининг кетма-кетликлари ёзилсин ва уларнинг ўзгариши график усулда тасвирлансин. Ҳар бир мисол учун $\lim\limits_{n\to\infty} x$ мавжудми ва у нимага тенг?

716. $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{3}{x-2}$ ва $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{3}{x-2}$ лар топилсин ва жадваллар билан тушунтирилсин.

717. $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}}$ ва $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}}$ топилсин ва жадваллар билан тушунтирилсин.

718. Ушбу

1) $\frac{2}{\infty} = 0$; 2) $\frac{2}{0} = \pm\infty$; 3) $3^\infty = \infty$; 4) $3^{-\infty} = 0$;

5) $\lg_{10} 0 = -\infty$; 6) $\operatorname{tg} 90^\circ = \pm\infty$

«шартли» ёзишларнинг аниқ маънолари тушунтирилсин.

719. 1) $x = n\pi$ бўлганда; 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ бўлганда; 3) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ бўлганда ($n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$) $\sin x$ қийматларининг кетма-кетликларини тузиб, $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ мавжуд эмаслиги кўрсатилсин.

720. $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ мавжуд эмаслиги кўрсатилсин.

721. Чексиз кичиклар ҳақидаги теоремалардан бирини татбиқ этиб, x қайси усул билан нолга яқинлашса ҳам $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ экани кўрсатилсин.

722. Радиуси R га тенг доирага томонларининг сони n ва томони a_n бўлган мунтазам кўпбурчак ички чизилган. Ўша доирага ташқи чизилган квадрат ясаб, $n > \frac{8R}{\varepsilon}$ бўлган замон $a_n < \varepsilon$, яъни $a_n \to 0$ экани кўрсатилсин.

723. r_n — радиуси R га тенг доирага ички чизилган мунтазам n бурчакнинг апофемаси бўлса, $\lim\limits_{x\to\infty} r_n = R$ экани исбот қилинсин.

724. ABC учбурчакнинг B учи AC га параллел BE тўғри чизиқ бўйича ўнг томонга қараб чексиз узоқлашади. Бу ҳолда учбурчак томонлари, унинг юзи, ички бурчаклари ва BCD ташқи бурчаги қандай ўзгаради?

---

725. Ўзгарувчиларнинг лимитларига яқинлашишларининг «ўнли» кетма-кетликлари ёзилсин: $x \to 4 + 0$; $x \to 4 - 0$; $x \to -1{,}5 + 0$; $x \to -1{,}5 - 0$.

726. 1) $\lim\limits_{x\to 3} x^3 = 27$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 2x) = 3$ экани исбот қилинсин (706-масалага берилган кўрсатмага қаралсин).

727. x чексиз катта бўлганда $\frac{5x+2}{2x} - 2{,}5$ нинг чексиз кичик эканини кўрсатиб, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x+2}{2x} = 2{,}5$ исбот қилинсин. $x = 1, 10, 100, 1000, \ldots$ деб фараз қилиб, жадвал билан тушунтирилсин.

728. $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$ экани исбот қилинсин (709-масалага қаралсин.)

729. 1) $x=1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; 2) $x=(-1)^n+\frac{1}{2^n}$;

3) $x=(-1)^n(2n+1)$; 4) $x=\dfrac{2n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}$

ўзгарувчилар қийматларининг кетма-кетликлари ёзилсин ва уларнинг ўзгариши график усулда тасвирлансин. $n\to+\infty$ да бу ўзгарувчиларнинг қайси бири лимитга эга?

730. 1) $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0} 3^{\operatorname{tg} 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0} 3^{\operatorname{tg} 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\dfrac{2}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$;

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{2}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$; 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{1+a^x}$

лимитлар топилсин.

731. $\frac{2}{3}-0{,}6$; $\frac{2}{3}-0{,}66$; $\ldots$; $\frac{2}{3}-0{,}\underbrace{66\ldots6}_{n\ \text{рақам}}$ айирмаларни тузиб, $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}\underbrace{666\ldots6}_{n\ \text{рақам}}=\frac{2}{3}$ экани исбот қилинсин.

732. α_n мунтазам n бурчаклининг ички бурчаги бўлсин. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\pi$ экани исбот қилинсин.

733. $AB=a$ кесма давомининг ўнг томонидан $BP=x$ масофада P нуқта олинган. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{AP}{BP}$ топилсин.

3- §. Лимитларнинг хоссалари. $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларни очиш

1°. Ўзгармас миқдорнинг лимити ўзига тенг.
Агар $\lim u$ ва $\lim v$ мавжуд бўлса:
2°. $\lim(u+v)=\lim u+\lim v$;
3°. $\lim(uv)=\lim u\cdot\lim v$.

4° Агар $\lim u$ ва $\lim v$ мавжуд ва $\lim v\neq 0$ бўлса, $\lim\frac{u}{v}=$ $=\frac{\lim u}{\lim v}$.

5°. Агар a нуқтанинг, қандайдир бир атрофидаги x нинг, балки фақат $x = a$ дан бошқа, барча қийматларида $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар бир-бирига тенг бўлса ва улардан бири $x \to a$ да лимитга эга бўлса, иккинчиси ҳам ўша лимитга эга бўлади.

Бу хосса $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларни очишга татбиқ этилади. Масалан, x нинг a дан бошқа барча қийматлари учун $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$. 5° хоссага кўра: $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} (x + a) = 2a$.

Қуйидаги лимитлар топилсин:

734. 1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$; 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$.

735. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ жадвал билан тушунтирилсин.

736. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$. **737.** $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$.

Кўрсатма. 736-мисолни икки усул: 1) $x = 2 + \alpha$ деб олиб; 2) махражни кўпайтувчиларга ажратиш билан ечилсин.

738. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$. **739.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$.

740. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$. **741.** $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a}$.

742. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$. **743.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + mx} - 1}{x}$.

Кўрсатма. 742-мисолда $x = t^6$, 743-да эса $1 + mx = t^3$ деб олинсин.

744. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$.

745. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$.

746. 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3}$.

Кўрсатма. Икки усул: 1) сурат ва махражни x нинг энг катта даражасига бўлиш; 2) $x = \frac{1}{\alpha}$ деб олиш билан ечиш мумкин.

747. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1}$. **748.** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.

749. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$. 750. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{1-2n}$.

751. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$. 752. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

Қуйидаги лимитлар топилсин:

753. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{3x+6}{x^3+8}$. 754. $\lim\limits_{x\to3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

755. $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$. 756. $\lim\limits_{x\to\pi+0} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$.

757. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$. 758. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$.

759. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$. 760. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$

761. $\lim\limits_{x\to7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$. 762. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$.

4- §. $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ нисбатнинг $\alpha\to0$ даги лимити

Агар α бурчак радиан ўлчови билан берилган бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\quad \lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1.$$

Қуйидаги лимитлар топилсин:

763. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 4x}{x}$. 764. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin\frac{x}{3}}{x}$.

Кўрсатма. 763- мисолда касрнинг сурат ва махражи 4 га кўпайтирилсин (ёки $4x=\alpha$ деб олинсин).

765. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. 766. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$. 767. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

768. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$. 769. $\lim\limits_{h\to0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

770. 1) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$.

Кўрсатма. 1) мисолда $\operatorname{arc\,tg} x = \alpha$, 2) мисолда эса $\arcsin(1-2x) = \alpha$ деб олиш керак.

771. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$. 772. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Қуйидаги лимитлар топилсин.

773. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x}$. 774 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

775. $\lim\limits_{x\to -0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$. 776. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x \sin x}{\sec x - 1}$.

777. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos mx}{x^2}$. 778. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}$.

779. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} + 2^{-\frac{1}{(x-2)^2}}\right]$ ($x = 2+\alpha$ деб олинсин).

780. 1) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x-h)}{h}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

781. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

5- §. $\infty - \infty$ ва $0\cdot\infty$ кўринишдаги аниқмасликлар

Қуйидаги лимитлар топилсин:

782. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x)$.

783. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$.

784. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x})$.

785. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}\right)$. 786. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 \frac{x}{2}}\right)$.

787. $\lim\limits_{n\to 0} \left[\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n+3} - n\right]$.

788. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ ($x = 1-\alpha$ деб олинсин).

789. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x})$.

790. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$.

Қуйидаги лимитлар топилсин:

791. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$.

792. $\lim\limits_{x\to-+\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2})$. 793. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$.

794. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.

795. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x\left(x=\frac{\pi}{2}+\alpha \text{ деб олинсин}\right)$.

6- §. Лимитларни ҳисоблашга доир аралаш мисоллар

Қуйидаги лимитлар топилсин:

796. 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

797. 1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$.

798. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})$.

799. 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}+2^{-x^2}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{1-5x}$.

800. 1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{(\sin x+1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$.

801. 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{1+x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$.

802. 1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$.

803. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right]$; 2) $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{3-10^n}{2+10^{n+1}}$.

804. 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\cos\frac{\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x}+1}$.

7- §. Чексиз кичикларни таққослаш

1°. Таърифлар. $x \to a$ да $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар чексиз кичик бўлсин. У вақтда:

I. Агар $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=0$ бўлса, β α га нисбатан *юқори тартибли чексиз кичик дейилади.*

II. Агар $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha^n}=A$ (чекли ва 0 дан фарқли) бўлса, β α га нисбатан n- тартибли чексиз кичик дейилади.

III. Агар $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=1$ бўлса, β ва α *эквивалент чексиз кичиклар* дейилади. Эквивалентлик $\beta\approx\alpha$ кўринишда ёзилади.

2°. Эквивалент чексиз кичикларнинг хоссалари:

а) Эквивалент чексиз кичикларнинг айирмаси уларнинг ҳар бирига нисбатан ҳам юқори тартибли чексиз кичик бўлади.

б) Агар бир нечта ҳар хил тартибли чексиз кичиклар йиғиндисидан юқори тартиблилари чиқариб ташланса, у ҳолда қолган қисми *бош қисм* дейилади ва у умумий йиғиндига эквивалент бўлади.

Биринчи хоссадан, эквивалент чексиз кичиклардан бири, исталганча кичик нисбий хато билан иккинчисига тенг бўлиши мумкин эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун биз $\approx$ белгини ҳам, чексиз кичикларнинг эквивалентликларини белгилаш учун ҳам уларнинг етарли кичик қийматларининг тақрибий тенглигини белгилаш учун ишлатамиз.

805. Чексиз кичик x га нисбатан: 1) $1-\cos x$; 2) $\operatorname{tg}x-\sin x$ чексиз кичикларнинг тартиблари аниқлансин.

x бурчак икки баравар камайганда $1-\cos x$ миқдор тахминан тўрт марта, $\operatorname{tg}x-\sin x$ миқдор эса тахминан саккиз марта камайиши чизмада кўрсатилсин.

806. Чексиз кичик x га нисбатан:

1) $2\sin^4 x-x^5$; 2) $\sqrt{\sin^2 x+x^4}$; 3) $\sqrt{1+x^3}-1$ чексиз кичикларнинг тартиблари аниқлансин.

807. Доира сегменти «ўқининг» сегментнинг чексиз кичик ёйига нисбатан кичиклик тартиби аниқлансин.

808. x нолга интилганда ($x\to 0$):

1) $\sin mx\approx mx$, 2) $\operatorname{tg} mx\approx mx$; 3) $\sqrt[3]{1+x}-1\approx\frac{1}{3}x$

эканлиги исбот қилинсин.

809. Жисмнинг ҳажмий кенгайиш коэффициенти узунлик кенгайиш коэффициентининг учланганига тахминан тенг деб олинади. Бу қандай чексиз кичикларнинг эквивалентлигига асосланган?

810. Агар $\alpha \approx \alpha_1$, $\beta \approx \beta_1$ ва $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ ёки $\lim \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ лимитлардан бири мавжуд бўлса, $\lim \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \lim \frac{\beta}{\alpha}$ бўлади, деган теоремага асосланиб,

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax + x^2}{\operatorname{tg} bx}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^3}$

лимитлар топилсин.

---

811. Сув томчиси буғланганда (парга айланганда) унинг радиуси нолга интилади. Радиусга нисбатан сув томчиси сиртининг ва ҳажмининг чексиз кичиклик тартиби аниқлансин.

812. Чексиз кичик x га нисбатан:

1) $\sqrt{1+x^2} - 1$; 2) $\sin 2x - 2\sin x$; 3) $1 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

чексиз кичикларнинг тартиблари аниқлансин.

813. x нолга интилганда ($x \to 0$); 1) $\operatorname{arc tg} mx \approx mx$;
2) $\sqrt{1+x} - 1 \approx \frac{1}{2} x$; 3) $1 - \cos^3 x \approx 1{,}5 \sin^2 x$ экани исбот қилинсин.

8- §. Функциянинг узлуксизлиги

1°. Таъриф. Агар $f(x)$ функция a нинг бирор атрофида аниқланган ва

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

бўлса, у $x = a$ бўлганда *узлуксиз дейилади.* Бу таъриф қуйидаги тўртта узлуксизлик шартини ўз ичига олади:

1) $f(x)$ функция a нинг қандайдир атрофида аниқланган бўлиши керак;

2) чекли $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ ва $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ лимитлар мавжуд бўлиши керак;

3) бу (чап ва ўнг) лимитлар бир хил бўлиши керак;

4) бу лимитлар $f(a)$ га тенг бўлиши керак.

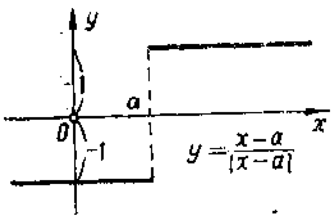
Агар функция $[x_1, x_2]$ сегментнинг ҳар бир ички нуқтасида узлуксиз бўлса ва унинг чегараларида эса $\lim\limits_{x \to x_1+0} f(x) = f(x_1)$ ва $\lim\limits_{x \to x_2-0} f(x) = f(x_2)$ бўлса, у *шу сегментда узлуксиз* дейилади.

2°. Функциянинг узилишлари. Агар функция a дан ўнгда ва чапда аниқланган бўлса, аммо a нуқтада узлуксизликнинг тўртта шартидан *ақалли биттаси бажарилмаса,* $f(x)$ *функция* $x = a$ *бўлганда* узилишга эга бўлади. Узилишларни икки асосий турга ажратадилар.

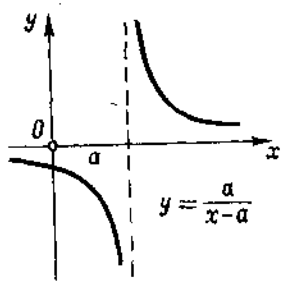
1) *Биринчи тур узилиш*—чекли $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ ва $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ лимитлар мавжуд, яъни узлуксизлик шартларидан иккинчиси бажарилади ва қолганлари (ёки улардан ақалли биттаси) бажарилмайди.

Масалан, $x < a$ бўлганда -1 га тенг, $x > a$ бўлганда $+1$ га тенг бўлган $y = \frac{x-a}{|x-a|}$ функция $x = a$ да биринчи тур узилишга эга (26-чизма), чунки $\lim\limits_{x\to a-0} y = -1$ ва $\lim\limits_{x\to a+0} y = +1$ лимитлар мавжуд, аммо бу лимитлар ўзаро тенг эмас.

2) *Иккинчи тур узилиш* — $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ўнгдан ёки чапдан $\pm\infty$ га тенг. Масалан, $y = f(x) = \frac{a}{x-p}$ функция (27- чизма) $x = a$ бўлганда иккинчи тур узилишга эга. $x = a$ бўлганда махражи 0 (ноль) га тенг



26- чизма.



27- чизма.

бўлиб, сурати 0 (ноль) га тенг бўлмаган барча каср функциялар $x = a$ бўлганда иккинчи тур узилишга эга бўлади. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ функция (819-масала, 42- чизма) ҳам $x = 0$ бўлганда иккинчи тур узилишга эга, чунки $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 0$, лекин $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \infty$.

814. $y = \frac{4}{x-2}$ функциянинг узилиш нуқтаси кўрсатилсин, $\lim\limits_{x\to 2-0} y$; $\lim\limits_{x\to 2+0} y$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ лар топилсин ва $x = -2$, 0, 1, 3, 4 ва 6 нуқталар бўйича эгри чизиқ ясалсин.

815. 1) $y = -\frac{6}{x}$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \frac{4}{4-x^2}$ функцияларнинг узилиш нуқталари топилсин ва графиклари ясалсин.

816. $y = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \neq 2 \text{ бўлганда}, \\ 0, & x = 2 \text{ бўлганда} \end{cases}$

функциянинг графиги ясалсин ва унинг узилиш нуқтаси кўрсатилсин. Нуқтада узлуксизликнинг тўртта шартидан қайсилари бажарилади ва қайсилари бажарилмайди?

817. 1) $y = \frac{x+1}{|x+1|}$ ва 2) $y = x + \frac{x+1}{|x+1|}$ функцияларнинг графиклари ясалсин. Бу функцияларнинг узилиш нуқталарида узлуксизлик шартларидан қайсилари бажарилади ва қайсилари бажарилмайди?

818.

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \text{ бўлса}, \\ 2, & x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг графиги ясалсин ва унинг узилиш нуқтаси кўрсатилсин. Унда узлуксизлик шартларидан қайсилари бажарилади ва қайсилари бажарилмайди?

819. $y = 2^{\frac{1}{x}}$ функциянинг узилиш нуқтаси кўрсатилсин, $\lim\limits_{x \to -0} y$, $\lim\limits_{x \to +0} y$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$ лар топилсин ва функциянинг графиги ясалсин. Узилиш нуқтасида узлуксизлик шартларидан қайсилари бажарилади ва қайсилари бажарилмайди?

820.

$$y = f(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2, & |x| < 2 \text{ бўлганда}, \\ 2{,}5, & |x| = 2 \text{ бўлганда}, \\ 3, & |x| > 2 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

функциянинг графиги ясалсин ва унинг узилиш нуқталари кўрсатилсин.

821.

$$1)\ y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}};\quad 2)\ y = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{x-a};\quad 3)\ y = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$$

функцияларнинг узилиш нуқталари топилсин ва графиклари ясалсин.

822. $x^2 - y^2 = 0$ тенглама билан нечта бир қийматли функция берилган? Улардан $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, бўлганда чекли (I тур) узилишга эга: 1) жуфт функция; 2) тоқ функциялар аниқлансин ва уларнинг графиклари ясалсин.

---

823. $y = \frac{x}{x+2}$ функциянинг узилиш нуқтаси кўрсатилсин, $\lim\limits_{x \to -2-0} y$, $\lim\limits_{x \to -2+0} y$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$ лар топилсин ва $x = -6, -4, -3, -1, 0, 2$ нуқталар бўйича графиги ясалсин.

824.

$$y = f(x) = \begin{cases} 2, \ x = 0 \text{ ва } x = \pm 2 \text{ бўлса}, \\ 4 - x^2, \ 0 < |x| < 2 \text{ бўлса}, \\ 4, \ |x| > 2 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг графиги ясалсин ва узилиш нуқталари кўрсатилсин. Узилиш нуқталарида узлуксизлик шартларидан қайсилари бажарилади ва қайсилари бажарилмайди?

825.

1) $y = 2 - \frac{|x|}{x}$; 2) $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$; 3) $y = 1 - 2^{\frac{1}{x}}$;

4) $y = \frac{x^3 + x}{2|x|}$; 5) $y = \frac{4 - x^2}{|4x - x^3|}$

функцияларнинг узилиш нуқталари топилсин ва графиклари ясалсин.

826. $x^2 + y^2 = 4$ тенглама билан нечта бир қийматли функциялар берилган? Улардан: 1) $|x| \leqslant 2$ сегментда узлуксиз бўлган иккитаси; 2) $|x| \leqslant 1$ сегментда манфий бўлиб, x нинг қабул қилиши мумкин бўлган бошқа қийматларида мусбат бўлгани аниқлансин. Охирги функциянинг графиги ясалсин ва узилишлари кўрсатилсин.

9- §. Асимптоталар

Эгри чизиқнинг асимптотаси деб шундай тўғри чизиққа, айтиладики, эгри чизиқнинг нуқтаси, эгри чизиқ бўйича чексиз узоқлашганда, у тўғри чизиққа чексиз яқинлашиб боради.

I. Агар $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ бўлса, у ҳолда $x = a$ тўғри чизиқ, $y = f(x)$ эгри чизиқнинг асимптотаси бўлади. Масалан, $y = \frac{a}{x - a}$ эгри чизиқ $x = a$ асимптотага эга (27- чизма).

II. Агар $y = f(x)$ эгри чизиқ тенгламасининг ўнг томонида чизиқли қисмини шундай ажратиш мумкин бўлсаки, яъни $y = f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $x \to \pm\infty$ да қолган қисми $\alpha(x) \to 0$, у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизиқ эгри чизиқнинг асимптотаси бўлади. Мисоллар: 1) $y = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2} = x + 1 + \frac{1}{x^2}$ эгри чизиқ $y = x + 1$ асимптотага эга ($x = 0$ ҳам асимптота бўлади). 2) $y = \frac{a}{x - a} = 0 + \frac{a}{x - a}$ эгри чизиқ $y = 0$ (27- чизма) асимптотага эга.

III. Агар чекли $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ ва $\lim\limits_{x\to+\infty \text{ ёки } -\infty}[f(x)-kx]=b$ лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $y=kx+b$ тўғри чизиқ асимптота бўлади.

827. $y=1-\frac{4}{x^2}$ эгри чизиқнинг асимптоталари аниқлансин ва $x=\pm 1, \pm 2, \pm 4$ нуқталар бўйича эгри чизиқ ясалсин.

828—830- мисолларда, касрнинг чизиқли бутун қисмини ажратиб, эгри чизиқларнинг асимптоталари топилсин; асимптоталар ва эгри чизиқлар ясалсин.

828. 1) $y=\frac{x^2+1}{x}$; 2) $y=\frac{x^2}{x+1}$; 3) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$.

829. 1) $y=\frac{2}{|x|}-1$; 2) $y=\frac{x^2-x-1}{x}$; 3) $y=\frac{ax+b}{mx+n}$.

830. 1) $y=\frac{1-4x}{1+2x}$; 2) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; 3) $y=\frac{4x-x^3}{x^2+4}$.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг асимптоталари топилсин ва эгри чизиқлар ясалсин:

831. 1) $x^2-y^2=a^2$; 2) $x^3+y^3=3axy$;

3) $y=x-2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$; 4) $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{a-x}$.

832. 1) $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$;
2) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$; 3) $y=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

833. 1) $y=\frac{x^4+1}{3x}$; 2) $y=\frac{x^3+x^2-2}{x+1}$ эгри чизиқлар ва бу эгри чизиқлар асимптотик равишда яқинлашадиган параболалар ясалсин.

---

834. 1) $y=\left(1-\frac{2}{x}\right)^2$; 2) $y=-x+\frac{1}{x^2}$ эгри чизиқларнинг асимптоталари топилсин ва $x=\pm\frac{1}{2}$, ± 1, ± 2 нуқталар бўйича эгри чизиқлар ясалсин.

835. 1) $y=\frac{x-4}{2x+4}$; 2) $y=\frac{x^2}{2-2x}$; 3) $y=\frac{x^2}{x^2-4}$;

4) $y=\frac{x^3}{1-x^2}$ эгри чизиқларнинг асимптоталари топилсин ва эгри чизиқлар ясалсин.

10- §. e сони

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ лимит e сони дейилади. Бу сон иррационал бўлиб, тахминан $e=2{,}71828$ ... Асоси e га тенг логарифмлар *натурал* логарифмлар дейилади ва $\log_e x=\ln x$ кўринишда белгиланади.

Ўнли логарифм: $\lg_{10} x=M\ln x$, бунда $M=0{,}43429$ ...

Қуйидаги лимитлар топилсин:

836. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^n$ $\left(-\frac{5}{n}=\alpha\right.$ деб олинсин$\left.\right)$.

837. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+3}$.

838. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

839. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

840. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} n\,[\ln(n+3)-\ln n]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\,\mathrm{tg}^2 x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

841. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$ ($\sin^2 x=\alpha$ деб олинсин).

842. 1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{2x}-1}{x}$.

Кўрсатма. 2) мисолда $e^{-x}-1=\alpha$ деб олинсин.

843. $6(1-1{,}01^{-100})$ ифодани ўртага олувчи кетма-кет иккита бутун сон топилсин.

Қуйидаги лимитлар топилсин:

844. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

845. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{x}$.

846. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\mathrm{tg}^2 2x}$ ($\cos^2 2x=\alpha$ деб олинсин).

847. 1) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+xt)}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,[\ln n-\ln(n+2)]$.

VI БОБ

ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1- §. Алгебраик ва тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари

1°. Таъриф. $y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги *ҳосиласи* деб

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

лимитга айтилади.

Агар бу лимит *чекли* бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция x нуқтада *дифференциалланувчи* дейилади; бунда $y = f(x)$ функция шу нуқтада албатта *узлуксиз* ҳам бўлади.

Агар (1) лимит $+\infty$ (ёки $-\infty$) га тенг ва, ундан ташқари, шу нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз бўлса, у ҳолда функция x *нуқтада чексиз ҳосилага эга* деймиз.

Ҳосила y', ёки $f'(x)$, ёки $\frac{dy}{dx}$, ёки $\frac{df(x)}{dx}$ *орқали белгиланади.*

осилани топиш функцияни *дифференциаллаш* дейилади.

2°. Дифференциаллашнинг асосий формулалари:

1) $(c)' = 0$; 2) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 3) $(cu)' = cu'$;
4) $(u + v)' = u' + v'$; 5) $(uv)' = u'v + uv'$;
6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$; 7) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
8) $(\sin x)' = \cos x$; 9) $(\cos x)' = -\sin x$;
10) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 11) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

848. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни ҳисоблаб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

1) $y = x^3$; 2) $y = x^4$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sin x$; 5) $y = \frac{1}{x}$;
6) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 7) $y = \frac{1}{x^2}$; 8) $y = \operatorname{tg} x$; 9) $y = \frac{1}{x^3}$;

10) $y=\sqrt{1+2x}$; 11) $y=\frac{1}{3x+2}$; 12) $y=\sqrt{1+x^2}$.

Формулаларга асосан қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

849. 1) $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x-5$; 2) $y=\frac{bx+c}{a}$.

850. 1) $y=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x$; 2) $y=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2$.

851. 1) $y=x+2\sqrt{x}$; 2) $y=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$.

852. 1) $y=\frac{10}{x^3}$; 2) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$.

853. 1) $y=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{5x^5}$; 2) $y=3x-6\sqrt{x}$.

854. 1) $y=6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}$; 2) $y=\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

855. 1) $y=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}$; 2) $y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

856. 1) $y=x-\sin x$; 2) $y=x-\operatorname{tg} x$.

857. 1) $y=x^2\cos x$; 2) $y=y^2\operatorname{ctg} x$.

858. 1) $y=\frac{\cos x}{x^2}$; 2) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$.

859. 1) $y=\frac{x}{1-4x}$; 2) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.

860. 1) $f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$ 2) $\varphi(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

861. 1) $s=\frac{gt^2}{2}$; 2) $x=x(t-\sin t)$.

862. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+x$; $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$ лар ҳисоблансин.

863. $f(x)=x^2-\frac{1}{2x^2}$; $f'(2)-f'(-2)$ ҳисоблансин.

864. $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$; $0{,}01\cdot f'(0{,}01)$ ҳисоблансин.

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

865. 1) $y=(a-bx^2)^3$; 2) $y=(1+\sqrt[3]{x})^2$.

866. 1) $y=\frac{1}{10x^5}-\frac{1}{4x^4}$; 2) $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

867. 1) $y = x + \sin x$; 2) $y = x + \operatorname{ctg} x$.

868. 1) $y = x^2 \sin x$; 2) $y = x^2 \operatorname{tg} x$.

869. 1) $y = \sqrt{x} \cos x$; 2) $s = \frac{t}{2} - \frac{2}{t}$.

870. 1) $y = x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3}$; 2) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

871. 1) $y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$; 2) $y = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}$.

872. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; $f'(-8)$ топилсин.

873. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$; $f'(0)$, $f'(2)$ ва $f'(-2)$ топилсин.

2- §. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

Агар $y = f(u)$ ва $u = \varphi(x)$ бўлса, у ҳолда *y функциянинг функцияси* ёки x нинг *мураккаб функцияси* дейилади. У вақтда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ёки } y' = f'(u) \cdot u'. \qquad (1)$$

Ўтган параграфдаги формулалар қуйидаги умумий кўринишга эга бўлади:

1) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$; 2) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; 3) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

4) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; 5) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; 6) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

874. 1) $y = \sin 6x$; 2) $y = \cos(a - bx)$.

875. 1) $y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$ 2) $y = 6\cos\frac{x}{3}$. cos6x

876. 1) $y = (1 - 5x)^4$; 2) $y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2}$.

877. 1) $y = \frac{1}{(1-x^2)^5}$; 2) $y = \sqrt{1 - x^2}$; 3) $y = \sqrt{\cos 4x}$.

878. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$. 879. $y = \sin^4 x = (\sin x)^4$.

880. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \cos^2 x$; 3) $y = \sec^2 x$.

881. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$. 882. $y = \operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x + 3x$.

883. $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$. 884. $y = \sin\sqrt{x}$.

885. $y = \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}$.

886. $y = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^5}$. 887. $y = \operatorname{ctg}^3\frac{x}{3}$.

888. $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$. 889. $y = x\sqrt{x^2 - 1}$.

890. $y=\frac{\sqrt{2x-1}}{x}$. 891. $s=a\cos^2\frac{t}{a}$.

892. 1) $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$; 2) $r=\sqrt{2\varphi+\cos^2\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$.

893. $f(t)=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos t}$; $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$лар ҳисоблансин.

894. $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$; $f'(1)$ топилсин.

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

895. $y=\sqrt{4x+\sin 4x}$. 896. $y=x^2\sqrt{1-x^2}$.

897. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. 898. $y=\sqrt[3]{1+\cos 6x}$.

899. 1) $y=\operatorname{tg}x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$; 2) $y=\sin^2 x^3$.

900. $y=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$. 901. $s=\sqrt{\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}}$.

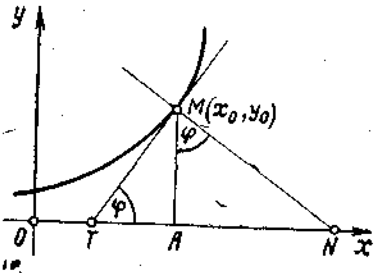
902. $r=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$. 903. $y=\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$.

904. $f(t)=\sqrt{1+\cos^2 t^2}$; $f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ топилсин.

3- §. Текис эгри чизиққа ўтказилган уринма ва нормал

$y=f(x)$ эгри чизиқнинг $(x_0;\ y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти *$f(x)$ функция ҳосиласининг* $(x_0;\ y_0)$ нуқтадаги *қийматига тенг.*

$$k=\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0)=[y']_{x=x_0} \qquad (1)$$



28- чизма.

Бу k сон баъзан *эгри чизиқнинг* $(x_0;\ y_0)$ нуқтадаги *оғмалиги* ҳам дейилади. Эгри чизиқнинг $(x_0;\ y_0)$ нуқтасида ўтказилган *уринманинг* (28- чизма) тенгламаси:

$$y-y_0=k(x-x_0); \qquad (2)$$

нормалнинг тенгламаси:

$$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0), \qquad (3)$$

бунда k (1) формула бўйича аниқланади.

$TA = y_0 \operatorname{ctg} \varphi$, $AN = y_0 \operatorname{tg} \varphi$ кесмалар (28- чизма) мос равишда *уринма ости* ва *нормал ости* дейилади, MT ва MN кесмаларнинг узунликлари эса — уринма ва нормал узунликлари дейилади.

905. $y = x^2$ параболанинг $x = \pm 2$ нуқталардаги оғмалиги топилсин.

906. $y = 4 - x^2$ параболага унинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасида ($x > 0$ бўлганда) ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламаси ёзилсин ҳамда парабола, уринма ва нормал ясалсин.

907 — 910- масалаларда эгри чизиқларга ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин ва эгри чизиқлар ҳамда уринмалар ясалсин.

907. $y = \frac{x^3}{3}$ эгри чизиққа $x = -1$ нуқтада.

908. $y^2 = x^3$ эгри чизиққа $x_1 = 0$ ва $x_2 = 1$ нуқталарда.

909. $y = \frac{8}{4+x^2}$ локонга (зулфга) $x = 2$ нуқтада.

910. $y = \sin x$ синусоидага $x = \pi$ нуқтада.

911. $y = \sin x$ эгри чизиқ Ox ўқ билан қандай бурчак остида кесишади?

912. $2y = x^2$ ва $2y = 8 - x^2$ эгри чизиқлар қандай бурчак остида кесишади?

913. 1) $y = x^2$; 2) $y^2 = x^3$ эгри чизиқларга $x = 1$ нуқтада ўтказилган уринма ости, нормал ости, уринма ва нормалнинг узунликлари топилсин.

914. $y^2 = 2px$ параболанинг уринма ости уриниш нуқта абсциссасининг иккиланганига, нормал ости эса p га тенг экани исбот қилинсин.

915. *Агар $y = x^2 + bx + c$ парабола $x = 2$ нуқтада $y = x$* тўғри чизиққа уринса, парабола тенгламасидаги b ва c аниқлансин.

---

916. $xy = 4$ гиперболага $x_1 = 1$ ва $x_2 = -4$ нуқталарда ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин ва уринмалар орасидаги бурчак топилсин. Эгри чизиқ ва уринмалар ясалсин.

Қуйидаги эгри чизиқларга ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин ва эгри чизиқ ҳамда уларга ўтказилган уринмалар ясалсин.

917. $y = 4x - x^2$ га Ox ўқ билан кесишган нуқталарида.

918. $y^2 = 4 - x$ га Oy ўқ билан кесишган нуқталарида.

919. $y^2 = (4+x)^3$ га Ox ва Oy ўқлар билан кесишган нуқталарида.

920. $y = x^2 - 4x + 5$ парабола учидан унга Oy ўқ билан кесишган нуқтасида ўтказилган уринмагача бўлган масофа топилсин.

921. $y = 0{,}5$ тўғри чизиқ $y = \cos x$ эгри чизиқни қандай бурчак остида кесади?

922. $y = x^2 + 4x$ параболага қайси нуқтада ўтказилган уринма Ox ўққа параллел бўлади?

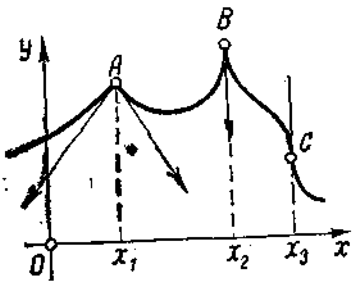
923. $y = x^2 - 2x + 5$ параболага ўтказилган уринма, биринчи координаталар бурчагининг биссектрисасига перпендикуляр бўлиши учун, уринма параболанинг қайси нуқтасида ўтказилиши керак?

924. $y = \frac{2}{1+x^2}$ эгри чизиққа $x = 1$ нуқтада ўтказилган уринма ости, нормал ости, уринма ва нормал узунликлари топилсин.

925. $y = \frac{x^2}{4}$ парабола, учларининг абсциссалари 2 ва 4 га тенг ватари билан қандай бурчаклар тузади?

4- §. Дифференциалланмайдиган узлуксиз функциялар

1°. Эгри чизиқнинг синиш нуқтаси. Агар $y = f(x)$ эгри чизиқнинг $A(x_1;\ y_1)$ нуқтасида (29- чизма) y' ҳосила мавжуд бўлмасдан, ҳар хил *чап* $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_1$ ва *ўнг* $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_2$ ҳосилалар мавжуд бўлса, бу *нуқта синиш нуқтаси* дейилади. Синиш нуқтасидан k_1 ва k_2 бурчак коэффициентларига эга иккита уринма нурлар чиқади.



29- чизма.

2°. Вертикал уринмали қайтиш нуқтаси. Агар $B(x_2;\ y_2)$ нуқтада (29- чизма) y' ҳосила мавжуд бўлмасдан, лекин ҳар хил ишорали *чексиз* ($+\infty$ ва $-\infty$) *чап* ва *ўнг ҳосилалар* мавжуд бўлса, бу нуқта вертикал *уринмали қайтиш нуқтаси* дейилади. Бундай нуқта бурчак нуқтасининг хусусий ҳоли бўлади. Ундан битта уринма нур ёки устма-уст тушган иккита уринма нурлар чиқади деб ҳисоблаш мумкин.

3°. Вертикал уринмали букилиш нуқтаси. Агар $C(x_3;\ y_3)$ нуқтада (29- чизма)

$$y' = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \ (\text{ёки } -\infty)$$

ҳосила мавжуд бўлса, бу нуқта *вертикал уринмали букилиш нуқтаси* дейилади. Бундай нуқтада вертикал уринма мавжуддир.

A ва B нуқталарда $y = f(x)$ функция ҳосилага эга эмас; C нуқтада эса чексизга тенг бўлган ҳосилага эга. Бу уч нуқтанинг ҳар бирида функция узлуксиз, аммо *дифференциалланмайди*.

926. $y = \sqrt{x^2}$ (ёки $y = |x|$) функция графиги ясалсин ҳамда графикнинг синиш нуқтасида *чап* y'_- ва *ўнг* y'_+ ҳосилалар топилсин.

927. $[0; 4]$ кесмада $y = 0{,}5\sqrt{(x-2)^2}$ функциянинг графиги ясалсин ҳамда графикнинг синиш нуқтасида чап y'_- ва ўнг y'_+ ҳосилалар топилсин.

928. $[-\pi, \pi]$ сегментда $y = \sqrt{\sin^2 x}$ функциянинг графиги ясалсин ва эгри чизиққа синиш нуқтасида ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин.

929. $[0; 2\pi]$ сегментда $y = \sqrt{1 + \cos x}$ функциянинг графиги ясалсин ҳамда унга синиш нуқтасида ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин ва улар орасидаги бурчак топилсин.

930. $[-2; 2]$ сегментда $y = \sqrt[3]{x^2}$ функциянинг графиги ясалсин ва $x = 0$ нуқтадаги уринманинг тенгламаси ёзилсин.

931. $[0; 4]$ сегментда $y = 1 - \sqrt[3]{(x-2)^2}$ функциянинг графиги ясалсин ва $x = 2$ нуқтада унга ўтказилган уринманинг тенгламаси ёзилсин.

932. $[-2; 2]$ сегментда $y^3 = 4x$ функциянинг графиги ясалсин ва $x = 0$ нуқтада унга ўтказилган уринманинг тенгламаси ёзилсин.

933. $[0; 4]$ сегментда $y^3 = 4(2 - x)$ функциянинг графиги ясалсин ва $x = 2$ нуқтада унга ўтказилган уринманинг тенгламаси ёзилсин.

---

934. $[0; \pi]$ сегментда $y = 1 - \sqrt{\cos^2 x}$ функциянинг графиги ясалсин ва унга синиш нуқтасида ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин.

935. $[-2; 0]$ сегментда $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - 1$ функциянинг графиги ясалсин ва эгри чизиққа $x = -1$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси ёзилсин.

936. $[-1;\ 5]$ сегментда $y=[4x-x^2]$ функциянинг графиги ясалсин ва унга $x=0$ синиш нуқтасида ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин ҳамда улар орасидаги бурчак топилсин.

5- §. Кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг ҳосилалари

Асосий формулалар:

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u};\quad (e^u)'=e^u\cdot u';\quad (a^u)'=a^u\ln a\,u'.$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

937. 1) $y=x\ln x$; 2) $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$; $y=\lg(5x)$.

938. 1) $y=\ln x-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x^2}$; 2) $y=\ln(x^2+2x)$.

939. 1) $y=\ln(1+\cos x)$; 2) $y=\ln\sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x$.

940. $y=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$.

941. $y=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$. 942. $y=\ln\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

943. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$. 944. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$.

945. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

946. $y=2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})$.

947. 1) $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; 2) $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$.

948. $y=\ln x$ эгри чизиққа унинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасида ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизиқ ва уринма ясалсин.

949. $y=\dfrac{x^2}{2e}$ параболанинг $y=\ln x$ эгри чизиққа уриниши кўрсатилсин ва унинг уриниш нуқтасини топилсин. Эгри чизиқлар ясалсин.

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

950. 1) $y=x^3+3^x$; 2) $y=x^2\cdot 2^x$; 3) $y=x^2e^x$.

951. 1) $y=a^{\sin x}$; 2) $y=e^{-x^2}$; 3) $y=x^2e^{-2x}$.

952. $y=2\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)$. 953. $y=\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}$.

954. $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. 955. $y=e^{\frac{x}{a}}\cos\dfrac{x}{a}$.

956. $y = e^{-x}(\sin x + \cos x)$; 2) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$.

957. $y = \ln\frac{e^x}{x^2+1}$. 958. $y = (e^{ax} - e^{-ax})^2$.

959. $f(t) = \ln(1 + a^{-2t})$; $f'(0)$ топилсин.

960. $y = e^{2x}$ эгри чизиқ Oy ўқни қандай бурчак остида кесади?

961. $y = e^{\frac{x}{a}}$ эгри чизиқнинг исталган нуқтасидаги уринма ости узунлиги a га тенг экани исбот қилинсин.

962. Аввал логарифмлаб: 1) $y = x^x$; 2) $y = x^{\sin x}$ функцияларнинг ҳосилалари топилсин.

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

963. $y = \ln\cos x - \frac{1}{2}\cos^2 x$.

964. $y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$. 965. $y = \ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

966. $y = \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})$.

967. $y = \ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 968. $y = \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg} x + \ln\cos x$.

969. $y = \ln\sqrt{\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}$. 970. $y = \ln(1 + \sec x)$.

971. $y = a\ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}) - \sqrt{x^2+ax}$.

972. $y = ae^{-\frac{x}{a}} + xe^{-\frac{x}{a}}$. 973. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.

974. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. 975. $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}+1})$.

976. $y = \ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$ 977. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

978. $f(t) = \ln\frac{2+\operatorname{tg} t}{2-\operatorname{tg} t}$; $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ топилсин.

979. $y = 1 - e^{\frac{x}{2}}$ эгри чизиққа унинг Oy ўқ билан кесишган нуқтасида ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизиқ, унинг уринмаси ва асимптотаси ясалсин.

6- §. Тескари тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари

$$(\text{arc sin}\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad (\text{arc cos}\, u)' = -\frac{u}{1+u^2};$$

$$(\text{arc tg}\, u)' = \frac{u}{1+u^2}; \quad (\text{arc ctg}\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

980. $y = \sqrt{1-x^2} + \text{arc sin}\, x.$

981. $y = x - \text{arc tg}\, x.$ 982. $y = \text{arc sin}\sqrt{1-4x}.$

983. $y = \text{arc sin}\frac{x}{a}.$ 984. $y = \text{arc tg}\,\frac{x}{a}.$

985. $y = \text{arc cos}\,(1-2x).$ 986. $y = \text{arc ctg}\,\frac{1+x}{1-x}.$

987. 1) $y = x\sqrt{1-x^2} + \text{arc sin}\, x$; 2) $y = \text{arc sin}\,(e^{3x}).$

988. $y = \text{arc tg}\, x + \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$ 989. $y = \text{arc cos}\,\frac{1}{\sqrt{x}}.$

990. $y = x\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(x^2+a^2).$

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

991. $y = \text{arc sin}\sqrt{x}.$ 992. $y = \text{arc tg}\sqrt{6x-1}.$

993. 1) $y = \text{arc cos}\,(1-x^2)$; 2) $y = \text{arc ctg}\, x - \frac{1}{x}.$

994. $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}} + \text{arc sin}\, e^x.$

995. $y = x\,\text{arc cos}\, x - \sqrt{1-x^2}.$

996. $y = \text{arc tg}\, e^{2x} + \ln\sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}.$

997. $s = \sqrt{4t-t^2} + 4\,\text{arc sin}\frac{\sqrt{t}}{2}.$

998. $y = \text{arc cos}\sqrt{1-2x} + \sqrt{2x-4x^2}.$

999. $f(z) = (z+1)\,\text{arc tg}\, e^{-2z}$; $f'(0)$ топилсин.

7- §. Гиперболик функцияларнинг ҳосилалари

1°. Таърифлар. $\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ифодалар ва уларнинг нисбатлари мос равишда *гиперболик синус, косинус, тангенс, котангенс* дейилади ва

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\quad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};\quad \operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x};\ \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

кўринишда белгиланади.

2°. Гиперболик функцияларнинг хоссалари:

1) $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$; 4) $\operatorname{sh} 0=0,\ \operatorname{ch} 0=1$;

2) $\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch} 2x$; 5) $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x,\ (\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;

3) $\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$; 6) $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

1000. 1) $y=\operatorname{sh}^3 x$; 2) $y=x-\operatorname{th} x$; 3) $y=2\sqrt{\operatorname{ch} x-1}$.

1001. $f(x)=\operatorname{sh}\frac{x}{2}+\operatorname{ch}\frac{x}{2}$; $f'(0)+f(0)$ топилсин.

1002. 1) $y=\ln[\operatorname{ch} x]$; 2) $y=\operatorname{th} x+\operatorname{cth} x$.

1003. 1) $y=x-\operatorname{cth} x$; 2) $y=\ln[\operatorname{th} x]$.

1004. 1) $y=\arcsin[\operatorname{th} x]$; 2) $y=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 4x}$.

1005. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ чизиқ *занжир чизиқ* дейилади. Бу чизиққа $x=a$ нуқтасида ўтказилган нормалнинг тенгламаси ёзилсин (гиперболик функцияларнинг иловада берилган жадвалига қаралсин).

Эгри чизиқ ва нормал ясалсин.

1006. $y=\operatorname{sh} x$ эгри чизиққа $x=-2$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизиқ ва унга ўтказилган уринма ясалсин.

1007. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ занжир чизиқдаги исталган нуқта ординатасининг шу чизиқ нормалидаги проекцияси ўзгармас бўлиб, a га тенг экани исбот қилинсин.

8- §. Дифференциаллашга доир аралаш мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

1008. 1) $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\arcsin\frac{1}{x}$; 2) $y=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln\cos x$.

1009. $y=\sqrt{4x-1}+\operatorname{arcctg}\sqrt{4x-1}$.

1010. $x=\ln(e^{2t}+1)-2\operatorname{arctg}(e^t)$.

1011. $y=4\ln(\sqrt{x-4}+\sqrt{x})+\sqrt{x^2-4x}$.

1012. $s=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 t-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t-\ln(\cos t)$.

1013. $f(x)=(x^2+a^2)\ \text{arc tg}\ \frac{x}{a}-ax$; $f'(a)$ топилсин.

1014. 1) $y=\ln\left[x-\frac{a^2}{x}\right]$; 2) $y=x(\cos\ln x+\sin\ln x)$.

1015. $f(x)=\text{arc}\ \sin\frac{x-1}{x}$; $f'(5)$ топилсин.

1016. $\varphi(u)=e^{-\frac{u}{a}}\cos\frac{u}{a}$; $\varphi(0)+a\varphi'(0)=0$ экани кўрсатилсин.

1017. $f(y)=\text{arc tg}\ \frac{y}{a}-\ln\sqrt[4]{y^4-a^4}$; $f'(2a)$ топилсин.

1018. $F(z)=\frac{\cos^2 z}{1+\sin^2 z}$; $F\left(\frac{\pi}{4}\right)-3F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$ экани кўрсатилсин.

1019. $s=\frac{1}{t\ln ct}$ функциянинг $t\frac{ds}{dt}+s=-ts^2$ дифференциал тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

1020. $x=\frac{1-e^{-t^2}}{2t^2}$ функциянинг $t\frac{dx}{dt}+2x=e^{-t^2}$ дифференциал тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

9-§. Юқори тартибли ҳосилалар

Биз $y=f(x)$ функциянинг $y'=f'(x)$ ҳосиласини топдик деб фараз қилайлик. Бу ҳосиланинг ҳосиласи $f(x)$ функциянинг *иккинчи тартибли ҳосиласи* дейилади ва y'' ёки $F''(x)$ ёки $\frac{d^2y}{dx^2}$ лар билан белгиланади. Шунга ўхшаш, юқори тартибли ҳосилалар аниқланади ва:

3-тартибли ҳосила $y'''=f'''(x)\frac{d^3y}{dx^3}$ билан,

4-тартибли ҳосила $y^{IV}=f^{IV}(x)=\frac{d^4y}{dx^4}$ билан ва умуман

n-тартибли ҳосила $y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$ билан белгиланади.

1021. 1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\text{tg}\,x$; 3) $y=\sqrt{1+x^2}$ функцияларнинг 2-тартибли ҳосилалари топилсин.

1022. 1) $y=\cos^2 x$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=x\sin x$ функцияларнинг 3-тартибли ҳосилалари топилсин.

1023. Қуйидаги функцияларнинг 3-тартибли ҳосилалари топилсин:

1) $y = x \ln x$; 2) $s = te^{-t}$; 3) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$.

1024. $s = \frac{t}{2}\sqrt{2-t^2} + \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}}$ бўлса, $\frac{d^3s}{dt^3}$ топилсин.

Қуйидаги функцияларнинг n-тартибли ҳосилалари топилсин:

1025. 1) $e^{-\frac{x}{a}}$; 2) $\ln x$; 3) $\sqrt{x}$.

1026. 1) x^n; 2) $\sin x$; 3) $\cos^2 x$.

1027. Кетма-кет дифференциаллаб, қуйидаги Лейбниц формулалари чиқарилсин:

$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$;

$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$

$(uv)^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV}$ ва ҳоказо.

1028. Лейбниц формуласи бўйича:

1) $y = e^x \cos x$; 2) $y = a^x x^3$; 3) $y = x^2 \sin x$

функциялардан 2-тартибли ҳосилалар топилсин.

1029. Лейбниц формуласи бўйича:

1) $y = e^{-x} \sin x$; 2) $y = x^2 \ln x$; 3) $y = x \cos x$ функциялардан 3-тартибли ҳосилалар топилсин.

1030. $f(x) = xe^{-\frac{x}{a}}$, $f'''(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(0)$ топилсин.

1031. $f(x) = (1+x)$, $f(0), f'(0), f'''(0)\, f''(0) \ldots, f^{(n)}_{(0)}$ топилсин.

1032. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$; $n \geqslant 2$ бўлганда,

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^{n-1}}\, n$ экани кўрсатилсин.

1033. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$;

$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n! & , n = 2m \text{ бўлганда.} \\ 0 & , n = 2m-1 \text{ бўлганда} \end{cases}$ экани кўрсатилсин.

Кўрсатма. $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$ айниятдан фойдаланиш керак.

1034. $(x-1)\cdot(x^2+x^3+\ldots+x^n)=x^{n+1}-x^2$ айниятни уч марта дифференциаллаб ҳамда $x=1$ деб, $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k-1)=$ $=\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3}$ йиғинди, сўнгра натурал қатор сонларининг квадратлари йиғиндиси

$\sum\limits_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+\ \ldots\ +n^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ топилсин.

1035. 1) $y=e^{-x^2}$; 2) $y=\operatorname{ctg} x$; 3) $y=\arcsin\frac{x}{2}$ функцияларнинг 2-тартибли ҳосилалари топилсин.

1036. 1) $y=a^x$; 2) $y=\frac{1}{1+2x}$; 3) $y=\sin^2 x$ функцияларнинг n-тартибли ҳосилалари топилсин

1037. $f\,(x)=\arcsin\frac{1}{x}$; $f\,(2)$; $f'\,(2)$ ва $f''\,(2)$ топилсин.

1038. Лейбниц формуласига кўра:

1) $y=x^3e^x$; 2) $y=x^2\sin\frac{x}{a}$;

3) $y=xf'\,(a-x)+3f\,(a-x)$ функциялардан 3-тартибли ҳосилалар топилсин.

1039. $y=e^x\cos x$ функция $y^{\mathrm{IV}}+4y=0$ дифференциал тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

1040. $y=xe^{-\frac{1}{x}}$ функция $x^3y''-xy'+y=0$ тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

1041. $f\,(x)=x^2e^{-\frac{x}{a}}$ бўлса, $f^{(n)}\,(0)=\frac{n\,(n-1)\cdot(-1)^n}{a^{n-2}}$ экани кўрсатилсин.

1042. $f\,(x)=e^{-x^2}$ бўлса,

$f^{(n)}\,(0)=-2\ \ (n-1)\ f^{(n-2)}\ (0), f^{(2m-1)}\ (0)=0,$

$f^{2m}\ (0)=(-2)^m\ \ (2m-1)\ \ (2m-3)\ \ \ldots\ \ 5\cdot3\cdot1$ экани кўрсатилсин.

1043. $f(x) = x^n$ бўлса,

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1} + \frac{f''(1)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$$ эканн кўрсатилсин.

10- §. Ошкормас функциянинг ҳосиласи

Агар y га нисбатан ечилмаган $F(x;\ y) = 0$ тенглама y ни x нинг бир қийматли функцияси сифатида аниқласа, у ҳолда y x нинг *ошкормас функцияси* дейилади. Бу ошкормас функциядан y' ҳосилани топиш учун y ни x нинг функцияси деб, $F(x;\ y) = 0$ тенгламанинг икки томонини x бўйича дифференциаллаш керак. Ҳосил бўлган тенгламадан изланган y' ни топамиз. y'' ни топиш учун $F(x;\ y) = 0$ тенгламани x бўйича икки марта дифференциаллаш керак ва ҳоказо.

Қуйидаги тенгламалардан y' топилсин:

1044. 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $y^2 = 2px$; 3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1045. 1) $x^2 + xy + y^2 = 6$; 2) $x^3 + y^2 - xy = 0$.

1046. 1) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $e^y - e^{-x} + xy = 0$.

1047. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$.

1048. $x = y + \operatorname{arcctg} y$.

1049. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$; $\frac{dy}{dx}$ нинг $x = 0$ бўлгандаги қиймати топилсин.

1050. 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $ax + by - xy = c$; 3) $x^m y^n = 1$ тенгламалардан y'' топилсин.

1051. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $(0;\ b)$ нуқтадаги y'' топилсин.

1052. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ эгри чизиқнинг Oy ўқ билан кесишган нуқталарида ўтказилган уринмаларининг тенгламалари ёзилсин.

1053. $x^2 - y^2 = 9$ гиперболанинг $(5;\ 4)$ нуқтасида ўтказилган нормалнинг асимптоталар билан кесишган нуқталари топилсин.

1054. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $y^2 = 2px$ эгри чизиққа $(x_0;\ y_0)$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин.

1055. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ астроидага унинг $y = x$ тўғри чизиқ билан кесишган нуқталарида ўтказилган уринмалар тенгламалари ёзилсин.

1056. $x^2+y^2=5$ ва $y^2=4x$ эгри чизиқлар қандай бурчак остида кесишади?

1057. 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) $x^3+y^3-3axy=0$ тенгламалардан y' топилсин.

1058. 1) $x^2-y^2=a^2$; 2) $(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2=R^2$;

3) $\operatorname{arc\,tg} y=x+y$; 4) $x^2+xy+y^2=a^2$ тенгламалардан y'' топилсин.

1059. $x^2+y^2+4x-4y+3=0$ айланага унинг Ox ўқ билан кесишган нуқталарида ўтказилган уринмаларнинг тенгламалари ёзилсин. Айлана ва уринмалар ясалсин.

1060. $x^2+4y^2=16$ эллипснинг биринчи чоракда ётувчи шундай нуқтасида уринма ўтказилсинки, унинг координата ўқлари орасидаги кесмаси шу нуқтада тенг иккига бўлинсин ҳамда уринманинг тенгламаси ёзилсин.

1061. $te^{-\frac{s}{2}}+se^{-\frac{t}{2}}=2$; $t=0$ бўлганда $\frac{ds}{dt}$ топилсин.

1062. $t\ln x-x\ln t=1$; $t=1$ бўлганда $\frac{dx}{dt}$ топилсин.

1063. $x^2\sin y-\cos y+\cos 2y=0$; $y=\frac{\pi}{2}$ бўлганда y' топилсин.

11-§. Функциянинг дифференциали

Агар $y=f(x)$ функция x нуқтада дифференциалланувчи бўлса, яъни ўша нуқтада чекли y' ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$$

бўлади, бунда $\Delta x\to 0$ да $\alpha\to 0$. Бундан

$$\Delta y=y'\Delta x+\alpha\Delta x. \qquad (1)$$

Функция *орттирмаси* Δy нинг Δx ға нисбатан чизиқли бўлган *бош қисми* $y'\Delta x$, функциянинг *дифференциали* дейилади ва dy билан белгиланади:

$$dy=y'\Delta x. \qquad (2)$$

(2) формулада $y=x$ деб $dx=x'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x$ га эга бўламиз, шунинг учун ҳам

$$dy=y'dx. \qquad (3)$$

(3) формула x қандайдир янги ўзгарувчи t нинг функцияси бўлган ҳол учун ҳам тўғри бўлади.

(1) дан $\Delta y \approx dy$ экани, яъни етарлича кичик $dx = \Delta x$ учун функция орттирмаси унинг дифференциалига тақрибий тенг экани келиб чиқади.

Хусусий ҳолда чизиқли функция $y = ax + b$ учун $\Delta y = dy$.

Қуйидаги функцияларнинг дифференциаллари топилсин:

1064. 1) $y = x^n$ 2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

1065. 1) $y = \sqrt{1 + x^2}$; 2) $s = \frac{gt^2}{2}$.

1066. 1) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$, 2) $x = \frac{1}{t^2}$.

1067. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1 - \cos u)$.

1068. 1) $d\left(\frac{a}{x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$; 2) $d\,(\alpha + \ln \alpha)$;

3) $d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)$ 4) $d\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)$.

1069. 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 2) $xy = a^2$; 3) $x^2 - xy - y^2 = 0$ тенгламаларнинг ҳар бир ҳадларининг дифференциалларини топиб, $\frac{dy}{dx}$ топилсин.

1070. 1) $y = x^2$ бўлса, x нинг қиймати 2 дан 2,01 гача ўзгарганда, y ўзгаришининг тақрибий қиймати топилсин ($\Delta y \approx dy$); 2) $y = \sqrt{x}$ бўлса, x нинг қиймати 100 дан 101 гача ўзгарганда, y ўзгаришининг тақрибий қиймати топилсин.

1071. 1) Кубнинг қирраси $x = 5$ *м* $\pm 0{,}01$ *м*. Куб ҳажмини ҳисоблашдаги абсолют ва нисбий хатолар аниқлансин.

2) Телеграф симининг узунлиги $s = 2b\left(1 + \frac{2f^2}{3b^2}\right)$, бундаги $2b$ — симнинг устунга биркитилган нуқталари орасидаги масофа, f эса симнинг энг катта эгилиши. Иссиқлик таъсирида сим узунлиги ds га ортса, эгилиш қанчага ортади?

1072. 1) $x \leqslant 4$ бўлганда, $y = x^2\sqrt{x}$ эгри чизиқ ординатасини ҳисоблашдаги хато 0,1 дан ортиқ бўлмаслиги учун унинг абсциссасини қандай аниқликда ўлчаш керак?

2) Шар ҳажмини ҳисоблашда 1% дан ортиқ хато қилмаслик учун шар радиусини қандай нисбий аниқликда ўлчаш зарур?

1073. 1) Доиравий ҳалқанинг юзи; 2) сферик қатламнинг (иккита концентрик сфера орасидаги қатламнинг) ҳажми тақрибий ҳисоблансин. Улар аниқ қийматлари билан таққослансин.

Қуйидаги функцияларнинг дифференциаллари топилсин:

1074. 1) $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$; 2) $r=\cos(a-b\varphi)$; 3) $s=\sqrt{1-t^2}$.

1075. 1) $y=\ln\cos x$; 2) $z=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{4u-1}$; 3) $s=e^{-2t}$.

1076. 1) $d\left(\sqrt{x}+1\right)$; 2) $d(\operatorname{tg}\alpha-\alpha)$; 3) $d\,(bt-e^{-bt})$.

1077. 1) $y=x^3$ бўлса, Δy ҳамда dy лар аниқлансин ва улар x нинг қиймати 2 дан 1,98 гача ўзгарганда ҳисоблансин.

2) Маятник тебранишининг даври $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{980}}$ *секунд*, бундаги l — сантиметр билан ўлчанган маятник узунлиги. Тебраниш даври 0,1 секундга камайиши учун маятник узунлиги $l=20$ *см* ни қандай ўзгартириш керак?

3) $x\geqslant 0{,}5$ бўлганда, $xy=4$ эгри чизиқ ординатасини ҳисоблашдаги хато 0,1 дан катта бўлмаслиги учун унинг абсциссасини қандай аниқлик билан ўлчаш керак?

12-§. Эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари

Эгри чизиқ $x=f(t)$ ва $y=\varphi(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин. x ва y нинг тепасидаги нуқталар билан уларнинг параметр t бўйича олинган ҳосилаларини белгилаб:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot y}{\dot x};\quad \frac{d\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)}{dx}=\frac{\ddot y\dot x-\ddot x\dot y}{\dot x^3}$$

ларни топамиз.

1078. 1) $\left.\begin{aligned}x&=t^2\\ y&=\frac{1}{2}t^3\end{aligned}\right\}$; 2) $\left.\begin{aligned}x&=\\ y&=\frac{t^3}{3}-t\end{aligned}\right\}$

параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизиқлар ясалсин. Тенгламалардан t ни чиқариб, ҳар бир эгри чизиқ тенгламаси одатдаги $F(x, y)=0$ кўринишда ёзилсин.

Қуйидаги параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизиқларнинг тенгламалари $F(x, y)=0$ (ёки $y=f(x)$) кўринишга келтирилсин:

1079. 1) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

1080. 1) $\begin{cases} x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

1081. t га $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ қийматларни бериб, доира «эвольвентаси» ёки «ёйилмаси» ясалсин:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\sin t) \\ y &= a(\sin t - t\cos t) \end{aligned}\right\}.$$

1082. $y = xt$ деб, $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ «Декарт япроғи» нинг параметрик тенгламалари ёзилсин (366- масалага қаралсин) ва t; 1) 0 дан $+\infty$ гача; 2)0 дан -1 гача; 3) $-\infty$ дан -1 гача монотон ўзгарганда нуқтанинг эгри чизиқ бўйлаб ҳаракати текширилсин.

1083. $x = a\ (t - \sin t)$, $y = a\ \ (1 - \cos t)$ циклоиданинг (367-масалага қаралсин) $t = \frac{\pi}{2}$нуқтасига ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизиқ ва уринма ясалсин.

1084. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ гипоциклоидага (астроидага) $t = \frac{\pi}{4}$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизиқ ва уринма ясалсин.

Кўрсатма. Эгри чизиқни ясаш учун $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \ldots$ бўлгандаги x ва y лар қийматларининг жадвали тузилсин.

1085. 1) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

тенгламалардан $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ топилсин.

1086. 1) $x = 2t - 1$, $y = 1 - 4t^2$; 2) $x = t^3$, $y = t^2 - 2$ параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизиқлар, координаталар ўқлари билан кесишган нуқталарини топиб ҳамда иккинчи эгри чизиқ учун $t=0$ бўлганда $\frac{dy}{dx}=\infty$ эканини эътиборга олиб ясалсин. Эгри чизиқ тенгламаси $F(x, y)=0$ кўринишда ёзилсин.

1087. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоидага $t=\frac{3\pi}{2}$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин. Эгри чизиқ ва уринма ясалсин.

1088. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ доира ёйилмасига $t=\frac{\pi}{4}$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин.

1089. 1) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t+t^3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=e^{3t} \end{cases}$ тенгламалардан $\frac{d^2y}{dx^2}$ топилсин.

VII БОБ

ҲОСИЛАНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. Тезлик ва тезланиш

Нуқта Ox ўқ бўйича ҳаракат қилиб, вақтнинг t пайтида $x = f(t)$ координатага эга бўлсин, у ҳолда вақтнинг t пайтида

$$\text{тезлик } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

$$\text{тезланиш } w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ бўлади.}$$

1090. Зенит снаряд бошланғич a *м/сек* тезлик билан вертикал йўналишда отилган. t секунддан сўнг снаряд қандай x баландликда бўлади? Снаряднинг ҳаракат тезлиги ва тезланиши аниқлансин. Неча секунддан сўнг снаряд энг юқори баландликка кўтарилади ва ердан қандай масофада бўлади?

1091. Жисм $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$ қонунга асосан Ox тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилади. Ҳаракат тезлиги ва тезланиши аниқлансин. Қайси пайтларда жисм ҳаракат йўналишини ўзгартиради?

1092. Моддий нуқта $x = a\cos\omega t$ қонун бўйича тебранма ҳаракат қилади. $x = \pm a$ ва $x = 0$ нуқталардаги тезлик ва тезланиш аниқлансин.

$\frac{d^2x}{dt^2}$ тезланиш ҳамда нуқтанинг узоқлашиши x ушбу $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ «дифференциал» тенглама билан боғланганини кўрсатилсин.

1093. Тормоз билан тўхтатиладиган айланувчи маховик t секундда $\varphi = a + bt - ct^2$ бурчакка бурилади. Бундаги a, b ва c лар мусбат ўзгармас миқдорлар. Тезлик ва тезланиш аниқлансин. Ғилдирак қачон тўхтайди?

1094. Радиуси a га тенг ғилдирак тўғри чизиқ бўйича юмалайди. Ғилдиракнинг t секунддаги бурилиш бурчаги $\varphi = t + \frac{t^2}{2}$ тенглама билан аниқланади. Ғилдирак марказининг ҳаракат тезлиги ва тезланиши аниқлансин.

1095. Ox ўқ бўйича ҳаракат қилувчи нуқтанинг тезлиги v, тезланиши w бўлсин, $wdx = vdv$ экани кўрсатилсин.

1096. Тўғри чизиқли ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги v, ўтган йўли x бўлиб, $v^2 = 2ax$ шарт бажарилади; a — ўзгармас. Ҳаракат тезланиши аниқлансин.

1097. 10 метр баландликдаги жисм 20 *м/сек* бошланғич тезлик билан юқорига вертикал отилган. t секунддан кейин у қандай x баландликда бўлади? Ҳаракат тезлиги ва тезланиши аниқлансин. Неча секунддан сўнг жисм энг юқори нуқтага чиқади ва ердан қанча баландликда бўлади?

1098. Радиуси R *см* бўлган ярим шар шаклидаги идишга ўзгармас a *л/сек* тезлик билан сув қуйилади. Идишдаги сувнинг h *см* баландликдаги кўтарилиш тезлиги аниқлансин ва у сувнинг эркин сиртига тескари пропорционал экани кўрсатилсин.

Кўрсатма. Шар сегментининг ҳажми $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$ экани маълум. Масаланинг шартига кўра $\frac{dV}{dt} = a$ эканини ҳисобга олиб, биринчи тенгликнинг икки томонини t бўйича дифференциаллаш керак.

1099. Қандайдир химиявий реакция натижасида ҳосил қилинадиган жисм миқдори x билан t вақт орасидаги боғланиш $x = A\ (1 - e^{-kt})$ тенглама билан ифодаланади. Реакция тезлиги аниқлансин.

1100. Бурчак тезлиги $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, бурчак тезланиши эса $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ бўлсин. $\frac{d(\omega^2)}{d\varphi} = 2\varepsilon$ экани кўрсатилсин.

2-§. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар

1°. Ролль теоремаси. Агар $f(x)$: 1) $[a, b]$ сегментда узлуксиз, 2) шу сегментнинг ички нуқталарида ҳосилага эга, 3) $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда a билан b орасида шундай $x = c$ нуқта мавжудки, унда

$$f'(c)=0 \qquad (1)$$

бўлади.

2°. Лагранж теоремаси. Агар $f(x)$: 1) $[a, b]$ сегментда узлуксиз, 2) шу кесманинг ички нуқталарида ҳосилага эга бўлса, у ҳолда a билан b орасида шундай $x=c$ нуқта мавжудки, унда

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \qquad (2)$$

бўлади.

3°. Коши теоремаси. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$: 1) $[a, b]$ сегментда узлуксиз, 2) шу кесманинг ички нуқталарида ҳар иккала функция ҳам ҳосилага эга, шунинг билан бирга $\varphi'(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда a билан b орасида $x=c$ нуқта мавжудки, унда

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (3)$$

бўлади.

Бу теоремаларда a билан b орасидаги қандайдир ўрта $x=c$ қиймат ҳақида сўз юритилгани учун, улар ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар деб аталади.

Геометрик нуқтаи назардан Ролль ва Лагранж теоремалари, ҳар бир нуктаси учун аниқ бир уринма мавжуд бўлган, қайтиш нуқтаси бўлмаган узлуксиз $y=f(x)$ эгри чизиқнинг AB ёйида шундай ички нуқта борки, унда ўтказилган уринма AB ватарга параллел бўлишини тасдиқлайди.

Равшанки, синиш ёки қайтиш нуқталарга эга ёйлар учун юқоридаги теоремаларнинг шартлари бажарилмайди

$f(b)=f(a)=0$ бўлган хусусий ҳол учун Ролль теоремаси қуйидагича ўқилади: агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва сегментнинг ички нуқталарида ҳосилага эга бўлса, $f(x)$ функциянинг иккита илдизи a ва b орасида $f'(x)$ нинг ҳам ҳеч бўлмаганда битта илдизи бўлади.

1101. $f(x)=x^2-4x+3$ функция илдизлари орасида унинг ҳосиласининг ҳам илдизи бор экани текширилсин. Бу график усулда тушунтирилсин.

1102. Ролль теоремасини $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ функцияга $[-1, 1]$ сегментда татбиқ қилиш мумкинми?

1103. $y=|\sin x|$ эгри чизиқнинг $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ сегментдаги $\breve{AB}$ ёйи ясалсин. Нима учун бу ёйда AB ватарга параллел уринма йўқ? Ролль теоремасининг қайси шарти бу ерда бажарилмайди?

1104. $y=x^2$ параболанинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма $A(-1;\ 1)$ ва $B(3;\ 9)$ нуқталарни бирлаштирувчи ватарга параллел бўлади?

1105. $[a, b]$ сегментда $f(x)=x^2$ функция учун Лагранж формуласи ёзилсин ва c топилсин. График усул билан тушунтирилсин.

1106. $[1, 4]$ сегментда $f(x)=\sqrt{x}$ функция учун Лагранж формуласи ёзилсин ва c топилсин.

1107. $[-1, 2]$ сегментда $\frac{4}{x}$ ва $1-\sqrt[3]{x^2}$ функцияларга Лагранж теоремасини татбиқ қилиш мумкин эмаслиги кўрсатилсин. График усулда тушунтирилсин.

1108. $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ сегментда $y=|\cos x|$ эгри чизиқнинг $\breve{AB}$ ёйи ясалсин. Нима учун бу ёйда AB ватарга параллел уринма йўқ? Лагранж теоремасининг қайси шарти бунда бажарилмайди?

1109. $f(x)=\begin{cases} x, |x|<2 \text{ бўлганда}, \\ 1, |x|\geqslant 2 \text{ бўлганда} \end{cases}$ функция графиги ясалсин. Унда $O(0; 0)$ ва $B(2; 1)$ нуқталарни олиб, графикнинг O билан B нуқтаси орасида уринмаси OB га параллел бўлган нуқта йўқлиги кўрсатилсин. $[0, 2]$ сегментда бу функция учун Лагранж теоремасининг қайси шартлари бажарилади ва қайси шартлари бажарилмайди?

1110. Поезд икки станция орасидаги масофани $v_0=40$ *км/соат* ўртача тезлик билан босиб ўтган. Лагранж теоремасига кўра шундай момент бўладики, ўша вақтда ҳақиқий тезлик (ўртача тезлик эмас) $\frac{ds}{dt}=40$ *км/соат* бўлади. Бунинг тўғрилиги кўрсатилсин.

1111. $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва шу сегментнинг ҳар бир ички нуқтасида ҳосилага эга $f(x)$ функция берилган.

$$\Phi(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$$

функцияга Ролль теоремасини татбиқ этиб, $f(x)$ функция учун Лагранж теоремаси ҳосил қилинсин. $\Phi(x)$ функциянинг геометрик маъноси аниқлансин.

1112. $f(x)=x^3$ ва $\varphi(x)=x^2$ функциялар учун Кошининг $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ формуласи ёзилсин ҳамда c топилсин.

1113. Геометрик нуқтаи назардан Коши теоремаси қуйидагини тасдиқлайди: агар $[a, b]$ сегментда $x=\varphi(t)$ ва $y=f(t)$ функциялар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирса, у ҳолда t нинг $a \leqslant t \leqslant b$ сегментдан олинган қийматлари учун $x = \varphi(t)$ ва $y = f(t)$ эгри чизиқнинг ёйи устида шундай ички нуқта топиладики, бу нуқтада ёйга ўтказилган уринма ватарга параллел бўлади. Бу исбот қилинсин.

1114. 1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = x^3$ функциялар учун Лагранж формуласи $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta\Delta x)$ кўринишда ёзилсин, бунда $0 < \theta < 1$ ҳамда биринчи функция учун θ нинг x га боғлиқ эмаслиги, иккинчи функция учун эса у x ва Δx ларга боғлиқ эканлиги кўрсатилсин.

1115. $\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}} \approx 10{,}05$ экани кўрсатилсин.

1116. Агар

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

бўлса, Коши формуласи ёрдами билан

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$$

экани кўрсатилсин, бунда $0 < \theta < 1$.

1117. $f(x) = x^3$ функция учун Лагранжнинг

$$f(b) - f(a) = f(b - a)\, f'(c)$$

формуласи ёзилсин ва c топилсин.

1118. Қуйидаги функциялар учун Лагранж формуласи ёзилсин ва c топилсин.

1) $[0, 1]$ сегментда $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$;

2) $[0, 1]$ сегментда $f(x) = \arcsin x$;

3) $[1, 2]$ сегментда $f(x) = \ln x$.

1119. Қуйидаги функциялар учун Коши формуласи ёзилсин ва c топилсин:

1) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ сегментда $\sin x$ ва $\cos x$;

2) $[1, 4]$ сегментда x^2 ва $\sqrt{x}$.

1120. $y = |x - 1|$ функциянинг $[0; 3]$ сегментдаги графиги ясалсин. Нима учун бунда ватарга параллел уринма ўтказиш мумкин эмас? Лагранж теоремасининг шартларидан қайси бири бажарилмайди?

1121. $y = 4 - x^2$ эгри чизиқнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма унинг $A(-2; 0)$ ва $B(1; 3)$ нуқталарини бирлаштирувчи ватарга параллел бўлади? График усулда тушунтирилсин.

3-§. Аниқмасликларни очиш. Лопитал қоидаси

1°. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик. Лопиталнинг биринчи қоидаси. Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ ва $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ бўлади.

2°. $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмаслик. Лопиталнинг иккинчи қоидаси. Агар $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ ва $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ бўлади.

3°. $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ ва 0^0 кўринишдаги аниқмасликлар алгебраик алмаштиришлар ёрдами билан $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилади.

Қуйидаги лимитлар топилсин:

1122. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin 3x}{x}$.

1123. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$.

1124. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{x^n - a^n}$.

1125. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-1}{\ln x}$.

1126. $\lim\limits_{x\to a} \frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$.

1127. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

1128. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-\sin x}{x^3}$.

1129. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$.

1130. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^3}$.

1131. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}$.

1132. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

1133. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

1134. $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

1135. $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$.

1136. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n \cdot e^{-x}$.

1137. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

1138. $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. **1139.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$.

1140. $xe^{x}-\sin x$ чексиз кичикнинг нолга интилувчи x $(x\to 0)$ га нисбатан тартиби аниқлансин.

1141. x нолга интилса $(x\to 0)$:

1) $x-\operatorname{arc\,tg} x\approx\frac{x^3}{3}$; 2) $a^x-b^x\approx x\ln\frac{a}{b}$;

3) $e^{2x}-1-2x\approx 2x^2$; 4) $2x-\ln(1+2x)\approx 2x^2$

бўлиши исбот қилинсин.

1142. x нолга интилганда $(x\to 0)$ $x-\sin x\approx\frac{x^3}{6}$ ва бундан тахминан $\frac{x^3}{6}$ хато билан $\sin x\approx x$ экани исбот қилинсин, $\sin 1^\circ$ ва $\sin 6^\circ$ ҳисоблансин ҳамда хатолар баҳолансин.

1143. α нолга интилганда $\sqrt[3]{1+\alpha}-1-\frac{1}{3}\alpha\approx-\frac{\alpha^2}{9}$ ва бундан тахминан $\frac{\alpha^2}{9}$ хато билан $\sqrt[3]{1+\alpha}\approx 1+\frac{1}{3}\alpha$ экани исбот қилинсин. $\sqrt[3]{1{,}006}$, $\sqrt[3]{0{,}991}$, $\sqrt[3]{65}$, $\sqrt[3]{210}$ лар ҳисоблансин ва хатолар баҳолансин.

Қуйидаги лимитлар ҳисоблансин:

1144. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$. **1145.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arc\,tg} x}{x^3}$.

1146. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2a}}\frac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$. **1147.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{\operatorname{tg} x}$.

1148. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$. **1149.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

1150. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$. **1151.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^3}$.

1152. $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})\operatorname{ctg} x$. **1153.** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

1154. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$. **1155.** $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$.

1156. x нолга интилганда $\arcsin x - x \approx \frac{x^3}{6}$ экани исбот қилинсин.

1157. α нолга интилганда $\sqrt{1+\alpha}-1-\frac{\alpha}{2}\approx -\frac{\alpha^2}{8}$ бўлиши ва бундан тахминан $\frac{\alpha^2}{8}$ хато билан $\sqrt{1+\alpha}\approx$ $\approx 1+\frac{\alpha}{2}$ экани келиб чиқиши исбот қилинсин. $\sqrt{1{,}006}$, $\sqrt{1{,}004}$, $\sqrt{0{,}998}$, $\sqrt{0{,}994}$, $\sqrt{65}$, $\sqrt{85}$ лар ҳисоблансин ва хатолар баҳолансин.

4- §. Функциянинг ўсиши ва камайиши. Максимум ва минимум

1°. Таърифлар. I. Агар x_0 нуқтанинг қандайдир ε атрофида, исталган мусбат $h<\varepsilon$ учун

$$f(x_0-h)<f(x_0)<f(x_0+h)$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўсувчи дейилади.

II. Агар $[a, b]$ сегментдаги исталган x_1 ва x_2 учун $x_1<x_2$ бўлганда $f(x_1)<f(x_2)$ бўлса, $f(x)$ функция шу сегментда ўсувчи дейилади.

Функциянинг нуқтада ва сегментда камаювчи бўлиши ҳам шунинг сингари таърифланади.

III. Агар $f(x_0)$ қиймат x_0 нуқтанинг қандайдир икки томонлама атрофида $f(x)$ функциянинг энг катта ёки энг кичик қиймати бўлса, x_0 нуқтада $f(x)$ функция *экстремумга (максимумга* ёки *минимумга)* эга дейилади.

2°. $y=f(x)$ функциянинг (нуқтада ва сегментда) ўсувчи ва камаювчи бўлишининг етарли аломатлари:

агар $y'>0$ бўлса, функция *ўсувчи бўлади*.

агар $y'<0$ бўлса, функция *камаювчи бўлади*.

3°. Экстремумнинг зарурий шарти. $y=f(x)$ функция, фақат $y'=0$ *ёки бу ҳосила мавжуд бўлмаган нуқталардагина* экстремумга эга бўлиши мумкин. Бу нуқталар *критик* нуқталар деб аталади. Функциянинг критик нуқталаридан ўтувчи уринма горизонтал ($y'=0$) ёки вертикал (қайтиш нуқтасида) бўлади, ёки аниқ уринмага эга бўлмайди (масалан, синиш нуқтасида). Сўнгги икки ҳолда y' мавжуд бўлмайди.

4°. Экстремумнинг етарли шартлари. Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса ва ўша нуқта ихтиёрий атрофининг, балки фақат x_0 нинг ўзидан бошқа нуқталарида чекли ҳосилага эга бўлса ва агар x нинг қиймати x_0 дан ўтганда

y' ўз ишорасини $+$ дан $-$ га ўзгартса, у ҳолда

$$f(x_0)=y_{\max} \text{ бўлади;}$$

y' ўз ишорасини — дан + га ўзгартса, у ҳолда

$$f(x_0) = y_{\min} \text{ бўлади;}$$

y' ўз ишорасини ўзгартмаса, у ҳолда функция экстремумга эга бўлмайди.

Учинчи ҳол ($y' > 0$ ёки $y' < 0$ бўлганда) оддий нуқтада ҳамда бурилиш нуқтасида ва шунингдек синиш нуқтасида рўй беради.

Демак, функциянинг экстремумини топиш учун:

1) *y' ни топиб, уни нолга айлантирувчи ёки у мавжуд бўлмаган* критик нуқталарни топиш керак;

2) *ҳар бир критик нуқтадан чап ва ўнг томонларида y' нинг* ишорасини, масалан, ушбу

x		x_1		x_2		x_3		x_4	
y'	—	0	+	йўқ	—	0	—	$-\infty$	—
y	камаяди	min	ўсади	max	камаяди	букилиш	камаяди	букилиш	камаяди

кўринишдаги жадвал тузиб, аниқлаш керак.

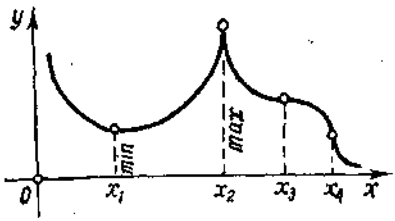
Сўнгра $y_{\max}$ ва $y_{\min}$ ларни топиб эгри чизиқни (функция графигини)' ясаш мумкин. 30- чизмада юқорида келтирилган жадвалга мос келувчи эгри чизиқ ясалган.

5°. Функция экстремумининг етарли шартлари (текширишнинг иккинчи усули).

Агар бирор $x = x_0$ нуқтада:

1) $y' = 0$ ва $y'' < 0$ *бўлса*, у ҳолда $f(x_0) = y_{\max}$ бўлади;

2) $y' = 0$ ва $y'' > 0$ *бўлса*, у ҳолда



30- чизма.

$$f(x_0) = y_{\min} \text{ бўлади;}$$

3) $y' = 0$ ва $y'' = 0$ *бўлса*, у ҳолда масала ечилмасдан қолади ва уни ечиш учун биринчи усулга мурожаат қилиш керак.

Қуйидаги функцияларнинг ўсиши ва камайиши текширилсин:

1158. 1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$; 3) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = \ln x$.

1159. 1) $y = \operatorname{tg} x$; 2) $y = e^x$. 3) $y = 4x - x^2$.

Қуйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин ва уларнинг графиклари ясалсин*:

---

* 1165, 1168, 1173 шунингдек бошқа бир қанча масалалардаги эгри чизиқларни ясаш учун аввал уларнинг асимптоталарини топиш зарур (V боб, 9- § га қаралсин).

1160. $y = x^2 + 4x + 5$, **1161.** $y = 4x - \frac{x^3}{3}$.

1162. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$. **1163.** $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$.

1164. $y = \frac{x^4}{4} - x^3$. **1165.** $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

1166. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$. **1167.** $y = \frac{1}{1 + x^2}$.

1168. $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$, **1169.** $y = x^2(1 - x)$.

1170. $y = 1 - \sqrt[3]{(x - 4)^2}$. **1171.** $y = e^{-x^2}$.

1172. $y = x + \cos 2x$, $(0, \pi)$ оралиқда.

1173. $y = 4x - \operatorname{tg} x$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда.

1174. $y = \frac{1 + \ln x}{x}$, **1175.** $y = x - \operatorname{arc\,tg} 2x$.

1176. 1) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$; 2) $y = x \ln x$.

1177. 1) $y = \sqrt{\sin x^2}$; 2) $y = \sqrt{e^{x^2} - 1}$.

1178. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. **1179.** $y = x\sqrt{1 - x}$.

1180 $y = \frac{4\sqrt{x}}{x + 2}$. **1181.** $y = \frac{x}{(x-1)(x-4)}$.

1182. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$. **1183.** $y = x^{\frac{2}{3}} + (x - 2)^{\frac{2}{3}}$.

1184. $y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3$. **1185.** $y = x^3(x + 2)^2$.

1186. $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$. **1187.** $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$.

1188. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$. **1189.** $y = x + \ln(\cos x)$.

1190. 1) $y = \ln\sqrt{1 + x^2} - \operatorname{arc\,tg} x$; 2) $y = |x|(x + 2)$.

1191. $y = x^2 e^{-x}$. **1192.** $y = 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2x$.

Қуйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин ва графиклари ясалсин:

1193. $y = 4x - x^2$. **1194.** $y = x^2 + 2x - 3$.

1195. $y=\frac{x^3}{3}+x^2$.

1196. $y=x^3+6x^2+9x$.

1197. $y=\frac{x^2}{x-2}$.

1198. $y=x^3+\frac{x^4}{4}$.

1199. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$.

1200. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

1201. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

1202. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

1203. $y=x-2\ln x$.

1204. $y=x^{\frac{2}{3}}(x-5)$.

1205. $y=\sin 2x-x$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда.

1206. $y=2x+\operatorname{ctg} x$, $(0, \pi)$ оралиқда.

1207. $y=x+\operatorname{arcctg} 2x$.

1208. $y=1+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

1209. $y=2\sin x+\cos 2x$, $(0, \pi)$ оралиқда.

1210. $y=3x^4-8x^3+6x^2$.

1211. $y=\frac{\ln x}{x}$.

1212. $y=\frac{3-x^2}{x+2}$.

1213. $y=x+\frac{1}{x}$.

1214. 1) $y=ae^{-x}\cos x$ $(x>0$ бўлганда);
2) $y=3x^5-5x^3$.

1215. $y=\frac{(4-x)^3}{9(2-x)}$.

1216. $y=\frac{12\sqrt{(x+2)^2}}{x^2+8}$.

1217. $y=\frac{2x^2-1}{x^4}$.

1218. $y=(1-x^2)(1-x^3)$.

1219. $y=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

1220. $y=x+2\sqrt{-x}$.

1221. 1) $y=\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$;

2) $y=\sqrt{1-\cos x}$.

5-§. Миқдорларнинг энг катта ва энг кичик қийматларига доир масалалар

Бу параграфда берилган масалаларни ечиш учун масалада берилган шартларга кўра энг катта ва энг кичик қийматини топиш зарур бўлган миқдорни (функцияни) тузиб олиш керак. 1229-масалани ечайлик: бу масалада туннель кесими юзининг энг катта бўлиш шартлари сўралади. Шунинг учун туннель кесими юзи S учун формула тузамиз.

Ярим айлана радиусини x, тўртбурчак баландлигини y десак:

$$S=\frac{\pi}{2}x^2+2xy. \quad (1)$$

Масаланинг шартига кўра $2x+2y+\pi x=18$. (2)

Бундан y ни топиб (1) га қўйсак $S = f(x) = 18x - \frac{\pi + 4}{2}x^2$ функцияга эга бўламиз. Энди бу функциянинг энг катта қийматини топамиз. $S = f(x)$ функция $\left(0, \frac{18^2}{\pi + 4}\right)$ оралиқда мавжуд. Бу оралиқдаги экстремум нуқталарни топамиз: 1) $f'(x) = 18 - (4 + \pi)x$; 2) $18 - (4 + \pi)x = 0$; $x = \frac{18}{4 + \pi}$; 3) $f''(x) = -(4+\pi) < 0 \cdot f\left(\frac{18}{\pi + 4}\right)$ функциянинг maximum қиймати бўлади. Равшанки, y функциянинг энг катта қиймати ҳам бўлади. Демак, туннель кесими юзининг энг катта бўлиши учун ярим доира радиуси $x = \frac{18}{4 + \pi}$ бўлиши керак.

1222. Узунлиги 120 метрлик панжара билан бир томондан уй билан чегараланган энг катта юзага эга тўғри тўртбурчак шаклидаги майдон ўраб олиниши керак. Тўғри тўрт бурчакли майдон ўлчовлари аниқлансин.

1223. 10 сони шундай иккита қўшилувчига ажратилсинки, уларнинг кўпайтмаси энг катта бўлсин.

1224. Асоси a ва баландлиги h бўлган учбурчакка энг катта юзли тўғри тўртбурчак ички чизилган. Тўғри тўртбурчак юзи аниқлансин.

1225. Томони a бўлган квадрат шаклидаги картон қоғознинг тўртта учидан катталиги бир хил квадратлар кесиб олиниб, қолган қисмидан тўғри бурчакли қути ясалган. Қутининг ҳажми энг катта бўлиши учун кесиб ташланган квадратнинг томони қандай бўлиши керак?

1226. Таги квадрат шаклида, ҳажми 32 $м^3$ га тенг очиқ ҳовузнинг ўлчовлари шундай аниқлансинки, унинг деворлари билан тагини қоплаш учун мумкин қадар оз материал сарф этилсин.

1227. Трапециянинг кичик асоси ва ён томонларининг ҳар бири 10 *см* га тенг. Унинг катта асоси шундай аниқлансинки, трапеция юзи энг катта бўлсин.

1228. Ярим доирага асоси ярим доира диаметридан иборат бўлган трапеция ички чизилган. Трапециянинг асосига ёпишган бурчаги қандай бўлганда трапециянинг юзи энг катта бўлади?

Кўрсатма. Доира диаметрини d, трапеция ён томонининг асосидаги проекциясини x деб олсак, трапециянинг кичик асоси $d - 2x$ ва баландлиги $h = x \operatorname{tg} \alpha$ бўлади. У ҳолда $S_{тр} = (d - x)x \operatorname{tg} \alpha$.

Планиметриядан маълумки, $h^2 = (d - x)x$; $x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = dx - x^2$ $x = d \cos^2 \alpha$. Бундан $S_{тр} = d^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha = f(\alpha)$.

Бундан кейин $S = f(\alpha)$ нинг maximum нуқтаси топилади.

1229. Туннелнинг кесими бир томони ярим доирадан иборат тўғри тўртбурчак шаклига эга. Кесим периметри 18 *м*. Ярим доира радиуси қандай бўлса, кесим юзи энг катта бўлади?

1230. *А* заводга яқин бўлган жойдан белгиланган тўғри чизиқ бўйича *В* шаҳарга қараб темир йўл ўтказилмоқда. Агар бир тонна юкни бир километрга тош йўл бўйича ташиш темир йўл бўйича ташишга қараганда m марта қимматроқ бўлса, *А* дан *В* га юк ташиш энг арзон бўлиши учун, *А* заводдан темир йўлгача тош йўлни темир йўлга нисбатан қандай α бурчак остида ўтказиш керак?

Кўрсатма. 1 тонна юкни тош йўл бўйлаб ташиш учун x сўм сарф бўлсин. Ташилган юк *А* дан *В* гача $\frac{b}{\sin\alpha}$ *км* тош йўл бўйича, $(a - b\operatorname{ctg}\alpha)$ *км* темир йўл бўйича юради. У ҳолда юкни ташиш учун ҳаммаси бўлиб

$$f(\alpha) = \frac{bx}{\sin\alpha} + (a - b\operatorname{ctg}\alpha)\frac{x}{m}$$

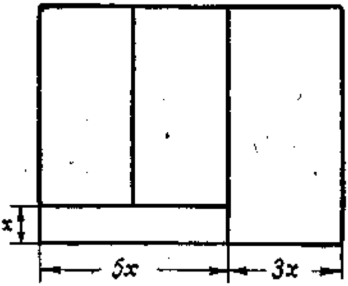
сўм пул сарфланади. Бундан кейин $f(\alpha)$ нинг минимуми топилсин.

1231. Иккита ёруғлик манбалари бир-биридан 30 *м* масофада жойлашган. Агар бу манбаларнинг ёруғлик кучлари 27:8 нисбатда бўлса, уларни туташтирувчи тўғри чизиқда энг суст ёритилган нуқта топилсин.

1232. Иккита самолёт бир хил v *км/соат* тезлик билан бир текислик устида 120° бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқлар бўйича учади. Маълум пайтда самолётлардан бири уларнинг ҳаракат чизиқларининг кесишган нуқтасида бўлган ва иккинчисини эса бу нуқтага етишга a *км* қолган. Қанча вақтдан сўнг улар орасидаги масофа энг кичик бўлади ва бу масофа нимага тенг?

1233. Икки учи таянч устига эркин қўйилган, кесими тўғри тўртбурчак бўлган балканинг барча нуқталари текис юкланган. Унинг эгилиш ўқи балка кесимининг инерция моменти $I = \frac{xy^3}{12}$ га тескари пропорционал, бунда x ва y — балканинг ўлчовлари. Агар балка, диаметри D бўлган юмалоқ ёғочдан кесиб олинган бўлса, эгилиш ўқи энг кичик бўлганда унинг ўлчовлари аниқлансин.

1234. Шар ҳажми унга ички чизилган энг катта цилиндр ҳажмидан неча марта катта бўлади?



31- чизма.

1235. Эни 2,4 ва 1,6 *м* бўлган икки даҳлиз тўғри бурчак остида кесишади. Бир даҳлиздан иккинчи даҳлизга (горизонтал ҳолатда) кўчириш мумкин бўлган нарвоннинг энг катта узунлиги аниқлансин.

1236. Асосининг радиуси 4 *дм*, баландлиги 6 *дм* бўлган конусга ҳажми энг катта цилиндр ички чизилган. Ўша цилиндрнинг ҳажми топилсин.

1237. Радиуси R бўлган ярим доирага юзи энг катта тўғри тўртбурчак ички чизилган. Тўғри тўртбурчак ўлчовлари аниқлансин.

1238. $y = x^2$ параболада $y = 2x - 4$ тўғри чизиққа энг яқин нуқта топилсин.

1239. Сурат деворга осилган. Унинг пастки қирраси кузатувчининг кўзидан b *см* баландликда, устки қирраси a *см* баландликда. Суратни энг катта бурчак остида кўриш учун кузатувчи девордан қанчалик узоқликда туриши керак?

Кўрсатма. Суратни девордан x *см* узоқликда туриб қарагандаги кўриш бурчаги қуйидагича аниқланади:

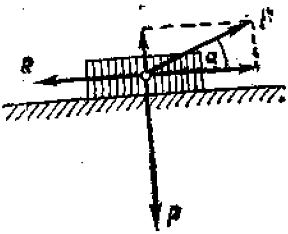
$$\alpha = \frac{(a-b)x}{ab + x^2}.$$

1240. Планда кўрсатилган уй деворларининг умумий узунлиги (31- чизма) 90 *м* га тенг. Даҳлизнинг эни x қандай бўлса, қолган уч хонанинг юзи энг катта бўлади?

1241. Гипотенузаси 8 *см* ва ўткир бурчакларидан бири 60° бўлган тўғри бурчакли учбурчакка асоси гипотенузада ётувчи тўғри тўртбурчак ички чизилган. Тўғри тўртбурчакнинг ўлчовлари қандай бўлганда унинг юзи энг катта бўлади?

1242. A (0; 3) ва B (4; 5) нуқталар берилган. Ox ўқда шундай P нуқта топилсинки, $S = AP + PB$ масофа энг кичик бўлсин.

1243. Балкани узунлиги бўйича қисганда кўрсатадиган қаршилиги кўндаланг кесими юзига пропорционал бўлади.



32- чизма.

Диаметри D бўлганда юмалоқ ёғочдан кесиб олинган балканинг ўлчовларини шундай аниқлангки, у энг катта қаршиликка эга бўлсин.

1244. Доирадан α бурчакли сектор қирқилиб, сўнгра ундан конус ясалган. α бурчак катталиги қандай бўлганда конуснинг ҳажми энг катта бўлади?

1245. Горизонтал текисликда ётувчи P оғирликка эга юкни (32- чизма) унга тиркалган F куч таъсири билан силжитиш керак. Сарф этиладиган F куч мумкин қадар кам бўлиши учун кучни текисликка нисбатан қандай бурчак остида йўналтириш керак? Ишқаланиш коэффициенти $\mu=0{,}25$.

6- §. Эгри чизиқ қавариқлигининг йўналиши ва бурилиш нуқталари. Эгри чизиқларни ясаш

1°. Қавариқлик. Агар $x=x_0$ нуқтанинг қандайдир атрофида (чапдан ва ўнгдан) эгри чизиқ ўша нуқтада ўтказилган уринмадан «пастда» («юқорида») жойлашган бўлса, эгри чизиқ шу нуқтада *қавариқлиги* билан «юқорига» («пастга») қараган дейилади.

Агар $x=x_0$ нуқтада:

1) *$y''>0$ бўлса, эгри чизиқнинг қавариқлиги пастга қараган бўлади;*

2) $y''<0$ бўлса, эгри чизиқнинг қавариқлиги юқорига қараган бўлади.

2°. Эгри чизиқ ўзининг бирор нуқтасида уринманинг бир томонидан иккинчи томонига ўтса (демак, у қавариқлигининг йўналишини ўзгартса), ўша нуқта эгри чизиқнинг бурилиш нуқтаси дейилади. Нуқтанинг бурилиш нуқта бўлиши учун *зарурий* шарт бўлиб ўша нуқтада $y''=0$ ёки унинг мавжуд бўлмаслиги ҳисобланса, ўша нуқта атрофида y'' ўз ишорасини ўзгартириши унинг *етарли* шарти бўлади.

3°. Эгри чизиқни ясаш учун қуйидагиларни аниқлаш тавсия қилинади: 1) симметриклиги; 2) жойлашиш соҳаси; 3) Ox ва Oy ўқлар билан кесишган нуқталари; 4) $y=\varphi(x)$ ёки $x=f(y)$ функцияларнинг узилиш нуқталари ва асимптоталари; 5) x ёки y нинг ўсиши ва камайиши ҳамда уларнинг экстремум нуқталари; 6) қавариқлик йўналиши ҳамда бурилиш нуқталари.

1246. 1) $y=x^2$; 2) $y=x^3$; 3) $y=e^x$; 4) $y=\ln x$; 5) $y=x^{3/2}$ эгри чизиқларнинг қавариқлик йўналишлари текширилсин ва ўзлари ясалсин.

1247. 1) $y=\frac{x^4}{6}-x^2$; 2) $y=e^{-x^2}$;

$$3)\ y=\frac{2x}{1+x^2};\quad 4)\ y=2^{\frac{1}{x}}$$

эгри чизиқларнинг экстремум ҳамда бурилиш нуқталари аниқлансин ва эгри чизиқлар ясалсин.

3° да кўрсатилган баъзи қоидаларни татбиқ қилиб, 1248—1262- масалалардаги тенгламалар билан берилган эгри чизиқлар ясалсин:

1248. $y^2=2x+9$. **1249.** $y=-x^2-4x$.

Кўрсатма. 1248- масалада симметриклиги, жойлашиш соҳаси ва координата ўқлари билан кесишган нуқталари, 1249- масалада бўлса экстремум ва Ox ўқ билан кесишган нуқталари аниқлансин.

1250. $y=\sin x$, $y=\cos x$. **1251.** $y=\operatorname{sh} x$, $y=\operatorname{ch} x$.

Кўрсатма. 1250, 1251- масалаларда экстремум ва бурилиш нуқталари аниқлансин.

1252. $y=\ln(x+2)$. **1253.** $y=e^{-x}$.

Кўрсатма. 1252, 1253- масалаларда жойлашиш соҳаси, ўқлар билан кесишган нуқталари, асимптоталари ҳамда қавариқлик йўналиши аниқлансин.

1254. 1) $y^2=x^3$; 2) $y^2=(x+3)^3$.

1255. 1) $y=2+\frac{12}{x^2-4}$; 2) $y=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$.

1256. 1) $y=\frac{e\ln x}{x}$; 2) $y=exe^{-x}$.

1257. 1) $y=x+\frac{4}{x+2}$; 2) $y=\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^2}$.

1258. 1) $y=x-\ln x$; 2) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

1259. 1) $y=\frac{x^4}{x^3-1}$; 2) $y=\frac{4}{x}+\frac{1}{x^4}$.

1260. 1) $y^2=2x^2-x^4$; 2) $x(y-x)^2=4$.

1261. $y=(x+2)^{2/3}-(x-2)^{2/3}$. **1262.** $y^2=xe^{-x}$.

VIII БОБ

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

1- §. Аниқмас интеграл. Ёйиш усули билан интеграллаш

1°. Аниқмас интеграл $\int f(x)\,dx$ деб, ўзгармас C ни ўз ичига олган шундай $F(x)+C$ функцияга айтиладики, унинг дифференциали *интеграл белгиси остидаги* $f(x)\,dx$ ифодага тенгдир, яъни агар

$$d\,[F(x)+C]=f(x)\,dx$$

бўлса, $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ бўлади.

2°. Асосий интегралларнинг жадвали:

1. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ $(n\neq-1)$.
2. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$
3. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$.
4. $\int e^x\,dx=e^x+C$.
5. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$.
6. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$.
9. $\int \frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg} x+C\\ \text{ёки}\\ -\operatorname{arc\,ctg} x+C_1.\end{cases}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C\\ \text{ёки}\\ -\arccos x+C_1.\end{cases}$

3°. Аниқмас интегралнинг хоссалари:

I. $d\int u\,dx=u\,dx$.

II. $\int du=u+C$.

III. $\int Au\,dx=A\int u\,dx$.

IV. $\int (u+v)\,dx=\int u\,dx+\int v\,dx$.

Ёйиш йўли билан интеграллаш (IV хоссага асосан) берилган интегрални содда интегралларнинг йиғиндисига келтиришдан иборатдир.

1263. Ушбу

1) $d(\quad) = 2x\,dx$; 2) $d(\quad) = x^3\,dx$;

3) $d(\quad) = \cos x\,dx$; 4) $d(\quad) = \frac{dx}{x}$;

5) $d(\quad) = \frac{dx}{\cos^2 x}$; 6) $d(\quad) = \frac{dx}{1+x^2}$

тенгликлардаги бўш жойлар тегишли мулоҳазалар ёрдамида тўлдирилсин. Сўнгра $\int 2x\,dx$, $\int x^3\,dx$ ва ҳоказо интеграллар топилсин.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1264. 1) $\int\left(x^3 + 2x + \frac{1}{x}\right)dx$; 2) $\int\frac{10x^8+3}{x^4}\,dx$.

1265. 1) $\int\frac{x-2}{x^3}\,dx$; 2) $\int\frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx$.

1266. 1) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\,dx$; 2) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)$

1267. 1) $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}\,dx$; 2) $\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2}}\,dx$.

1268. 1) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$; 2) $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$.

1269. 1) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$; 2) $\int\mathrm{ctg}^2 x\,dx$.

1270. 1) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 2) $\int\frac{3-2\,\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$.

1271. 1) $\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx$; 2) $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

1272. 1) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; 2) $\int\frac{x^4}{1+x^2}\,dx$.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1273. 1) $\int\frac{(x^2-1)^2}{x^3}\,dx$; 2) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$.

1274. 1) $\int\frac{x-2}{\sqrt{x^3}}\,dx$; 2) $\int\frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}\,dx$.

1275. 1) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$; 2) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

1276.) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$; 2) $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{x^5}\right)dx$.

1277. $\int\frac{1-\sin^3}{\sin^2 x}dx$. 1278. $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$.

2- §. Ўрнига қўйиш усули билан ва бевосита интеграллаш

$x=\varphi(u)$, $dx=\varphi'(u)\,du$ деб олсак,

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du \qquad (1)$$

бўлади.

Интегрални бу хилда алмаштириш *ўрнига қўйиш ёрдами билан интеграллаш* дейилади.

Содда ҳолларда, интеграл белгиси остидаги дифференциал ифодани қуйида кўрсатилгандек:

$$dx=\frac{1}{a}d(ax+b);\ 2x\,dx=d(x^2);$$

$$\cos x\,dx=d(\sin x); \qquad \frac{dx}{x}=d(\ln x) \text{ ва шунга ўхшаш}$$

алмаштириб ва қавслар ичидаги ифодаларни u деб фараз қилиш асосида, янги ўзгарувчи u ни киритиш амалини кўнгилда бажариш тавсия қилинади. Бу усул билан интеграллаш бевосита интеграллаш дейилади.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1279. $\int\cos 3x\,dx$. 1280. $\int\sin\frac{x}{2}\,dx$.

Кўрсатма. 1279- мисолни 1) $3x=u$, $x=\frac{u}{3}$, $dx=\frac{1}{3}du$ деб олиб!

2) берилган интегрални $\frac{1}{3}\int\cos 3x\,d(3x)$ кўринишга келтириб, икки усул билан ечиш мумкин.

1281. $\int e^{-3x}\,dx$. 1282. $\int\frac{dx}{\cos^2 5x}$.

1283. $\int\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$. 1284. $\int\sqrt{4x-1}\,dx$.

1285. $\int(3-2x)^4\,dx$. 1286. $\int\sqrt[3]{5-6x}\,dx$.

1287. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ 1288. $\int\sin(a-bx)\,dx$.

1289. $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}\,dx.$ 1290. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}.$

Кўрсатма. 1289—1298- мисоллар ушбу

$$\int \frac{u'\,dx}{u} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

формула билан ечилади, яъни интеграл белгиси остидаги касрнинг *сурати махражнинг дифференциалидан* иборат бўлса, у ҳолда *интеграл махражнинг логарифмига тенгдир.*

1291. $\int \frac{dx}{1-10x}.$ 1292. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{1-3e^{2x}}.$

1293. $\int \operatorname{ctg} x\,dx.$ 1294. $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

1295. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}\,dx.$ 1296. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+3\cos x}.$

1297. $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx.$ 1298. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}.$

1299. $\int \sin^2 x \cos x\,dx.$ 1300. $\int \cos^3 x \sin x\,dx.$

Кўрсатма. 1299- мисолни $\sin x = u$ деб ўрнига қўйиш йўли билан ёки бевосита $\cos x\,dx$ ни $d(\sin x)$ билан алмаштириб ечиш мумкин.

1301. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x}.$ 1302. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}.$

1303. $\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$ 1304. $\int \sin x \cos x\,dx.$

1305. $\int e^{\cos x} \sin x\,dx.$ 1306. $\int e^{x^3} x^2 dx.$

Кўрсатма. 1306-мисолни $x^3 = u$ ўрнига қўйиш йўли билан ёки бевосита x^2dx ни $\frac{1}{3}\,d(x^3)$ билан алмаштириб ечиш мумкин.

1307. $\int e^{-x^2} x\,dx.$ 1308. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}.$

1309. $\int \sqrt{x^2+1}\,x\,dx.$ 1310. $\int \sqrt[3]{x^3-8}\,x^2\,dx.$

Кўрсатма. 1309- мисолни $x^2+1=u$ ўрнига қўйиш усули билан ёки берилган интегрални $\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}} d(x^2+1)$ кўринишга келтириб ечиш мумкин.

1311. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$ 1312. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1313. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$. 1314. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}\,dx}{x}$.

1315. $\int \sqrt{1+4\sin x}\cos x\,dx$. 1316. $\int \sqrt[3]{1-6x^5}\,x^4\,dx$.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1317. $\int (e^x + e^{-x})^2\,dx$. 1318. $\int \sin^3 x \cos x\,dx$.

1319. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$. 1320. $\int \cos(a-bx)\,dx$.

1321. $\int \sqrt[3]{1+3x}\,dx$. 1322. $\int \sqrt[6]{1-2x^3}\,x^2\,dx$.

1323. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 1324. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

1325. $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}\,dx$. 1326. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

1327. $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^3}$ 1328. $\int \frac{dx}{(a-bx)^3}$.

3- §. $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$ кўринишдаги ва шу кўринишга келтириладиган интеграллар

1329. Қуйидагилар кўрсатилсин:

1) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ экани, $x = a\operatorname{tg} t$ деб;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ экани, $x = a\sin t$ деб;

3) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ экани, $\frac{1}{x^2-a^2}$ ни қуйидагича ёйиб: $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\,\frac{a+x+a-x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$ экани,
$\sqrt{x^2+k} = t - x$ деб.

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

1330. 1) $\int \frac{dx}{x^2-25}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

1331. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

1332. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+3}$.

1333. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$; 2) $\int \frac{x^2\,dx}{4+x^6}$.

1334. 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^4}}$; 2) $\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2}$.

1335. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$; 2) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8-1}}$.

1336. 1) $\int \frac{5x-2}{x^2+4}\,dx$; 2) $\int \frac{3x-4}{x^2-4}\,dx$.

1337. 1) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; 2) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1338. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+1}$. 1339. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2-3}$.

Кўрсатма. 1338, 1339-мисолларда олдин интеграл белгиси остидаги *нотўғри* касрнинг бутун қисмини ажратиш керак.

1340. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$. 1341. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$.

Кўрсатма. 1340—1347-мисолларда квадрат учҳадлардан тўлиқ квадрат бўлган қисмни ажратиш зарур.

1342. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. 1343. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

1344. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$. 1445. $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$.

1346. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. 1347. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1348. $\int \left(\frac{3}{x^2+3}+\frac{6}{x^2-3}\right)dx$.

1349. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx$.

1350. $\int \left(\frac{4x-5}{x^2+5}\right)dx$. 1351. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-2}$.

1352. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+2}$. 1353. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

1354. $\int \frac{x dx}{x^4+0,25}$. 1355. $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$.

1356. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$. 1357. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

1358. $\int \frac{x dx}{x^2+x+1}$. 1359. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$.

4-§. Бўлаклаб интеграллаш

Кўпайтманинг дифференциалини ҳисоблаш формуласи $d(uv) = u\,dv + v\,du$ дан бўлаклаб интеграллаш формуласи

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

келиб чиқади. Бу формула кўпроқ интеграл белгиси остида алгебраик функция билан трансцендент функциялар кўпайтмасидан иборат ифодалар бўлган ҳолларда татбиқ этилади. Масалан, $\int x^2 e^x\,dx$ ёки $\int x^3 \ln x\,dx$ га ўхшаш. Бу ҳолларда u деб дифференциаллаш натижасида соддалашадиган функцияни қабул қилиб, dv учун эса интеграл белгиси остидаги ифодaнинг dx ни ўз ичига олган ва интеграли маълум ёки топилиши мумкин бўлган қисми қабул қилинади.

Одатда u деб трансцендент функциялардан $\ln x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ ва $\arcsin x$ лар қабул қилинади.

Масалан, $\int x^2 \ln x\,dx$ интегралда u деб $\ln x$ ни (x^2 ни эмас), $\int x^2 e^x\,dx$ интегралда эса x^2 ни (e^x ни эмас) қабул қилиш керак.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1360. $\int \ln x\,dx$. 1361. $\int x \ln(x-1)\,dx$.

1362. $\int x e^{2x} dx$. 1363. $\int x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

1364. $\int x^2 \cos x\,dx$. 1365. $\int e^x \sin x\,dx$.

1366. $\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+k} + k\ln(x + \sqrt{x^2+k})\right] + C$ экани кўрсатилсин.

1367. $\int (\ln x)^2 dx$. 1368. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

1369. $\int \frac{\ln x\,dx}{x^2}$.   1370. $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

1371. $\int \arcsin x\,dx$.   1372. $\int x^3 e^{-x}\,dx$.

1373. $\int \ln(x^2+1)\,dx$.   1374. $\int \cos(\ln x)\,dx$.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1375. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$.   1376. $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx$.

1377. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.   1378. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

1379. $\int e^x \cos x\,dx$.   1380. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

1381. $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}$.   1382. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx$.

5-§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш

1°. Синус ҳамда косинуснинг квадратларидан ва уларнинг бошқа жуфт даражаларидан олинган интеграллар, ушбу

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};\ \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

формулаларни татбиқ этиб даражаларини пасайтиргандан сўнг топилади.

2°. Синус ҳамда косинуснинг кубларидан ва уларнинг бошқа тоқ даражаларидан олинадиган интеграллар, ўша тоқ даражалардан битта кўпайтувчини ажратиб ва *кофункцияни* u деб олиб топилади.

$\int \cos^m x \sin^n x dx$ интегралда m ва n ларнинг иккаласи ҳам жуфт бўлса, интеграл 1° усул билан топилади, борди-ю m ёки n лардан биттаси тоқ бўлса, 2° усул билан топилади.

1383. $\int \sin^2 3x dx$.   1384. $\int (1+2\cos x)^2\,dx$.

1385. $\int (1-\sin 2x)^2\,dx$.   1386. $\int \cos^4 x dx$.

1387. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$.   1388. $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$.

1389. $\int \sin^2 \cos^4 x\,dx.$ 1390. $\int \sin^5 x\,dx.$

1391. $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx.$ 1392. $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx.$

1393. $\int \cos^7 x\,dx.$ 1394. $\int (1+2\cos x)^3\,dx.$

1395. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x}.$ 1396. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^2 x}.$

1397. $\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x \cos x}dx = ?$

1398. 1) $\int \frac{dx}{\sin x}$, 2) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

1399. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x}dx.$ 1400. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}.$

1401. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx.$ 1402. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$

Кўрсатма. 1401-мисолда $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arc\,tg} t$ деб олинсин.

1403. $\int \sin 3x \cos x\,dx.$ 1404. $\int \cos mx \cos nx\,dx.$

Кўрсатма. 1403—1406-мисолларга ушбу

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\ \cos\alpha\cos\beta =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-$$

$$-\cos(\alpha+\beta)]$$

формулалар татбиқ қилинсин.

1405. 1) $\int \sin 3x \sin 5x\,dx$; 2) $\int \sin mx \sin nx\,dx.$

1406. $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx.$

1407. Бўлаклаб интеграллаш асосида ушбу

1) $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx;$

2) $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

«даражаларни пасайтириш» формулалари чиқарилсин ва ўша формулаларга асосан 1) $\int \sin^6 x\,dx$; 2) $\int \cos^6 x\,dx$ интеграллар топилсин.

1408. Ушбу

$$1)\ \int \frac{dx}{\sin^3 x}; \quad 2)\ \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

интеграллар топилсин.

Кўрсатма. $\int \frac{dx}{\sin x}$ ва $\int \frac{dx}{\cos x}$ интегралларга 1407- масаладаги формулалар татбиқ қилинсин.

1409. $\int (1 + 3\cos 2x)^2 dx.$

1410. $\int \sin^4 x\, dx.$

1411. $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx.$

1412. $\int \cos^5 x\, dx.$

1413. $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx.$

1414. $\int (1 + 2\sin x)^3 dx.$

1415. $\int \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin 2x} dx.$

1416. $\int \sin 3x \sin x\, dx.$

1417. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx.$

1418. $\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos x\, dx.$

6- §. Рационал алгебраик функцияларни интеграллаш

1°. Агар интеграл белгиси остидаги каср *нотўғри каср* бўлса, олдин ундан бутун қисмини ажратиш керак.

2°. Тўғри каср махражи $(x - a)^\alpha$ ва $(x^2 + px + q)^\beta$ кўринишдаги кўпайтувчиларга ажратилади, тўғри касрнинг ўзи эса

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha (x^2 + px + q)^\beta \ldots} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2 + px + q)^\beta} + \ldots$$

кўринишдаги бир нечта элементар касрлар йиғиндисига ажратилади. Бундаги $P(x)$—махражга нисбатан паст даражали кўпҳаддир.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1419. 1) $\int \frac{x^3}{x-2} dx$; 2) $\int \frac{x^4}{x^2+a^2} dx$; 3) $\int \frac{x^6}{x^3-a^3} dx.$

1420. $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} dx.$

1421. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx.$

1422. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx.$ 1423. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx.$

1424. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx.$ 1425. $\int \frac{3x-2a}{x^4-ax^3} dx.$

1426. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx.$ 1427. $\int \frac{5x-1}{x^3-3x-2} dx.$

1428. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx.$ 1429. $\int \frac{4x-2,4}{x^2-0,2x+0,17} dx.$

Кўрсатма. 1428-мисолнинг махражида тўлиқ квадрат ифодани ажратгандан сўнг $x+1$ ни t деб олиш керак.

1430. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4} dx.$ 1431. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x} dx.$

1432. $\int \frac{dx}{x^3+8}.$ 1433. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$

1434. 1) $\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^2}$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^3}.$

Кўрсатма. $x = b\,\mathrm{tg}\,t$ деб олиб, сўнгра (иккинчи мисолда) 1407-масаладаги 2) формулани татбиқ қилиш керак.

1435. 1) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+2x+5)^2}$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2-6x+10)^3}.$

1436. $\int \frac{4x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}.$ 1437. $\int \frac{x+1}{x^4+4x^2+4} dx.$

Аниқмас коэффициентларнинг умумий усулини татбиқ қилмасдан, қуйидаги интеграллар топилсин:

1438. $\int \frac{dx}{x(x+a)}.$ 1439. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

1438—1442-мисолларга *кўрсатма.* Интеграл белгиси остидаги касрнинг суратига махраж кўпайтувчиларининг айирмасини ёзиб, интегрални мос (ўша айирмага тенг) сонга бўлиш керак.

1440. $\int \frac{dx}{x^2-2x}.$ 1441. $\int \frac{dx}{(x^2-3)(x^2+2)}.$

1442. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$ 1443. $\int \frac{dx}{x^3+4x}.$

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1444. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx.$ 1445. $\int \frac{3x+2}{2x^2+x-3} dx.$

1446. $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}\,dx.$

1447. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}\,dx.$

1448. $\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx.$

1449. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,dx.$

1450. $\int \frac{x-a}{x^3+a^2x}\,dx.$

1451. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}.$

1452. $\int \frac{dx}{x^3-8}.$

1453. $\int \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}.$

1454—1457- мисоллардаги интеграллар аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланмасдан ҳисоблансин.

1454. $\int \frac{dx}{x^3+5x}.$

1455. $\int \frac{dx}{x^4+3x^2}.$

1456. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$

1457. $\int \frac{dx}{x^4-x^2-2}.$

7- §. Баъзи бир иррационал алгебраик функцияларни интеграллаш

1°. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$ кўринишдаги интеграл, бунда $R(x, y)$—рационал функция, $ax+b=t^n$ ўрнига қўйиш ёрдами билан топилади, умумийроқ кўринишдаги $\int R(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b})\,x^{m-1}\,dx$ интеграл бўлса, $ax^m+b=t^n$ ўрнига қўйиш ёрдами билан топилади.

2°. $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ кўринишдаги интеграл $x-a=\frac{1}{t}$ ўрнига қўйиш ёрдами билан топилади.

3°. Тригонометрик ўрнига қўйишлар.

$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ кўринишдаги интеграл $x=a\sin t$ ўрнига қўйиш натижасида, $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$ кўринишдаги интеграллар $x=a\operatorname{tg} t$ ўрнига қўйиш натижасида рационал тригонометрик кўринишга келтирилади.

4°. $\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ кўринишдаги интегралдан ушбу

$$\int \frac{a_0x^m+\ldots+a_m}{W}\,dx=(A_0x^{m-1}+\ldots+A_{m-1})W+A_m\int\frac{dx}{W}$$

формулага асосан алгебраик қисмини ажратиш мумкин. Бунда $W = \sqrt{ax^2+bx+c}$. A коэффициентлар тенгликнинг икки томонини дифференциаллаб ва махраждан қутқаргандан сўнг чап ва ўнг томонидаги бир хил даражали x лар олдидаги коэффициентларни тенглаштириб топилади.

5°. Дифференциал биномдан олинган $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ интеграл қуйидаги уч ҳолда охиригача олиниши мумкин: 1) p—бутун бўлганда ёйиш ёрдами билан; 2) $\frac{m+1}{n}$ бутун бўлганда $a+bx^n=t^s$ ўрнига қўйиш ёрдами билан; 3) $\frac{m+1}{n}+p$ бутун бўлганда эса $ax^{-n}+b=t^s$ ўрнига қўйиш ёрдами билан, s бунда p нинг махражидан иборат.

1° ўрнига қўйишдан фойдаланиб, қуйидаги интеграллар топилсин:

1458. $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx.$ **1459.** $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}.$

1460. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}.$ **1461.** $\int x\sqrt{a-x}\,dx.$

1462. $\int\frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}.$ **1463.** $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}.$

2° ўрнига қўйишдан фойдаланиб, қуйидаги интеграллар топилсин:

1464. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$ **1465.** $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}.$

1466. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}.$ **1467.** $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}.$

3° ўрнига қўйишдан фойдаланиб, қуйидаги интеграллар топилсин:

1468. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$ **1469.** $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$

1470. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$ **1471.** $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}.$

1472. $\int\sqrt{3+2x-x^2}\,dx.$ **1473.** $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}.$

4° қоидадан фойдаланиб, қуйидаги интеграллар топилсин:

1474. $\int\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$ **1475.** $\int\frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$

1476. $\int\sqrt{x^2+k}\,dx$. 1477. $\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx$.

Дифференциал биномлардан олинган қуйидаги интеграллар топилсин.

1478. $\int\frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$. 1479. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

1480. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 1481. $\int\frac{x^3dx}{(a-bx^2)^{3/2}}$.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1482. $\int\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$. 1483. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$.

1484. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$. 1485. $\int\frac{x}{\sqrt[3]{a-x}}\,dx$.

1486. $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$. 1487. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$.

1488. $\int\frac{x\,dx}{x^2+2+2\sqrt{1+x^2}}$. 1489. $\int\frac{x^3\,dx}{2+\sqrt{4-x^2}}$.

1490. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x}}$. 1491. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$.

1492. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 1493. $\int\sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx$.

Кўрсатма. 1493- мисолда $x=2\sin^2 t$ деб олинсин.

1494. $\int\sqrt{4x+x^2}\,dx$. 1495. $\int\frac{x^2}{\sqrt{5+4x+x^2}}\,dx$.

1496. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$. 1497. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

1498. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$. 1499. $\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

8- §. Баъзи бир трансцендент функцияларни интеграллаш

Қуйидаги интеграллар:

$\int R(e^x)\,dx$ интеграл $e^x=t$, $x=\ln t$, $dx=\frac{dt}{t}$ ўрнига қўйиш ёрдами билан;

$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ интеграл $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arc\,tg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ ўрнига қўйиш ёрдами билан;

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ интеграл $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ўрнига қўйиш ёрдами билан рационал алгебраик кўринишга келтирилади.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1500. $\int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1}\,dx$.

1501. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$.

1502. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x + 2}$.

1503. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

1504. $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$.

1505. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$.

1506. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

1507. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$.

Кўрсатма. Интеграл белгиси остида $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг фақат жуфт даражаларигина бўлган 1506, 1507, 1512, 1513- мисолларда

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

ўрнига қўйишни татбиқ қилиш яхши.

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1508. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x - 1}$.

1509. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

1510. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x} - 1}$.

1511. $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$.

1512. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1513. $\int \frac{dx}{1 + 3\sin^2 x}$.

1514. $\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}$.

1515. $\int \frac{1 + \cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

1516. $\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\,dx$.

1517. $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$.

9-§. Гиперболик функцияларни интеграллаш. Гиперболик ўрнига қўйишлар

1. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$ 2. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

3. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$ 4. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

$\operatorname{sh} x$ ва $\operatorname{ch} x$ ларнинг квадратларидан ва бошқа жуфт даражаларидан олинадиган интеграллар

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{sh} 2x - 1}{2}, \quad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}$$

формулаларни татбиқ қилиб топилади.

$\operatorname{ch} x$ ва $\operatorname{sh} x$ ларнинг тоқ даражаларидан олинадиган интеграллар $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг тоқ даражаларидан олинадиган интеграллар сингари топилади.

Гиперболик ўрнига қўйишлар баъзан $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\,dx$ кўринишдаги интегрални топишда татбиқ қилинади. Масалан, биринчи интегрални топишда $x = a \operatorname{ch} t$, иккинчисини топишда $x = a \operatorname{sh} t$ ўрнига қўйишлар татбиқ этилади. Шунинг билан бирга агар $x = a \operatorname{ch} t$ бўлса, у ҳолда $t = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right|$ бўлади, агар $x = a \operatorname{sh} t$ бўлса, у ҳолда $t = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$ бўлади.

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

1518. 1) $\int \operatorname{sh}^3 3x\,dx;$ 2) $\int (1 + \operatorname{sh} 2x)^2\,dx.$

1519. $\int \operatorname{ch}^3 x\,dx.$ **1520.** $\int \operatorname{th} x\,dx.$

1521. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1}.$ **1522.** $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}.$

1523. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx.$ **1524.** $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$

1525. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}.$ **1526.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 5)^3}}.$

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

1527. $\int \operatorname{sh}^3 3x\,dx.$ **1528.** $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\,dx.$

1529. $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x\,dx.$ **1530.** $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx.$

1531. $\int\sqrt{\operatorname{ch} x+1}\,dx$.

1532. $\int\frac{1+2\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$.

1533. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-3}}$.

1534. $\int\frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2}\,dx$.

10- §. Интеграллашга доир аралаш мисоллар

Қуйидаги интеграллар топилсин:

1535. $\int\frac{\sqrt{1+x}\,dx}{x}$.

1536. $\int\frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{1+x^2}$.

1537. $\int\frac{dx}{x^3+ax^2}$.

1538. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

1539. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1540. $\int\frac{dx}{\frac{\sin^2 x}{a^2}+\frac{\cos^2 x}{b^2}}$.

1541. $\int x\cos^2 x\,dx$.

1542. $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x}$.

1543. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

1544. $\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x}$.

1545. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

1546. $\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x}$.

1547. $\int\frac{\sin x\,dx}{b^2+\cos^2 x}$.

1548. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}}$.

1549. $\int\frac{ax-b}{(ax+b)^4}\,dx$.

1550. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$.

1551. $\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$.

1552. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+b\ln x}}$.

1553. $\int\frac{x^2dx}{(a-bx^3)^n}$.

1554. $\int\sqrt{1-2x-x^2}\,dx$.

1555. $\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}$.

1556. $\int\frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{x^2}$.

1557. $\int\frac{e^x-2}{e^{3x}+4}\,dx$.

1558. $\int\frac{dx}{(2x+1)(1+\sqrt{2x+1})}$.

1559. $\int\operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

1560. $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$.

1561. 1) $\int\frac{\cos x}{\cos 3x}\,dx$; 2) $\int\frac{\sin x}{\sin 3x}\,dx$.

1562. 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

1563. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2}\,dx.$

1564. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^3}\,dx.$

1565. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}}.$

1566. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}.$

1567. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

1568. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x}\,dx.$

1569. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}\,dx.$

1570. $\int \frac{\ln(\cos x)\,dx}{\sin^2 x}.$

1571. $\int \frac{dx}{e^{3x}-e^x}.$

1572. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x}.$

1573. $\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{x^2}.$

1574. $\int \sqrt{1-\sin x}\,dx.$

1575. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$

1576. $\int \frac{x\,dx}{x^4-x^2-2}.$

1577. $\int e^{-\sqrt{x}}\,dx.$

1578. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}.$

1579. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\sin 2x}.$

1580. $\int \frac{\ln(x^2+1)\,dx}{x^3}.$

1581. $\int \frac{a^x dx}{a^{2x}+1}.$

1582. $\int \frac{1-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

1583. $\int \sqrt{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}\,dx.$

1584. $\int \frac{x\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1585. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$

1586. $\int \frac{x^2dx}{(x+1)^4}.$

1587. $\int \frac{x-a}{\sqrt{2ax+x^2}}\,dx.$

1588. $\int \frac{4x+1}{2x^3+x^2-x}\,dx.$

1589. $\int \frac{\cos^3 x+1}{\sin^2 x}\,dx.$

1590. $\int \frac{dx}{x^4+4}.$

IX БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1- §. Аниқ интегрални ҳисоблаш

$[a, b]$ сегментда $f(x)$ функция аниқланган бўлсин. $[a, b]$ сегментни $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ нуқталар билан n та бўлакларга ажратайлик. Ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$ сегментдан ихтиёрий ξ_i нуқта олиб, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ йиғиндини тузамиз, бунда $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ кўринишдаги йиғинди *интеграл йиғинди* дейилиб, унинг $\max \Delta xi \to 0$ даги лимити, у мавжуд ва чекли бўлса, $f(x)$ функциянинг a дан b гача *аниқ интеграли* дейилади ҳамда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1}$$

кўринишда ёзилади.

Бу ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда *интегралланувчи* дейилади. $f(x)$ функциянинг *интегралланувчи бўлиши* учун унинг $[a, b]$ сегментда *узлуксиз* бўлиши ёки чекли сондаги чекли узилишларга эга бўлиши кифоядир.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. У ҳолда бу сегментда

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{2}$$

аниқмас интеграл мавжуддир ва ушбу

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b \tag{3}$$

формула ўринли, яъни *узлуксиз функциядан олинган аниқ интеграл бошланғич функциянинг* (ёки аниқмас интегралнинг) *юқори ва қуйи чегаралардаги қийматларининг айирмасига* тенгдир. (3) формула Н ь ю т о н-Л е й б н и ц формуласи дейилади.

1591. Ушбу

1) $\int\limits_0^a x\,dx$; 2) $\int\limits_0^a x^2\,dx$; 3) $\int\limits_0^a e^x dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$

интеграллар интеграл йиғиндиларни тузиш ва лимитга ўтиш йўли билан топилсин.

Кўрсатма. Иккинчи ва тўртинчи мисолларни ечишда 1034 ва 647- мисолларнинг натижаларидан фойдаланилсин.

1592. [1, 2] сегментни бешта тенг бўлакка ажратиб $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ интеграл учун s_5 ва S_5 «қуйи» ва «юқори» интеграл йиғиндилар ҳисоблансин. Натижа интегралнинг аниқ қиймати билан таққослансин.

Кўрсатма. Ажралган бўлакларнинг i-сида интеграл остидаги функциянинг энг кичик қийматини m_i, энг катта қийматини эса M_i деб белгиласак, $s_5 = \sum\limits_{i=1}^{5} m_i \Delta x$, $S_5 = \sum\limits_{i=1}^{5} M_i \Delta x$.

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

1593. $\int\limits_1^3 x^3\,dx$.

1594. $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$.

1595. $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx$.

1596. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

1597. $\int\limits_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$.

1598. $\int\limits_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$.

1599. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

1600. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\,dx$.

1601. $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$.

1602. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \mathrm{tg}^2 x}{(1 + \mathrm{tg} x)^2} dx$.

Кўрсатма. 1601- мисолда $x = t^2$ ўрнига қўйишни татбиқ этиш керак; бунда интегралнинг чегаралари ўзгаради, буни

x	4	9
t	2	3

жадвал билан кўрсатиш мумкин. Шунга ўхшаш 1602- мисолда $\operatorname{tg} x = t$ ўрнига қўйишни татбиқ этиб, бунга мос равишда интеграл чегараларини ўзгартириш керак.

1603. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. 1604. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

1605. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$. 1606. $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$.

1607. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\,dx$. 1608. $\int\limits_0^{\sqrt{a}} x^2\sqrt{a-x^2}\,dx$.

1609. $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\,dx$. 1610. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

1611. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 1612. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

1613. 1407- масала формуласидан

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx$$

тенгликни ҳосил қилиб,

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx$

интеграллар ҳисоблансин.

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

1614. $\int\limits_0^a (x^2-ax)\,dx$. 1615. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2}$.

1616. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

1617. $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

1618. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$.

1619. $\int\limits_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$.

1620. $\int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$.

1621. $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$.

1622. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

1623. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3 x\,dx$.

1624. 1407-масаланинг формуласидан

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx$$

тенглик чиқарилсин ва

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\,dx$

интеграллар ҳисоблансин.

2-§. Юзларни ҳисоблаш

1°. *Ox* ўққа ёпишган A_1ABB_1 эгри чизиқли трапециянинг юзи (33-чизма).

$$S = \lim_{\Delta x\to 0} \sum y\Delta x = \int\limits_{x_1}^{x_2} y\,dx. \qquad (1)$$

A_1APP_1 ўзгарувчи юзнинг дифференциали $dS = y\,dx$. Агар эгри чизиқ $x = f(t)$ ва $y = \varphi(t)$ тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда $dS = \varphi(t)\cdot f'(t)\,dt$.

2°. *Oy* ўққа ёпишган эгри чизиқли трапециянинг юзи

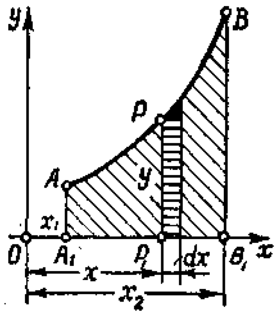
$$S = \lim_{\Delta y\to 0} \sum x\Delta y = \int\limits_{y_1}^{y_2} x\,dy. \qquad (2)$$

Ўзгарувчи юзнинг дифференциали $dS = x\,dy$.

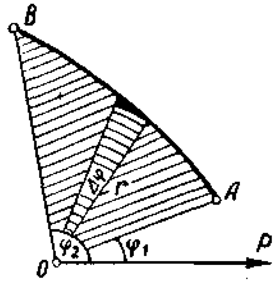
3°. Қутб координаталар системасида берилган эгри чизиқли OAB секторнинг юзи (34-чизма).

$$S = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\sum \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r^2\, d\varphi. \qquad (3)$$

Ўзгарувчи юзнинг дифференциали $dS = \frac{1}{2} r^2\, d\varphi$.



33- чизма.



34- чизма

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзлар ҳисоблансин:

1625. $y = 4 - x^2$, $y = 0$. **1626.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1627. $y^2 = 2px$, $x = h$. **1628.** $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$.

1629. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$. **1630.** $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.

1631. $y^2 = 2x + 4$, $x = 0$. **1632.** $y^2 = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

1633. $y^2 = (4 - x)^3$, $x = 0$. **1634.** $4(y^2 - x^2) + x^3 = 0$ эгри чизиқ илмоғи.

1635. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. **1636.** $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

1637. $a^2y^2 = x^3(2a - x)$. **1638.** $(y - x)^2 = x^3$, $x = 1$.

1639. $y^2(2a - x) = x(x - a)^2$ строфоида илмоғи.

1640. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ занжир чизиқ, $x = \pm a$ ва $y = 0$ чизиқлар.

1641. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг бир даври (аркаси) ва Ox ўқ.

1642. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроида.

1643. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ лемниската.

1644. $r = a(1 - \cos\varphi)$ кардиоида.

1645. $r = 3 + \sin 2\varphi$ | ҳар бир чизиқнинг қўшни энг
1646. $r = 2 - \cos 3\varphi$ | катта ва энг кичик радиус-векторлари орасидаги юз.

1647. $r = a \cos 2\varphi$ 1648. $r = a \sin 3\varphi$.

1649. $r = a(\sin\varphi + \cos\varphi)$. 1650. $r = \frac{a}{\varphi}$. $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

1651. $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ эгри чизиқ билан чегараланиб, қутб ўқидан пастда ётган юз.

1652. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ Декарт япроғининг илмоғи билан чегараланган юз (83-чизмага қаралсин) (қутб координаталарига ўтилсин).

Кўрсатма. $\int \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)^2}$ интегралда касрнинг сурат ва махражини $\cos^6\varphi$ га бўлиб, $\operatorname{tg}\varphi = u$ деб олиш керак.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзлар ҳисоблансин:

1653. $y = 6x - x^2$, $y = 0$. 1654. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

1655. $y^2 = 1 - x$ ва $x = -3$. 1656. $y^2 + x^4 = x^2$.

1657. $y = x^2 + 4x + 5$, $x = 0$, $y = 0$ ва берилган параболанинг минимал ординатаси билан чегараланган юз.

1658. $y = \sin x$ синусоиданинг битта ярим тўлқини ва $y = 0$ орасидаги юз.

1659. $4y = x^2$ ва $y^2 = 4x$.

1660. $xy = 6$ ва $x + y - 7 = 0$.

1661. $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ эгри чизиқнинг илмоғи билан чегараланган юз.

1662. $r = 3 - \cos 2\varphi$ | ҳар бир чизиқнинг қўшни энг
1663. $r = 2 + \sin 3\varphi$ | катта ва энг кичик радиус-векторлари орасидаги юз.

1664. $r = a \sin 2\varphi$. 1665. $r = a \cos 3\varphi$.

1666. $r = ae^{\varphi}$; $\varphi = -\pi$ дан $\varphi = \pi$ гача.

1667. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ва $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ эллипсларнинг умумий қисмининг юзи (қутб координаталарига ўтилсин).

1668. $r = a(1 + \sin^2 2\varphi)$ ва $r = a$.

3- §. Айланиш жисмининг ҳажми

1°. A_1ABB_1 эгри чизиқли трапециянинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми, $\overset{\frown}{AB}$ ёй $y = f(x)$ эгри чизиқнинг ёйи бўлса,

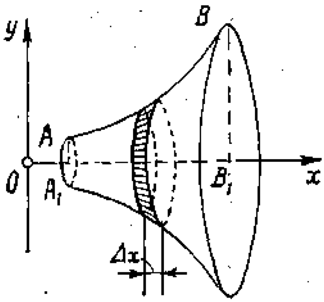
$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \pi y^2 \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 \, dx \qquad (1)$$

формула билан аниқланади.

Ўзгарувчи ҳажмнинг дифференциали $dV = \pi y^2 \, dx$.

2°. Oy ўққа ёпишган эгри чизиқли трапециянинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми

$$V = \lim_{\Delta y \to 0} \sum \pi x^2 \Delta y = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 \, dy \qquad (2)$$



35- чизма.

формула билан аниқланади.

Ўзгарувчи ҳажмнинг дифференциали $dV = \pi x^2 \, dy$.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг айланишидан ҳосил бўлган жисмларнинг ҳажмлари аниқлансин:

1669. $y^2 = 2px$ ва $x = h$, Ox ўқ атрофида.

1670. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ва $y = \pm b$, Oy ўқ атрофида.

1671. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, Ox ўқ атрофида.

1672. $y^2 = (x + 4)^3$ ва $x = 0$, Oy ўқ атрофида

1673. $x^2 + y^2 = a^2$, $x = b > a$ тўғри чизиқ атрофида.

Кўрсатма. $dV = \pi (b + x)^2 dy - \pi (b - x)^2 dy = 4 \pi bx dy$.

1674. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x = \pm a$, $y = 0$, Ox ўқ атрофида.

1675. $y^2 = 4 - x$, $y = 0$, Oy ўқ атрофида.

1676. $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$, Ox ўқ атрофида.

1677. $y = \cos x$ ва $y = -1$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ бўлганда $y = -1$ тўғри чизиқ атрофида.

1678. $y = x\sqrt{-x}$, $x = -4$ ва $y = 0$, Oy ўқ атрофида

1679. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x = 0$; $y = 0$, ($x > 0$ бўлганда) Ox ўқ атрофида.

1680. $y = a - \frac{x^2}{a}$ ва $x + y = a$, Oy ўқ атрофида.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг айланишидан ҳосил бўлган жисмларнинг ҳажмлари аниқлансин:

1681. $y = \sin x$ (битта ярим тўлқини), $y = 0$, Ox ўқ атрофида.

1682. $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$, Oy атрофида.

1683. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x = \pm 1$, $y = 0$, Ox ўқ атрофида.

1684. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, Oy ўқ атрофида.

1685. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, Ox ўқ атрофида.

1686. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, Oy ўқ атрофида.

1687. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = \pm 2a$, Ox ўқ атрофида.

1688. $y = x^2$, $y = 4$, $x = 2$ тўғри чизиқ атрофида.

Кўрсатма. $dV = \pi(2+x)^2 dy - \pi(2-x)^2 dy$.

1689. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг бир даври, Ox ўқ атрофида.

1690. $(y-3)^2 + 3x = 0$, $x = -3$, Ox ўқ атрофида.

4- §. Текис эгри чизиқ ёйининг узунлиги

1°. $y = f(x)$ эгри чизиқ $\overset{\frown}{AB}$ ёйининг узунлиги:

$$s = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{1}$$

Ёй дифференциали: $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

2°. $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ эгри чизиқ $\overset{\frown}{AB}$ ёйининг узунлиги:

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt. \tag{2}$$

3°. $r = f(\varphi)$ эгри чизиқ $\overset{\frown}{AB}$ ёйининг узунлиги

$$s = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi. \tag{3}$$

Қуйидаги эгри чизиқлар ёйларининг узунликлари аниқлансин:

1691. $y^2 = x^3$ эгри чизиқнинг $x = \frac{4}{3}$ тўғри чизиқ билан кесилган қисмининг узунлиги.

1692. $x^2 + y^2 = a^2$ эгри чизиқнинг бутун узунлиги.

1693. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ эгри чизиқнинг бутун узунлиги.

1694. $y^2 = (x+1)^3$ эгри чизиқнинг $x = 4$ тўғри чизиқ билан кесилган қисмининг узунлиги.

1695. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоида бир даврининг узунлиги.

1696. $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ эгри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари орасидаги қисмининг узунлиги.

1697. $y = \frac{x^2}{2} - 1$ эгри чизиқнинг Ox ўқ кесган бўлагининг узунлиги.

Кўрсатма. $\int\sqrt{1+x^2}$ интегрални бўлаклаб ёки 1366- масаладаги формула ёрдами билан ҳисоблаш мумкин.

1698. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ эгри чизиқнинг $x = \pm a$ тўғри чизиқлар орасидаги қисмининг узунлиги.

1699. $y = \ln x$ нинг $x = \frac{3}{4}$ дан $x = \frac{12}{5}$ гача бўлган қисмининг узунлиги.

Кўрсатма. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$ интеграл $1 + x^2 = t^2$ ўрнига қўйиш ёрдами билан топилади.

1700. $y = \ln(2\cos x)$ эгри чизиқнинг Oy ва Ox ўқлар билан кесишган икки қўшни нуқталари орасидаги қисмининг узунлиги.

1701. 1) $9y^2 = x(x-3)^2$ эгри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишган нуқталари орасидаги қисмининг узунлиги.

2) $e^{2y}\,\mathrm{th}\,x = 1$ эгри чизиқ ёйининг $x = 1$ дан $x = 2$ гача бўлган узунлиги.

1702. 1) $r = a(1 - \cos\varphi)$ кардиоиданинг;

2) $r = a\varphi$ спираль биринчи гажаги ёйининг узунлиги.

1703. $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ эгри чизиқнинг бутун узунлиги.

1704. Эластик ип бир хил баландликдаги A ва B нуқталарга осилган. $AB = 2b$ ва ипнинг эгилиш ўқи f га тенг. Ипнинг шакли параболадан иборат деб ҳисоблаб, $\frac{f}{b}$ етарли кичик бўлганда $s \approx 2b\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{b^2}\right)$ экани кўрсатилсин.

Кўрсатма. 1157- масаладаги $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha$ тақрибий формула татбиқ қилинсин.

1705. $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$ нинг $x = -1$ тўғри чизиқ билан кесилган қисмининг узунлиги.

1706. $y = \ln(\sin x)$ нинг $x = \frac{\pi}{3}$ дан $x = \frac{2\pi}{3}$ гача қисмининг узунлиги.

1707. $y = \ln(1 - x^2)$ нинг $x = -\frac{1}{2}$ дан $x = \frac{1}{2}$ гача қисмининг узунлиги.

1708. $y^2 = 2px$ нинг $x = \frac{p}{2}$ тўғри чизиқ билан кесилган қисмининг узунлиги.

1709. $\left.\begin{array}{l} x = t^2, \\ y = \frac{b}{t}(t^2 - 3) \end{array}\right\}$ Ox ўқ билан кесишган нуқталари орасидаги бўлагининг узунлиги.

5- §. Айланиш жисми сиртининг юзи

1. $y = f(x)$ эгри чизиқ ёйи $\smile{AB}$ нинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг юзи:

$$P_x = 2\pi \int_{\smile{AB}} y\,ds, \quad \text{бунда} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

2°. $x = \varphi(y)$ эгри чизиқ ёйи $\smile{AB}$ нинг Oy ўқ атрофида айланишдан ҳосил бўлган сирт юзи:

$$P_y = 2\pi \int_{\smile{AB}} x\,ds, \quad \text{бунда} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Қуйидаги эгри чизиқларнинг айланишидан ҳосил бўлган сиртларнинг юзлари аниқлансин:

1710. $x^2 + y^2 = R^2$, Ox ўқ атрофида.

1711. $y = \frac{x^2}{2}$ нинг $y = 1{,}5$ тўғри чизиқ билан кесишган қисми, Oy ўқ атрофида.

1712. $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ нинг $x = \pm a$ тўғри чизиқлар орасидаги қисми, Ox ўқ атрофида.

1713. $4x^2 + y^2 = 4$, Oy ўқ атрофида.

Кўрсатма. y ни эркли ўзгарувчи деб олсак, изланган сирт юзи.

$$P = \pi \int_0^2 \sqrt{16 - 3y^2}\,dy$$ бўлади. Сўнгра $y = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin t$ ўрнига қўйишни татбиқ этамиз.

1714. $y = \sin x$ эгри чизиқнинг битта ярим тўлқини, Ox ўқ атрофида.

1715. $\left.\begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right\}$ циклоиданинг бир даври, Ox ўқ атрофида.

1716. $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ эгри чизиқ илмоғи, Ox ўқ атрофида.

1717. $x^2 + y^2 = a^2$, $x = b > a$ тўғри чизиқ атрофида.

Кўрсатма.

$$dP = 2\pi(b + x)\, ds + 2\pi(b - x)\, ds.$$

Қуйидаги эгри чизиқлар ёйларининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртларнинг юзлари аниқлансин:

1718. $y = \frac{x^3}{3}$ эгри чизиқнинг $x = -2$ дан $x = 2$ гача бўлган ёйи.

1719. $y^2 = 4 + x$ эгри чизиқнинг $x = 2$ тўғри чизиқ билан кесилган қисми.

1720. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ эгри чизиқнинг барча ёйи.

1721. $x = \frac{t^3}{3}$, $y = 4 - \frac{t^2}{2}$ эгри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталари орасидаги қисми.

6- §. Физика масалалари

1722. Баландлиги 6 *м* ва асоси 8 *м* тўғри бурчакли вертикал шлюзга бўлган сув босими аниқлансин. Шлюзнинг пастки ярмига бўлган босим ҳам аниқлансин.

1723. a асоси сув юзида жойлашган, баландлиги h га тенг уч бурчакли вертикал юзга бўлган сув босими аниқлансин.

1724. $2R$ диаметри сув юзида жойлашган вертикал ярим доирага бўлган сув босими аниқлансин.

1725. Тўғон юқори асоси 20 *м*, қуйи асоси 10 *м* ва баландлиги 6 *м* бўлган трапеция шаклида. Сувнинг тўғонга бўлган босими аниқлансин.

Кўрсатма. BC нинг тенгламаси: $\frac{x}{6} = \frac{y - 20}{-10}$ ёки $y = -\frac{5}{3}x + 20$.

Сув учун $\omega = 1$; $P = \int_0^6 \left(20 - \frac{5}{3}x\right) x\, dx = 240\ T$.

1726. $x=0$, $x=a$, $y=0$ ва $y=b$ чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан инерция моментлари аниқлансин.

Кўрсатма. Тўғри тўртбурчакни горизонтал, юзларга ажратиб, ҳар бир юзни ундан Ox ўққача бўлган масофа квадратига, яъни y^2 га кўпайтирамиз. Кўпайтмаларни қўшиб лимитга ўтсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$J_x=\lim_{\Delta y\to 0}\sum a\Delta y\cdot y^2=\int_0^b ay^2\,dy.$$

$$\text{Шунга ўхшаш } J_y=\int_0^a bx^2\,dx.$$

1727. $x=0$, $y=0$ ва $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан инерция моментлари топилсин.

1728. $x=2$, $y=x^2$ ва $y=0$ чизиқлар билан чегараланган юзнинг Oy ўққа нисбатан инерция моменти топилсин.

1729. $x=0$, ва $x+y=a$ чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик моменти ва оғирлик марказининг координаталари топилсин.

Кўрсатма. Статик моментлар қуйидагидан иборат:

$$M_x=\int_0^a xy\,dy,\ M_y=\int_0^a xy\,dx.$$

Оғирлик марказининг координаталари:

$$x_c=\frac{M_y}{S},\qquad y_c=\frac{M_x}{S},$$

бунда S — шаклнинг юзи.

1730. $a^2y=bx^2$, $x=a$ ва $y=0$ чизиқлар билан чегараланган юзнинг оғирлик маркази топилсин.

1731. $x^2+y^2=a^2$ айлананинг Ox ўқ билан кесишишидан ҳосил бўлган ярим доиранинг оғирлик маркази топилсин.

1732. 1) Асосининг радиуси 0,5 *м* бўлган цилиндрик ҳовуздаги сувнинг бошланғич сатҳи 2,8 *м* ва цилиндрдаги сув оқиб чиқадиган жўмракдан 0,2 *м* қуйи бўлса, ҳовуздаги сувни тортиб чиқариш учун сарф этилган иш ҳисоблансин.

2) Радиуси R *м* бўлган ярим шардаги сувни тортиб чиқариш учун сарф этилган иш ҳисоблансин.

1733. Массаси m бўлган жисмни ердан h баландликка кўтариш учун сарф этиш керак бўлган иш аниқлансин.

Кўрсатма. Ер марказидан x масофада марказга тортиш кучи F ушбу $F : mg = R^2 : x^2$ пропорциядан аниқланади, бунда R — ер шарининг радиуси.

1734. Қозон асосининг радиуси $R = 0{,}4$ *м*, чуқурлиги $H = 0{,}5$ *м* дан иборат айланиш параболоид шаклида. Сув тўлдирилган шундай қозондан барча сувни тортиб чиқариш учун сарф этилган иш аниқлансин.

1735. Цилиндрдаги поршень остида ҳажми $V_0 = 0{,}1$ *м*^{3}, эластиклиги $p_0 = 10330$ *кГ/м*^{2} бўлган ҳаво бор. Ҳаво ҳажмини $V_1 = 0{,}03$ *м*^{3} га келтириш учун, ҳавони изотермик қисиш учун бажарилган иш аниқлансин. (Бойль-Мариотт қонуни бўйича $pV = P_0V_0$.)

1736. Узунлиги 1 *м*, кесим радиуси 2 *мм* бўлган мис симни 0,001 *м* чўзиш учун сарф этилган иш ҳисоблансин.

Кўрсатма. Узунлиги l *м*, кесими s *мм*^{2} бўлган симни x *м* чўзиш учун сарф этиладиган куч $F = E\frac{sx}{l}$ формула билан аниқланади, бунда E — эластиклик модули. Мис учун $E \approx 12\,000$ *кГ/мм*^{2} деб олиш мумкин.

1737. Асоси $S = 420$ *см*^{2}, баландлиги $H = 40$ *см* бўлган цилиндрик идишдаги сув цилиндр тубидаги юзи $s = 2$ *см*^{2} бўлган тешикдан қанча вақт ичида оқиб тамом бўлади?

Кўрсатма. Юксаклиги x *см* баландликда бўлган сувнинг оқиш тезлиги $v = \mu\sqrt{2gx}$ формула билан ҳисобланади, бунда μ — суюқликнинг ёпишқоқлигига, идишнинг шаклига ва тешикнинг юзига боғлиқ коэффициент. Бу ерда ва шунингдек 1738- масалада $\mu = 0{,}6$ деб оламиз.

1738. Пастки асосининг радиуси $r = 0{,}3$ *см*, юқори асосининг радиуси $R = 6$ *см*, баландлиги $H = 40$ *см* бўлган конус шаклидаги воронкадан сув қанча вақт ичида оқиб бўлади (1737- масалага берилган кўрсатмага қаранг)?

1739. Баландлиги h, асоси a сув юзига параллел, унга қарши учи эса сув юзида бўлган уч бурчакли вертикал юзга бўлган сув босими аниқлансин.

1740. Асоси 4 *м* га тенг ва сув юзига жойлашган параболик сегментнинг учи 4 *м* чуқурликда ётади. Ўша сегментга бўлган сув босими аниқлансин.

1741. Баландлиги h га тенг тўғри бурчакли шлюз шундай x чуқурликда икки горизонтал бўлакка ажратилсинки, уларга бўлган сув босими бир хил бўлсин.

1742. Горизонтал ўққа эга цилиндрик идиш ярмисигача ёғ (солиштирма оғирлиги 0,9) билан тўлдирилган. Агар цилиндр текис деворларининг радиуси 2 *м* га тенг бўлса, уларнинг ҳар бирига бўлган ёғ босими аниқлансин.

1743. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ доира чорак юзининг Ox ўққа нисбатан инерция моменти топилсин.

1744. $y = 4 - x^2$ ва $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган юзнинг оғирлик марказининг координаталари топилсин.

1745. Баландлиги $H = 2$ *м*, асосининг радиуси $R = 0{,}3$ *м* га тенг конус шаклидаги чуқурдан (конуснинг учи пастга қараган) барча сувни тортиб чиқариш учун бажариш керак бўлган иш ҳисоблансин.

1746. Ҳажми $V_0 = 0{,}1$ *м*^{3}, эластиклиги $p_0 = 10330$ *кГ/м*^{2} га тенг ҳавони $V_1 = 0{,}03$ *м*^{3} ҳажмгача адиабатик қисиш учун бажарилган иш аниқлансин. (Адиабатик қисиш Пуассон қонунига бўйсунади: $pV^k = p_0V_0^k$ бунда $k \approx 1{,}4$.)

1747. Радиуси 40 *см* га тенг ярим шар шаклидаги идишни тўлғазиб турган сув қанча вақт ичида шар тубидаги юзи 2 *см*^{2} бўлган тешикдан оқиб бўлади? (1737-масалага берилган кўрсатмага қаралсин; ёпишқоқлик коэффициентини $\mu = 0{,}8$ деб фараз қиламиз).

7-§. Хосмас интеграллар

1°. Таърифлар.

I. Агар $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ мавжуд ва чекли бўлса, у $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл деб айтилади. $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ ва $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграллар ҳам шунга ўхшаш таърифланади.

II. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментнинг c нуқтасидан бошқа барча нуқталарида узлуксиз бўлиб, c да II тур узилишга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ дан a дан b гача чегараларда олинган интеграл деб

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

йиғиндига айтилади (агар бу лимитлар мавжуд ва чекли бўлса).

Чегаралари чексиз бўлган ҳамда узлуксиз (чегараланмаган) функциялардан олинган интеграллар хосмас интеграллар дейилади.

Агар юқорида келтирилган лимитлар чекли бўлса умумлашган интеграллар *яқинлашади*, чекли бўлмаса — *узоқлашади* дейилади.

2°. Хосмас интегралларнинг яқинлашиши кўпинча таққослаш методи билан аниқланади: агар $x>a$ бўлганда $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ бўлса ва $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ яқинлашса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ҳам яқинлашади. Шунга ўхшаш яқинлашиш аломатини узилувчи функциядан олинган интеграл учун ҳам кўрсатиш мумкин.

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

1748. 1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$; 3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}$.

1749. 1) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$; 3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

4) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; 5) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+x}$; 6) $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx$.

1750. 1) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{x^2}$; 3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

1751. 1) $\int\limits_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; 2) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$; 3) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

1752. Қуйидаги интегралларнинг яқинлашиши текширилсин.

1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$; 2) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$; 3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x}$;

4) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^2}$; 5) $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$; 6) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx$.

1753. 1) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^n}$; 2) $\int\limits_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^n}$ ($b>a$ бўлганда).

Кўрсатма. $n=1-\alpha<1$, $n=1$ ва $n=1+\alpha>1$ бўлган уч ҳол кўрилсин.

1754. $y=\frac{1}{1+x^2}$ зулф билан унинг асимптотаси орасидаги юз ҳисоблансин.

1755. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ эгри чизиқ билан унинг асимптотаси орасидаги юз ҳисоблансин ($x > 0$ бўлганда).

1756. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ циссоида билан унинг асимптотаси орасидаги юз ҳисоблансин.

Кўрсатма. $x = 2a\sin^2 t$ деб параметрик тенгламаларга ўтиш керак.

1757. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ циссоиданинг ўз асимпототаси атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми аниқлансин (1756-масалага қаралсин).

1758. $y = e^{-x}$ эгри чизиқнинг x мусбат бўлгандаги чексиз ёйининг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажми аниқлансин.

1759. $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ эгри чизиқнинг $x \geqslant 1$ бўлгандаги чексиз шохчасининг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

1760. 1) m бутун ва мусбат бўлганда

$$\left.\begin{array}{l} 1) \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^m \, dx = m\,!; \\ 2) \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2m+1} \, dx = \frac{m!}{2} \end{array}\right\} \text{ экани кўрсатилсин*.}$$

1761. Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

$$1) \int_2^\infty \frac{dx}{x^2}; \quad 2) \int_0^\infty x^2 e^{-x^3}\, dx; \quad 3) \int_1^\infty \frac{\ln x \, dx}{x^2}; \quad 4) \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}.$$

Кўрсатма. 3) мисолда $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$ ни топишда Лопитал қоидаси татбиқ этилсин.

---

* $\int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx = \Gamma(t)$ функция t нинг гамма-функцияси дейилади. 1760-масаладаги 1) мисолдан t бутун ва > 1 бўлганда $\Gamma(t) = (t-1)!$ экани келиб чиқади. Бу ерда $t=$деб шартли $0! = \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} x^0 dx = 1$ га эга бўламиз. Шунинг учун $0! = 1$ деб ҳисобланади.

1762. 1) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 2) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}}$; 3) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x^4}$.

1763. $y=e^{-2x}$ эгри чизиқ ва координата ўқлари орасидаги юз ҳисоблансин ($x>0$ бўлганда).

1764. $xy=4$, $y=1$, $x=0$ чизиқлар билан чегараланган чексиз узун юз Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

1765. $y=xe^{-\frac{x}{2}}$ эгри чизиқнинг ($x>0$ бўлганда) ўз асимптотаси атрофида айланишдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми аниқлансин.

8- §. Функциянинг ўрта қиймати

Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ интегралнинг чегаралари орасида шундай $x=c$ топиладики,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c) \qquad (1)$$

бўлади. Функциянинг

$$y_m=f(c)=\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a} \qquad (2)$$

қиймати $y=f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги ўрта қиймати дейилади.

1766. Қуйидаги функцияларнинг ўрта қийматлари аниқлансин:

1) $y=\sin x$, $[0, \pi]$ сегментда;
2) $y=\operatorname{tg} x$, $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ сегментда;
3) $y=\ln x$, $[1, e]$ сегментда;
4) $y=x^2$, $[a, b]$ сегментда:
5) $y=\frac{1}{1+x^2}$, $[-1, 1]$ сегментда.

Ҳар бир мисолда функция ўрта қиймати чизмада кўрсатилсин.

9 §. Трапециялар формуласи ва Симпсон формуласи

1°. Трапециялар формуласи:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right], \qquad (\mathrm{I})$$

бунда $h=\frac{b-a}{n}$, $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ лар эса $y=f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги бир-биридан баравар узоқликда турган ординаталаридан иборат.

(I) формуланинг хатоси:

$$\varepsilon(h) \leqslant \frac{(b-a)h^2}{12}|y''|_{\max}. \qquad (1)$$

2°. Симпсоннинг параболик формуласи (оралиқ иккига бўлинганда):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2), \qquad (\mathrm{II})$$

бунда $h=\frac{b-a}{2}$.

3°. $[a, b]$ оралиқ $2n$ бўлакка бўлинган ҳол учун Симпсон формуласи:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0+y_{2n}+4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right], \qquad (\mathrm{III})$$

бунда $h=\frac{b-a}{2n}$, (II) ва (III) формулаларнинг хатоси:

$$\varepsilon(h) \leqslant \frac{(b-a)h^4}{180}|y^{\mathrm{IV}}|_{\max}, \qquad (2)$$

яъни (II) формула иккинчи ва учинчи даражали

$$y=a+bx+cx^2+dx^3$$

параболалар учун интегралнинг аниқ қийматини беради.

1767. Трапециялар формуласига кўра $\ln 2=\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ҳисоблансин ва (1) формулага асосан хатоси баҳолансин.

1768. Симпсоннинг (II) формуласига кўра $\int_1^5 x^3dx$ ва

$\int\limits_0^2 x^4\,dx$ интеграллар ҳисоблансин ҳамда (2) формулага асосан хатоси баҳолансин ва натижа интегралларнинг аниқ қийматлари билан таққослансин.

1769. Симпсоннинг (III) формуласига кўра

1) $\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx\ (2n=4)$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3-\cos 2x}\,dx\ (2n=6)$;

3) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+x^4}\ (2n=4)$

интеграллар ҳисоблансин ва (2) формулада тахминан $h^4|y^{IV}|_{max}\approx|\Delta^4 y|_{max}$ деб олиб, хатоси баҳолансин.

1770. Баландлиги 50 *см*, ҳар бир асосининг диаметри 20 *см* ва ўрта кесимининг диаметри 30 *см* бўлган бочканинг ҳажми Симпсоннинг (II) формуласи бўйича топилсин.

1771. Симпсоннинг (II) формуласидан пирамида ва шар ҳажмларининг формулалари чиқарилсин.

1772. $\ln 2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ интеграл Симпсоннинг умумий (III) формуласи бўйича ҳисоблансин ($2n=10$ бўлганда) ва (2) формула бўйича хатоси баҳолансин.

1773. $x=5\cos t$, $y=3\sin t$ эллипс биринчи чорак ёйининг узунлигини ҳисоблаб берувчи интегралга Симпсоннинг (II) формуласини татбиқ этиб, эллипснинг узунлиги топилсин.

1774. Симпсоннинг (II) формуласини татбиқ этиб, $\pi = 6\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ интегралнинг тақрибий қиймати ҳисоблансин.

1775. Симпсоннинг умумий (III) формуласи бўйича ($2n=10$ бўлганда) $\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ интеграл ҳисоблансин, (2) формулада тахминан $h^4|y^{IV}|_{max}\approx|\Delta^4 y|_{max}$ деб, хатоси баҳолансин.

1776. $x^2+y^2=32$ эгри чизиқ билан чегараланган доира қисмининг юзини қараб, $\int\limits_0^4 \sqrt{32-x^2}\,dx = 4\pi + 8$ экани кўрсатилсин ва бундан, интегрални Симпсон формуласига асосан ҳисоблаб, π топилсин (формулада $2n=4$ деб олинсин).

1777. $[0, \pi]$ сегментни олтита тенг бўлакка бўлиб, Симпсоннинг (III) формуласи бўйича $y=\sin x$ синусоида ярим тўлқини ёйининг узунлиги ҳисоблансин.

X БОБ

ТЕКИС ВА ФАЗОВИЙ ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ЭГРИЛИГИ

1- §. Текис эгри чизиқнинг эгрилиги. Эгрилик маркази ва радиуси. Эволюта.

1°. Эгрилик:

$$k=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}. \qquad (1)$$

2°. Эгрилик радиуси:

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{y}\ddot{x}-\ddot{x}\dot{y}|}. \qquad (2)$$

3°. Эгрилик марказининг координаталари:

$$\left.\begin{aligned} X&=x-\frac{1+y'^2}{y''}y'=x+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}}\dot{y},\\ Y&=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x}-\dot{x}\ddot{y}}\dot{x}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$C(X;\ Y)$ эгрилик марказларининг геометрик ўрни *эволюта* дейилади. (3) тенгламалар эволютанинг *параметрик тенгламалари* бўлади.

4°. r ва φ қутб координаталари бўлганда, $r=f(\varphi)$ тенглама билан берилган эгри чизиқнинг эгрилик радиуси:

$$R=\frac{(r^2+r'^2)^{3/2}}{|r^2+2r'^2-rr''|}. \qquad (4)$$

Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгрилик радиуслари аниқлансин ва эгри чизиқ ҳамда унинг учидаги эгрилик доираси ясалсин:

1778. $y=4x-x^2$.

1779. $y=e^{-x^2}$.

1780. $x^2+4y^2=4$.

1781. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

1782. $y=xe^{-x}$.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгрилик марказлари аниқлансин ва эгри чизиқ ҳамда унинг мисолда кўрсатилган нуқтасидаги эгрилик доираси ясалсин:

1783. $xy = 4$, $x = 2$ нуқтада.

1784. $y = \ln x$, Ox ўқ билан кесишган нуқтасида.

1785. $y = -\frac{x^3+1}{3}$, Ox ўқ билан кесишган нуқтасида.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг эволюталарининг тенгламалари ёзилсин ва эгри чизиқ ҳамда унинг эволютаси ясалсин:.

1786. $y = 1 - \frac{x^2}{2}$. 1787. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

1788. $x^2 - y^2 = a^2$ (ёки $x = a\,\mathrm{ch}\,t$ ва $y = a\,\mathrm{sh}\,t$).

1789. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

1790. $y = e^x$ эгри чизиқнинг энг катта эгрилиги топилсин.

1791. $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ занжир чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилик радиуси $\frac{y^2}{a}$ га тенг бўлиб, у ўша нуқтада ўтказилган нормалнинг эгри чизиқ билан Ox ўқ орасидаги кесмасига тенг эканлиги исбот қилинсин.

1792. 1) $r = a(1 - \cos\varphi)$; 2) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$; 3) $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$ эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилик радиуси аниқлансин.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг учларидаги эгрилик радиуси аниқлансин ва эгри чизиқ ҳамда унинг эгрилик доираси ясалсин.

1793. $y = \frac{1}{1+x^2}$. 1794. $x^2 - y^2 = 4$.

1795. $y = \sin x$. 1796. $2y = x^2 + 4x$.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгрилик маркази координаталари аниқлансин ва эгри чизиқ ҳамда унинг эгрилик доираси ясалсин:

1797. $y = e^x$, Oy ўқ билан кесишган нуқтасида.

1798. $y = \frac{x^3}{3}$, $\left(-1;\ -\frac{1}{3}\right)$ нуқтада.

1799. $y^2 = x^3$; $(1;\ 1)$ нуқтада.

1800. $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{4}$ нуқтада.

Қуйидаги эгри чизиқлар эволюталарининг тенгламалари ёзилсин ва эгри чизиқ ҳамда унинг эволютаси ясалсин.

1801. $y^2 = 2(x+1)$. 1802. $x = t^2,\ y = \frac{t^3}{3}$.

1803. $xy = 4$. 1804. $x = a\cos^3 t,\ y = \sin^3 t$.

1805. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроиданинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилик радиуси $3\sqrt[3]{a|xy|}$ га тенг эканлиги кўрсатилсин.

2- §. Фазодаги эгри чизиқ ёйининг узунлиги

Ёй дифференциали: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ёки

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$$

Ёй узунлиги: $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$.

Қуйидаги эгри чизиқлар ёйларининг узунликлари топилсин:

1806. $x = t,\ \ y = t^2,\ \ z = \frac{2}{3}t^3,\ t = 0$ дан $t = 3$ гача.

1807. $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ \ z = 4t,\ t = 0$ дан исталган t гача.

1808. $y = \frac{x^2}{2},\ z = \frac{x^3}{6},\ x = 0$ дан $x = 3$ гача.

Қуйидаги эгри чизиқлар ёйларининг узунликлари топилсин:

1809. $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\sin\frac{t}{2},\ t = 0$ дан $t = \pi$ гача.

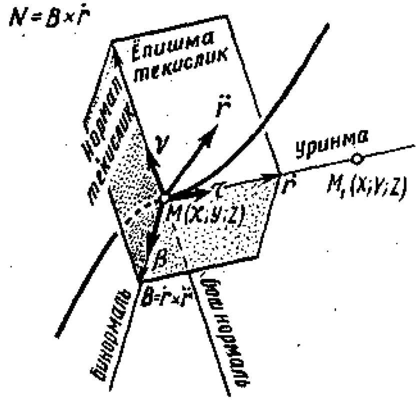
1810. $x = e^t,\ \ y = e^{-t},\ z = t\sqrt{2},\ t = 0$ дан $t = 1$ гача.

1811. $y = \frac{1}{2}\ln x,\ \ z = \frac{x^2}{2},\ x = 1$ дан $x = 2$ гача.

3- §. Вектор-функциянинг скаляр бўйича ҳосиласи ва унинг механик ҳамда геометрик маъноси. Эгри чизиқнинг табиий уч ёқлиги

$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ эгри чизиқ нуқтасининг $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ радиус-вектори скаляр t нинг *вектор-функцияси* бўлади. $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ ҳосила тангенциал вектор бўлиб, унинг

$$\text{модули } |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \dot{s} = \frac{ds}{dt}.$$



36- чизма.

Шунинг учун, агар t — вақт, эгри чизиқ — ҳаракат траекторияси бўлса, $\dot{r} = v$ тезлик вектори, $\ddot{r} = \omega$ тезланиш вектори бўлади.

Эгри чизиқнинг $M(x;\ y;\ z)$ нуқтасидан учта текислик ўтказайлик (36- чизма);

1) $\dot{r}$ га перпендикуляр текислик; у *нормал текислик* дейилади.

2) $\dot{r}$ ва $\ddot{r}$ ни ўз ичига олувчи текислик; у *ёпишма текислик* дейилади;

3) олдинги икки текисликка перпендикуляр текислик.

Бу текисликлар эгри чизиқнинг *табиий уч* ёқликни (триэдр) ҳосил қилади.

Текисликларнинг кесишишидан

1) $\dot{r}$ — *тангенциал;*

2) $B = \dot{r} \times \ddot{r}$ *бинормаль;*

3) $N = B \times \dot{r}$ *бош нормаль*

векторлар билан аниқланувчи учта: *уринма бинормаль* ва *бош нормаль* тўғри чизиқлар ҳосил бўлади.

Бу йўналишларнинг бирлик векторларини τ, β, ν деб белгилайлик; улар $\frac{d\tau}{ds} = \left|\frac{d\tau}{ds}\right| \gamma$ ва $\beta = \tau \times \nu$ муносабатлар билан боғланган.

$M_1\ (X;\ Y;\ Z)$ — уринманинг нуқтаси бўлсин (36-чизма). У ҳолда $\overline{MM_1} \parallel \dot{r}$ бўлади ва векторларнинг параллеллик шартидан уринманинг ушбу

$$\frac{X - x}{\dot{x}} = \frac{Y - y}{\dot{y}} = \frac{Z - z}{\dot{z}} \qquad \text{(I)}$$

тенгламалари ҳосил бўлади.

$M_2\ (X;\ Y;\ Z)$ — нормаль текисликда ётувчи нуқта бўлсин.

У ҳолда $\overline{MM_2} \perp \dot{r}$ бўлади ва векторларнинг перпендикулярлик шартидан нормал текисликнинг ушбу

$$\dot{x}(X - x) + \dot{y}(Y - y) + \dot{z}(Z - z) = 0 \qquad \text{(II)}$$

тенгламаси ҳосил бўлади.

Бинормаль ва бош нормаль тенгламалари (I) тенгламалардаги $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ларни мос равишда B_x, B_y, B_z лар ёки N_x, N_y, N_z лар билан алмаштиришдан ҳосил бўлади.

Ёпишма текислик тенгламаси эса (II) тенгламадаги $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ларни B_x, B_y, B_z лар билан алмаштиришдан ҳосил бўлади.

1812. Ҳаракат қилувчи нуқтанинг t моментдаги радиус-вектори $\boldsymbol{r} = 4t\boldsymbol{i} - 3t\boldsymbol{j}$ тенглама билан берилган. Ҳаракатнинг траекторияси, тезлиги ва тезланиши аниқлансин.

1813. $\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} + (4t - t^2)\boldsymbol{j}$ ҳаракат тенгламаси бўлсин. Ҳаракат траекторияси ва тезлиги аниқлансин. Ҳаракат траекторияси ва $t = 0$., 1, 2 ва 3 секунд вақтдаги тезлик векторлари ясалсин.

Кўрсатма. Ҳаракат тенгламаси $\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} + (4t - t^2)\boldsymbol{j}$ бўлса, $x = 3t$, $y = 4t - t^2$ бўлади; бу тенгликлардан t ни йўқотиб, ҳаракат траекториясининг тенгламаси $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ ёки $(x-6)^2 + 9(y-4) = 0$ ни топамиз. $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 3\boldsymbol{i} + 2(2-t)\boldsymbol{j}$.

1814. 1813- масаладаги ҳаракатнинг тезланиши w ва унинг ихтиёрий t ва $t = 0$ вақтлардаги тангенциал $w_\tau = \frac{dv}{dt}$ ҳам нормал $w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}$ тузувчилари аниқлансин.

1815. $\boldsymbol{r} = a\cos t \cdot \boldsymbol{i} + b\sin t \cdot \boldsymbol{j}$ ҳаракат тенгламаси бўлсин. Ҳаракат траекторияси, тезлиги ва тезланиши аниқлансин ва $t = 0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ нуқталарда тезлик ва тезланиш векторлари ясалсин.

1816—1818- масалаларда берилган эгри чизиқларнинг уринма чизиғининг ва нормал текислигининг тенгламалари ёзилсин.

1816. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ исталган нуқтасида ва $t = 1$ бўлганда.

1817. $y = x^2$, $z^2 = x$ исталган нуқтада $(x \geqslant 0)$ ва $x = 4$ бўлганда.

1818. $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10 \\ y^2 + z^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$ (1; 3; 4) нуқтада.

Кўрсатма. Ҳар бир тенгламанинг ўнг ва чап томонларидан дифференциал олиб, сўнгра $dx : dy : dz$ нисбатлар топилсин.

1819. $x = 1 - \sin t$, $y = \cos t$, $z = t$ эгри чизиқнинг $t = 0$ нуқтадаги тангенциал $\boldsymbol{\tau}$, бинормал $\boldsymbol{B}$ ва бош нормал $\boldsymbol{N}$ векторлари топилсин. Шунингдек берилган нуқтада τ, β ва ν топилсин.

1820. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ эгри чизиқнинг $t = 1$ нуқтасида ўтказилган бош нормал, бинормал ва ёпишма текисликнинг тенгламалари ёзилсин.

1821. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t$ эгри чизиқнинг $t = 0$ нуқтасида ўтказилган бош нормал ва бинормалнинг тенгламалари ёзилсин.

1822. $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t$ тенгламалар конус устидаги винт чизиқни аниқлаши кўрсатилсин ва координаталар бошида бу чизиққа ўтказилган бош нормал, бинормал ҳам уринманинг тенгламалари ёзилсин.

1823. $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ z = bt$ винт чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ва $t = \frac{\pi}{2}$ бўлганда ўтказилган уринманинг тенгламалари ёзилсин. Винт чизиқ $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрнинг ясовчилари билан бир хил $\gamma = \arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ бурчак остида кесишгани кўрсатилсин.

1824. $x^2 = 2az$ ва $y^2 = 2bz$ эгри чизиқнинг $z = \sqrt{ab}$ нуқтасида ўтказилган тангенциал векторнинг координата ўқлари билан ҳосил қилган бурчаклари топилсин.

1825. $2z = x^2,\ y = 0$ эгри чизиқ жойлашган $y = 0$ текислик $x^2 + y^2 = 2y$ цилиндрга ўралади. Цилиндр сирти устида берилган эгри чизиқ ҳосил қилган винтнинг параметрик тенгламалари ёзилсин ҳамда унинг исталган ва $t = \frac{\pi}{2}$ нуқтада бинормал вектори аниқлансин, бунда t — текисликнинг бурилиш бурчаги.

1826. Ҳаракатдаги нуқтанинг t моментдаги радиус-вектори $\boldsymbol{r} = a(t - \sin t)\,\boldsymbol{i} + a(1 - \cos t)\,\boldsymbol{j}$ тенглама билан берилган. $t = \frac{\pi}{2}$ ва $t = \pi$ учун тезлик ва тезланиш векторлари аниқлансин ва ясалсин.

1827—1829- масалаларда берилган эгри чизиққа ўтказилган уринманинг тенгламалари ёзилсин:

1827. $y = x,\ z = 2x^2,\ x = 2$ нуқтада.

1828. $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x + 2y - z = 2 \end{array}\right\}$ (1; 2; 3) нуқтада (1818- масалага қаралсин).

1829. $x = 2t,\ \ y = \ln t,\ \ z = t^2,\ \ t = 1$ нуқтада.

1830. $\boldsymbol{r} = e^t\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + t\sqrt{2}\boldsymbol{k}$. $t = 0$ нуқтада бинормал вектор $\boldsymbol{b}$ нинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари топилсин.

1831. $y = x^2,\ \ z = y^2$ эгри чизиқнинг $x = 1$ нуқтадаги бош нормал ва бинормалининг тенгламалари ёзилсин.

1832. $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\sin\frac{t}{2}$ эгри чизиқнинг $t = \pi$ нуқтадаги бош нормал ва бинормалининг тенгламалари ёзилсин.

4- §. Фазодаги эгри чизиқнинг эгрилиги ва буралиши

Эгрилик $\frac{1}{R}$ *уринманинг* буралиш бурчаги φ нинг ёй узунлиги Δs га нисбатининг $\Delta s \to 0$ даги лимитидан иборатдир.

Буралиш $\frac{1}{\rho}$, бинормал буралиш бурчаги θ нинг ёй узунлиги Δs га нисбатининг $\Delta s \to 0$ даги лимитидан иборатдир. $\varphi \approx |\Delta\tau|$ ва $\theta \approx \pm|\Delta\beta|$ бўлгани учун, $\frac{1}{R}$ ва $\frac{1}{\rho}$ нинг сон қийматлари

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}\nu, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{1}{\rho}\nu \tag{1}$$

векторнинг модулларига тенг. Агар эгри чизиқ $r = r(t)$ тенглама билан берилса, у ҳолда

$$\frac{1}{R} = \frac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\dot{r}\,\ddot{r}\,\dddot{r}}{|\dot{r} \times \ddot{r}|^2}. \tag{2}$$

1833. $v = v\tau$ тенгликни t бўйича дифференциаллаб, (1) формула ёрдами билан тезланиш w нинг тангенциал ва нормал тузувчиларга ёйилмаси

$$\omega = \dot{v}\tau + \frac{v^2}{R}\nu$$

ҳосил қилинсин.

1834. Нуқтада $x=t$, $y=t-t^2$ парабола бўйича ҳаракат қилади, бунда t—ҳаракат вақти. Ихтиёрий t моментда ва $t=0$ бўлганда траекториянинг эгрилиги $\frac{1}{R}$ ва тангенциал ҳам нормал тезланишлар аниқлансин.

1835. Нуқта $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$ эллипс бўйича ҳаракат қилади, бунда t — ҳаракат вақти. $t = \frac{\pi}{4}$ бўлганда траекториянинг эгрилиги $\frac{1}{R}$ ва тангенциал ҳамда нормал тезланишлар аниқлансин.

1836. Агар ҳаракат тенгламаси $r = ti + t^2 j + \frac{2}{3} t^3 k$ дан иборат бўлса, исталган вақтда ва $t=1$ бўлганда траектория эгрилиги $\frac{1}{R}$ ва тангенциал ҳамда нормал тезланишлар аниқлансин.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгриликлари $\frac{1}{R}$ ни буралишлари $\frac{1}{\rho}$ аниқлансин.

1837. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ исталган нуқтасида ва $t=0$ бўлганда.

1838. $x=e^t,\ x=e^{-t},\ z=t\sqrt{2}$ исталган нуқтасида ва $t=0$ бўлганда.

1839. $y=\frac{x^2}{2},\ z=\frac{x^3}{3}$ исталган нуқтасида ва $x=1$ бўлганда.

1840. Ўнг винтда $(x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt)$ буралиш мусбат, чап винтда $(x=a\cos t,\ y=-a\sin t,\ z=bt)$ манфий экани кўрсатилган.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг эгриликлари $\frac{1}{R}$ ва буралишлари $\frac{1}{\rho}$ аниқлансин:

1841. $x=2t,\ y=\ln t,\ z=t^2$ исталган нуқтасида ва $t=1$ бўлганда.

1842. $x=\frac{y^2}{2},\ z=x^2$ исталган нуқтасида ва $y=1$ бўлганда.

1843. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ z=e^t$ $t=0$ нуқтасида.

XI БОБ

ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАР, ТЎЛИҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚИ

1- §. Икки аргументли функциялар ва уларнинг геометрик тасвири

1°. Таъриф. Агар x ва y ўзгарувчиларнинг бирор ўзгариш соҳасидаги ҳар бир қийматлари жуфтига ўзгарувчи z нинг аниқ бир қиймати мос келтирилса, z ўзгарувчи x ва y ўзгарувчиларнинг *бир қийматли функцияси* дейилади. z нинг x ва y га функционал боғлиқ бўлиши

$$z = F(x, y) \qquad (1)$$

кўринишда ёзилади.

2°. Геометрик тасвир. (1) тенглама геометрик нуқтаи назардан қандайдир сиртни аниқлайди, x ва y нинг қийматлари жуфти xOy текисликда $P(x; y)$ нуқтани аниқлайди, $z = F(x, y)$ эса сиртдаги унга мос $M(x; y; z)$ нуқтанинг аппликатасини аниқлайди. Шу сабабли z ўзгарувчи $P(x; y)$ нуқтанинг функцияси дейилади ва $z = F(P)$ деб ёзилади.

3°. Функциянинг лимити. Агар ҳаракатдаги P нуқта ҳар қандай усул билан P_0 нуқтага яқинлашганда (масалан, ихтиёрий чизиқ бўйлаб), яъни $\rho = P_0P$ нолга интилганда ($\rho = P_0P \to 0$) $F(P) - A$ айирма чексиз кичик бўлса, $\lim\limits_{P \to P_0} F(P) = A$ дейилади.

4°. Функциянинг узлуксизлиги. Агар $\lim\limits_{P \to P_0} F(P) = F(P_0)$ бўлса, $F(x, y)$ функция P_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади. Бошқача айтганда, агар $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} F(x + \Delta x, y + \Delta y) = F(x, y)$ бўлса,

$F(x, y)$ функция $(x; y)$ нуқтада *узлуксиз* дейилади.

1844. Қуйидаги функциялар ҳақиқий қийматларга эга бўлишлари учун x ва y ларнинг ўзгариш соҳалари кўрсатилсин.

1) $z = x^2 + y^2$; 2) $az = a^2 - x^2 - y^2$; 3) $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$;

4) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$; 5) $z=\sqrt{xy}$; 6) $z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

7) $z=\frac{xy}{y-x}$

ва сиртларнинг $x=0$, $y=0$, $z=0$ ва $z+h$ текисликлар билан кесишган кесимлари бўйича бу функцияларнинг геометрик тасвирлари ясалсин.

1845. Учбурчакнинг периметри $2p$ берилган. Учбурчакнинг икки томонини x ва y деб, унинг юзи S шу томонларнинг функцияси сифатида аниқлансин. x ва y нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларининг соҳаси аниқлансин ва ясалсин.

1846. $F(x, y)=\frac{x-2y}{2x-y}$; $F(3, 1)$, $F(1, 3)$, $F(1, 2)$, $F(2, 1)$, $F(a, a)$, $F(a, -a)$

лар ҳисоблансин.

1847. $F(x, y)=\sqrt{x^4+y^4}-2xy$;

$F(tx, ty)=t^2F(x, y)$

экани исбот қилинсин.

1848. $z=x^2-xy+y^2$; $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ ва Δz лар аниқлансин. Агар x 2 дан 2,1 гача, у эса 2 дан 1,9 гача ўзгарса $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz лар ҳисоблансин.

1849. $x^2-y^2-z^2=0$ тенглама z ни x ва y нинг чексиз кўп бир қиймати функциялари сифатида аниқлаши ва улардан иккитаси узлуксиз экани кўрсатилсин. Бу функцияларнинг аниқланиш соҳаси кўрсатилсин ва мусбат узлуксиз функциянинг геометрик тасвири ясалсин. Шу $x^2-y^2=z^2$ тенглама билан аниқланувчи бир қийматли, лекин узлукли бўлган $z=F(x, y)$ функцияга мисол келтирилсин.

1850. Қуйидаги функцияларнинг ($z=0$, 1, 2 ва ҳоказо бўлгандаги) юксаклик чизиқлари ясалсин:

1) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}$; 2) $z=x^2-y$;

3) $z=x^2-y^2$; 4) $z=xy$.

1851. x ва y нолга интилганда ($x\to 0$ ва $y\to 0$) $u=\frac{y}{x-y}$ ифода ҳар қандай лимитга интилиш мумкинлиги кўрсатилсин. (x; y) нуқтанинг (0; 0) нуқтага шундай интилишларига мисоллар келтирилсинки, ўша ҳолларда $\lim u=3$, $\lim u=2$, $\lim u=1$, $\lim u=0$, $\lim u=-2$ бўлсин.

Кўрсатма. x ва y нинг $y=kx$ тўғри чизиқлар бўйича ўзгариши қаралсин.

1852. $(x; y)$ нуқта $(0; 0)$ нуқтага ҳар қандай усул билан яқинлашганида ҳам

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = -\frac{1}{4}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{x} = 0$

экани кўрсатилсин.

Кўрсатма. $xy = \alpha$ деб олинсин.

1853.

$$z = F(x, y) = \begin{cases} 1, & xy > 0 \text{ бўлганда} \\ 0, & xy = 0 \text{ бўлганда} \\ -1, & xy < 0 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

функция геометрик тасвирлансин ва унинг узилиш чизиғи кўрсатилсин.

1854. $z = x + y$; 2) $z = \frac{4}{x+y}$; 3) $\frac{z}{c} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$;

4) $\frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$; 5) $z = x + \sqrt{x^2 - y^2}$;

6) $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

функцияларнинг аниқланиш соҳалари кўрсатилсин ва бу функцияларнинг геометрик тасвирлари ясалсин.

1855. $F(x, y) = \frac{x}{x-y}$;

$F(a, b) + (b, a) = 1$

экани кўрсатилсин.

1856. $z^2 = \frac{4}{4 - x^2 - y^2}$ тенглама z ни x ва y нинг чексиз кўп бир қийматли функциялари сифатида аниқлаши ва улардан иккитаси узлуксиз экани кўрсатилсин. Бу функцияларнинг аниқланиш соҳаси кўрсатилсин ва улар ичидан $x^2 + y^2 \leqslant 1$ соҳада мусбат ва бу соҳадан ташқарида манфий бўлган функциянинг геометрик тасвири ясалсин.

1857. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ тенглама билан аниқланувчи ва бу соҳадан ташқарида манфий бўлган бир қийматли $z = F(x, y)$ функциянинг геометрик тасвири ясалсин.

2- §. Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар

$z = F(x, y)$ функцияда y ни ўзгармас деб қараб, ундан x бўйича олинган ҳ о с и л а z нинг x бўйича *хусусий ҳосиласи* дейилади ва у $\frac{\partial z}{\partial x}$ ёки $F'_x(x, y)$ кўринишда белгиланади. z нинг y бўйича *хусусий ҳосиласи* ҳам шунга ўхшаш таърифланади ва белгиланади:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = F'_y(x, y).$$

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилалари топилсин.

1858. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$. **1859.** $z = \ln(x^2 + y^2)$.

1860. $z = \frac{y}{x}$. **1861.** $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

1862. $z = \frac{xy}{x - y}$. **1863.** $u = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)$.

1864. $c = \sqrt{a^2 + b^3 - 2ab\cos\alpha}$.

1865. $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$. **1866.** $u = xe^{-yx}$.

1867. $u = \frac{2x - t}{x + 2t}$. **1868.** $\alpha = \arcsin(t\sqrt{x})$.

1869. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$ экани исбот қилинсин.

1870. $z = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$ экани исбот қилинсин.

1871. $u = e^{\frac{x}{t^2}}$; $2x\frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ экани исбот қилинсин.

1872. $u = x^y$; $\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$ экани исбот қилинсин.

1873. Қуйида, 1898-масалада Эйлернинг ушбу теоремаси исботланади:

«Агар $z = F(x, y)$ — n ўлчови бир жинсли функция бўлса, у ҳолда $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$ бўлади».

Бу теорема ушбу

1) $z = x^3 + xy^2 - 2y^3$; 2) $z = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$;

3) $z = \frac{1}{x^3 - y^3}$; 4) $z = e^{\frac{x}{y}}$

функциялар учун текширилсин.

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилалари топилсин:

1874. $z = \cos(ax - by)$. **1875.** $z = \arcsin\frac{y}{x}$.

1876. $z = \frac{x}{3y - 2x}$. **1877.** $u = \ln\sin(x - 2t)$.

1878. $u = \sin^2(x+y) - \sin^2 x - \sin^2 y$.

1879. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$ экани исбот қилинсин.

1880. $z = e^{\frac{x}{y}} \ln y$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}$ экани исбот қилинсин.

1881. $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; $l\frac{\partial T}{\partial l} + g\frac{\partial T}{\partial g} = 0$ экани исбот қилинсин.

1882. $z = e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)$;

$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2}e^x \sin^2\frac{y}{2}$ экани исбот қилинсин.

1883. Ушбу

1) $z = \frac{x^3}{x-y}$; 2) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$; $z = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$

функциялар учун бир жинсли функциялар ҳақидаги Эйлер теоремаси (1873- масалага қаранг) текширилсин.

3- §. Биринчи тартибли тўлиқ дифференциал

Агар $z = F(x, y)$ функция (x, y) нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, унинг тўлиқ орттирмаси

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\cdot\rho \tag{1}$$

кўринишида ёзилади, бунда $\rho = \sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2}$ нолга интилганда $(\rho \to 0)$ $\varepsilon \to 0$. У ҳолда $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ ифода *тўлиқ орттирма* Δz *нинг бош қисми бўлади; у функциянинг тўлиқ дифференциали дейилади* ва dz орқали белгиланади:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{2}$$

Агар (2) да z ни: 1) x га; 2) y га тенг деб олсак, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ бўлади. Шунинг учун

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{3}$$

(1) дан

$$\Delta z \approx dz \qquad (4)$$

экани келиб чиқади, яъни Δx ва Δy етарли кичик бўлган ҳолда функциянинг *тўлиқ орттирмаси тақрибан тўлиқ дифференциалга* тенг бўлади (V боб, 7- §).

Агар $F(x\ y)$ функциянинг $(x;\ y)$ нуқтада тўлиқ дифференциали мавжуд бўлса, функция бу нуқтада *дифференциалланувчи* дейилади.

1884. Ушбу

1) $z=x^2y$; 2) $z=\frac{xy}{x-y}$; 3) $u=e^{\frac{s}{t}}$; 4) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

функцияларнинг тўлиқ дифференциаллари топилсин.

1885. Қуйидаги функциялар тўлиқ дифференциалларининг қийматлари топилсин:

1) $z=\frac{y}{x}$, $x=2$, $y=1$, $dx=0{,}1$, $dx=0{,}2$ бўлганда;

2) $u=e^{xy}$, $x=1$, $y=2$, $dx=-0{,}1$, $dy=0{,}1$ бўлганда.

1886. $z=xy$ функция учун $x=5$, $y=4$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=-0{,}2$ бўлганда dz ва Δz ҳисоблансин.

1887. x 2 дан 2,1 гача, y эса 3 дан 2,5 гача ўзгарганда $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ функциянинг ўзгариши тақрибан ҳисоблансин.

1888. Цилиндрни деформация қилиш натижасида унинг радиуси R 2 дан 2,05 *дм* гача ортиб, баландлиги H эса 10 дан 9,8 *дм* гача камайган. $\Delta V\approx dV$ формулага асосан цилиндр ҳажми V нинг ўзгариши тақрибан топилсин.

1889. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 0,1 *см* аниқлик билан ўлчанганда 7,5 ва 18 *см* га тенг бўлган. Гипотенузани ҳисоблашдаги абсолют хато аниқлансин.

1890. Ушбу

1) $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$; 2) $s=x\ln t$; 3) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

функцияларнинг тўлиқ дифференциаллари топилсин.

1891. x 2 дан 2,1 гача, y эса 1 дан 0,9 гача ўзгарганда $z=\ln(x^2+y^2)$ функция учун dz ва Δz ларнинг қийматлари топилсин.

1892. x 5 дан 4,5 гача, y эса 3 дан 3,3 гача ўзгарганда $z=\arcsin\frac{y}{x}$ функциянинг ўзгариши тақрибан ҳисоблансин.

1893. Конусни деформация қилиш натижасида унинг радиуси R 30 дан 30,1 *см* гача ортиб, баландлиги H эса 60 дан 59,5 *см* гача камайган. $\Delta V\approx dV$ формулага асосан конус ҳажми V нинг ўзгариши тақрибан ҳисоблансин.

4- §. Мураккаб функцияларнинг ҳосилалари

1°. Агар $z = F(x, y)$ бўлиб, $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ бўлса, z t нинг *мураккаб функцияси* дейилади. У ҳолда, агар F, f ва φ *дифференциалланувчи* функциялар бўлса,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

бўлади.

2°. Агар $z = F(x, y)$ бўлиб, $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$ ва F, f, φ дифференциалланувчи функциялар бўлса,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \qquad (2)$$

бўлади.

1894. Қуйидаги тенгламалардан (1) формулага асосан $\frac{\partial z}{\partial t}$ топилсин.

1) $z = x^2 + xy + y^2$, $x = t^2$, $y = t$;

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$;

z функция ифодасига x ва y ларнинг қийматларини қўйиб ва сўнгра t бўйича ҳосила олиб, натижа текширилсин.

1895. $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$; $\frac{dz}{dt}$ топилсин.

1896. $z = u^v$, бунда u ва v лар x нинг функциялари, $\frac{dz}{dx}$ ёзилсин.

1897. $z = xe^y$, бунда y ўзгарувчи x нинг функцияси $\frac{dz}{dx}$ ёзилсин.

1898. Агар $F(xt, yt) = t^n \cdot F(x, y)$ бўлса, $z = F(x, y)$ функция *бир жинсли* дейилади. $F(xt, yt) = t^n \cdot F(x, y)$ тенгликнинг иккала томонини t бўйича дифференциаллаб, сўнгра $t = 1$ деб, Эйлернинг *бир жинсли* функциялар ҳақидаги теоремаси исбот қилинсин:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

1899. $z = \frac{x^2}{y}$, бунда $x = u - 2v$, $y = v + 2u$. $\frac{\partial z}{\partial u}$ ва $\frac{\partial z}{\partial v}$ топилсин.

1900. $z = F(x, y)$. Агар: 1) $u = mx + ny$, $v = px + qy$; 2) $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ лар $\frac{\partial z}{\partial u}$ ва $\frac{\partial z}{\partial v}$ лар орқали ифода қилинсин.

1901. $u = F(x, y)$; $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. $\frac{\partial u}{\partial r}$ ва $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ лар $\frac{\partial u}{\partial x}$ ва $\frac{\partial u}{\partial y}$ лар орқали ифода қилинсин ҳамда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

экани кўрсатилсин.

1902. $z = y + F(u)$, бунда, $u = x^2 - y^2$. $F(u)$ исталган дифференциалланувчи функция бўлганда $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x$ бўлиши исбот қилинсин.

1903. Қуйидаги тенгламалардан $\frac{dz}{dt}$ топилсин:

1) $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, $x = \sin t$, $y = \cos t$;

2) $z = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

1904. $z = xy + xF(u)$, бунда $u = \frac{y}{x}$,

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$$

экани исбот қилинсин.

1905. $z = y\varphi(u)$, бунда $u = x^2 - y^2$.

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

экани исбот қилинсин.

1906. $z = F(x, y)$. Агар: 1) $u = x + 2y$, $v = x - y$; 2) $u = \sqrt{xy}$, $v = x + y$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ лар $\frac{\partial z}{\partial u}$ ва $\frac{\partial z}{\partial v}$ лар орқали ифодалансин.

5-§. Ошкормас функцияларнинг ҳосилалари

1°. (x_0, y_0) ечимга эга бўлган $F(x, y) = 0$ тенглама, унинг $\frac{\partial F}{\partial y}$ ҳосиласи $(x_0; y_0)$ нуқтанинг қандайдир атрофида узлуксиз ва нолга тенг эмаслик $\left(\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0\right)$ шартларини қаноатлантиргандагина, x_0 атрофида y ни x нинг узлуксиз функцияси сифатида аниқлаб беради. $(x_0; y_0)$ нуқта атрофида, юқоридаги шартлардан ташқари $\frac{\partial F}{\partial x}$ ҳосила ҳам мавжуд ва узлуксиз бўлса, у ҳолда *ошкормас функция* $\frac{dy}{dx}$ ҳосилага эга бўлиб, бу ҳосила ушбу

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{1}$$

формула билан аниқланади.

2°. $F(x, y, z)=0$ тенглама учун юқоридаги шартларга ўхшаш шартлар бажарилса (яъни $\frac{\partial F}{\partial z}$ ҳосила $(x_0; y_0; z_0)$ нуқта атрофида нолдан фарқли ва узлуксиз: $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ҳосилалар бу нуқта атрофида мавжуд ва узлуксиз бўлса), бу тенглама z ни x ва y нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайди ва у қуйидаги хусусий ҳосилаларга эга бўлади:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{2}$$

Қуйидаги тенгламалардан $\frac{dy}{dx}$ топилсин:

1907. $x^2+y^2-4x+6y=0.$

1908. 1) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; 2) $xe^{2y}-ye^{2x}=0$.

1909. $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$

Қуйидаги эгри чизиқларга ўтказилган уринмаларнинг бурчак коэффициентлари топилсин:

1910. $x^2+y^2=10y$, $x=3$ тўғри чизиқ билан кесишган нуқталарда.

1911. $x^3+y^3-2axy=0$, $x=y=a$ нуқтасида.

1912. $x^2+y^2+2x-2y=2$ эгри чизиқнинг уринмалари: 1) Ox; 2) Oy ўққа параллел бўлган нуқталари топилсин.

Қуйидаги тенгламалардан $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ топилсин:

1913. $x^2+y^2+z^2-6x=0$. **1914.** $z^2=xy$.

1915. $\cos(ax+by-cz)=b(ax+by-cz)$.

1916. $xyz=a^3$; $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-2z$ экани кўрсатилсин.

1917. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ дифференциал тенгламани, $\frac{z}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (конус сиртлар) тенгламаси билан берилган ошкормас функция z қаноатлантириши кўрсатилсин.

Қуйидаги тенгламалардан $\frac{dy}{dx}$ топилсин:

1918. $x^2-4y^2=4$. **1919.** $xy+\ln y+\ln x=0$.

1920. $y+x=e^{\frac{y}{x}}$. **1921.** $2\cos(x-2y)=2y-x$.

1922. $y^2-xy=4$ эгри чизиқнинг $x=3$ тўғри чизиқ билан кесишган нуқталарида ўтказилган уринмаларнинг бурчак коэффициентлари топилсин.

1923. $x^2+y^2+z^2-2zx=a^2$ дан $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ топилсин.

1924. $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ бўлиши кўрсатилсин.

1925. $m\frac{\partial z}{\partial x}+n\frac{\partial z}{\partial y}=1$ дифференциал тенгламани цилиндрик сиртлар тенгламаси билан $x-mz=\varphi(y-nz)$ берилган ошкормас z функция қаноатлантириши кўрсатилсин.

6-§. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар ва тўлиқ дифференциаллар

$\frac{\partial F}{\partial x}$ ва $\frac{\partial F}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларга эга $z=F(x,y)$ функция берилган бўлсин. Бу ҳосилалардан олинган хусусий ҳосилалар 2-тартибли хусусий ҳосилалар дейилади. Улар қуйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y};$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x};\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Учинчи тартибли ва бошқа юқори тартибли хусусий ҳосилалар ҳам шунга ўхшаш таърифланади ва белгиланади.

Ҳосила олиш тартиби билангина фарқланувчи аралаш ҳосилалар узлуксиз бўлсалар, улар ўзаро тенг бўлади:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x};\quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 F}{\partial y\partial x^2}\ \text{ва ҳоказо.}$$

Юқори тартибли ҳосилаларнинг қуйидаги жадвалига эга бўламиз:

2-тартибли $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y};\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

3- тартибли $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}$; $\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}$; $\frac{\partial^3 F}{\partial x\, \partial y^2}$; $\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}$ ва ҳоказо.

Юқори тартибли тўлиқ дифференциаллар қуйидагича аниқланади:
$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$. Бу тенгликни символик $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z$ кўринишда ёзиш мумкин. Шунга ўхшаш $d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 z$ ва ҳоказо.

1926. $z = x^3 + x^2 y + y^3$. 3- тартибли хусусий ҳосилалар топилсин.

1927. 1) $z = \sin(ax - by)$; 2) $z = \frac{x^2}{y^2}$; 3) $z = ln(x - 2y)$ функциялар учун $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ экани текширилсин.

1928. $u = x^4 + 3x^2 y^2 - 2y^4$. 4- тартибли хусусий ҳосилалар топилсин.

1929. $u = \frac{y}{x}$. 3- тартибли хусусий ҳосилалар топилсин.

1930. $s = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)$; $\frac{\partial^2 s}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$ экани текширилсин.

1931. $z = \operatorname{arc} tg \frac{y}{x}$. 2- тартибли ҳосилалар топилсин.

1932. $z = \sin\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$; $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 z$ экани текширилсин.

1933. $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x - t)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$ экани текширилсин.

1934. $s = \sqrt[3]{ax + bt}$; $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 s = -\frac{2s}{9}$ экани текширилсин.

1935. $u = xe^{-\frac{y}{x}}$ функция

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

дифференциал тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

1936. Агар $z = F(x, y)$ функция n- ўлчовли бир жинсли функция бўлса,

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y^2} = n(n - 1) z$$

ёки символик кўринишда

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z=n(n-1)z$$

бўлиши исбот қилинсин.

Кўрсатма. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$ тенгликни (1898- масалага қаранг): 1) x бўйича; 2) y бўйича дифференциаллаб, натижаларни мос равишда x ва y га кўпайтириб, ҳадма- ҳад қўшиш керак.

1937. Ушбу 1) $z=x^2+xy+y^2$; 2) $z=\frac{y}{x^2}$; 3) $z=\frac{1}{x^2-y^2}$ 4) $z=\ln\left(\frac{y}{x}-1\right)$ бир жинсли функциялар учун $x\left(\frac{\partial}{\partial x}+\right.$ $\left.+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z=n(n-1)z$ тенглик текширилсин.

1938. Агар: 1) $u=\frac{y^2}{x^2}$; 2) $u=x\ln\frac{y}{x}$ бўлса, d^2u топилсин.

1939. $z=\cos(mx+ny)$. $d^2z=-z(mdx+ndy)^2$ экани исбот қилинсин.

1940. $z=\ln(ax+by)$. 1) $d^3z=2dz^3$; 2) $d^nz=(-1)^{n-1}\times$ $\times(n-1)!\,dz^n$ экани исбот қилинсин.

1941. Агар $z=F(u,v)$, бунда $u=mx+ny$ ва $v=px+$ $+qy$ бўлса, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(m\frac{\partial}{\partial u}+p\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\left(m\frac{\partial}{\partial u}+p\frac{\partial}{\partial v}\right)\times$ $\times\left(n\frac{\partial}{\partial u}+q\frac{\partial}{\partial v}\right)z$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(n\frac{\partial}{\partial u}+q\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$ бўлиши исбот қилинсин.

1942. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ифодада x, y ўзгарувчиларни янги $u=3x+y$ ва $v=x+y$ ўзгарувчилар билан алмаштирилсин (1941- масалага қаранг).

1943. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ифоданинг ўзгарувчилари $u=2x+y$ ва $v=y$ ўзгарувчилар билан алмаштирилсин (1941- масалага қаранг).

1944. Агар u ва v лар x ва y ларнинг функцияси бўлиб, $z=F(u,\ v)$ бўлса, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(u'_x\frac{\partial}{\partial u}+v'_x\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z+u''_{xx}\frac{\partial z}{\partial u}+$ $+v''_{xx}\frac{\partial z}{\partial v}$ экани кўрсатилсин. Шунга ўхшаш $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ва $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ аниқлансин.

1945. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ифодада ўзгарувчилар $u=xy$ ва $v=\frac{y}{x}$ янги ўзгарувчилар билан алмаштирилсин (1944- масалага қаранг).

1946. $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$ ифодада ўзгарувчилар $x=r\cos\varphi$ ва $y=r\sin\varphi$ янги ўзгарувчилар билан алмаштирилсин (1944- масалага қаранг).

1947. $z=\frac{x^3}{1-2y}$. 2- тартибли хусусий ҳосилалар топилсин.

1948. $u=\frac{x}{\sqrt[3]{t}}$. 3- тартибли хусусий ҳосилалар топилсин.

1949. $z=\frac{xy}{x-y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\, dy}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x-y}$ экани исбот қилинсин.

1950. $s=\ln\ (ax-bt)$; $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}\right)^3 s=2$ экани исбот қилинсин.

1951. $z=2\ \cos^2\left(x-\frac{t}{2}\right)$; $2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t}=0$ экани исбот қилинсин.

1952. $z=e^{\frac{x}{y}}$; $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}$ экани исбот қилинсин.

1953. $u=y\ln x$. d^2u ва $\partial^3 u$ топилсин.

1954. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ифодада ўзгарувчилар янги $u=ax+y$ ва $v=ax-y$ ўзгарувчиларга алмаштирилсин (1944- масалага қаранг).

1955. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ ифодада ўзгарувчилар $u=y$ ва $v=\frac{y}{x}$ янги ўзгарувчиларга алмаштирилсин (1944- масалага қаранг).

1956. f ва φ функциялар икки марта дифференциалланувчи функциялар бўлганда $u=\frac{xf(x)}{y}+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ функция ушбу

$$xy\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

дифференциал тенгламани қаноатлантириши кўрсатилсин.

7. §. Тўлиқ дифференциалларни интеграллаш

1°. P ва Q лар x ва y ларнинг дифференциалланувчи функциялари бўлганда $P\partial x+Q\partial y$ ифода тўлиқ дифференциал du бўлиши учун $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{dQ}{dx}$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

u ни топиш учун $\frac{\partial u}{\partial x}=P$ ва $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$ шартлардан $u=\int Pdx+\varphi_1(y)$, $u=\int Q\,dy+\varphi_2(x)$ тенгликларни ҳосил қиламиз.

Биринчи ифодадан барча маълум ҳадларни олиб, унга иккинчи ифодадаги биринчида етишмаган ва фақат y га боғлиқ бўлган маълум ҳадларни қўшсак, u ҳосил бўлади.

2° P, Q ва R лар x, y ва z нинг дифференциалланувчи функциялари бўлганда $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ тўлиқ дифференциал du бўлиши учун

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x};\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x};\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Бу шартлар бажарилганда u қуйидагича топилади:

$$u=\int P\,dx+\varphi_1(y,z),\quad u=\int Q\,dy+\varphi_2(x,z),\quad u=\int R\,dz+\varphi_3(x,y).$$

Биринчи ифодадан маълум ҳадларни олиб, унга иккинчи ва учинчи ифодадаги, биринчида етишмаган, y билан z га боғлиқ маълум ҳадлар қўшилиб ёзилса, u ҳосил бўлади.

Функцияни унинг тўлиқ дифференциали бўйича топиш, *тўлиқ дифференциални интеграллаш* дейилади.

Қуйидаги ифодалар тўлиқ дифференциал du экани текширилсин ва u топилсин:

1957. $(2x+y)\,dx+(x-2y-3)\,dy.$

1958. $x\sin 2y\,dx+x^2\cos 2y\,dy.$

1959. $(x+\ln y)\,dx+\left(\frac{x}{y}+\sin y\right)dy.$

1960. $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$

1961. $(yz-2x)\,dx+(xz+y)\,dy+(xy-z)\,dz.$

1962. $\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x^2}\right)dx+\frac{dy}{y}-\left(\frac{x}{z^2}+\frac{1}{1+z^2}\right)dz.$

Қуйидаги ифодалар тўлиқ дифференциал du экани текширилсин ва u топилсин:

1963. $(y^2-1)\,dx+(2xy+3y)\,dy.$

1964. $(\sin 2y-y\,\mathrm{tg}\,x)\,dx+(2x\cos 2y+\ln\cos x+2y)\,dy.$

1965. $\left(y-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx+\left(x+\frac{\sin 2y}{x}+1\right)dy.$

1966. $t\sqrt{\frac{x}{t^2+1}}\,dt+\frac{1+\sqrt{t^2+1}}{2\sqrt{x}}\,dx.$

1967. $(\ln y-\cos 2z)\,dx+\left(\frac{x}{y}+z\right)dy+(x+2x\sin 2z)\,dz.$

1968. $\frac{dx-3\,dy}{z}-\frac{3y-z}{z^2}\,dz.$

8-§. Текис эгри чизиқнинг махсус нуқталари

$F(x, y)=0$ эгри чизиқнинг бирорта нуқтасида $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ ва $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ бўлса, бундай нуқта *махсус* дейилади.

Бу нуқтада ўтказилган уринманинг $k=y'$ бурчак коэффициенти $A+2Bk+Ck^2=0$ тенгламадан топилади, бундаги A, B ва C лар мос равишда $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$ ва $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ҳосилаларнинг шу нуқтадаги қийматларидан иборат. Бу ерда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) $B^2-AC>0$ — уринмалар иккита бўлиб, нуқта *тугун нуқта* дейилади.

2) $B^2-AC<0$ — уринма бўлмайди, нуқта *яккаланган* бўлади.

3) $B^2-AC=0$ — бу ҳолда нуқта ёки *яккаланган*, ёки *қайтиш* нуқтаси, ёки эгри чизиқнинг *ўз-ўзига уриниш* нуқтаси бўлади; қайтиш ва ўз-ўзига уриниш нуқталарида эгри чизиқнинг икки шохчасига битта умумий уринма мавжуд бўлади.

Учинчи, шубҳали ҳолда масалага тўла жавоб бериш учун, текширилаётган нуқтанинг ихтиёрий кичик атрофида эгри чизиқнинг бошқа нуқталари бор ёки йўқлигини аниқлаш керак.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг жойлашган соҳалари, координата ўқлари билан кесишган нуқталари, махсус нуқталари аниқлансин ва эгри чизиқлар ясалсин.

1969. $x^3+x^2-y^2=0.$ **1970.** $y^2=(x+2)^3.$

1971. $x^3-x^2-y^2=0.$ **1972.** $y^2+x^4-x^2=0.$

1973. $(y-x)^2=x^3.$ **1974.** $y^2=(x-2)^2.$

Қуйидаги эгри чизиқларнинг жойлашган соҳалари, махсус нуқталари ва асимптоталари аниқлансин ҳамда эгри чизиқлар ясалсин:

1975. $(x+2a)^3+xy^2=0.$ **1976.** $x^3-y^3-3y^2=0.$

1977. $x^3+y^3-3axy=0.$ **1978.** $y^2(x^2-a^2)=x^4.$

Қуйидаги эгри чизиқларнинг жойлашган соҳалари, координата ўқлари билан кесишган нуқталари, махсус нуқталари аниқлансин ва эгри чизиқлар ясалсин;

1979. $y^2 + x^3 - 2x^2 = 0$. **1980.** $a^2y^2 = x^2(2ax - x^2)$.
1981. $y^2 = x(x+2)^2$. **1982.** $xy^2 = (x+a)^3$.
1983. $4y^2 = x^5 + 5x^4$. **1984.** $y^2 - x^4 + x^2 = 0$.

1985. $4x^2 - y^2 + x^3 - y^3 = 0$ эгри чизиқнинг асимптотаси, махсус нуқтаси, y_{max}, координата ўқлари билан кесишган нуқталари топилсин ва эгри чизиқ ясалсин.

Қуйидаги эгри чизиқларнинг жойлашган соҳалари, махсус нуқталари ва асимптоталари топилсин:

1986. 1) $y^2(2a - x) = x(x-a)^2$ (строфоида);
2) $a^2(a^2 + y^2) = x^2y^2$.

1987. 1) $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$;
2) $a(x^2 + y^2) = x(x^2 - y^2)$.

9-§. Текис эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси

$F(x, y, \alpha) = 0$ эгри чизиқлар оиласининг *ўрамаси* деб шундай эгри чизиққа айтиладики: 1) у оиланинг ҳар бир чизиғига уринади; 2) унинг ҳар бир нуқтаси оила эгри чизиқларидан ўзидан фарқли биттаси билан унинг уриниш нуқтаси бўлади.

$F(x, y, \alpha) = 0$ эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси мавжуд бўлса, унинг тенгламаси

$$F(x, y, \alpha) = 0 \text{ ва } F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

тенгликлардан α параметрни йўқотиш натижасида ҳосил бўлади.

Бу усул билан топилган эгри чизиқ ўрама бўлмасдан, оила эгри чизиқлари махсус нуқталарининг геометрик ўрни ҳам бўлиши мумкин [1990, 2) масаланинг жавобига қаралсин].

Қуйидаги эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси топилсин ва ўрама ҳамда оила эгри чизиқлари ясалсин:

1988. 1) $y = ax + a^2$; 2) $y = ax^2 + \frac{1}{a}$.

1989. 1) $(x-a)^2 + y^2 = R^2$; 2) $4ay = (x-a)^2$.

1990. 1) $y - 1 = (x-a)^2$; 2) $(y-1)^3 = (x-a)^2$;
3) $(y-1)^2 = (x-a)^3$; 4) $9(y-a)^2 = (x-a)^3$.

1991. Узунлиги ўзгармас a бўлган кесманинг учлари координата ўқлари бўйича сирғанади. Бундай кесмалар оиласининг ўрамаси топилсин.

1992. Координаталар бошидан ўтувчи ва марказлари $y^2 = 4x$ параболада ётувчи айланалар оиласининг ўармаси топилсин.

1993. Диаметрлари $xy = a^2$ гипербола нуқталарининг фокал радиус-векторларидан иборат бўлган айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

1994. Координаталар бошидан бошланғич b тезлик билан Ox ўққа α бурчак остида тўп отилган, α ҳар хил бўлганда тўп траекториялари оиласининг ўрамаси топилсин.

1995. 1) p ўзгармас бўлганда $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ тўғри чизиқлар оиласининг; 2) $y = ax + \frac{1}{a}$ тўғри чизиқлар оиласининг; 3) $y - 1 = (x - a)^3$ кубик параболалар оиласининг ўрамалари топилсин.

1996. Марказлари Ox ўқда ётувчи, радиуслари эса ўша марказлардан чиқарилган $y^2 = 4x$ параболанинг мос ординаталарига тенг айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

1997. Ярим ўқларининг йиғиндиси ўзгармас f узунликка тенг бўлган $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипслар оиласининг ўрамаси топилсин.

1998. a ни ўзгарувчи ҳисоблаб, симметрия ўқи Oy ўққа параллел бўлган, $(-a;\ 0)$, $(3a;\ 0)$ ва $(0;\ 3a^3)$ нуқталардан ўтувчи параболалар оиласининг ўрамаси топилсин.

10-§. Сиртга ўтказилган уринма текислик ва нормал

Сирт $F(x,\ y,\ z) = 0$ тенглама билан берилган бўлсин; ўша сиртда $M(x;\ y;\ z)$ нуқта олинган. Бу нуқтада ўтказилган нормал тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{1}$$

Уринма текислик тенгламаси:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0 \tag{2}$$

дан иборат бўлади.

(1) ва (2) тенгламалардаги X, Y, Z — нормалнинг ёки уринма текисликнинг ўзгарувчи координаталаридан иборат.

$N\left\{\frac{\partial F}{\partial x};\ \frac{\partial F}{\partial y};\ \frac{\partial F}{\partial z}\right\}$ векторни сиртнинг *нормал вектори* деймиз.

Агар сиртдаги бирор нуқтада $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ бўлса, у *махсус* нуқта дейилади. Бундай нуқтада сиртнинг нормали ҳам уринма текислиги ҳам бўлмайди.

Қуйидаги сиртларга ўтказилган уринма текисликлар тенгламаси ёзилсин:

1999. $z=x^2+2y^2$, $(1;\ 1;\ 3)$ нуқтада.

2000. $xy=z^2$, $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтада.

2001. $xyz=a^3$, $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтада.

2002. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ва $(a;\ b;\ c)$ нуқталарда.

2003. $x^2+4y^2+z^2=36$ сиртга уринма ва $x+y-z=0$ текисликка параллел бўлган текислик аниқлансин.

2004. $x^2+y^2=z^2$ конус сиртнинг $(3;\ 4;\ 5)$ нуқтасида ўтказилган нормалнинг тенгламалари ёзилсин. Конуснинг қандай нуқтасида нормал аниқмас?

2005. $x^2+y^2-xz-yz=0$ сиртнинг $(0;\ 2;\ 2)$ нуқтасида ўтказилган нормалнинг координата ўқлари билан ҳосил қилган бурчаклари топилсин.

2006. $x^2z+y^2z=4$ сиртнинг $(-2;\ 0;\ 1)$ нуқтасида ўтказилган нормалнинг тенгламалари ёзилсин. Нормал ва сирт ясалсин.

2007. $xyz=a^3$ сиртга ўтказилган уринма текисликлар координата текисликлари билан ўзгармас ҳажмга эга пирамидалар ҳосил қилиши кўрсатилсин.

2008. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ сиртга ўтказилган уринма текисликларнинг координата ўқларидан кесган кесмалари квадратларининг йиғиндиси ўзгармас a^2 га тенг экани кўрсатилсин.

2009. Координаталар бошидан $y=x\operatorname{tg}\frac{z}{a}$ геликоиднинг $\left(a;\ a;\ \frac{\pi a}{4}\right)$ нуқтасида ўтказилган уринма текисликкача бўлган масофа аниқлансин. $z=0;\ \frac{\pi a}{4};\ \frac{\pi a}{4};\ \pi a$ кесимлар бўйича сирт ясалсин.

2010. $az=x^2+y^2$ сиртнинг $x=y=z$ тўғри чизиқ билан кесишган нуқталарида ўтказилган уринма текисликларнинг тенгламалари ёзилсин.

2011. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ сиртнинг $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма текисликнинг тенгламаси

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$$

кўринишда бўлиши кўрсатилсин.

2012. $x^2+y^2-(z-5)^2=0$ сиртнинг $x_0=4$, $z_0=0$ ва $y_0=3$ нуқтасида ўтказилган нормалнинг тенгламалари ёзилсин. Биринчи октантда $(x>0,\ y>0,\ z>0)$ сирт ва нормал ясалсин.

2013. $2z=x^2-y^2$ сиртнинг (2; 2; 0) нуқтасида ўтказилган нормалнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклар топилсин.

2014. Координаталар бошидан $(2a^2-z^2)\ x^2-a^2y^2=0$ коноиднинг $(a;\ a;\ a)$ нуқтасида ўтказилган уринма текисликкача бўлган масофа аниқлансин.

2015. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ сиртнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринма текисликнинг координата ўқларидан кесган кесмаларининг йиғиндиси ўзгармас a га тенглиги кўрсатилсин.

2016. $z=4-x^2-y^2$ сиртнинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма текислик: 1) xOy текисликка; 2) $2x+2y+z=0$ текисликка параллел бўлади? Ўша уринма текисликларнинг тенгламалари ёзилсин.

11-§. Скаляр майдон. Юксакликлар чизиқлари ва сиртлари. Берилган йўналиш бўйича ҳосила. Градиент

$u=F(x,\ y)$ тенглама бирор соҳанинг ҳар бир $(x,\ y)$ нуқтасида u ни аниқлаб беради, ўша соҳа *скаляр u нинг майдони* дейилади.

$F(x,\ y)=u_1$, $F(x,\ y)=u_2$, ... *лардаги* u_1, u_2, ... лар ўзгармас бўлганда чизиқларнинг ҳар бири бўйича скаляр u ўзгармас бўлиб, у фақат $(x;\ y)$ нуқта бир чизиқдан иккинчи чизиққа ўтганидагина ўзгаради. Бу чизиқлар *юксакликлар чизиқлари* ёки *изочизиқлар* (изотермалар, изобаралар ва шунга ўхшаш дейилади.

$u=F(x,\ y,\ z)$ *тенглама уч ўлчовли фазонинг бирор қисмида скаляр u нинг майдонини аниқлайди. У ҳолда изосиртлар ёки юксакликлар сиртларининг* тенгламалари

$$F(x,\ y,\ z)=u_1,\ F(x,\ y,\ z)=u_2,\ \dots$$

лардан иборат бўлади.

$(x;\ y;\ z)$ нуқта $x=x_0+l\cos\alpha$, $y=y_0+l\cos\beta$, $z=z_0+l\cos\gamma$ тўғри чизиқ бўйича $\frac{dl}{dt}=1$ тезлик билан ҳаракат қилсин.

У ҳолда $F(x,\ y,\ z)$ скаляр

$$v=\frac{du}{dt}=\frac{du}{dl}=\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma=N\cdot l_0$$

тезлик билан ўзгаради, бундаги $N\left\{\frac{\partial F}{\partial x};\ \frac{\partial F}{\partial y};\ \frac{\partial F}{\partial z}\right\}$ — *изосиртнинг нормал* вектори бўлиб, $l_0\ \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$ — l йўналишнинг бирлик векторидан иборат.

Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial^2 F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma=N\cdot l_0 .$$

ҳосила $u=F(x;\ y;\ z)$ *функциянинг берилган* l_0 $\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$ *йўналиш бўйича ҳосиласи* дейилади.

$u=F(x,\ y,\ z)$ скалярнинг *градиенти* деб $\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+$

$+\frac{\partial u}{\partial z}k$ *векторга* айтилади. Градиент скаляр u нинг *энг тез* ўзгариши тезлигининг векторидан иборат.

2017. $z=4-x^2-y^2$. Юксаклик чизиқлари ва A (1; 2) нуқтада $\operatorname{grad} z$ ясалсин.

2018. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Юксаклик чизиқлари ясалсин ва: 1) $y=x$ тўғри чизиқнинг исталган нуқтасида, $y=-x$ тўғри чизиқнинг исталган нуқтасида, жумладан $\left(\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{2}\right)$, (1; $\pm$ $\pm$ 1), ... нуқталарда $\operatorname{grad} z$ ясалсин.

2019. Баландлик горизонталлари $h=20-\frac{x^2}{4}-y^2$ тенглама билан аниқланади. $h=20$, 19, 18, 16 ва 11 *м* га мос горизонталлар ясалсин. Бунда $\operatorname{grad} h$ нинг йўналиши энг тикка қияликка эга чизиқ йўналишини аниқлаб берса, унинг катталиги эса юксакликнинг ўша қиялик тиккалигини беради. $x=2$ ва $y=1$ нуқтада $\operatorname{grad} h$ ясалсин.

2020. $z^2=xy$ сиртнинг (4; 2) нуқтадаги энг катта тиккалиги топилсин.

2021. $u=\ln(e^x+e^y)$ функциянинг координата бурчагининг биссектрисасига параллел йўналиш бўйича ҳосиласи топилсин.

2022. $u=x^2+y^2+z^2$ функциянинг l $\{\cos 45°;\ \cos 60°;\ \cos 60°\}$ йўналиш бўйича (1; 1; 1) нуқтада ҳосиласи топилсин; ўша нуқтада $\operatorname{grad} u$ ва унинг узунлиги топилсин. Юксаклик сиртлари ясалсин.

2023. $u=x^2+y^2-2z$ скалярнинг юксаклик сиртлари ясалсин ва $u=4$ сиртнинг Ox ўқ билан кесишган нуқталарида $\operatorname{grad} u$ топилсин ва ясалсин.

2024. $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$ функциянинг $(a, b; c)$ нуқтада, ўша нуқтанинг радиус-вектори йўналиши бўйича ҳосиласи топилсин.

2025. $z = \frac{4}{x^2+y^2}$. Юксаклик чизиқлари ва $(-1;\ 2)$ нуқтада grad z ясалсин ҳамда |grad z| топилсин.

2026. $u = xyz$. Координата ўқлари билан бир хил бурчак тузувчи йўналиш бўйича исталган нуқтада ва $(1;\ 2;\ 1)$ нуқтада $\frac{du}{dl}$ топилсин.

2027. $u = x^2 + y^2 - z^2$ скалярнинг юксаклик сиртлари ясалсин, координаталар бошидан ўтувчи сиртда grad u аниқлансин ва ўша сиртнинг $y = 0$ ва $z = 2$ бўлган нуқталарида grad u ясалсин.

2028. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. grad u ва унинг узунлиги топилсин.

2029. $u = \frac{z}{c} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ функция майдонининг изосиртлари ясалсин ва $(a;\ b;\ c)$ нуқтада ўша нуқтанинг радиус-вектори йўналиши бўйича u нинг ҳосиласи топилсин.

12-§. Икки ўзгарувчили функциянинг экстремуми

1°. Зарурий шартлар $z = F(x;\ y)$ функция фақат $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ ва $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ бўлган нуқталардагина *экстремумга* эга бўлиши мумкин. Бу нуқталар *критик* нуқталар дейилади.

2°. Етарли шартлар. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ ва $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ҳосилаларнинг $(x_0\ y_0)$ критик нуқтадаги қийматларини A, B ва C орқали белгилайлик. У вақтда агар:

1) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, бўлса, у ҳолда $\begin{cases} A < 0 \text{ бўлганда } F(x_0;\ y_0) = z_{\max} \\ A > 0 \text{ бўлганда } F(x_0;\ y_0) = z_{\min}; \end{cases}$

2) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$, бўлса, у ҳолда экстремум бўлмайди;

3) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$, бўлса, у ҳолда экстремум бўлиши ҳам мумкин, бўлмаслиги ҳам мумкин (шубҳали ҳол).

3°. Шартли экстремум $z = F(y,\ x)$ функциянинг, x ва y ўзаро $\varphi(x,\ y) = 0$ тенглама билан боғланган ҳолдаги экстремумини топиш учун $u = F(x,\ y) + \lambda\varphi(x,\ y)$ ёрдамчи функцияни тузамиз.

Экстремал $(x,\ y)$ нуқтанинг координаталари ушбу $\varphi(x,\ y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ учта тенгламани қаноатлантириши керак λ, x ва y ўша тенгламалардан топилади.

Қуйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин:

2030. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

2031. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

2032. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

2033. $z = 2xy - 4x - 2y.$ **2034.** $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2).$

2035. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y),$ $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ва $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ бўлганда.

2036. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $x + y = 2$ бўлганда.

2037. $z = x + y$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$ бўлганда.

2038. Ҳажми V га тенг ва энг кичик сиртга эга бўлган тўғри тўрт бурчакли очиқ ҳовузнинг ўлчовлари аниқлансин.

2039. $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипс ва $2x + 3y - 6 = 0$ тўғри чизиқ ясалсин ва эллипснинг берилган тўғри чизиқдан энг узоқ ва энг яқин бўлган нуқталари топилсин.

2040. $x^2 - y^2 = 4$ гиперболада $(0;\ 2)$ нуқтадан энг кичик масофада бўлган нуқта топилсин.

2041. Тўлиқ сирти $S = 6\pi\,дм^2$ га тенг ва энг катта ҳажмга эга бўлган цилиндрнинг ўлчовлари аниқлансин.

2042. 1) $x^2 + 3y^2 = 12$ эллипсга ички чизилган ва асоси унинг катта ўқига параллел бўлган тенг ёнли учбурчаклардан юзи энг каттаси топилсин.

2) Ox ўқ икки муҳитнинг чегараси бўлиб ҳисобланади. A $(0;\ a)$ нуқтадан чиққан ёруғлик нури B $(c;\ -b)$ нуқтага энг қисқа вақтда етиб бориши учун у қандай йўл билан юриши керак $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$?

Кўрсатма. $T = \frac{a}{v_1 \cos\alpha} + \frac{b}{v_2 \cos\beta}$ функциянинг $a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta = c$ шарт бажарилгандаги минимумини топиш керак, бунда v_1 ва v_2 ёруғлик нурининг икки муҳитдаги тезликлари, α ва β эса нурнинг тушиш ва синиш бурчаклари.

Қуйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин:

2043. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2.$

2044. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8.$

2045. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$

2046. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8.$

2047. $z = xy$, $x^2 + y^2 = 2$ бўлганда.

2048. Диагоналининг узунлиги $2\sqrt{3}$ бўлган тўғри бурчакли параллелепипедлардан энг катта ҳажмга эга бўлгани топилсин.

2049. 1) $y^2 = 4x$ параболада $x - y + 4 = 0$ тўғри чизиққа энг яқин бўлган нуқта топилсин.

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсга энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчак ички чизилган. Унинг юзи топилсин.

2050. Ён сиртлари S бўлган конуслардан энг катта ҳажмга эга бўлганининг ўлчовлари аниқлансин.

XII БОБ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Дифференциал тенглама ҳақида тушунча

1°. n-тартибли оддий дифференциал тенглама деб

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

кўринишдаги тенгламага айтилади.

Тенгламадаги y ўрнига қўйганда уни айниятга айлантирувчи $\varphi(x)$ функция тенгламанинг *ечими* дейилади. Шу функцияни аниқловчи $y=\varphi(x)$ ёки $\Phi(x, y) = 0$ тенглама дифференциал тенгламанинг *интеграли* дейилади. Ҳар бир интеграл xOy текисликда дифференциал тенгламанинг *интеграл чизиғи* деб аталувчи эгри чизиқни аниқлайди.

Агар x, y ва n та ихтиёрий $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ўзгармасларни ўз ичига олган

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \qquad (2)$$

тенгламадаги ихтиёрий ўзгармасларга ҳар хил қийматлар берганда (1) тенглама ечимларининг мавжудлик ва ягоналик соҳасидан ўтувчи ҳамма интеграл чизиқлар ва фақат ўша чизиқларгина ҳосил бўлса, (2) тенглама (1) дифференциал тенгламанинг ўша соҳадаги *умумий интеграли* дейилади.

Ихтиёрий ўзгармасларга аниқ қийматлар бериб, умумий интегралдан ҳосил қилинган интеграл *хусусий интеграл* дейилади.

Умумий интеграл (2) ни n марта x бўйича дифференциаллаб, ҳосил бўлган n та тенгламадан ва (2) тенгламадан n та ихтиёрий ўзгармасни йўқотсак, берилган (1) дифференциал тенгламага эга бўламиз.

2°. Биринчи тартибли дифференциал тенглама

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (3)$$

кўринишга эга. (3) тенгламани $\frac{dy}{dx}$ га нисбатан ечиш мумкин бўлса, уни ечиб

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (4)$$

тенгламага эга бўламиз.

(4) тенглама, интеграл чизиқнинг $(x;\ y)$ нуқтадаги $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f(x,\ y)$ қиялиги аниқлайди, яъни у интеграл чизиқлар *йўналишларининг майдонини* аниқлайди.

Агарда бирор соҳада $f(x,\ y)$ функция узлуксиз бўлса ва чегараланган $f'_y(x,\ y)$ хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шу соҳанинг ҳар бир ички $(x_0;\ y_0)$ нуқтасидан *бирдан-бир* интеграл чизиқ ўтар экан.

Бундай соҳада (4) тенглама $y = \varphi(x,\ C)$ ёки $\Phi(x,\ y,\ C) = 0$ умумий интегралга эга; бу умумий ечимдан $x = x_0$ бўлганда $y = y_0$ бўладиган *бошланғич шартларни* қаноатлантирувчи бирдан-бир хусусий интеграл топиш мумкин.

2051. Ўрнига қўйиш йўли билан $y = Cx^3$ функция $3y - xy' = 0$ тенгламанинг ечими эканлиги текширилсин. Ушбу

$$1)\ \left(1; \frac{1}{3}\right);\ 2)\ (1;\ 1);\ 3)\ \left(1; -\frac{1}{3}\right)$$

нуқталардан ўтувчи интеграл чизиқлар ясалсин.

2052. Ўрнига қўйиш йўли билан: 1) $y'' + 4y = 0$ ва 2) $y''' - 9y' = 0$ дифференциал тенгламалар мос равишда 1) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ ва 2) $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}$ умумий интегралларга эга эканликлари текширилсин.

2053. $C = 0;\ \pm 1;\ \pm 2$ бўлганда $y = Cx^2$ параболалар ясалсин ва шу параболалар оиласининг дифференциал тенгламаси тузилсин.

2054. 1) $x^2 + y^2 = 2Cx$ айланалар, 2) $y = x^2 + 2Cx$ параболалар оиласининг тасвири ясалсин ва уларнинг дифференциал тенгламалари тузилсин.

2055. 1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; 2) $\frac{dy}{dx} = y - x$; 3) $\frac{dy}{dx} = y + x^2$ тенгламаларнинг ҳар қайсиси билан аниқланган йўналиш майдонларининг тасвири ясалсин.

2056. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$ тенглама билан аниқланувчи йўналиш майдонининг тасвири, барча нуқталарида $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2};\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots$ бўлган айланалар ёрдами билан ясалсин. Координаталар бошидан ўтувчи интеграл чизиқ тахминий чизилсин.

2-§. Ўзгарувчилари ажраладиган 1-тартибли дифференциал тенглама. Ортогонал траекториялар

1°. 1-тартибли

$$Pdx + Qdy = 0 \qquad (1)$$

дифференциал тенгламадаги дифференциаллар олдидаги P

ва Q коэффициентлар фақат x ёки фақат y нинг функцияларидан иборат бўлган кўпайтувчиларга ажралса, яъни агарда тенглама

$$f(x)\,\varphi(y)\,dx + f_1(x)\,\varphi_1(y)\,dy = 0 \qquad (2)$$

кўринишда бўлса, (1) тенглама *ўзгарувчилари ажраладиган* тенглама дейилади.

(2) тенгламнинг иккала ҳадини $\varphi(y)\,f_1(x)$ кўпайтмага бўлиб,

$$\frac{f(x)\,dx}{f_1(x)} + \frac{\varphi_1(y)\,dy}{\varphi(y)} = 0 \qquad (3)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

(3) тенгламанинг, демак, (2) тенгламанинг умумий интеграли

$$\int \frac{f(x)\,dx}{f_1(x)} + \int \frac{\varphi_1(y)\,dy}{\varphi(y)} = C \qquad (4)$$

дан иборат бўлади.

2°. Берилган $F(x, y, a) = 0$ чизиқлар оиласининг ҳар бир чизиғини тўғри бурчак остида кесувчи чизиқлар ўша чизиқлар оиласининг ортогонал траекториялари дейилади.

$F(x, y, a) = 0$ тенгламани x бўйича дифференциаллаб, ҳосил бўлган ва $F(x, y, a) = 0$ тенгламалардан a йўқотилса, берилган чизиқлар оиласининг $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламасига эга бўламиз. У вақтда *ортогонал траекторияларнинг дифференциал тенгламаси* $y' = -\frac{1}{f(x, y)}$ дан иборат бўлади.

Қуйидаги дифференциал тенгламаларда: 1) умумий интеграл топилсин: 2) бир нечта интеграл чизиқлар чизилсин; 3) $x = -2$ бўлганда $y = 4$ бошланғич шартлар бўйича хусусий интеграл топилсин:

2057. $xy' - y = 0$. **2058.** $xy' + y = 0$.

2059. $yy' + x = 0$. **2060.** $y' = y$.

Қуйидаги тенгламаларнинг умумий интеграллари топилсин:

2061. $x^2y' + y = 0$. **2062.** $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

2063. $\varphi^2\,dr + (r - a)\,d\varphi = 0$. **2064.** $2st^2\,ds = (1 + t^2)dt$.

Қуйидаги тенгламаларнинг умумий интеграллари ва берилган бошланғич шартлар бўйича хусусий интеграллари топилсин:

2065. $2y'\sqrt{x} = y$, $x = 4$ бўлганда $y = 1$.

2066. $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x$, $x = \frac{\pi}{4}$ бўлганда $y = \frac{1}{2}$.

2067. $x^2y' + y^2 = 0$, $x = -1$ бўлганда $y = 1$.

2068. 1) $y'(x^2-4) = 2xy$, 2) $y' + y\operatorname{tg} x = 0$, тенгламалардан ҳар бирининг 1) (0; 1); 2) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$; 4) (0; -1) нуқталардан ўтувчи интеграл чизиқлари ясалсин.

2069. Агар $\left(1; \frac{1}{3}\right)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқта радиус-векторининг бурчак коэффициентидан уч марта катта бўлса, ўша эгри чизиқ топилсин.

2070. Эгри чизиқ A (0; a) нуқтадан ўтади, PN — унинг ихтиёрий нуқтасининг ординатаси. AP ёйнинг узунлиги s бўлганда $OAPN$ нинг юзи as га тенг бўлиш шартидан эгри чизиқ аниқлансин.

2071. Эгри чизиқ (a; a) нуқтадан ўтади. Ихтиёрий нуқтасидаги уринма ости уриниш нуқтаси абсциссасининг иккиланганига тенг. Шу чизиқ топилсин.

2072. (— 1; — 2) нуқтадан ўтиб, ҳар бир нуқтасидаги нормал ости 2 га тенг эгри чизиқ топилсин.

2073. Температураси 20° бўлган уйдаги жисмни 100° дан 60° гача совутиш учун 10 минут вақт кетса, уни 25° гача совутиш учун қанча вақт кетади? (Ньютон қонунига асосан совуш тезлиги температуралар айирмасига пропорционал.)

2074. Осма кўприк (31- бетдаги 6-чизма) канатига горизонтал балканинг ҳар бир бирлик узунлигидан тушадиган юк p *кГ* га тенг. Канатнинг энг қуйи нуқтасидаги тарангликни H *кГ* деб ҳамда канат оғирлигини ҳисобга олмасдан унинг шакли топилсин.

Кўрсатма. $\overset{\frown}{OC}$ ёйда ихтиёрий M нуқта оламиз (31- бетдаги 6- чизма). Канатнинг OM бўлагига учта куч; горизонтал H (M дан чапда), вертикал px оғирлик ва тангенциал T (M дан ўнгда) кучлар таъсир этади. Мувозанат бўлиши учун кучларнинг Ox ва Oy ўқлардаги проекциялари йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак.

2075. $P(-a;\ a)$ нуқтадан ўтувчи ва исталган нуқтасидаги уринманинг координата ўқлари орасидаги кесмаси уриниш нуқтаси M да тенг иккига бўлинувчи эгри чизиқ аниқлансин ва ясалсин.

2076. $ay = x^2$ параболалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин. Улар ясалсин.

2077. $xy = c$ гиперболалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин.

2078. $ay^2 = x^3$ ярим кубик параболалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин.

2079. $x^2 + 4y^2 = a^2$ эллипслар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2080. $y'x^3 = 2y$. 2081. $(x^2+x)\ y' = 2y+1$.

2082. $y'\sqrt{a^2+x^2} = y$. 2083. $(1+x^2)\ y' + 1 + y^2 = 0$.

2084. $dr + r\operatorname{tg}\varphi\ d\varphi = 0$; $\varphi = \pi$ бўлганда $r = 2$.

2085. $y' = 2\sqrt{y}\ln x$; $x = e$ бўлганда $y = 1$.

2086. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$; $x = 0$ бўлганда $y = 1$.

2087. $A\ (-1;\ 1)$ нуқтадан ўтувчи ва исталган нуқтасидаги уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқта ординатасининг квадратига тенг бўлган эгри чизиқ аниқлансин.

2088. Эгри чизиқ $A\ (0;\ a)$ нуқтадан ўтади, PN — ихтиёрий нуқтасининг ординатаси. $OAPN$ нинг юзи $= a\,(PN - a)$ эканига кўра эгри чизиқ аниқлансин.

2089. $(-1;\ 1)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг исталган нуқтасида ўтказилган уринма Ox ўқдан уриниш нуқтаси абсциссасининг квадратига тенг OT кесма кесади. Ўша эгри чизиқ аниқлансин ва ясалсин.

2090. $x^2 - 2y^2 = a^2$ гиперболалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин.

2091. Исталган нуқтасининг радиус-вектори, шу нуқтада ўтказилган нормалнинг эгри чизиқ билан Ox ўқ орасидаги кесмасига (яъни нормал узунлигига) тенг эгри чизиқ аниқлансин.

2092. Эгри чизиқ ва унинг ихтиёрий нуқтасининг ординатаси ҳамда координата ўқлари билан чегараланган юз, эгри чизиқнинг ўша нуқтасининг координаталарига асосан ясалган тўғри тўртбурчак юзининг $\frac{1}{3}$ га тенг. Ўша чизиқ аниқлансин.

3-§. 1-тартибли: 1) бир жинсли, 2) чизиқли дифференциал тенгламалар ва 3) Бернулли дифференциал тенгламаси

1°. Бир жинсли тенглама. $Pdx + Qdy = 0$ кўринишдаги тенглама P ва Q x ва y нинг бир хил ўлчовли бир жинсли функциялари бўлганда, *бир жинсли* тенглама дейилади. Бу тенглама $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ кўринишга келтирилиб, $\frac{y}{x} = u$ ёки $y = ux$ алмаштириш билан ечилади.

2° Чизиқли тенглама. Изланувчи y ва унинг барча ҳосилаларига нисбатан биринчи даражали бўлган тенглама *чизиқли* дейилади. 1-тартибли чизиқли тенглама $y' + Py = Q$ кўринишга эга. $y = uv$ алмаштириш билан бу тенглама ўзгарувчилари ажраладиган иккита тенглaмага келтирилади. 1-тартибли чизиқли тенгламанинг ечиш йўлларидан иккинчиси (*ихтиёрий ўзгармасини вариация қилиш*) қуйидагидан иборат: олдин $y'+Py=0$ тенгламани ечиб, $y=-Ae^{-\int Pdx}$ ечимни топамиз. Бундаги A ни x нинг функцияси ҳисоблаб, берилган тенгламага қўямиз. Бундан A' ва A ни топамиз.

3°. Бернулли тенгламаси: $y'+Py=Qy^n$ чизиқли тенгламага ўхшаш $y=uv$ алмаштириш билан ёки ихтиёрий ўзгармасни вариация қилиш билан ечилади. Бернулли тенгламаси $z=y^{1-n}$ алмаштириш натижасида чизиқли тенгламага келтирилади.

Қуйидаги дифференциал тенгламалар интеграллансин:

2093. $yy'=2y-x$. 2094. $x^2+y^2-2xyy'=0$.

2095. $\frac{ds}{dt}=\frac{s}{t}-\frac{t}{s}$. 2096. $y'-\frac{3y}{x}=x$.

2097. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}$. 2098. $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$.

2099. $y'x+y=-xy^2$. 2100. $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$.

2101. $xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x$.

2102. $x^2y'=y^2+xy$. 2103. $xy'+y=\ln x+1$.

2104. $x^2y^2y'+yx^3=1$.

2105—2107- масалаларда берилган бошланғич шартлар бўйича хусусий интеграллар топилсин:

2105. $y+\sqrt{x^2+y^2}-xy'=0$; $x=1$ бўлганда $y=0$.

2106. $t^2\frac{ds}{dt}=2ts-3$; $t=-1$ бўлганда $s=1$.

2107. $xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$; $x=1$ бўлганида $y=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

2108. Исталган нуқтасидаги уринма ости, уриниш нуқтаси координаталарининг ўрта арифметик қийматига тенг бўлган эгри чизиқлар оиласи топилсин.

2109. $x^2+y^2=2ax$ айланалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин.

2110. Қаршилиги R, ўз-ўзидан индукцияланиши Δ ва электр юргизувчи кучи E бўлган занжирда оқим кучи i

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E$$

дифференциал тенгламани қаноатлантиради. R ва L ни ўзгармас, электр юргизувчи куч E ни чизиқли ўсувчи: $E=kt$

деб олиб, юқоридаги тенглама ечилсин. Бошланғич шартлар: $t=0$ бўлганда $i=0$.

2111. Берилган нуқтадан чиқувчи барча нурларни берилган йўналишга параллел қилиб қайтарувчи кўзгунинг формаси (шакли) аниқлансин.

Кўрсатма. Кўзгунинг текис кесимини олиб, берилган нуқтани координаталар боши, берилган йўналишни эса Oy ўқ деб оламиз. Изланувчи эгри чизиқнинг M нуқтасида ўтказилган уринма Oy ўқ ва OM билан тенг бурчаклар ҳосил қилади, яъни Oy ўқдан OM га тенг ON кесма кесади.

Қуйидаги дифференциал тенгламалар ечилсин:

2112. $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$.

2113. $(a^2+x^2)y'+xy=1$.

2114. $xy'+2\sqrt{xy}=y$. **2115.** $(2x+1)y'+y=x$.

2116. $y'-y\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x$. **2117.** $t\,ds-2s\,dt=t^3\ln t\,dt$.

2118. $y'+xy=xy^3$. **2119.** $y'+y\cos x=\sin 2x$.

2120. $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}$; $x=-1$ бўлганда $y=1$.

2121. $3y^2y'+y^3=x+1$; $x=1$ бўлганда $x=-1$.

2122. $(1-x^2)y'-xy=xy^2$; $x=0$ бўлганда $y=0{,}5$.

2123. $A\,(a;\,a)$ нуқтадан ўтувчи ва координаталар бошидан чизиқнинг исталган нуқтасидаги уринмагача бўлган масофа ўша нуқта абсциссасига тенг бўлган эгри чизиқ аниқлансин.

4-§. Кўпайтма ва бўлинманинг дифференциалларини ўз ичига олган дифференциал тенгламалар

$$d(xy)=x\,dy+y\,dx;\quad d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2};$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}.$$

Бундай тенгламалар баъзан, мос равишда $xy=u$, $y=\frac{u}{x}$ ёки $\frac{y}{x}=u$, $y=ux$ алмаштиришлар ёрдами билан осонгина ечилади.

2124. $x^2dy+xy\,dx=dx$. **2125.** $y^2x\,dy-y^3dx=x^2dy$.

Кўрсатма. 2125- мисолдаги тенглама $y^2d\left(\frac{y}{x}\right)=dy$ ёки $y^2du=dy$ кўринишга келтирилади.

2126. $y\,dx + (x - y^3)\,dy = 0$. 2127. $yxdx - (x - y^3)\,dy = 0$.

2128. $y \cos x\,dx + \sin x\,dy = \cos 2x\,dx$.

2129. $t\frac{ds}{dt} - s = s^2 \ln t$. 2130. $x^2y^2 + 1 + x^3yy' = 0$.

2131. $t^2s\,dt + t^3ds = dt$. 2132. $x\,dy - y\,dx = x^2dx$.

2133. $xy' + \operatorname{tg} y = 2x \sec y$. 2134. $y\left(ye^{-\frac{x}{2}} + 1\right) = xy'$.

5-§. Тўлиқ дифференциалли 1-тартибли дифференциал тенгламалар. Интегралловчи кўпайтувчи

1. Агар $Pdx + Q\,dy = 0$ дифференциал тенгламада $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ бўлса, бу тенглама $du = 0$ кўринишга эга ва унинг умумий интеграли $u = C$ бўлади.

2°. Агар $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ бўлса, у ҳолда баъзи бир шартлар бажарилганда шундай $\mu\,(x, y)$ функция топиш мумкинки, $\mu Pdx + \mu\,Qdy = du$ бўлади. Бу $\mu\,(x, y)$ функция *интегралловчи* кўпайтувчи дейилади.

Қуйидаги ҳолларда интегралловчи кўпайтувчини топиш осон:

1) $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \Phi\,(x)$ бўлганда $\ln \mu = \int \Phi\,(x)\,dx$ бўлади.

2) $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \Phi_1\,(y)$ бўлганда $\ln \mu = \int \Phi_1\,(y)\,dy$ бўлади.

4-§ даги дифференциал тенгламалар ушбу параграфда қаралаётган тенгламаларнинг хусусий ҳолларидир.

Қуйидаги «тўлиқ дифференциалли» дифференциал тенгламалар ечилсин:

2135. $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy = 0$.

2136. $3x^2e^y\,dx + (x^3e^y - 1)\,dy = 0$.

2137. $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})\,dy = 0$.

2138. $2x \cos^2 y\,dx + (2x - x^2 \sin 2y)\,dy = 0$.

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг интегралловчи кўпайтувчилари топилсин ва тенгламалар ечилсин:

2139. $(x^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$.

2140. $2x \operatorname{tg} y\,dx + (x^2 - 2 \sin y)\,dy = 0$.

2141. $(e^{2x} - y^2)\,dx + y\,dy = 0.$

2142. $(1 + 3x^2 \sin y)\,dx - x \operatorname{ctg} y\,dy = 0.$

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг чап томонлари тўлиқ дифференциалдан иборат эканлиги текширилсин ва тенгламалар ечилсин:

2143. $(3x^2 + 2y)\,dx + (2x - 3)\,dy = 0.$

2144. $(3x^2y - 4xy^2)\,dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)\,dy = 0.$

2145. $(x \cos 2y + 1)\,dx - x^2 \sin 2y\,dy = 0.$

Қуйидаги тенгламаларнинг интегралловчи кўпайтувчилари топилсин ва тенгламалар ечилсин:

2146. $y^2 dx + (yx - 1)\,dy = 0.$

2147. $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0.$

2148. $(\sin x + e^y)\,dx + \cos x\,dy = 0.$

2149. $(x \sin y + y)\,dx + (x^2 \cos y + x \ln x)\,dy = 0.$

6 - §. Ҳосилага нисбатан ечилмаган 1-тартибли дифференциал тенгламалар. Лагранж ва Клеро тенгламалари

1°. Агар $F(x, y, y') = 0$ тенглама y' га нисбатан 2 - даражали бўлса, бу тенглама y' га нисбатан иккита бирор соҳада x ва y га нисбатан узлуксиз $y' = f_1(x, y)$ ва $y' = f_2(x, y)$ ечимга эга. Геометрик нуқтаи назардан бу тенглама шу соҳанинг ихтиёрий $(x_0; y_0)$ нуқтасида иккита интеграл чизиқнинг йўналишларини аниқлайди.

Бундай $F(x, y, y') = 0$ дифференциал тенгламалар, $\Phi(x, y, C) = 0$ умумий ва хусусий интеграллардан ташқари баъзан ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олмаган ва умумий интегралдан ихтиёрий ўзгармасга бирор қиймат беришдан ҳосил бўлмайдиган *махсус интегралга* эга бўлади.

Махсус интеграл мавжуд бўлса, уни $F(x, y, p) = 0$ ва $F'_p(x, y, p) = 0$ тенгламалардан $y' = p$ ни йўқотиб ёки умумий интеграл $\Phi(y, x, C) = 0$ билан $\Phi'_C(x, y, C) = 0$ дан C ни йўқотиб топиш мумкин. Геометрик нуқтаи назардан *махсус интеграл, интеграл чизиқлар оиласининг ўрамасини аниқлайди**.

2°. Лангранж тенгламаси

$$y = xf(p) + \varphi(p) \tag{1}$$

кўринишда ёзилади, бунда $p = y'$. Бу тенглама қуйидагича интегралланади.

(1) ни x бўйича дифференциаллаб,

$$p = f(p) + [xf'(p) + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

тенгламани топамиз.

---

* 216- бетдаги ўраманинг таърифига қаралсин.

Бу тенглама x ва $\frac{dx}{dp}$ га нисбатан чизиқли. Уни ечиб

$$x = CA(p) + B(p) \qquad (2)$$

га эга бўламиз.

(1) ва (2) тенгламалар умумий интегрални параметр орқали аниқлайди. Бу тенгламалардан (мумкин бўлса) p ни йўқотиб, $\Phi(x, y, C)=0$ кўринишдаги умумий интегралга эга бўламиз.

3°. Клеро тенгламаси

$$y = px + \varphi(p) \qquad (3)$$

Лагранж тенгламасининг хусусий ҳолидир. Бу тенглама $y = Cx + \varphi(C)$ умумий интегралга ва $y = px + \varphi(p)$ ҳамда $x = -\varphi'(p)$ тенгламалардан p параметрни йўқотишдан ҳосил бўладиган махсус ечимга эгадир.

2150. $y'^2 = 4y$ тенгламанинг бир нечта интеграл чизиқлари ясалсин. $M(1; 4)$ нуқтадан қандай иккита интеграл чизиғи ўтади?

2151. $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ тенгламанинг интеграл чизиқлари чизилсин. $M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ нуқтадан қандай иккита интеграл чизиғи ўтади?

2152. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$ тенгламанинг интеграл чизиқлари $y = \pm 2x$ тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчак ичида ётиши кўрсатилсин. Умумий интегралда ўзгармас $C = \pm$ $\pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ ва ҳоказо деб олиб, интеграл чизиқлар ясалсин.

2153. 1) $yy'^2 + y'(x - y) - x = 0$; 2) $xy'^2 + 2xy' - y = 0$ тенгламалар ечилсин ва интеграл чизиқлари ясалсин.

2154. Ўзгарувчилардан биттаси ошкор иштирок этмаган:

$$1)\ y = 1 + y'^2;\quad 2)\ x = 2y' - \frac{1}{y'^2}$$

тенгламалар ечилсин.

Кўрсатма. y' ни p деб белгилаб, биринчи тенгламани x бўйича, иккинчи тенгламани y бўйича дифференциаллаш керак.

2155. 1) $y = xy'^2 + y'^2$; 2) $y = 2xy' + \frac{1}{x'^2}$. 3) $2y = \frac{xy'^2}{y'+2}$ Лагранж тенгламаларининг умумий ва махсус интеграллари топилсин.

2156. 1) $y = xy' - y'^2$; 2) $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$; 3) $y = xy' + \frac{1}{2y'}$. Клеро тенгламаларининг умумий ва махсус интеграллари топилсин ва интеграл чизиқлари ясалсин.

2157. $y'^2 + y = 1$ тенгламанинг интеграл чизиқлари ясалсин. $M\left(1; \frac{3}{4}\right)$ нуқтадан қандай иккита интеграл чизиғи ўтади?

2158. Ўзгарувчилардан бири ошкор иштирок этмаган тенгламалар ечилсин: 1) $y = y'^2 + y'^3$; 2) $x = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$

2159. $y = 2y'x + \frac{x^2}{2} + y'^2$.

2160. 1) $y = y'x + \frac{1}{y'}$; 2) $y = xy' + y' + y'^2$ Клеро тенгламаларининг умумий ва махсус интеграллари топилсин ва интеграл чизиқлари ясалсин.

2161. Уринмалари координата ўқлари билан юзи ўзгармас $2a^2$ га тенг учбурчак тузувчи эгри чизиқ топилсин.

2162. Уринмасининг координата ўқларидан кесган кесмаларининг йиғиндиси a га тенг эгри чизиқ топилсин.

7-§. Тартибини пасайтириш мумкин бўлган юқори тартибли дифференциал тенгламалар

1°. $y^{(n)} = f(x)$ кўринишдаги тенглама ўнг томонини кетма-кет n марта интеграллаб ечилади. Ҳар бир интеграллашда битта ихтиёрий ўзгармас ҳосил бўлади, охирги натижада n та ихтиёрий ўзгармас иштирок этади.

2°. y ошкор иштирок этмаган $F(x, y', y'') = 0$ тенглама $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$ алмаштириш билан

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

кўринишга келтирилади.

3°. x ошкор иштирок этмаган $F(y, y', y'') = 0$ тенглама $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ алмаштириш билан $F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$ кўринишга келтирилади.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2163. 1) $y''' = \frac{6}{x^3}$; бошланғич шартлар: $x = 1$ бўлганда $y = 2$, $y' = 1$, $y'' = 1$; 2) $y'' = 4\cos 2x$, $x = 0$ бўлганда $y = 0$, $y' = 0$; 3) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$.

2164. $x^3y'' + x^2y' = 1$. **2165.** $yy'' + y'^2 = 0$.

2166. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$. **2167.** $y'' + 2y(y')^3 = 0$.

2168. $y''x \ln x = y'$. **2169.** $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.

2170. 1) $xy'' - y' = e^x x^2$; 2) $y'' + 2xy'^2 = 0$.

2171. Горизонтал тўсиннинг бир учи бириктирилган, иккинчи учига P куч таъсир этади (тўсиннинг оғирлиги ҳисобга олинмасин ва эгилиши шу қадар кичик ҳисоблансинки, $1 + y'^2 \approx 1$). Тўсин қандай эгри чизиқ бўйлаб эгилиши аниқлансин.

2172. Эгрилик радиуси нормал узунлигидан икки марта катта бўлган эгри чизиқлар аниқлансин.

2173. Эгрилик радиуси нормал узунлигига тенг бўлган эгри чизиқлар аниқлансин.

2174. $[0, 1]$ сегментда эгрилиги $k = x$, яъни эгрилиги Ox ўқ бўйлаб текис ўсувчи, координаталар бошида Ox ўққа уринувчи эгри чизиқ аниқлансин (*ўтувчи* чизиқ). Тахминан $1 + y'^2 \approx 1$ деб олинсин.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2175. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$: $x = \frac{\pi}{4}$ бўлганда $y = \frac{\ln 2}{2}$, $y' = 1$.

2176. $(1 + x^2)\, y'' + 2xy' = x^3$. **2177.** $y''y^3 = 1$.

2178. $2yy'' = (y')^2$. **2179.** $t\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + t = 0$.

2180. $2yy'' = 1 + y'^2$. **2181.** $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$.

2182. Эгрилик радиуси нормал узунлигининг кубига тенг бўлган эгри чизиқ аниқлансин.

2183. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда шундай эгри чизиқ аниқлансинки, у координаталар бошида Ox ўққа уринсин ва унинг ихтиёрий нуқтадаги эгрилиги $k = \cos x$ бўлсин.

8-§. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламалар

Бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0, \qquad (1)$$

дан иборат. Бунда p_i p — x нинг функциялари. Тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \qquad (2)$$

дан иборат, бунда $y_1, y_2 .. y_n$ лар (1) тенгламанинг чизиқли бўлмаган хусусий ечимлари, $C_1, C_2, \ldots C_n$ лар эса ихтиёрий ўзгармаслар.

Агар (1) тенгламанинг $p_1, p_2, \ldots, p_n$ коэффициентлари ўзгармас бўлса, у ҳолда тенгламанинг $y_1, y_2, \ldots, y_n$ хусусий ечимлари

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots p_n = 0 \tag{3}$$

характеристик тенглама ёрдами билан топилади.

1) (3) тенгламанинг ҳар бир m каррали $r = a$ ҳақиқий илдизига $e^{ax}, xe^{ax}, \ldots, x^{m-1} e^{ax}$ хусусий ечимлар мос келади.

2) Ҳар бир m каррали $r = \alpha \pm \beta i$ мавҳум илдизлар жуфтига m жуфт

$$\begin{cases} e^{ax}\cos\beta x, \ xe^{ax}\cos\beta x, \ \ldots, \ x^{m-1} e^{ax}\cos\beta x, \\ e^{ax}\sin\beta x, \ xe^{ax}\sin\beta x, \ \ldots, \ x^{m-1} e^{ax}\sin\beta x \end{cases}$$

хусусий ечимлар мос келади.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2184. $y'' - 4y' + 3y = 0$. **2185.** $y'' - 4y' + 4y = 0$.

2186. $y'' - 4y' + 13y = 0$. **2187.** $y'' - 4y = 0$.

2188. $y'' + 4y = 0$. **2189.** $y'' + 4y' = 0$.

2190. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0$. **2191.** $4\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = 0$.

2192. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$; $t = 0$ бўлганда $s = 1, s' = 1$.

2193. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$.

2194. $y^{IV} - 16y = 0$, **2195.** $y''' - 8y = 0$,

2196. $y''' + 3ay'' + 3a^2y' + a^3y = 0$.

2197. $y^{IV} + 4y = 0$. **2198.** $4y^{IV} - 3y'' - y = 0$.

2199. l узунликдаги ипга осилган массаси m га тенг маятник тебранишларининг тенгламаси аниқлансин (қаршилик ҳисобга олинмасин ва узоқлашиш бурчаги α кичик бўлган ҳолда $\sin\alpha \approx \alpha$ деб ҳисоблансин). Тебраниш даври аниқлансин.

Кўрсатма. Массаси m бўлган нуқта радиуси l га тенг айлана бўйлаб оғирлик кучи таъсиридагина ҳаракат қилади деб қаралса, нуқтанинг ҳаракати кучнинг фақат тангенциал (уринма бўйлаб) ташкил қилувчиси таъсиридагина бўлади. Тангенциал ташкил қилувчи, бир томондан $m\frac{d^2s}{dt^2}$ бўлса, иккинчи томондан, mg кучнинг уринмага бўлган проекциясига тенгдир, яъни $m\frac{d^2s}{dt^2} = mg\cos 0$; бунда $s = \alpha l$ бўлгани учун масаланинг шартига кўра $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha$.

2200. Пружинанинг учига иккита бир хил юк осилган. Юклардан биттасининг таъсирида пружина a *см* чўзилади. Юклардан биттаси узилганда иккинчисининг ҳаракати аниқлансин, яъни ҳаракат қонуни тузилсин (қаршилик ҳисобга олинмасин). Тебраниш даври аниқлансин.

2201. 2200-масалани ҳаракат тезлигига пропорционал бўлган қаршиликни ҳисобга олиб ечилсин.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2202. $y'' + 3y' + 2y = 0$. 2203. $y'' + 2ay' + a^2y = 0$.

2204. $y'' + 2y' + 5y = 0$. 2205. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$.

2206. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$. 2207. $\frac{d^2s}{dt^2} + a\frac{ds}{dt} = 0$.

2208. $\ddot{x}_{tt} + 2\dot{x}_t + 3x = 0$. 2209. $y''' - 3y'' + 4y = 0$.

2210. $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$. 2211. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

2212. $y'' - y = 0$ тенгламанинг (0; 0) нуқтада $p = x$ тўғри чизиққа уринувчи интеграл чизиғи топилсин.

9-§. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламалар

1°. Асосий хосса. Бир жинсли бўлмаган

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x) \qquad (1)$$

ва бир жинсли

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0 \qquad (2)$$

тенгламалар берилган; u — (2) тенгламанинг *умумий* ечими, y_1 эса (1) тенгламанинг *хусусий* ечими бўлсин. У ҳолда (1) тенгламанинг *умумий* ечими

$$y = u + y_1$$

дан иборат.

2°. Аниқмас коэффициентлар методи. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ лар ўзгармас бўлганда хусусий ечим y_1 қуйидаги ҳолларда *аниқмас коэффициентлар* методи билан топилади:

1) $f(x)$ — кўпҳад,

2) $f(x) = e^{mx}(a \cos nx + b \sin nx)$.

3) $f(x)$ — олдинги функцияларнинг йиғиндиси ёки кўпайтмаси.

Бу ҳолларда y_1 нинг кўриниши $f(x)$ га ўхшаш бўлиб, ундан фақат коэффициентлари билан фарқланади.

Қуйидаги махсус ҳоллар олдингилардан фарқланади: 1) $f(x)$—кўпҳад, лекин $r = 0$ — характеристик тенгламанинг k каррали илдизи; 2) $f(x) = {}^{mx}(a \cos nx + b \sin nx)$, лекин $r = m \pm ni$ характеристик тенгламанинг k каррали илдизи. Бу махсус ҳолларда y_1 хусусий ечим $f(x)$ дан коэффициентлари билангина эмас, балки x^k кўпайтувчи билан ҳам фарқланади.

3°. **Ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш усули.** Бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламани ечиш усулларидан умумийроғи бўлиб Лагранж методи ёки *ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш методи* ҳисобланади. y_1 ва y_2 бир $y'' + py' + qy = 0$ тенгламанинг ўзаро боғлиқ бўлмаган иккита хусусий ечими бўлса, у ҳолда $y'' + py' + qy = f(x)$ тенгламанинг ечими, Лагранж методига асосан, $y = Ay_1 + By_2$ кўринишда изланади, бундаги A ва B лар x нинг функциялари бўлиб улар

$$\left.\begin{aligned} A'y_1 + B'y_2 &= 0, \\ A'y_1' + B'y_2' &= f(x) \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасини қаноатлантириши керак.

Бундан $A' = -\dfrac{y_2 f(x)}{w}$, $\quad B' = \dfrac{y_1 f(x)}{w}$, $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2213. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$. **2214.** $y'' - 4y = 8x^3$.

2215. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$.

2216. $y'' + y = x + 2e^x$. **2217.** $y'' + 3y' = 9x$.

2218. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

2219. $y'' - 3y' + 2y = e^x$. **2220.** $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 2k\sin kt$.

2221. $y'' - 2y = xe^{-x}$. **2222.** $y'' - 2y' = x^2 - x$.

2223. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.

2224. $\ddot{x} + 2k\dot{x} + 2k^2x = 5k^2 \sin kt$.

2225. $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$ **2226.** $y^{IV} - 81y = 27e^{-3x}$.

2227. $\dddot{x} + \dot{x} = 3t^2$. **2228.** $y''' + 8y = e^{-2x}$.

2229. 1) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}$; 2) $a^3\ddot{x} + ax = 1$.

2230. $x'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$. **2231.** $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

2232. $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$. **2233.** $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

2234. 1) $y'' + y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$; 2) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

2235. Бирлик масса Ox ўқ бўйича йўналтирилган ўзгармас a куч таъсири билан ўқ йўналишида ҳаракат қилади; ҳаракатга бўлган қаршиликнинг қиймати ҳаракат тезлигига тенг. Агар $t = 0$ бўлганда $x = 0$ ва тезлик $v = 0$ бўлса, ҳаракат қонуни топилсин.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2236. $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

2237. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$

2238. $y'' + 2y' + y = e^x$.

2239. $y'' + y' + 2{,}5y = 25\cos 2x$.

2240. $4y'' - y = x^3 - 24x$.

2241. $y'' - y = e^{-x}$.

2242. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 2t^3 - 2$.

2243. 1) $y'' - 2my' + m^2y = \sin mx$; 2) $n^3y'' - 4ny = 8$.

2244. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x$.

2245. $y''' - 3y'' + 3y - y = e^x$.

Қуйидаги тенгламалар ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули билан ечилсин:

2246. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

2247. 1) $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$; 2) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$.

2248. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

10 - §. Ҳар хил типдаги дифференциал тенгламаларга мисоллар

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг типи аниқлансин ва ечилсин:

2249. $y' + \frac{y}{1+x} = e^{-x}$.

2250. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,x$.

2251. $(x - x^3)\,y' + (2x^2 - 1)\,y = x^3$.

2252. $(1 + x^2)\,y' + y\,(x - \sqrt{1+x^2}) = 0$.

2253. $t^2ds + 2ts\,dt = e^t\,dt$.

2254. $xy' = 4\,(y + \sqrt{y})$.

2255. $2xyy' = 2y^2 + \sqrt{y^4 + x^4}$.

2256. $xy'' + y' = \ln x$.

2257. $yy'' - 2y'^2 = 0$.

2258. $y'' - m^2y = e^{-mx}$.

2259. $y'x\ln x + y = 2\ln x$.

2260. $xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$.

2261. $2y' + y = y^3\,(x - 1)$

2262. $y''' - 2y'' + y' = x^2$

2263. $y'' = y' + y'^2$.

2264. $\frac{d^3s}{dt^3} - 3\frac{ds}{dt} - 2s = \sin t + 2\cos t$.

2265. 1) $\sin t\,ds = \left(4t\sin^2\frac{t}{2} + s\right)dt$; 2) $yy'x - y^2 = 1$.

2266. 1) $xy' + y\,(x\operatorname{tg} x + 1) = \sec x$; 2) $y''' + y = e^{-x}$.

2267. 1) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$; 2) $y'''y = y''y'$.

2268. Оғирлиги $P = a^3$ $кГ$ ва радиуси a дециметр цилиндр ўқи вертикал бўлган ҳолда сувда сузади. Цилиндрни озгина сувга ботириб кейин қўйиб юборишдан ҳосил бўлган тебранишнинг даври топилсин. Ҳаракатга бўлган қаршиликни тахминан нолга тенг деб қабул қилинсин.

2269. Сиртларнинг радиуслари a ва $2a$ га тенг, ичи ковак темир шарнинг ички сиртининг температураси 100° ва ташқи сиртининг температураси 20°. Марказдан исталган r масофада $(a \leqslant r \leqslant 2a)$ ва $r = 1{,}6\ a$ бўлганда шар девори ичидаги температура аниқлансин.

Кўрсатма. Температураси стационар тақсимланган ўтказувчида температуранинг тушиш тезлиги $\frac{dT}{dr}$, кўндаланг кесим юзига тескари пропорционал.

11-§. Эйлернинг чизиқли дифференциал тенгламаси

$$x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f\ (x).$$

Бир жинсли ($f\ (x) = 0$ бўлганда) тенгламанинг хусусий ечимини $y = x^r$ кўринишда топиш мумкин, бунда r — ўзгармас сон r ни аниқлаш учун бир жинсли дифференциал тенгламада y ўрнига $y = x^r$ ни қўйиб, r га нисбатан ҳосил бўлган *характеристик* тенгламани ечиш керак. Бунда:

1) Ҳар бир ҳақиқий m каррали $r = a$ илдизга m та x^a, $x^a \ln x^a$, $x^a(\ln)^2$, ... хусусий ечим мос келади.

2) Ҳар бир m каррали $r = \alpha \pm \beta i$ мавҳум илдизлар жуфтига m жуфт

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x),\ x^\alpha \cos(\beta \ln x) \ln x, \ldots$$
$$x^\alpha \sin(\beta \ln x),\ x^\alpha \sin(\beta \ln x) \ln x, \ldots$$

хусусий ечимлар мос келади.

Эйлернинг бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаси ўзгармасларни вариациялаш методи билан ечилади.

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2270. 1) $x^3y'' - 3xy' + 3y = 0$; 2) $x^2y'' - 2y = 0$;
3) $x^2y'' + 2xy' - n(n+1)\ y = 0$.

2271. 1) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$; 2) $x^2y'' + xy' + y = 0$.

2272. 1) $xy'' + 2y' = 10x$; 2) $x^2y'' - 6y = 12\ \ln x$.

2273. 1) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x$;

2) $x^3y'' + 3x^2y' + xy = 6\ln x$.

2274. 1) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^5$; 2) $x^2y'' + xy' + y = x$.

12- §. Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системалари

Ушбу

2275. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$ **2276.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - y = e^t \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = e^t \end{cases}$

тенгламалар ечилсин.

2275-масалага *кўрсатма*. Тенгламаларнинг биринчисидан t бўйича ҳосила олиб учта тенгламадан y ва $\dfrac{dy}{dt}$ ни йўқотамиз.

2277. $\begin{cases} 5\dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dy}{dt} + 4x - y = e^{-t} \\ \dfrac{dx}{dt} + 8x - 3y = 5e^{-t}. \end{cases}$

2278. $\begin{cases} \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x - y = 0 \\ \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y - 24x = 16e^t. \end{cases}$

Қуйидаги тенгламалар ечилсин:

2279. $\begin{cases} \dot{x} + 3x + y = 0 \\ \dot{y} - x + y = 0, \end{cases}$ $t = 0$ бўлганда $x = 1,\ y = 1$.

2280. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + 2\operatorname{sh} t. \end{cases}$

13- §. 2- тартибли хусусий ҳосилали чизиқли дифференциал тенгламалар (характеристикалар методи)

2281. Қуйидаги тенгламаларнинг умумий (иккита ихтиёрий функцияларни ўз ичига олган) ечимлари топилсин:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0$; 2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; 3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 2a \frac{x}{y} + b.$

Кўрсатма. $\frac{\partial u}{\partial y} = z$ деб олинсин.

2282. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ тенгламанинг $x = 1$ бўлганда $z = y^3, \frac{\partial z}{\partial x} = y^2$ шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечими топилсин.

2283. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ тенглама каноник кўринишга келтирилсин ва унинг умумий ечими топилсин.

2284. $x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$ тенглама каноник формага келтирилсин ва унинг умумий ечими топилсин.

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимлари топилсин, бошланғич шартлар берилган ҳолларда хусусий ечимлари топилсин:

2285. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

2286. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$ $x = 0$ бўлганда $u = \sin y, \frac{\partial u}{\partial x} = y.$

2287. $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0;$

$x = 1$ бўлганда $u = 2y + 1, \frac{\partial u}{\partial x} = y.$

2288. $t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;$ $t = 1$ бўлганда $u = 2x^2, \frac{\partial u}{\partial t} = x^2.$

Қуйидаги тенгламаларнинг хусусий ечимлари топилсин:

2289. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0;$

$t = 0$ бўлганда $u = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = -x - 1.$

2290. $4a^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

$t = 0$ бўлганда $u = 0, \frac{\partial u}{\partial p} = ax.$

2291. $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$ $t = 0$ бўлганда $u = f(x), \frac{\partial u}{\partial t} = F(x).$

XIII БОБ

ИККИ ЎЛЧОВЛИ, УЧ ЎЛЧОВЛИ ВА ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. Икки ўлчовли интеграл билан юзларни ҳисоблаш

1°. Агар (S) соҳа

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$$

тенгсизликлар билан аниқланган бўлса, у ҳолда бу соҳанинг юзи қуйидагича ифодаланади:

$$S = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum \Delta x\, \Delta y = \iint\limits_{(S)} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

2°. Агар (S) соҳа

$$h \leqslant y \leqslant l, \quad x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y),$$

тенгсизликлар билан аниқланган бўлса, у ҳолда

$$S = \iint\limits_{(S)} dx\; dy = \int\limits_h^l dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx.$$

3°. Агар (S) соҳа қутб координаталарида $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, $r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi)$ тенгсизликлар билан аниқланса, у ҳолда бу соҳанинг юзи

$$S = \iint\limits_{(S)} r dr d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr.$$

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзлар икки ўлчовли интеграллар билан ёзилсин ва ҳисоблансин:

2292. $xy = 4$, $y = x$, $x = 4$.

2293. 1) $y = x^2$, $4y = x^2$, $y = 4$;

2) $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = \pm 2$.

2294. $y^2 = 4 + x$, $x + 3y = 0$.

2295. $ay = x^2 - 2ax$, $y = x$.

2296. $y=\ln x$, $x-y=1$ ва $y=-1$.

2297. Юзлари ушбу

$$1) \int_0^a dx;\ 2) \int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx;\ 3) \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy$$

интеграллар билан ифодаланувчи соҳалар ясалсин. Бу интегралларда интегралланиш тартиби ўзгартирилсин.

Кўрсатма. Соҳани чегараловчи чизиқларнинг тенгламаларини ҳосил қилиш учун dx бўйича олинган интегралнинг чегараларини x га, dy бўйича олинган интегралнинг чегараларини эса y га тенглаш керак.

2298. Юзлари 1) $\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy$; 2) $\int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 dx$ интеграллар билан ифодаланувчи соҳалар ясалсин. Интеграллаш тартиби ўзгартирилсин ва юзлар ҳисоблансин.

2299. $r=a(1-\cos\varphi)$ ва $r=a$ чизиқлар билан чегараланиб, доира ташқарисида жойлашган соҳа юзи ҳисоблансин.

2300. $r\cos\varphi=a$ тўғри чизиқ ва $r=2a$ айлана билан чегараланган юз ҳисоблансин.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзлар ҳисоблансин:

2301. $xy=\frac{a^2}{2}$, $xy=2a^2$, $y=\frac{x}{2}$, $y=2x$.

Кўрсатма. Бу масалада $xy=u$ ва $y=vx$ ларга асосан янги u, v координаталарга ўтиш қулайроқ, у ҳолда юз ушбу $\int\int |I|\, du\, dv$ формула бўйича ҳисобланади, бунда $J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ якобиан дейилади. 2302-масалада $y^2=ux$, $vy^2=x^3$ деб, 2303-масалада эса $x=r\cos^3\varphi$ ва $y=r\sin^3\varphi$ деб умумлашган қутб координаталарига ўтилсин.

2302. $y^2=ax$, $y^2=16ax$, $ay^2=x^3$, $16ay^2=x^3$.

2303. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзлар ҳисоблансин:

2304. $y=x^2$ $y=x+2$.

2305. $ax=y^2-2ay$ ва $y+x=0$.

2306. $y=\sin x$, $y=\cos x$ ва $x=0$.

2307. $y^2=a^2-ax$, $y=a+x$.

2308. $r=4(1+\cos\varphi)$, $r\cos\varphi=3$ (тўғри чизиқдан ўнг томондаги юз).

2309. $r = a(1 - \cos\varphi)$, $r = a$ ва кардиоиданинг ташқарисида жойлашган юз.

2310. $xy = 1$, $xy = 8$, $y^2 = x$, $y^2 = 8x$.

2311. Юзлари

$$1)\ \int_a^b dx \int_a^x dy;\quad 2)\ \int_0^a dy \int_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx;\quad 3)\ \int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy$$

интеграллар билан ифодаланувчи соҳалар ясалсин. Интеграллаш тартиби ўзгартирилсин ва юзлар ҳисоблансин.

2-§. Массаси текис тақсимланган юзнинг (зичлиги $\mu = 1$ бўлганда) оғирлик маркази ва инерция моменти

Массаси текис тақсимланган S юзнинг оғирлик маркази координаталари:

$$x_c = \frac{\int\int x\,dxdy}{S},\quad y_c = \frac{\int\int y\,dx\,dy}{S}, \tag{1}$$

S юзнинг инерция моментлари:

$$I_x = \int\int_{(S)} y^2 dxdy,\quad I_y = \int\int_{(S)} x^2 dx\,dy,\ I_0 = \int\int_{(S)} r^2\,dx\,dy. \tag{2}$$

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзнинг оғирлик маркази топилсин:

2312. $y = 0$ ва $y = \sin x$ синусоиданинг битта ярим тўлқини.

2313. $y = x^2$, $x = 4$, $y = 0$. **2314.** $y^2 = ax$ ва $y = x$.

2315. $x^2 + y^2 = a^2$ ва $y = 0$.

2316. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроида ва Ox ўқ билан чегараланган юзнинг оғирлик маркази.

Кўрсатма. $x = r\cos^3\varphi$ ва $y = \sin^3\varphi$ орқали умумлашган қутб координаталарига ўтилсин.

2317. $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ ва $y = b$ чизиқлар билан чегараланган тўртбурчак юзининг I_x, I_y ва I_0 инерция моментлари аниқлансин.

2318. $y = \frac{x}{2}$, $x = a$, $y = a$ чизиқлар билан чегараланган юзнинг Ox ўққа нисбатан инерция моменти аниқлансин.

2319. Учлари $A(0;\ 2a)$, $B(a;\ 0)$ ва $C(a;\ a)$ нуқталарда бўлган учбурчак юзининг Oy ўққа нисбатан инерция моменти топилсин.

2320 — 2323-масалаларда берилган чизиқлар билан чегараланган юзларнинг қутб инерция моментлари аниқлансин:

2320. $x+y=a$, $x=0$, $y=0$. 2321. $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

2322. $r=a$ айлана билан чегараланган юзнинг.

2323. $y^2=ax$, $x=a$.

Қуйидагиларнинг оғирлик марказлари аниқлансин:

2324. $y^2=ax$, $x=a$, $y=0$ лар билан чегараланган парабола ярим сегментининг ($y>0$ бўлганда).

2325. Ox ўқ билан кесилган $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ярим эллипснинг.

2326. $y=a+\frac{x^2}{a}$, $y=2x$ ва $x=0$ чизиқлар билан чегараланган юзнинг Oy ўққа нисбатан инерция моменти аниқлансин.

2327. Учлари $A(1;\ 1)$, $B\ (2;\ 1)$, $C(3;\ 3)$ нуқталарда бўлган учбурчак юзининг Ox ўққа нисбатан инерция моменти аниқлансин.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзнинг қутб инерция моменти аниқлансин:

2328. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $x=0$, $y=0$.

2329. $y=4-x^2$ ва $y=0$. 2330. $r=a(1-\cos\varphi)$.

3-§. Икки ўлчовли интеграл билан ҳажмни ҳисоблаш

Юқорида $z=F(x,\ y)$ сирт, қуйидан $z=0$ текислик ва ён томонлардан, xOy текисликдан (S) соҳа кесувчи цилиндрик сирт билан чегараланган жисм ҳажми қуйидагига тенг:

$$V=\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy=\iint\limits_{(S)} F(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажми ҳисоблансин:

2331. $z=x^2+y^2$, $x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2332. $z=x+y+a$, $y^2=ax$, $x=a$, $z=0$, $y=0$ ($y>0$ бўлганда).

2333. $(x+y)^2+az=a^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (сиртни $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=h\leqslant a$ кесимлар бўйича ясаш керак; 546-масалага қаралсин).

2334. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$ (552-масалага қаралсин).
2235. $z^2 = xy$, $x = a$, $x = 0$, $y = a$, $y = 0$.
2336. $az = x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = a$.
2337. $z^2 = xy$, $x + y = a$.
2338. $x + y + z = 3a$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

Кўрсатма. 2338 — 2344-масалаларда қутб координаталарига ўтилсин.

2339. $z = mx$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.
2340. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$.
2341. $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$ (цилиндр ташқарисида).
2342. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 \pm ax = 0$ (цилиндр ичида).
2343. $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндр ичидаги $y = x\operatorname{tg}\frac{z}{a}$ геликоиднинг биринчи ўрамаси ва $z = 0$ текислик.
2344. $z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = ax$.
2345. $\frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, $z = 0$.

Кўрсатма. 2345- ва 2346-масалаларда умумлашган (эллиптик) қутб координаталари $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ га ўтилсин.

2346. $z = ce^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ ва $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2347. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($x = r\cos^3\varphi$, $y = r\sin^3\varphi$ деб олинсин.)

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмларнинг ҳажмлари ҳисоблансин:

2348. $z = a - x$, $y^2 = ax$ ва $z = 0$.
2349. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.
2350. $y^2 + z^2 = 4ax$, $y^2 = ax$, $x = 3a$ (цилиндрдан ташқарида).
2351. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2352. Коноида $x^2y^2 + h^2z^2 = a^2y^2$, $0 \leqslant y \leqslant h$ бўлганда (559-масалага қаралсин).
2353. $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
2354. $4z = 16 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ (цилиндрдан ташқарида).

Кўрсатма. 2354 — 2358-масалаларда қутб координаталарига ўтилсин.

2355. $z^2 = (x + a)^2$, $x^2 + y^2 = a^2$.

2356. $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

2357. $az = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \pm ax = 0$.

2358. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \pm ax = 0$ (цилиндрлар ичида).

2359. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Кўрсатма. $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ деб олинсин.

4-§. Эгри сиртларнинг юзлари

$F(x, y, z) = 0$ сиртнинг $z = 0$ текисликдаги проекцияси σ_z бўлган σ қисмнинг юзи қуйидагига тенг:

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma_z)} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx\, dy = \int\limits_{(\sigma_z)}\int \frac{N}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx\, dy.$$

Шунга ўхшаш қолган икки координата текисликларига проекцияланганда

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma_y)} \frac{N}{\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|} dx\, dz, \quad \sigma = \iint\limits_{(\sigma_x)} \frac{N}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|} dy dz$$

ларга эга бўламиз.

Қуйидаги юзлар ҳисоблансин:

2360. $2z = x^2$ цилиндр сиртидан $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$ текисликлар билан кесилган юз.

2361. $x \geqslant 0$ ва $y \geqslant 0$ бўлганда $z^2 = 2xy$ конус сиртидан $x = a$ ва $y = a$ текисликлар билан кесилган юз.

2362. $y^2 + z^2 = x^2$ конуснинг $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.

2363. $az = xy$ сиртнинг $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.

2364. $x^2 + y^2 = z^2$ конуснинг $z^2 = 2px$ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.

Қуйидаги юзлар ҳисоблансин:

2365. $x^2 + z^2 = a^2$ цилиндрнинг $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.

2366. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ шарнинг $x^2 + y^2 \pm ax = 0$ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.

2367. $x^2 + y^2 = 2az$ параболоиднинг $x^2 + y^2 = 3a^2$ цилиндр ичидаги сиртининг юзи.

2368. $0°$ ва $\beta°$ меридианлар, экватор ва $\alpha°$ параллел билан чегараланган ер сирти қисмининг юзи икки ўлчовли интеграл ёрдами билан ҳисоблансин. $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$ бўлгандаги хусусий ҳол кўрилсин.

5- §. Уч ўлчовли интеграл ва унинг татбиқи

Агар (V) соҳа

$$a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\ z_1(x_1,\ y) \leqslant z \leqslant z_2(x_1,\ y)$$

тенгсизликлар билан аниқланган бўлса, у ҳолда

$$\iiint\limits_{(V)} F(x,\ y,\ z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} F(x,\ y,\ z)\, dz$$

$F(x,\ y,\ z) = 1$ бўлганда V нинг ҳажми ҳосил бўлади. Ҳажми V га тенг бўлган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази координаталари қуйидаги формулалар билан топилади:

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} x\, dx\, dy\, dz,\quad y_c = \frac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} y dx dy dz \text{ ва ҳоказо.}$$

2369. $az = x^2 + y^2$, $2az = a^2 - x^2 - y^2$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажми аниқлансин.

2370. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг конус ичидаги қисмининг ҳажми аниқлансин.

2371. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ конус сирти $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ шарнинг ҳажмини 3 : 1 нисбатда бўлиши кўрсатилсин.

2372. Ёқлари $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ текисликлар билан ташкил этилган пирамиданинг ҳар бир нуқтасидаги зичлик шу нуқтанинг аппликатаси z га тенг. Пирамиданинг масаси аниқлансин.

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази аниқлансин:

2373. $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2374. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

Қуйида кўрсатилган сиртлар билан чегараланган жисмнинг (зичлик $\mu = 1$) Oz ўққа нисбатан инерция моменти аниқлансин:

2375. $x = 0,\ y = 0,\ y = a,\ z = 0$ ва $x + z = a$.

2376. $x + y + z = a\sqrt{2},\ x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0$.

2377. 1) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$; 2) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = az\,(x^2 + y^2)$

ёпиқ сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми аниқлансин.

Кўрсатма. $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\varphi$ формулалар бўйича сферик координаталарга ўтилсин, ҳажм элементи қуйидагича ҳисобланади:

$$dV = r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\varphi\, d\theta.$$

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажми аниқлансин:

2378. $az = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$.

2379. $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\quad z = 6 - x^2 - y^2$.

2380. $az = x^2 + y^2,\quad z^2 = x^2 + y^2$.

2381. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ва $z = h$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳар бир нуқтасида зичлик шу нуқтанинг аппликатасига тенг бўлса, жисмнинг массаси аниқлансин.

2382. Агар $2x + z = 2a,\ x + z = a,\ y^2 = ax,\ y = 0$ сиртлар билан чегараланган ($y > 0$ бўлганда) жисмнинг ҳар бир нуқтасидаги зичлик шу нуқтанинг ординатасига тенг бўлса, жисмнинг массаси аниқлансин.

2383. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z = 0$ сиртлар билан чегараланган бир жинсли ярим шарнинг оғирлик маркази аниқлансин ($z \geqslant 0$).

2384. $z^2 = 2ax,\ z = 0,\ x^2 + y^2 = ax$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг Oz ўққа нисбатан инерция моменти аниқлансин.

2385. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$ сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми аниқлансин (сферик координаталарга ўтилсин) (2377-масалага қаралсин).

2386. Агар $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ва $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ сиртлар орасидаги сферик қатламнинг ҳар бир нуқтадасидаги зичлиги шу нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофага тескари пропорционал бўлса, қатламнинг массаси аниқлансин (сферик координаталарига ўтилсин).

6-§. Эгри чизиқли интеграл. Грин формуласи

1°. Эгри чизиқли интегралнинг таърифи. Тўғриланувчи эгри чизиқнинг $\overset{\frown}{AB}$ ёйи устида узлуксиз $P(x, y, z)$ функция аниқланган бўлсин.

$A(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, . . . , $M_{n-1}(x_{n-1};\ y_{n-1};\ z_{n-1})$ ва $B(x_n;\ y_n;\ z_n)$ нуқталар билан ёйни бўлакларга ажратайлик $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ бўлсин. У ҳолда $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\,\Delta x_i$ $\overset{\frown}{AB}$ ёй бўйича олинган *эгри чизиқли интеграллар* дейилади ва $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)\,dx$ кўринишда белгиланади. Шунга ўхшаш $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, y, z)\,dy$ ва $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} R(x, y, z)\,dz$ интеграллар ҳам таърифланади, $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$ интеграл эса олдинги интегралларнинг йиғиндиси сифатида таърифланади. Ниҳоят,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,\ y,\ z)\,ds = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(x_i,\ y_i\ z_i)\,\Delta s_i, \text{ бу ерда } \Delta s_i = \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$$

кўринишдаги эгри чизиқли интеграл ҳам учрайди.

2°. Эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш. $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$ тенгламалар билан берилган бўлиб, бундаги t параметр, $M(t)$ нуқта $\overset{\frown}{AB}$ ёй бўйлаб бир томонга қараб ҳаракат қилганда монотон ўзгарувчи бўлсин; у вақтда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,\ y,\ z)\ dx = \int\limits_{t_A}^{t_B} P\,[f(t),\ \varphi(t),\ \psi(t)]\ f'(t)\ dt,$$

яъни эгри чизиқли интеграл белгиси остидаги *барча ўзгарувчиларни ва дифференциалларни эгри чизиқ тенгламаларидан битта (t) ўзгарувчи ва унинг дифференциали (dt) орқали ифодалаш керак.*

3°. Эгри чизиқли интегралнинг механик маъноси $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (P\ dx + Qdy + Rdz)$ кўринишдаги интеграл, бирлик массанинг $F(P;\ Q;\ R)$ куч ҳосил қилган майдонда $\overset{\frown}{AB}$ ёй бўйлаб ҳаракат қилишидаги *ишни* аниқлайди.

4°. Тўлиқ дифференциал бўлган ҳол. Агар бирор (V) соҳада $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = u_B - u_A$ бўлади, яъни у $u(x, y, z)$ функциянинг B ва A

нуқталардаги қийматларининг айримасига тенг бўлиб, (V) *соҳада олинган интеграллаш йўли AB га боғлиқ эмас.*

$$\oint\limits_{(C)} (P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$Pdx + Qdy$ функциядан (C) ёпиқ контур бўйича (соат стрелкасига қарши йўналишда) олинган эгри чизиқли интегрални шу контур билан чегараланган (S) соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегралга алмаштиради.

5°. Грин формуласи

$$\oint\limits_{(C)} (Pdx + Q\,dy) = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$Pdx + Qdy$ функциядан (C) контур бўйича (соат стрелкасига қарши йўналишда) олинган эгри чизиқли интегрални шу контур билан чегараланган (S) соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегралга алмаштиради.

6°. (C) контур билан чегараланган юз:

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{(C)} (x\,dy - y\,dx).$$

2387. A (2; 2) ва B (2; 0) нуқталар берилган. 1) OA тўғри чизиқ; 2) $y = \frac{x^2}{2}$ параболанинг $\overset{\frown}{OA}$ ёйи; OBA синиқ чизиқ бўйича $\int\limits_{(C)} (x + y)\,dx$ ҳисоблансин.

2388. $A(4;\ 2)$ ва B (2; 0) нуқталар берилган, 1) OA тўғри чизиқ; 2) OBA синиқ чизиқ бўйича

$$\int\limits_{(C)} [(x + y)\,dx - x\,dy]$$

ҳисоблансин.

2389. 2388-масала $\int\limits_{(C)} (y\,dx + x\,dy)$ интеграл учун ечилсин. Нима учун бу ерда интегралнинг қиймати интеграллаш йўлига боғлиқ эмас?

2390. A $(a;\ 0;\ 0)$, B $(a;\ a;\ 0)$ ва C $(a;\ a;\ a)$ нуқталар берилган. OC тўғри чизиқ ва $OABC$ синиқ чизиқ бўйича $\int (y\,dx + z\,dy + xdz)$ интеграл ҳисоблансин.

2391. Координаталари $P = x - y$, $Q = x$ бўлган $F\ \{P, Q\}$ куч майдон ҳосил қилади. Томонлари $x = \pm a$ ва $y = \pm a$ дан иборат квадратнинг ҳар бир учида F куч ясалсин ва бирлик масса квадратнинг контури бўйича ҳаракат қилгандаги иш ҳисоблансин.

2392. $F\ \{P, Q\}$ куч майдон ҳосил қилади, бундай $P = x + y$, $Q = 2x$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ айлананинг ҳар бир чораги бошида F кучи ясалсин ва ўша айлана бўйича бирлик масса ҳаракат қилгандаги иш ҳисоблансин.

Шу масала $P = x + y$, $Q = x$ ҳол учун ҳам ечилсин. Нима учун бу ерда иш нолга тенг?

2393. $F\{y, a\}$ куч майдон ҳосил қилади. m масса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипснинг биринчи чораги ва координата ярим ўқларидан иборат контур бўйича ҳаракат қилганидаги иш ҳисоблансин.

2394. $F\{x, y, z\}$ куч майдон ҳосил қилади. Бирлик масса, $O(0; 0; 0)$, $A(0; a; 0)$, $B(a; a; 0)$, $C(a; a; a)$ нуқталарни бирлаштирувчи $OABCO$ синиқ чизиқ бўйича ҳаракат қилгандаги иш ҳисоблансин.

2395. Томонлари $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$ тўғри чизиқларда ётган учбурчак контури бўйича олинган $\oint\limits_{(C)} [(x + y)\,dx - 2x\,dy]$ интеграл учун Грин формуласи ёзилсин ва текширилсин.

2396. 1) $\int\limits_{\smile AB} [2xy\,dx + x^2\,dy]$,

2) $\int\limits_{\smile AB} [\cos 2y\,dx - 2x\sin 2y\,dy]$; 3) $\int\limits_{\smile AB} [\operatorname{tg} y\,dx + x\sec^2 y\,dy]$

интеграллар $A\left(1; \frac{\pi}{6}\right)$ нуқтадан $B\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$ нуқтагача ихтиёрий чизиқ бўйича ҳисоблансин.

2397. Грин формуласини татбиқ этиб, учлари $A(a; 0)$, $B(a; a)$ ва $C(0; a)$ нуқталарда бўлган ΔABC контури бўйича $\oint\limits_{(C)} [y^2\,dx + (x + y)^2\,dy]$ интеграл ҳисоблансин.

2398. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипс юзи эгри чизиқли интеграл билан ҳисоблансин.

2399. $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ эгри чизиқ илмогининг юзи эгри чизиқли интеграл билан ҳисоблансин (53- чизмага қаралсин).

Кўрсатма. $y = xt$ деб олиб параметрик тенгламаларга ўтилсин.

2400. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ Декарт япроғи илмогининг юзи эгри чизиқли интеграл билан ҳисоблансин (2399- масалада берилган кўрсатмага ва 83- чизмага қаралсин).

2401. $x^2 + y^2 = a^2$ айлананинг юқори ярмида текис тақсимланган M масса координаталар бошида жойлашган m массани қандай куч билан тортади?

Кўрсатма. μ — чизиқли зичлик, ds — ярим айлана узунлигининг элементи, θ — радиус-векторнинг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчаги, X ва Y лар эса тортиш кучининг проекциялари бўлсин.
У ҳолда

$$X = \int\limits_{(C)} \frac{km\mu \cos\theta\, ds}{r^2}, \quad Y = \int\limits_{(C)} \frac{km\mu \sin\theta\, ds}{r^2},$$

бундаги k — тортиш ўзгармаси.

2402. $A(-a;\ a)$ ва $B(a;\ a)$ нуқталар берилган, AB кесма бўйича текис тақсимланган M масса $(0;\ 0)$ нуқтада жойлашган m массани қандай куч билан тортади?

2403. $A(a;\ 0)$, $B(0;\ a)$ ва $C(-a;\ 0)$ нуқталар берилган. ABC синиқ чизиқ бўйича текис тақсимланган M масса координаталар бошида жойлашган m массани қандай куч билан тортади?

2404. $A(0;\ 1)$, $B(2;\ 5)$ ва $C(0;\ 5)$ нуқталар берилган $\int\limits_{(C)} [(x+y)\,dx - 2y\,dy]$ интеграл: 1) AB тўғри чизиқ бўйича; 2) $y = x^2 + 1$ параболанинг $\overset{\smile}{AB}$ ёйи бўйича; 3) ABC синиқ чизиқ бўйича ҳисоблансин.

2405. $A(-a;\ 0)$ ва $B(0;\ a)$ нуқталар берилган. Бирлик масса: 1) AB тўғри чизиқ бўйича; 2) AOB синиқ чизиқ бўйича; 3) $y = a - \frac{x^2}{a}$ параболанинг $\overset{\smile}{AB}$ ёйи бўйича ҳаракат қилганда $F\{P,\ Q\}$ кучнинг иши ҳисоблансин, бунда $P = y$ ва $Q = y - x$.

2406. Исталган ёпиқ контур бўйича олинган $\oint\limits_{(C)} [y\,dx + (x+y)\,dy]$ интегралнинг нолга тенг эканлиги кўрсатилсин. $y = x^2$ ва $y = 4$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг контури бўйича интегрални ҳисоблаб, олдинги натижа текширилсин.

2407. Учлари $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 1)$ ва $C(2;\ 2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг контури бўйича олинган $\oint\limits_{(C)} \left(\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}\right)$ интеграл учун Грин формуласи ёзилсин ва текширилсин.

2408. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроида билан чегараланган юзни эгри чизиқли интеграл билан ҳисоблансин.

2409. $y^2 + x^4 - x^2 = 0$ эгри чизиқ билан чегараланган юзни эгри чизиқли интеграл билан ҳисоблансин.

7-§. Сирт бўйича олинган интеграллар. Остроградский ва Стокс формулалари

1°. Остроградский формуласи қуйидагича ёзилади:

$$\iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

бунда α, β ва γ — ёпиқ S сирт ташқи нормалининг бурчакларидан, V эса шу сирт билан чегараланган ҳажмдан иборатдир. Биринчи интегрални $\pm \iint\limits_{(S_z)} \left[P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} + R\frac{\partial F}{\partial z}\right] \frac{dx\, dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ кўринишда ёзиш мумкин,

бунда $F(x, y, z) = 0$ — сиртнинг тенгламаси, S_z эса S нинг $z = 0$ текисликдаги проекциясидир.

2°. Стокс формуласи қуйидагича ёзилади:

$$\oint\limits_{(C)} (P\, dx + Q\, dy + R\, dz) = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{dy} & \frac{\partial}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds,$$

бунда β ва γ — S сиртга ўтказилган нормал бурчакларидан иборат бўлиб, у сиртнинг шундай томонига йўналтирилганки, ундан C контурни айланиш соат стрелкасининг юришига қарши кўринади.

2410. $\iint\limits_{(S)} [x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma]\, ds$ интеграл, $x + y + z = a$ текисликнинг биринчи октантада ётган қисмининг устки сирти бўйича ҳисоблансин.

2411. $\iint\limits_{(S)} [x^2\cos(n, i) + y^2\cos(n, j) + z^2\cos(n, k)]\, ds$ интеграл, $x^2 + y^2 + 2az = a^2$ параболоиднинг иккинчи октантада ётган қисмининг устки сирти бўйича ҳисоблансин (бунда $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$).

Кўрсатма. Интегрални $\iint\limits_{(S_z)} (x^3 + y^3 + az^2)\frac{dx\, dy}{a}$ кўринишга келтириб, қутб координаталарига ўтиш керак. φ бурчак $\frac{\pi}{2}$ дан π гача ўзгаради.

2412. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ шарнинг сирти бўйича олинган $\iint\limits_{(S)} [x\cos(n, i) + y\cos(n, j) + z\cos(n, k)]\, ds$ интеграл учун Остроградский формуласи ёзилсин ва текширилсин.

2413. $x^2 + y^2 + 2az = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг биринчи октантада ётган қисмининг ташқи сирти бўйича олинган $\iint\limits_{(S)} [x^2 \cos(n, i) + y^2 \cos(n, j) + r^2 \cos(n, k)]\, ds$ интеграл учун Остроградский формуласи ёзилсин ва текширилсин.

Кўрсатма. Жисмнинг текис ёқлари бўйича олинган икки ўлчовли интеграл 0 га тенг, чунки, масалан, $z = 0$ текисликда $\cos(n, i) = 0$ ва $\cos(n, j) = 0$.

2414. Остроградский формуласида $P = x$, $Q = y$, $R = z$ деб олиб, ҳажм учун ушбу

$$V = \frac{1}{3} \iint\limits_{(S)} [x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma]\, ds$$

формула ҳосил қилинсин. Бу формулага асосан $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг ҳажми ҳисоблансин.

2415. Остроградский формуласида $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$ деб олиб (яъни $\{P, Q, R\}$ векторни $\mathrm{grad}\, u$ га тенг деб олиб), $\iiint\limits_{(V)} \Delta u\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(S)} \frac{du}{dn} ds$ тенглик исбот қилинсин, бундаги $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — Лаплас оператори.

2416. Олдинги масаладаги формулани $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сирт устида $u = x^2 + y^2 + z^2$ функция учун текширилсин.

2417. Стокс формуласи ёрдами билан исталган контур бўйича олинган $\int\limits_{(C)} (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz)$ интегралнинг нолга тенглиги кўрсатилсин. Бунй учлари O (0; 0; 0), A (1; 1; 0) ва B (1; 1; 1) нуқталардан иборат ΔOAB контури бўйича интегрални ҳисоблаб текширилсин.

2418. Учлари A (a; 0; 0), B (0; a; 0) ва C (0; 0; a) нуқталардан иборат ΔABC контури бўйича олинган $\oint\limits_{(C)} [(z - y)\, dx + (x - z)\, dy + (y - x)\, dz]$ интеграл учун Стокс формуласи ёзилсин ва текширилсин.

Кўрсатма. Икки каррали интегрални ABC учбурчакнинг периметридан ўтувчи ихтиёрий сирт бўйича олиш мумкин, масалан, $x + y + z = a$ текислик бўйича олиниши мумкин.

2419. $x^2+y^2+z^2=a^2$ шар сирти бўйича олинган $\iint\limits_{(S)} [x^3\cos(n, i)+y^3\cos(n, j)+z^3\cos(n, k)]\, ds$ интеграл учун Остроградский формуласи ёзилсин ва текширилсин.

Кўрсатма. Уч ўлчовли интегралда сферик координаталарга ўтилсин

2420. Учлари $A\ (a;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ a;\ 0)$ ва $C\ (0;\ 0;\ a)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг контури бўйича олинган $\oint\limits_{(C)} [x(z-y)\,dx+y(x-z)\,dy+z(y-x)\,dz]$ интеграл учун Стокс формуласи ёзилсин ва текширилсин (2418- масалага берилган кўрсатмаган қаралсин).

2421. $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ текисликлар билан ҳосил қилинган пирамиданинг ташқи сирти бўйича олинган $\iint\limits_{(S)} (x^3\,dy\,dz+y^3\,dx\,dz+z^3\,dx\,dy)$ интеграл Остроградский формуласи ёрдами билан ҳисоблансин.

XIV БОБ

ҚАТОРЛАР

1- §. Сонли қаторлар

1° Агар $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ қаторнинг биринчи n та ҳаднинг йиғиндиси S_n, n чексизликка интилганда $(n\to\infty)$ чекли S лимитга интилса: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$, қатор *яқинлашувчи* дейилади. S сон яқинлашувчи қаторнинг *йиғиндиси* дейилади. Яқинлашувчи бўлмаган қатор *узоқлашувчи* дейилади.

Қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун n чексизликка интилганда $(n\to\infty)$ u_n нинг нолга интилиши $(u_n\to 0)$ *зарурдир* (аммо етарли эмас).

2°. Ҳадлари мусбат ҳамда камаювчи бўлган қаторнинг яқинлашиши учун интеграл аломат:

Агар $u_n=f(n)$ деб олинса, бунда $f(n)$ камаювчи функция ва

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx=\begin{cases} A \text{ бўлса, у ҳолда қатор яқинлашади,}\\ \infty \text{ бўлса, у ҳолда қатор узоқлашади.}\end{cases}$$

3°. Мусбат ҳадли қаторнинг яқинлашиши учун Даламбер аломати:

Агар

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=r\begin{cases} <1 \text{ бўлса, у ҳолда қатор яқинлашади,}\\ >1 \text{ бўлса, у ҳолда қатор узоқлашади,}\\ =1 \text{ бўлса, у ҳолда масала ечилмай қолади.}\end{cases}$$

4°. Мусбат ҳадли қаторларни таққослаш.

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots \tag{2}$$

иккита мусбат ҳадли қатор бўлсин.

1) Агар $u_n\leqslant v_n$ бўлиб, (2) қатор *яқинлашса*, у ҳолда (1) қатор ҳам *яқинлашади*.

2) Агар $u_n\geqslant v_n$ бўлиб, (1) қатор *узоқлашса*, у ҳолда (2) қатор ҳам *узоқлашади*.

5°. Агар ишоралари навбатлашувчи

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots$$

қаторида $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ бўлса, қатор яқинлашувчи бўлади.

6°. Абсолют яқинлашиш.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \tag{3}$$

қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots |u_n| + \dots \tag{4}$$

қатор яқинлашса, (3) қатор ҳам яқинлашади. Бу ҳолда (3) қатор *абсолют* яқинлашувчи дейилади. (3) қатор яқинлашувчи бўлиб, (4) қатор узоқлашувчи бўлса, (3) қатор *шартли* (абсолютмас) яқинлашувчи дейилади.

Қуйидаги қаторлар учун яқинлашишнинг зарурий шарти бажариладими?

2422. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$

2423. $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

2424. $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$

Интеграл аломати билан қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

2425. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

2426. $1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$

2427. $\frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \dots$

2428. $\frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \dots$

2429. $\frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$

2430. $\frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \dots$

2431. $\frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \frac{1}{4\ln^2 4} + \dots$

Даламбер аломатига асосан қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

2432. $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$

2433 $1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$

2434. $1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \dots$

2435. $1 + \frac{3}{2\cdot 3} + \frac{3^2}{2^2\cdot 5} + \frac{3^3}{2^3\cdot 7} + \dots$

2436. $\frac{1}{2}+\frac{3!}{2\cdot 4}+\frac{5!}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{7!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\ldots$

2437. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{2\cdot 3^3}}+\frac{9}{\sqrt{3\cdot 3^2}}+\frac{13}{\sqrt{4\cdot 3^3}}+\ldots$

Гармоник қатор ёки камаювчи прогрессия билан таққослаб, қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

2438. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$

2439. $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots$

2440. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots$

2441. Қаторларни таққослаш усули билан $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+$ $+\frac{1}{1+x^6}+\ldots$ қаторнинг $|x|\leqslant 1$ бўлганда узоқлашиши, $|x|>1$ бўлганда эса яқинлашиши кўрсатилсин.

Кўрсатма. Таққослаш учун биринчи x^2, x^4, x^6, ... ларни бирлар билан алмаштирилсин, иккинчи ҳолда эса махраждлардаги бирлар ташлансин.

2442. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$ қаторнинг йиғиндиси топилсин.

Кўрсатма. u_n элементар касрларга ёйилсин.

2443. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots$ қаторнинг йиғиндиси топилсин.

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

2444. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$

2445. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots$

2446. $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\ldots$

2448. $\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\ldots$

2448. Агар $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ шартли яқинлашувчи қаторда ҳар бир мусбат ҳаддан сўнг ундан кейинги иккита кетма-кет манфий ҳад ёзилса, қатор йиғиндиси S икки марта камайиши, агар ҳар иккита мусбат ҳадлардан сўнг битта манфий ҳад ёзилса, йиғинди бир ярим марта кўпайиши исбот қилинсин.

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

2449. $1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\dots$

2450. $1+\frac{1}{101}+\frac{1}{201}+\frac{1}{301}+\dots$

2451. $\frac{1}{1+1^4}+\frac{2}{1+2^4}+\frac{3}{1+3^4}+\dots$

2452. $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\dots$

2453. $1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+\dots$

2454. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\dots$

2455. $\frac{21}{3}+\frac{41}{9}+\frac{61}{27}+\dots$

2456. $\frac{2}{1}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\dots$

2457. $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\dots$

2458. $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\dots$

2459. $1-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{3a^4}-\frac{4}{4a^6}+\dots$

Қуйидаги қаторларнинг йиғиндиси топилсин:

2460. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots$

2461. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots$

2- §. Функционал қаторнинг текис яқинлашиши

1°. x нинг

$$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots \qquad (1)$$

функционал қатор яқинлашадиган қийматларининг тўплами бу қаторнинг *яқинлашиш соҳаси* дейилади. $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ функция қаторнинг *йиғиндиси*, $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ айирма эса қаторнинг *қолдиғи* дейилади.

2°. Агар ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун шундай N номер кўрсатиш мумкин бўлсаки, $n>N$ бўлганда $[a, b]$ сегментдан олинган исталган x учун $|R_n(x)|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, (1) қатор $[a, b]$ сегментда *текис яқинлашувчи* дейилади.

3°. Текис яқинлашишнинг аломати

Агар ҳадлари мусбат ва яқинлашувчи

$$c_1+c_2+c_3+\dots+c_n+\dots$$

сонлар қатори мавжуд бўлиб, x нинг $[a, b]$ даги барча қийматлари учун $|u_n(x)| \leqslant c_n$ бўлса, (1) қатор $[a, b]$ сегментда *абсолют* ва *текис* яқинлашади,

2462. $|x| < 1$ бўлганда ушбу

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

қаторнинг йиғиндиси ва қолдиғи топилсин ва $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ сегментда қаторнинг текис яқинлашиши кўрсатилсин. n қандай бўлганда шу сегментдан олинган ҳар қандай x учун қолдиқ $|R_n(x)| < 0{,}001$ бўлади?

2463. $x + x(1 - x) + x(1 - x)^2 + x(1 - x)^3 + \ldots$ қаторнинг $[0; 1]$ сегментда *текисмас*, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ сегментда *текис* яқинлашиши кўрсатилсин. n қандай бўлганда $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ сегментдан олинган ҳар қандай x учун қатор қолдиғи $|R_n(x)| < 0{,}01$ бўлади?

2464. Ушбу $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ қаторнинг $[0, 1]$ сегментда текис яқинлашиши кўрсатилсин. n нинг қандай қийматларида шу сегментдан олинган ҳар қандай x учун $|R_n(x)| < 0{,}1$ бўлади?

2465. Ушбу $x^3 + \frac{x^3}{1 + x^3} + \frac{x^3}{(1 + x^3)^2} + \ldots$ қаторнинг $x > 0$ бўлганда *текисмас*, $x \geqslant 1$ бўлганда эса *текис* яқинлашиши кўрсатилсин. n нинг қандай қийматида ҳар қандай $x \geqslant 1$ учун қатор қолдиғи $|R_n(x)| < 0{,}001$ бўлади.

2466. $\frac{1}{\sqrt{1 + x}} + \frac{1}{3\sqrt{1 + 3x}} + \frac{1}{3^2\sqrt{1 + 5x}} + \frac{1}{3^3\sqrt{1 + 7x}} + \ldots$

қаторнинг $0 \leqslant x < \infty$ интервалда текис яқинлашиши кўрсатилсин. n қандай бўлганда манфиймас ихтиёрий x учун қатор қолдиғи $|R_n(x)| < 0{,}01$ бўлади?

Кўрсатма. Берилган қатор яқинлашувчи сонлар қатори билан таққослансин.

2467. $\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 4} + \frac{1}{x^2 + 9} - \frac{1}{x^2 + 16} + \ldots$ қаторнинг сонлар ўқининг ҳамма жойида яқинлашиши кўрсатилсин. n қандай бўлганда (ихтиёрий x учун) қаторнинг қолдиғи $|R_n(x)| < 0{,}0001$ бўлади?

2468. $\frac{1}{x(x + 1)} + \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{1}{(x + 2)(x + 3)} + \ldots$ қаторнинг $0 < x < \infty$ интервалда $\frac{1}{x}$ га текис яқинлашиши исбот қилинсин. Қандай n учун (ихтиёрий $x>0$ бўлганда) қаторнинг қолдиғи $|R_n(x)|<0,1$ бўлади?

2469. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2x}}+\frac{1}{\sqrt{2^4+3x}}+\frac{1}{\sqrt{2^6+4x}}+\ldots$

қаторнинг $0\leqslant x<\infty$ интервалда текис яқинлашиши исбот қилинсин. Қандай n учун $|R_n(x)|<0,01$ бўлади?

3- §. Даражали қаторлар

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

даражали қатор берилган бўлсин. Агар $|x|<R$ бўлганда қатор яқинлашувчи ва $|x|>R$ бўлганда қатор узоқлашувчи бўлса, R сон (1) қаторнинг *яқинлашиш радиуси* дейилади. R ни, (1) қаторнинг абсолют яқинлашишини Даламбер аломатига асосан текшириб ёки, барча a_i лар нолдан фарқли бўлган ҳолда, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ формула бўйича топиш мумкин. *Жумладан, агар лимит* ∞ га тенг бўлса, (1) қатор бутун Ox ўқда абсолют яқинлашади.

Даражали қатор ўзининг *яқинлашиш интервали* $(-R,\ R)$ ичида ётувчи ҳар қандай $[a,\ b]$ сегментда *абсолютгина* эмас, балки *текис* ҳам яқинлашади.

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш интервали аниқлансин ва қаторлар интервалнинг чегараларида ҳам яқинлашиши текширилсин:

2470. $1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\ldots$

2471. $1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^5}{5^3\sqrt{4}}+\ldots$

2472. $1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}}+\ldots$

2473. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

2474. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n}$.

2475. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^nx^n}{\sqrt{(3n-3)2^n}}$.

2476. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\cdot n!$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(n+1)^n}$.

2477. $(x+1)+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}+\frac{(x+1)^4}{4\cdot 4^3}+\ldots$

2478. $\frac{2x-3}{1}-\frac{(2x-3)^2}{3}+\frac{(2x-3)^3}{5}-\ldots$

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш интерваллари аниқлансин ва йиғиндилари топилсин:

2479. $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$

Кўрсатма. S йиғиндини топиш учун аввало $\int\limits_0^x S\,dx$ топилсин.

2480. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

Кўрсатма. Аввал $\frac{dS}{dx}$ топилсин.

2481. $1+3x+5x^2+7x^3+\ldots$

Кўрсатма. Қаторнинг йиғиндисини S билан белгилаб, $S-Sx$ ифодани қатор шаклида ёзгандан сўнг ундан S ни топиш керак.

2482. $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$

Кўрсатма. $\frac{S'}{m}+\frac{S'x}{m}=S$ эканлиги кўрсатилсин ва бу дифференциал тенглама ечилсин.

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш интервали аниқлансин ва қаторларнинг интервалнинг чегараларида ҳам яқинлашишлари текширилсин:

2483. $1+\frac{2x}{\sqrt{5\cdot 5}}+\frac{4x^2}{\sqrt{9\cdot 5^2}}+\frac{8x^3}{\sqrt{13\cdot 5^3}}+\ldots$

2484. $1-\frac{x^2}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{x^4}{3^2\cdot 3\sqrt{3}}-\frac{x^6}{3^3\cdot 4\sqrt{4}}+\ldots$

2485. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$. **2486.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

2487. $\frac{x-1}{1\cdot 2}+\frac{(x-1)^2}{3\cdot 2^2}+\frac{(x-1)^3}{5\cdot 2^3}+\ldots$

2488. $\frac{2x+1}{1}+\frac{(2x+1)^2}{4}+\frac{(2x+1)^3}{7}+\ldots$

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиш интерваллари аниқлансин ва уларнинг йиғиндилари топилсин:

2489. $1-3x^2+5x^4-7x^6+\ldots$

Кўрсатма. S йиғиндини топиш учун аввал $\int\limits_0^x S\,dx$ топилсин.

2490. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$

Кўрсатма. Аввал $\frac{dS}{dx}$ топилсин.

2491. $1-4x+7x^2-10x^3+\ldots$

Кўрсатма. $S+Sx$ ифода тузилсин.

4- §. Тейлор ва Маклорен қаторлари

1°. $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+R_n(x)$ (1)

кўринишдаги формула Маклорен формуласи дейилади, бунда $R_n(x)=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$; $0\leqslant\theta<1$.

2°. $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+R_n(x)$ (2)

кўринишдаги формула Тейлор формуласи дейилади, бунда $R_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$.

3°. Тейлор ва Маклорен қаторлари. (1) ва (2) формулаларда n чексизликка интилганда ($n\to\infty$) R_n нолга интилса ($R_n(x)\to 0$), у ҳолда бу формулалардан x нинг $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ бўлгандаги қийматлари учун $f(x)$ га яқинлашувчи қуйидаги

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots \quad (3)$$

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots \quad (4)$$

чексиз қаторлар ҳосил бўлади.

4°. Элементар функцияларнинг қаторларга ёйилмалари:

$$\left.\begin{aligned} e^x&=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,\\ \sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots,\\ \cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\end{aligned}\right\}$$

бу қаторлар x нинг ҳар қандай қийматлари учун мос (кўрсатилган) функцияларга яқинлашади.

$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$ — *биномиал* қатор бўлиб, $|x|<1$ бўлганда $(1+x)^m$ *биномга* яқинлашади.

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots$ қатор $-1<x\leqslant 1$ бўлганда $\ln(1+x)$ га яқинлашади.

$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$ қатор $|x|\leqslant 1$ бўлганда $\operatorname{arc\,tg} x$ га яқинлашади.

2492. Қуйидаги функциялар x нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин ва қолдиқ ҳаднинг формуласи ёзилсин ва у текширилсин: 1) $\cos(x-\alpha)$; 2) $\sin^2 x$; 3) xe^x; 4) $\sin\left(mx+\frac{\pi}{3}\right)$.

2493. $f(x)=\ln(1+e^{kx})$ функциянинг қаторга ёйилмасидаги биринчи учта ҳади ёзилсин.

2494. $\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$ бином Маклорен формуласига асосан x нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин ва ҳосил бўлган қатор $|x|<a$ бўлганда яқинлашувчи эканлиги аниқлансин.

2495. Биномиал қаторга асосан $|x|<1$ бўлганда

$$\frac{1}{(1+x)^3}=1-3x+6x^2-10x^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}(-x)^{n-1}$$

эканлиги кўрсатилсин.

2496. Биномиал қаторга асосан $|x|<1$ бўлганда

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}x^4-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}x^6+\ldots$$

ёйилмаси ҳосил қилинсин.

2497. Қуйидаги функцияларни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин:

1) $\ln\frac{1+x}{1-x}$; 2) $\ln(2-3x+x^2)$; 3) $\ln(1-x+x^2)$.

2498. 2496-масаладаги қаторни интеграллаб, $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ функция учун қатор ёзилсин.

2499. $f(x)=e^{\frac{x}{a}}$ функцияни $x-a$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин, қолдиқ ҳаднинг формуласи ёзилсин ва текширилсин.

2500. $f(x)=x^3-3x$ функция $x+1$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2501. $f(x)=x^4$ функция $x+1$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2502. $f(x)=\frac{1}{x}$ функцияни $x+2$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйиб, ҳосил бўлган қаторнинг яқинлашиши Даламбер аломатига асосан текширилсин.

2503. 1) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ функция $x-\frac{\pi}{2}$ нинг даражалари бўйича; 2) $f(x)=\sin 3x$ функция $x+\frac{\pi}{3}$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2504. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ функцияни $x+1$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйиб, ҳосил бўлган қаторнинг яқинлашиши Даламбер аломатига асосан текширилсин.

2505. Қуйидаги функциялар x нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин: 1) 2^x; 2) $\cos\left(mx+\frac{\pi}{4}\right)$. Ёйилмаларнинг қолдиқ ҳадларининг формулалари ёйилсин ва текширилсин.

2506. $f(x)=x^4-4x^2$ функция $x+2$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2507. $f(x)=\cos^2 x$ функция $x-\frac{\pi}{3}$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин, ёйилманинг қолдиқ ҳадининг формуласи ёзилсин ва текширилсин.

2508. $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}$ функция $(x-1)$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2509. $f(x)=\sqrt{x}$ функция $x-4$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин, ҳосил бўлган қаторнинг яқинлашиши Даламбер аломатига асосан текширилсин.

2510. Биномиал қатор ёрдами билан $|x|<1$ бўлганда

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^2\cdot 3!}x^6+\dots$$

экани кўрсатилсин.

2511. 2510-масаладаги қаторни ҳадма-ҳад интеграллаб, $\arcsin x$ учун қатор ёзилсин.

5- §. Қаторнинг тақрибий ҳисоблашларга татбиқи

2512. $\sqrt{1+x}$ учун биномиал қатор ёзилсин ва $\sqrt{1,004}$, $\sqrt{0,992}$, $\sqrt{90}$ ҳисоблансин, ҳисоблашда қаторнинг иккита ҳади билан чегараланилсин.

Ҳисоблаш хатоси баҳолансин.

2513. $\sqrt[3]{1+x}$ учун биномиал қатор ёзилсин, бунга асосан қаторнинг биринчи иккита ҳадини олиб $\sqrt[3]{1,006}$, $\sqrt[3]{0,991}$, $\sqrt[3]{130}$ ҳисоблансин, ҳисоблаш хатоси баҳолансин.

2514. $\sin x$ учун ёзилган қаторнинг биринчи иккита ҳади билан чегараланиб, $\sin 12^\circ$ ҳисоблансин ва ҳисоблаш хатоси баҳолансин.

Кўрсатма. $x = 12^\circ$ радиан ўлчовида $x = \frac{\pi}{15} = 0{,}2094$ бўлади. Хатонинг юқори чегараси $x < 0{,}3$ шартдан аниқлансин.

2515. $\frac{1}{1+x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ ёйилмани $\frac{1}{1+x^2}$ касрнинг суратини махражига бўлиб ҳосил қилинсин ва уни ҳадма-ҳад интеграллаб $\operatorname{arc\,tg} x$ учун қатор ёзилсин.

2516. $\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$ ёйилмада $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ деб олиб, π ни ҳисоблаш учун ушбу

$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$$

қатор ҳосил қилинсин.

2517. 2516-масаладаги қаторда биринчи бешта ҳадни олиб π ҳисоблансин.

2518. 2497-масаладаги

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right]$$

қатордан фойдаланиб $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 4$, $\ln 6$ ҳисоблансин.

Кўрсатма. $\frac{1+x}{1-x} = 2$ деб олиб, x топилсин ва ҳоказо.

2519. $\int\frac{\sin x}{x}\,dx$ ва $\int\frac{e^x}{x}\,dx$ интеграллар қаторлар шаклида аниқлансин.

2520. $\Phi(x) = \int_0^x e^{-x^2}\,dx$ функцияни қатор шаклида ёзиб, бу қаторга асосан $\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$ ҳисоблансин. Ҳисоблашда олинадиган ҳадларнинг сони, хато 0,001 дан кичик бўладиган қилиб олинсин.

2521. $\Phi(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ функцияни қатор шаклида ёзиб, бу қаторга асосан $\Phi\left(\frac{1}{5}\right)$ ҳисоблансин, ҳисоблашда олинган ҳадларнинг сони, хато 0,00001 дан кичик бўладиган қилиб олинсин.

2522. $y'' = x^2 y$ тенгламанинг $x = 0$ бўлганда $y = 1$, $y' = 1$ бўладиган ечими қатор шаклида топилсин.

2523. $y' = 1 + x - y^2$ Риккати тенгламасининг $x = 0$ бўлганда $y = 1$ бўладиган ечимини аниқловчи қаторнинг биринчи тўртта ҳади топилсин.

2524. $xy'' + y' + xy = 0$ Бессель тенгламасининг $x = 0$ бўлганда $x = 1$, $y' = 0$ бўладиган ечими қатор шаклида ёзилсин.

2525. $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{1 \cdot 2} + \dots$ биномиал қаторнинг биринчи иккита ҳади билан чегараланиб, $\sqrt{1,005}$; $\sqrt[3]{1,0012}$; $\sqrt{0,993}$; $\sqrt[3]{0,997}$; $\sqrt{110}$; $\sqrt[3]{70}$; $\sqrt[5]{40}$ ҳисоблансин ва ҳисоблаш хатоси баҳолансин..

2526. $\cos x$ нинг қаторга ёйилмасида биринчи иккита ҳади билан чегараланиб, $\cos 12°$ ҳисоблансин, ҳисоблаш хатоси баҳолансин.

2527. 2511-масаладаги $\arcsin x$ нинг қаторга ёйилмасида биринчи учта ҳад билан чегараланиб ва $x = \frac{1}{2}$ деб олиб, π ҳисоблансин.

Кўрсатма. Аввало ташлаб қолдирилган ҳадлардан биринчисини (яъни тўртинчи ҳадни) ҳисоблаб, сўнгра биринчи учта ҳаддан ҳар бирининг хатоси биринчи ташланган ҳаддан ошмайдиган қилиб ўнли каср орқали ифодалаш керак.

2528. $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3}$ айниятдан фойдаланиб, π учун иккита чексиз қаторнинг йиғиндисидан иборат ифода ёзилсин.

2529. $\ln(1 + x)$ нинг қаторга ёйилмасида $x = \frac{1}{N}$ деб олиб, қуйидаги формулалар ҳосил қилинсин:

1) $\ln(N + 1) = \ln N + \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \dots\right]$;

2) $\lg_{10}(N + 1) = \lg_{10} N + 0,4343\left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \dots\right]$.

2530. $\ln 2 = 0,6931$ эканлигидан фойдаланиб, $\ln 5$ ва $\ln 10$ ҳисоблансин ва модуль $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343$ эканлиги кўрсатилсин.

2531. $\lg_{10} 101$ ва $\lg_{10} 102$ ҳисоблансин.

2532. Эллипс ёйининг узунлиги қатор кўринишида аниқлансин.

2533. $\sqrt{1+x^3}$ функциянинг қаторидан фойдаланиб $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx$ интеграл ҳисоблансин. Ҳисоблашда олинган ҳадларнинг сони хато 0,001 дан кичик бўладиган қилиб олинсин.

2534. $\Phi(x)=\int_0^x \cos\frac{x^2}{4}\,dx$ функцияни қатор билан аниқлансин ва 0,000001 аниқлик билан $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$ ҳисоблансин.

2535. $y'=x^2+y^2$ тенгламанинг $x=0$ бўлганда $y=0$ бўладиган ечимини аниқловчи қаторнинг биринчи учта ҳади ёзилсин.

2536. $y''+xy=0$ тенгламанинг $x=0$ бўлганда $y=1$, $y'=0$ бўладиган ечими қатор кўринишида ёзилсин.

2537. Эгрилиги k, ёйининг узунлиги s га пропорционал бўлиб ўсувчи ўтиш эгри чизиғининг тенгламалари қаторлар орқали ёзилсин.

Кўрсатма. C ўзгармас бўлсин. $\frac{d\varphi}{ds}=\frac{s}{C}$ ифодадан φ ни аниқлаб, $dx=ds\cos\varphi$ ва $dy=ds\sin\varphi$ тенгламалар ечилсин.

6- §. Икки аргументли функция учун Тейлор қатори

Икки аргументли функция учун Тейлор қаторини қуйидаги учта кўринишда ёзиш мумкин:

$$F(x+h,\ y+l)=F(x,\ y)+\frac{1}{1!}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+l\frac{\partial}{\partial x}\right]F(x,\ y)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+l\frac{\partial}{\partial y}\right]^2F(x,\ y)+\ldots \qquad (I)$$

$$F(x,\ y)=F(a,\ b)+\frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]F(a,\ b)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2F(a,\ b)+\ldots, \qquad (II)$$

$$\Delta z=\frac{dz}{1!}+\frac{d^2z}{2}+\ldots+\left.\frac{d^nz}{n!}\right|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x\\ y=y_0+\theta\Delta y}} \qquad (III)$$

2538. Агар $F(x,\ y)=x^2+xy+y^2$ бўлса. Тейлорнинг (I) формуласига асосан $F(x+h,\ y+l)$ функциянинг қаторга ёйилмаси ёзилсин.

2539. $F(x, y)=x^3+2xy^2$ функция $(x-1)$ ва $(y-2)$ нинг даражалари бўйича (II) формулага асосан қаторга ёйилсин.

2540. $F(x, y)=\ln(x-y)$ функция x ва $(y+1)$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин ва унинг 1-ҳамда 2-тартибли ҳадлари ва қолдиқ ҳади ёзилсин [(II) формула].

2541. $F(x, y)=\sin(mx+ny)$ функция x ва y нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин ва унинг 1-, 2- ва 3-тартибли (даражалари) ҳадлари ҳамда қолдиқ ҳади ёзилсин [$a=b=0$ бўлгандаги (II) формула].

2542. $e^{-x^2-y^2}$ функция x ва y нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин [$a=b=0$ бўлгандаги (II) формула].

2543. $z=x^2-xy+y^2$ функциянинг орттирмаси Δz аниқлансин [(III) формула] ва x 2 дан 2,1 гача, y 3 дан 2,8 гача ўзгарганда бу орттирма ҳисоблансин.

2544. $z=\cos(ax-by)$ функция учун (III) формуланинг биринчи икки ҳади ва қолдиқ ҳади ёзилиб, функциянинг орттирмаси аниқлансин.

2545. $F(x, y)=x^2y$ функция $(x-1)$ ва $(y+1)$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин [(II) формула].

2546. 1- ва 2-тартибли ҳадлар билан чегараланиб, $F(x, y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ функция $(x-1)$ ва y нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин.

2547. $z=y^x$ функция $(x-2)$ ва $(y-1)$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйилсин ва унинг 1- ва 2-тартибли (даражали) ҳадларини ёзиб, $1{,}1^{2,1}$ ҳисоблансин.

2548. $z=x^2y-y^2$ функциянинг Δz орттирмаси аниқлансин ва у x 2 дан 1,99 гача ва y 5 дан 5,02 гача ўзгарганда 0,0001 аниқлик билан ҳисоблансин.

7-§. Фурье қатори. Фурье интеграли

1°. Таъриф. Агар $[a, b]$ *сегментда* $f(x)$ функция

1) сони чекли узилишларга эга бўлиб, уларнинг ҳаммаси 1-тур узилишлар бўлса;

2) сони чекли экстремумларга эга бўлса;

3) (a, b) *оралиқнинг* ҳар бир нуқтасида $f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

бўлса, *функция шу сегментда Дирихле шартларига бўйсунади* дейилади.

2° $[-l, l]$ сегментда Дирихле шартларига бўйсунувчи $f(x)$ функция кесманинг ҳар бир нуқтасида қуйидаги *Фурье қатори* билан аниқланиши мумкин:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right], \tag{1}$$

бунда

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \tag{2}$$

Агар $f(x) = f(-x)$, яъни $f(x)$ — *жуфт* функция бўлса, у ҳолда $b_n = 0$ ва

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \tag{3}$$

Агар $f(x) = -f(-x)$ яъни $f(x)$ — *тоқ* функция бўлса, у ҳолда $a_n = 0$ ва

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{4}$$

Агар $[-l, l]$ сегментда (1) қатор билан аниқланган $f(x)$ функцияни $f(l) = \frac{f(l-0) + f(l+0)}{2}$ шартнинг бажарилишини талаб этиб, уни $2l$ га тенг давр билан даврий давом эттирсак, функция ўзининг бутун давомида ҳам (1) қатор билан аниқланади.

3°. $f(x)$ функция $(-\infty, \infty)$ ораликда *абсолют интеграллланувчи* (яъни $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx$ яқинлашади) бўлса ва ҳар қандай чекли сегментда Дирихле шартларига бўйсунса, у ҳолда бу функция қуйидаги Фурье интеграли билан ифодаланади:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (x - t) \, dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} [a(\alpha) \cos \alpha x + b(\alpha) \sin \alpha x] \, d\alpha, \tag{5}$$

бунда

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt \quad \text{ва} \quad b(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt. \tag{6}$$

Даври 2π бўлган қуйидаги функциялар Фурье қаторларига ёйилсин:

2549. $0 < x < \pi$ бўлганда $f(x) = 1$ ва $f(-x) = -f(x)$. Ҳосил бўлган қатор ёрдами билан

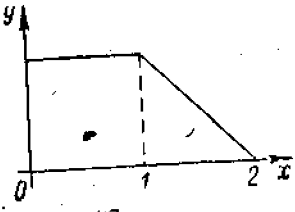
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

эканлиги кўрсатилсин.

2550. $0 \leqslant x \leqslant \pi$ бўлганда $f(x) = x$ ва $f(-x) = f(x)$. Ҳосил бўлган қатор ёрдами билан

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

эканлиги кўрсатилсин.



37-чизма.

2551. $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ бўлганда $f(x) = x^2$. Ҳосил бўлган қатор ёрдами билан

$$1)\ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12};$$

$$2)\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

эканлиги кўрсатилсин.

2552. $f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0 \text{ бўлганда}, \\ \pi - x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ бўлганда}. \end{cases}$

Қуйидаги даври $2l$ бўлган функциялар Фурье қаторига ёйилсин:

2553. $f(x) = 1$, $0 < x < l$ бўлганда ва $f(-x) = -f(x)$.

2554. $f(x) = 1 - x$; $0 \leqslant x \leqslant 1$ бўлганда, $f(-x) = f(x)$, $l = 1$.

2555. $f(x) = \begin{cases} 0, & -l < x \leqslant 0 \text{ бўлганда}, \\ x, & 0 \leqslant x < l \text{ бўлганда}. \end{cases}$

2556. Даври $2l = 4$ бўлган $f(x)$ функция $(0, 2]$ соҳада график билан берилиб (37-чизма): 1) жуфт; 2) тоқ даврийлик қонунига асосан давом эттирилган. Бу функцияларнинг ҳар бири Фурье қаторига ёйилсин.

2557. Узунлиги l га тенг стерженда иссиқлик тарқалиши $\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенглама билан, бунда $u(x, t)$ — температура ва қуйидаги шартлар билан аниқланади:

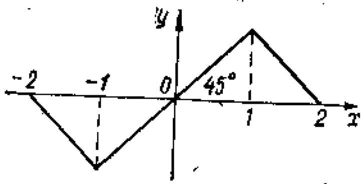
1) чегаравий шартлар: $x = 0$ ва $x = l$ бўлганда $u = 0$;

2) бошланғич шартлар: $t = 0$ бўлганда

$$u = \begin{cases} x, & x < \frac{l}{2} \text{ бўлганда}, \\ l - x, & x > \frac{l}{2} \text{ бўлганда}. \end{cases}$$

Фурье методига асосан $u(x, t)$ функция аниқлансин.

2558. Узунлиги l, бир учи ($x = 0$) бириктирилган иккинчи ($x = l$) учи эса эркин бўлган стерженнинг бўйлама тебранишлари $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенглама билан, бунда $u(x, t)$ — бўйлама силжиши ва қуйидаги шартлар билан аниқланади:



38- чизма.

1) чегаравий шартлар: $x=0$ бўлганда $u=0$; $x=l$ бўлганда $\frac{\partial u}{\partial x}=0$;

2) бошланғич шартлар: $t=0$ бўлганда $u=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=0$. $u(x, t)$ функция Фурье методи билан аниқлансин.

2559. Узунлиги l, икки учи биркитилган стерженнинг кўндаланг тебранишлари $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$ тенглама ва қуйидаги шартлар билан берилади:

1) чегаравий шартлар: $x=0$ ва $x=l$ бўлганда $u=0$ ва $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.

2) бошланғич шартлар; $t=0$ бўлганда $u=f(x)$ ва $\frac{\partial u}{\partial t}=0$. Фурье методи билан $u(x, t)$ функция аниқлансин.

2560 — 2562- масалаларда берилган функциялар учун Фурье интеграли ёзилсин:

2560. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1 \text{ бўлганда} \\ 0, & x>1 \text{ бўлганда.}\end{cases}$ ва $f(-x)=-f(x)$.

2561. $f(x)=e^{-\beta x}$ $x\geqslant 0$ бўлганда $f(-x)=f(x)$.

2562. $[-2,2]$ сегментда 38-чизмадаги график билан берилган ва бу сегментдан ташқарида нолга тенг $f(x)$.

Қуйидаги функциялар Фурье қаторига ёйилсин:

2563. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, $0<x\leqslant\pi$ бўлганда,

$$f(-x)=f(x),\ f(x+2\pi)=f(x).$$

2564. $f(x)=|\sin x|$; ҳосил бўлган қатор ёрдами билан $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots=\frac{1}{2}$ эканлиги кўрсатилсин.

2565. $f(x)=\begin{cases} x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ бўлганда,} \\ \pi-x, \ \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi \text{ бўлганда.}\end{cases}$ ва $f(-x)=-f(x)$.

2566. $f(x)=x$, $0\leqslant x\leqslant l$ бўлганда,
$f(-x)=f(x)$, $f(x+2l)=f(x)$.

2567. $f(x)=\begin{cases} 1, \ -1\leqslant x<0 \text{ бўлганда} \\ x, \ 0<x\leqslant 1 \text{ бўлганда.}\end{cases}$ ва $f(x+2)=f(x)$.

2568. $f(x)=e^x$, $-l<x<l$ бўлганда ва
$f(x+2l)=f(x)$.

2569. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенглама, ушбу

1) $x=0$ да $u=0$, $x=\pi$ да $\frac{\partial y}{\partial x}=0$;

2) $t=0$ бўлганда $u=f(x)$ ва $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ шартлар бажарилганда Фурье методи билан ечилсин.

2570.

$$f(x)=\begin{cases} 1, & -1<x<1 \text{ бўлганда} \\ 0, & |x|>1 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

функция учун Фурье интеграли ёзилсин.

ЖАВОБЛАР

1. $AB = 9$, $BC = -6$, $AC = 3$, $9 - 6 = 3$. 3. $5(2 + \sqrt{2})$, $90°$ $45°$. 5. 20. 6. $5\sqrt{2}$. 7. $(5; 5)$, $(5; -3)$. 8. $B(0; 2)$ ва $B(0; -4)$. 9. $x = a \pm \sqrt{c^2 - b^2}$; $c > |b|$ бўлганда икки нуқта, $c = |b|$ бўлганда битта, $c < |b|$ бўлганда битта ҳам йўқ. 10. $M(5; 0)$. 11. Марказ $(1; -1)$, $R = 5$. 12. $\text{пр}_x\ \overline{AB} = -2$, $\text{пр}_y\ \overline{AB} = -4$, $|\overline{AB}| = 2\sqrt{5}$. 13. $B(5; 8)$, $|\overline{AB}| = 3\sqrt{2}$. 14. $B(4; -3)$. 15. -4; 1; 3. 16. $18\sqrt{2}$. 17. $(0; 2{,}9)$. 18. $B(4; 0)$, $B_1(-8; 0)$. 19. Марказ $(2; -1)$, $R = 5$. 21. $X = 7$, $Y = -1$; $5\sqrt{2}$. 22. $M(1; 4)$. 23. $M(13; 16)$. 24. $x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$. 26. 100Γ оғирликдаги шар марказидан 26 *см* узоқликда. 27. $(1; 2{,}5)$. 29. $OC = 5{,}OD = \frac{24\sqrt{2}}{7}$. 30. $(3; 3)$. 31. 9 кв. бир. 33. 13 кв. бир. 34. $(1; 3)$ — агар кучлар бир томонга йўналган бўлса, ва $(25; 27)$ — агар кучлар турли томонга йўналган бўлса, 35. $(1; -1)$; 36. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$. 37. $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. 38. $\left(\frac{37}{27}; \frac{13}{27}\right)$. 39. $C_1(3; 0)$, $C_2(-7; 0)$. 40. $M(2; -6)$, $N(5; 8)$, $P(-4; 1)$, $k = \frac{7}{3}$. 42. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, A ва O айланада ётади. 43. $x - y - 2 = 0$, D ва E чизиқда ётади. 45. $x^2 + y^2 = 8$. 46. $y = \pm x$. 47. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. 48. $y = \frac{x^2}{4} - x + 2$. 49. $y = \pm 2x$. 51. $(1; 0)$, $(3; 0)$, $(0; 3)$. 53. $y^2 = 8(x - 2)$. 54. $2x - y + 5 = 0$. B ва D нуқталар чизиқда ётади. 55. $x^2 + y^2 = 4$. 57. $y = \frac{x^2}{4} + 1$. 58. $\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 4$ ёки $xy = 2$; $x = \pm\frac{1}{2}$, ± 1, ± 2, ± 4 бўлганда, $y = \pm 4$, ± 2, ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ бўлганда бу нуқталар бўйича эгри чизиқни ясаш мумкин. 59. $y = x + 3$, $y = -x + 3$. 60. $y = x\sqrt{3} - 3$, $y = -x\sqrt{3} - 3$. 62. $y = -1{,}5x$. 63. 1) $k = \frac{2}{3}$,

$b=-2$; 2) $k=-\frac{2}{3}$, $b=0$; 3) $k=0$, $b=-3$; 4) $k=-\frac{3}{4}$, $b=3$.

65. $k=1$, $b=1$, $y=x+1$. 66. 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$; 2) $\frac{x}{-{}^4/_3}+\frac{2}{4}=1$. 67. $y=0$; $4x-3y=0$; $y=4$; $4x-3y+12=0$; $x=0$; $2x-3y+3=0$. 68. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ ёки $-\frac{x}{4}+\frac{2y}{3}=1$. 69. $\text{пр}_{Ox}\overline{AB}=8$, $\text{пр}_{Oy}\overline{AB}=$ $=6$, $|\overline{AB}|=10$. 70. A ва C — тўғри чизиқда, B — ундан «юқори»да, D эса «қуйида» ётади. 71. *Тенгсизликлар қуйидагиларни аниқлайди:* 1) $y=3x+1$ тўғри чизиқдан «юқорида» ётувчи барча нуқталарни *(яъни ярим текисликни);* 2) $y=3x+1$ *тўғри чизиқдан «қуйида»* ётувчи барча нуқталарни; 3) $y=4-2x$ тўғри чизиқда ва ундан «юқорида» ётувчи барча нуқталарни; 4) $y=4-2x$ *тўғри чизиқдан «қуйида»* ётувчи барча нуқталарни. 73. $x-y=\pm a$. 74. t секунддан сўнг M нуқтанинг координаталари $x=a+mt$, $y=b+nt$ *бўлади.* t *ни йўқотиб,* траекториянинг $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}$ тенгламасини ҳосил қиламиз.

75. 1) $y=x\sqrt{3}-2$; 2) $y=-x\sqrt{3}-2$. 76. $k=1$, $b=5$. 77. $x+y-4=0$; $x-y+4=0$; $y=3$, $y=0$. 78. $\frac{x}{5}\pm\frac{y}{3}=\pm 1$. 79. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ ва $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-6}=1$. 80. $y=\pm 2(x+3)$. 81. $AB=4\sqrt{5}$, $\text{пр}_{Ox}\overline{AB}=4$, $\text{пр}_{Oy}\overline{AB}=8$. 82. 1) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; 2) $45°$; 3) $45°$; 4) $0°$; 5) $90°$; 6) $\operatorname{arctg}\frac{a^2-b^2}{2ab}$. 86. $5x+2y+4=0$; $5x+2y=25$. 88. $x-$ $-3y+2=0$; $5x-y=4$; $3x+y=12$. 89. $28°$, $12°30'$ ва $139°30'$. 90. $y=3x$ ва $y=-\frac{1}{3}x$ 91. $x-5y+6=0$; $5x+y=-4$. 92. $y=$ $=2x-6$; $y=-2x+6$. 93. $(3;\ -1)$, $(3;\ 3)$; $\left(-\frac{9}{5};\ \frac{3}{5}\right)$, $45°$, $71°34'$, $63°26'$. 94. $\left(\frac{5}{2};\ \frac{5}{2}\right)$. 95. AE: $2x-5y=-4$; AD: $x-$ $-2y=-2$; $\sqrt{29}$. 96. $A=18°26'$; $B=26°34'$; $C=135°$. 97. $x+$ $+2y-11=0$. 98. $\operatorname{tg}A=\frac{4}{3}$; $\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}C=2$; $S=16$. 99. $(1;\ -1)$, $\left(\frac{8}{3};\ -2\right)$. 100. $2x+y=-4$; $2x-y=-4$; $2x+y=4$. 109. 2,8; 0; 1,4; 105. $\frac{\sqrt{13}}{2}$. 106. $k=\pm 2$. 107. Берилганига параллел икки тўғри чизиқ: $4x-3y\pm 20=0$. 108. $8x-15y+6=0$; $8x-15y=130$. 109. $x-y=0$ ва $x+y-4=0$. 110. $3x-y=12$ ва $x+3y=4$. 111. $x+y=2$ ёки $4x+y-8=0$. 112. $31x+26y=-21$. 113. $x+3y=2$. 114. $\sqrt{10}$. 115. $3x-4y+10=0$; $x=2$. 116. $h=$ $=\frac{18}{\sqrt{34}}$. 117. $x+y=0$ ва $x-3y=0$ тўғри чизиқлар; масофалар: $d_1=$ $=2\sqrt{2}$, $d_2=0{,}4\sqrt{10}$. 118. *Иккита тўғри чизиқ:* $x+2y=0$

ва $x+2y=10$. **119.** $x+3y=0$ ва $3x+y=0$. **120.** $11x+$ $+22y=74$. **121.** $y=-\frac{x}{2}$ ва $y=-\frac{3}{2}x$. **122.** $x+2y=4$. **123.** $y=0$; $2x+3y=-4$; $y=-4$; $2x+3y=0$; $x+2y=-2$; $y=-x$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{8}$.

124. $18°26'$, $108°27'$; $S_\Delta=\frac{2b^2}{3}$. **125.** $\frac{a^2}{5}$ кв. бир. **126.** $A=36°52'$; $B=127°52'$. **127.** $4(\sqrt{10}+\sqrt{5})$; 20. **128.** $2x-y+6=0$; $x-4y=4$; $2x-3y+2=0$. **129.** $y=x+2$; $x-5y=6$; $y=-x$; $2y=x$. **130.** $\sqrt{10}$. **131.** Нуқта $x-3y=\pm 5$, $3x+y=\pm 5$ тўғри чизиқлар билан чегараланган квадрат томонлари бўйича ҳаракат қилади. **133.** $h_1=h_2=\frac{6}{\sqrt{5}}$. **134.** $\left(\frac{3}{5};\ \frac{19}{5}\right)$, $\left(-\frac{9}{5};\ -\frac{17}{5}\right)$. **135.** $(4;\ 5)$. **136.** $(0;\ 2)$, $(4;\ 0)$, $(2;\ 4)$, $(-2;\ 6)$. **137.** $y-x=2$; $x+2y=4$; $2x+y=8$. **138.** $B(2;\ 1)$, $C(-1;\ -5)$. **139.** $y=2x+6$, $\frac{12}{\sqrt{15}}$; $\angle DAB\approx 53°$. **140.** $x^2+y^2+8x-6y=0$; A ва O айланада, B — ундан ташқарида. **141.** $x^2+y^2+4x-6y=0$. **143.** $(0;\ 0)$, $(-2{,}5;\ 2{,}5)$. **144.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ёки $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **145.** $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$, $\alpha=112°37'$. **146.** $(x+4)^2+(y+1)^2=25$. **147.** x^2+ $+y^2-8y=0$. **149.** $y=\frac{4}{3}x$ ва $y=0$. **150.** $y^2=x(a-x)$. **151.** $(x-3)^2+$ $+y^2=9$. **152.** $x^2+\left(y-\frac{a}{3}\right)=\frac{a^2}{9}$. **153.** $x^2+y^2=a^2$. **154.** x^2+ $+y^2=ax$. **155.** $x^2+y^2-6y-9=0$. **156.** 1) $(3;\ -2)$, $R=6$; 2) $\left(-\frac{5}{2};\ \frac{7}{2}\right)$, $R=4$; 3) $\left(0;\ -\frac{7}{2}\right)$, $R=\frac{7}{2}$. **157.** $x^2+y^2+4y=0$; $(0;\ 0)$, $(2;\ -2)$, $(-2;\ -2)$. **158.** $x^2+y^2+ax+ay=0$. **159.** $y=0$. $15x+8y=0$. **160.** $90°$. **161.** $x+y=3$. **162.** $x^2+y^2+ax=0$. **163.** $(x-2)^2+y^2=16$. **164.** $x^2+y^2=2ax$. **165.** $a=4$; $b=2$; $c=2\sqrt{3}$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **166.** 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$. **167.** $b=1{,}4$; 3; 4; 4,8; 5; $\varepsilon=0{,}96$; 0,8; 0,6; 0,28; 0. **168.** $a=150$ млн. *км*; $\varepsilon=\frac{1}{60}$.

169. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $r=4-\sqrt{3}$; $r_1=4+\sqrt{3}$. **170.** $\frac{x^2}{64}+$ $+\frac{y^2}{28}=1$; $r=11$; $r_1=5$. **171.** $4\sqrt{3}$. **172.** $\sqrt{0{,}4}$. **173.** $\left(\frac{2}{7};\ \pm\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$. **174.** $\left(-\frac{15}{4};\ \pm\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$. **175.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$. **176.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **178.** $\frac{x^2}{a^2}+$ $+\frac{y^2}{b^2}=1$ ёки $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. **179.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ ёки $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$. **180.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r=3$, $r_1=9$. **181.** $\sqrt{2(a^2+b^2)}$. **182.** $\left(\pm\frac{4\sqrt{2}}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ ва $(0;\ -1)$. **183.** $(-5;\ 7)$. **184.** $(\pm\sqrt{15};\ \pm 1)$.

185. $x^2+4y^2=16$. 186. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. 187. $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $53°08'$. 188. $r=1$, $r_1=9$. 189. 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1$. 190. $\frac{x^2}{12}-$ $-\frac{y^2}{4}=1$; $2\sqrt{3}$ ва $6\sqrt{3}$. 191. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 192. $x^2-y^2=a^2$. 193. $(0;\ \pm a\sqrt{2})$; $90°$. 194. $y+2=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$. 195. b; $2\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. 196. $\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$; $b>a$. 197. 1) $\varepsilon=2$; 2) $\varepsilon=\sec\alpha$. 198. $y\leqslant -3$, $y<-|x|$. 199. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. 200. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ ($x>0$ бўлганда). 201. $x^2-y^2=a^2$. 202. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 203. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ $\left(\text{ёки } \frac{x^2}{9}-\right.$ $\left.-\frac{y^2}{16}=-1\right)$. 204. $(0;\ 0)$ ва $(6;\ \pm 2\sqrt{3})$. 205. $y=\pm\frac{4}{3}(x+5)$. 206. $(-9{,}6;\ \pm 3/5\cdot\sqrt{119}$ 207. $(\pm(\sqrt{6};\ \pm\sqrt{2})$ 208. $(-4;\ 3)$ ва $\left(-\frac{4}{7};\ -\frac{3}{7}\right)$. 209. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$. 210. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$ ($x>0$ бўлганда). 211. $y=3-\frac{x^2}{4}$. 212. $y^2=8(x+2)$. 214. 1) $y^2=9x$; 2) $y=-x^2$. 215. $y=\frac{a}{b^2}x^2$. 216. $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=p^2$; $\left(\frac{p}{2};\ \pm p\right)$. 217. $y=-\frac{x^2}{2}$. 218. $(3;\ \pm 3\sqrt{2})$. 219. 40 *см*. 221. $y^2=px$. 222. $y^2=4ax$ ва $y=0$. 224. $y^2=8(2-x)$. 225. $y=x-\frac{x^2}{4}$; $O_1(2;\ 1)$. 226. 1) $y^2=-4x$; 2) $y=x^2$. 227. $y^2=-3x$. 228. $(0;\ 0)$, $(6;\ \pm 2\sqrt{3})$. 229. $x=0$; $x+y+2=0$. 230. $y=-\sqrt{3}(x+1)$; $\frac{16}{3}$. 231. $r=7{,}4$; $d=9{,}25$. 232. Директрисалар; $x=\pm 3{,}2$; $\varepsilon=1{,}25$; $r=10{,}25$; $d=8{,}2$. 233. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. 234. $x^2-y^2=12$. 235. Қўшма диаметр $y=-\frac{x}{2}$; $a_1=b_1=\sqrt{10}$. 236. Қўшма диаметр $4y+x=0$; $31°$. 237. Диаметр тенгламаси $y=\frac{b}{a}x$; унинг узунлиги $\sqrt{2(a^2+b^2)}$. 238. $y=1{,}5x$. 239. $y=2$. 240. $8x-9y+25=0$. 241. $y=2x+3$. 243. 1) $x\pm 2\sqrt{3}$ $y=8$; 2) $2x\pm y=1$; 3) $x\pm 2y=-2$. 245. $x-y=\pm 5$. 246. $y=\pm 2x+6$. 247. $x+y=\sqrt{a^2+b^2}$. 249. $y=2x\pm 4\sqrt{2}$. 250. MN нормалнинг тенгламаси: $a^2y_0x-b^2x_0y=$ $=c^2x_0y_0$. $y=0$ деб, MN нормалнинг Ox ўқ билан кесишган нуқтасининг абсциссасини топамиз: $x_1=\varepsilon^2x_0$. У вақтда $FN=x-\varepsilon^2x_0=$ $=\varepsilon r$, $F_1M=c+\varepsilon^2x_0=\varepsilon r_1$, яъни MN нормал FF_1 ни $r:r_1$ нисбатда бўлади, шунинг учун ҳам биссектриса бўлади. 252. $y^2=2px$ пара-

болага ўтказилган нормал $y_0x + py = y_0(p + x_0)$ тенгламага эга. $y = 0$ деб, $x_1 = p + x_0$, $FN = x_1 - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + x_0 = FM$. ларни топамиз, яъни $\angle FMN = \angle FNM$. **253.** $(\pm 3{,}2;\ \pm 2{,}4)$. **254.** Диаметрлар $y = x$ ва $y = -\frac{x}{4}$; бурчак $59°02'$. **255.** $y = \frac{x}{4}$. **256.** $4x - y = 6$. **257.** $\operatorname{arc\,tg} 3 \approx 71°31'$. **259.** $x + y + 2 = 0$. **260.** 1) $O_1(1;\ 2)$, 2) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$. **261.** 5) $X^2 + 4Y^2 = 16$; 6) $Y^2 = 4X$; 7) $X^2 - 4Y^2 = 4$; 8) $Y = \frac{1}{2}X^2$. **262.** 1) $X^2 + 4Y^2 = 16$; 2) $X^2 - 4Y^2 = 16$. **263.** $X^2 - Y^2 = 8$. **264.** 1) $XY = 6$; 2) $XY = -6$; 3) $XY = 4$; 4) $XY = -6$. **268.** Сув оқимнинг тенгламаси: $y = 16\,(x - x^2)$; $x = 0{,}75$ *м* бўлганда $y = 3$ *м*. **269.** $y = b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. **270.** $x^2 + y^2 + 4x = 0$. **271.** 1) $45°$; 2) $\operatorname{arc\,tg} 2$. **272.** $y = x\operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos\varphi}$. **273.** $y^2 = 24x + 3x^2$ (гипербола). **275.** 1) Эллипс; 2) гипербола. **276.** 1) $\frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{2} = 1$, $O_1(3;\ -1)$; 2) $X^2 - Y^2 = 9$; 3) $Y^2 = 2X$; 4) $X^2 = 4Y$. **277.** $X^2 + 2Y^2 = 4$. Фокуслар эски системада: $(1;\ 1)$ ва $(-1;\ -1)$. **278.** $(x + 1)^2 + y^2 = 4$. **279.** $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 2$. **280.** $x + 3y = 0$. **281.** $y^2 = 4\,(x + 4)$. **283.** $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. **284.** $x^2 + y^2 - ax - by = 0$. **285.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

286. Асос $AB = 2a$, баландлик $OD = \frac{a}{\sqrt{5}}$, юз $\frac{a^2}{\sqrt{5}}$. **287.** AB ни $AO : OB = m$ нисбатда бўлувчи O нуқтани координаталар боши деб, Ox ўқи деб эса OB тўғри чизиқни қабул қиламиз; $OB = a$ бўлсин, у вақтда A ва B нуқталарнинг координаталари $A(-ma;\ 0)$, $B(a;\ 0)$. Изланган чизиқнинг тенгламаси: $(m - 1)\,x^2 + (m - 1)\,y^2 = 2\,max$; $m \neq 1$ бўлганда $x^2 + y^2 = \frac{2ma}{m-1}\,x$ айлана; $m = 1$ бўлганда $x = 0$ тўғри чизиқ. **288.** O нуқтани координаталар боши, OB ни эса Ox ўқ деб қабул қиламиз. Изланган чизиқнинг тенгламаси: $(a - b)\,(x^2 + y^2) = 2abx$; $a \neq b$ бўлганда $x^2 + y^2 = \frac{2ab}{a-b}\,x$ айлана; $a = b$ бўлганда $x = 0$ тўғри чизиқ. **289.** $2\,(k^2x^2 + y^2) = a^2\,(k^2 + 1)$; $k \neq 1$ бўлганда эллипс, $k = 1$ бўлганда $x^2 + y^2 = a^2$ айлана. **290.** $\frac{x^2 + 10x}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$. **291.** $3a^2\sqrt{3}$. **292.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4} \approx 36°52'$. **293.** $(\pm a;\ \pm a)$. **294.** $A(\sqrt{6};\ 0)$; $B(2;\ -2)$, $C(-2\sqrt{2};\ \sqrt{2})$; $\triangle ABC$ юзи $= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$. **296.** $2\sqrt{2}$; $y = x - 2$. **297.** $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$.

298. $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9p^2}{16}$. **299.** $ax - by + a^2 + b^2 = 0$; $d = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

300. Тенгламаларни ҳадма-ҳад айириб $4\,(y - x) = (y + x)\,(y - x)$ га эга бўламиз; бундан 1) $y = x$; 2) $x + y = 4$; демак, параболаларнинг

кесишиш нуқталари $y=x$ ёки $x+y=4$ тўғри чизиқлардан бирида; ётади; $x_1=2$; $x_2=-6$ ни топамиз; ватарнинг узунлиги $8\sqrt{2}$.
301. 30. **302.** $x^2+y^2=a(x+y)$. **303.** $\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$ [эллипс, маркази (2; 0)]. **304.** $xy=4$. **305.** $y=\frac{x^2-6x+25}{8}$. **306.** $X^2-Y^2=4$; $O_1(2;\ -3)$. **307.** $\frac{(x-2,5)^2}{2,25}-\frac{y^2}{4}=1$ [гипербола, маркази (2,5; 0)].
308. $M(x,\ y)$ — эллипснинг нуқтаси бўлсин. У вақтда $FM+F_1M=AF+AF_1$ ёки $\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}=4a$; $3x^2-2xy+3y^2=8a^2$; ўқларни 45° га бурғандан сўнг: $X^2+2Y^2=4a^2$.
309. $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$; янги тенглама $X^2-Y^2=4$. **310.** $3x^2+8xy-3y^2=20$; ўқларни $\varphi=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{2}$ бурчакка буриш натижасида $X^2-Y^2=4$ кўринишга келтирилади (309 га қаранг). **311.** $y^2=2px+(\varepsilon^2-1)x^2$. **303.** 1) $y=\pm 2x$ икки тўғри чизиқ; 2) (0; 0) нуқта 3) мавҳум айлана; 4) (3; 4) нуқта; 5) икки тўғри чизиқ: $x=0$, $y=-x$; 6) икки тўғри чизиқ ($y=\pm 4$); 7) икки тўғри чизиқ $y=x$ ва $y=\frac{x}{2}$. **314.** 1) (1; —1), $\frac{X^2}{6}+\frac{Y^2}{4}=1$; 2) (2; 1), $X^2-Y^2=9$; 3) $2X^2+5XY+2Y^2=8$. **315.** 1) $\frac{X^2}{24}+\frac{Y^2}{4}=1$; 2) $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{6}=1$.
316. 1) $\frac{X^2}{8}+\frac{Y^2}{4}=1$; 2) $\frac{X^2}{8}-\frac{Y^2}{4}=1$. **317.** 1) $Y^2=2\sqrt{5}\,X$; 2) икки тўғри чизиқ $x-2y=3\pm 1$. **318.** 1) $3y=2x-7\pm(x-2)$; 2) (2; —1) нуқта; 3) $4y=-2x-3\pm 1$. **319.** $4X^2-Y^2=8$; марказ (2; 0); $\varphi=-45°$. **320.** $5(x-1)^2+(y-2)^2=9$. **321.** Ўқларни—45° га буриб, $Y=\frac{X^2}{a\sqrt{2}}+\frac{a}{2\sqrt{2}}$ ни ҳосил қиламиз. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ тенглама шу параболанинг $x\leqslant a$ ва $y\leqslant a$ шартларга бўйсунувчи AB ёйини аниқлайди (91- чизма). **322.** $(x-m)^2+(y-n)^2-\varepsilon^2(x\cos\alpha+y\sin\alpha+q)^2=0$; $A+C=2-\varepsilon^2$; $\delta=1-\varepsilon^2$. **323.** 1) Икки тўғри чизиқ $x\pm 2y=0$; 2) (—2; 2) нуқта; 3) икки тўғри чизиқ $y=x$; $x+6y=0$. **324.** 1) $\frac{X^2}{12}+\frac{Y^2}{4}=1$; 2) $\frac{X^2}{20}-\frac{Y^2}{5}=1$. **325.** 1) $Y^2=4\sqrt{2}\,X$; 2) $x+y=2\pm 1$ тўғри чизиқлар. **326.** 1) $y=x-2\pm 1$; 2) $3y=x-5\pm 2(x+1)$. **327.** 1) $7x^2-2xy+7y^2-48x-48y+144=0$; 2) $x^2+4xy+y^2+6x+6y-18=0$. **328.** $(x-y)^2-2a(x+y)+a^2=0$; $Y^2=a\sqrt{2}X$. **329.** $x^2-4xy-y^2-4x+8y-12=0$; $X^2-Y^2=3,2\sqrt{5}$. **335.** 1) $r=\frac{a}{\cos\varphi}$; 2) $r=\frac{a\sin\alpha}{\sin\varphi}$. **336.** $r=\frac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\varphi)}$. **337.** $r=2a\cos\varphi$. **338.** 1) $r_{max}=5$, $\varphi=135°$, 315° бўлганда; $r_{min}=1$, $\varphi=45°$, 225° бўлганда; $r=3$, $\varphi=0°$, 90°, 180°, 270° бўлганда; 2) $r_{max}=3$, $\varphi=0°$, 120°, 240° бўлганда; $r_{min}=1$, $\varphi=60°$, 180°, 360° бўлганда; 3) $r_{max}=2$, $\varphi=90°$, 210°, 330° бўлганда; $r_{min}=0$, $\varphi=30°$, 150°, 270° бўлганда; **339.** 1) $r_{max}=a$, $\varphi=30°$, 150° 270° бўлганда; $r=0$, $\varphi=0°$, 60°, 120°, 180°, 240°, 300° бўлганда;

2) $r=a$, $\varphi=45°$, $225°$ бўлганда; $r=-a$, $\varphi=135°$, $315°$ бўлганда; $r=0$, $\varphi=0°$, $90°$, $180°$, $270°$ бўлганда (87- чизмага қаранг). **340.** 1) $r^2=\frac{a^2}{\cos 2\varphi}$; 2) $r=a$; 3) $r=\frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$; 4) $\operatorname{tg}\varphi=1$; 5) $r=\alpha\cos\varphi$; 6) $r^2=a^2\cos 2\varphi$. **341.** 1) $x=a$; 2) $x^2+y^2=2ay$; 3) $xy=a^2$; 4) $x+y=2a$; 5) $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$. **342.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 3) $y^2=6x$. **343.** $r=\frac{a}{\sin\varphi}\pm b$. **344.** $r=OB\pm AB=\frac{a(1\pm\sin\varphi)}{\cos\varphi}$ ёки Декарт коодинаталарда $y^2=\frac{x(x-a)^2}{2a-x}$.
345. $FM^2=r^2+a^2-2ra\cos\varphi$; $F_1M^2=r^2+a^2+2ra\cos\varphi$; $FM^2\cdot F_1M^2=(r^2+a^2)^2-4r^2a^2\cos^2\varphi=b^4$; бундан $r^4-2a^2r^2\cos 2\varphi=b^4-a^4$.
346. $r=a(1+\cos\varphi)$; $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$. **347.** C — қўзғалмас доиранинг маркази, C_1 — ҳаракатланувчи доиранинг маркази ва $M(\varphi;\ r)$ — ўзгарувчи нуқта бўлсин. $\angle OCC_1=\angle MC_1C=\varphi$ ва $CO=C_1M=\frac{1}{2}a$ бўлгани учун $OM\parallel CC_1\cdot COMC_1$ синиқ чизиқни CC_1 га проекциялаб, $\frac{a}{2}\cos\varphi+r+\frac{a}{2}\cos\varphi=a$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $r=a(1-\cos\varphi)$. **348.** 1) $r_{\max}=5$, $\varphi=0°$, $180°$ бўлганда; $r_{\min}=1$, $\varphi=90°$, $270°$ бўлганда; 2) $r_{\max}=4$, $\varphi=90°$, $210°$, $330°$ бўлганда; $r_{\min}=2$, $\varphi=30°$, $150°$, $270°$ бўлганда; 3) $r=a$, $\varphi=0°$, $180°$ бўлганда; $r=-a$, $\varphi=90°$, $270°$ бўлганда; $r=0$, $\varphi=45°$, $135°$, $225°$, $315°$ бўлганда. **350.** $r=\frac{ab\sin(\beta-\alpha)}{a\sin(\varphi-\alpha)+b\sin(\beta-\varphi)}$. **351.** 1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; 2) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$; 3) $y^2=x$. **352.** $r^2=2c^2\cos 2\varphi$; $(x^2+y^2)^2=2c^2(x^2-y^2)$. 84- чизмада $c\sqrt{2}=a$ деб олинган. **353.** $r=b+a\cos\varphi$.
354. $\triangle OAM$ дан: $r=OM=OA\cos\varphi$, аммо $\triangle OAB$ дан: $OA=2a\sin\varphi$; бундан $r=a\sin 2\varphi$. **358.** A нуқта Ox ўқда, B нуқта Oy ўқда ва $\angle OAB=t$ бўлсин. У вақта $x=BM\cos t=BC\cos^2 t=a\cos^3 t$, $y=AM\sin t=AC\sin^2 t=a\sin^3 t$; шундай қилиб: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$; бундан, демак, $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. **360.** $y^2=\frac{px^2}{p+x}$.
361. $(3y^2+x^2)^2=4x^2(a^2-y^2)$. **362.** Қутб координаталарида: $r=OM=AB=BD\sin\varphi=a\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi$; Декарт координаталарида: $y^2=\frac{x^3}{a-x}$ (89- чизма). **365.** OA нурнинг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини t деб белгилаб, $x=2a\operatorname{ctg}t$, $y=2a\sin^2 t$ ни топамиз. t ни йўқотиб, $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ га келамиз. **367.** $\begin{cases} x=a(t-\sin t). \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

368. $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases}$ **369.** $y=x\operatorname{ctg}\frac{x}{a}$.

370. $\begin{cases} x=(R+r)\cos t-r\cos\frac{(R+r)t}{r} \\ y=(R+r)\sin t-r\sin\frac{(R+r)t}{r} \end{cases}$ бунда t — марказлар чизиғининг бурилиш бурчаги.

371. $\begin{cases} x=(R-r)\cos t+t\cos\frac{R-r}{r}t. \\ y=(R-r)\sin t-r\sin\frac{R-r}{r}t. \end{cases}$

374. $X=\sum X_i=8$; $Y=\sum Y_i=-2$; $OM=\sqrt{64+4}=2\sqrt{17}$.

375. $\sqrt{8+2\sqrt{3}}$. 379. 1) $c=\frac{a+b}{2}$; 2) $a=2c-b$.

380. $c=\frac{2}{3}(a-b)$. 381. $m+p=n$; $\overrightarrow{OB}=3(m+n)$; $\overrightarrow{BC}=3(n-m)$; $\overrightarrow{EO}=3(m-n)$; $\overrightarrow{OD}=3(2n-m)$: $\overrightarrow{DA}=6(m-n)$.

382. $\overrightarrow{AC}=2(n-m)$; $\overrightarrow{OM}=2n+m$; $\overrightarrow{ON}=3m+n$; $\overrightarrow{MN}=2m-n$.

383. $6\sqrt{3}$. 384. $X=X_1+X_2+X_3=-3$; $Y=\sum Y_i=6$; $OM=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$. 385. 1) $a=3(c-b)$; 2) $c=2b-a\sqrt{3}$.

386. $OM=r=5\sqrt{2}$; $\cos\alpha=0{,}5\sqrt{2}$; $\cos\beta=-0{,}3\sqrt{2}$, $\cos\gamma=0{,}4\sqrt{2}$. 387. $r=7$, $\cos\alpha=\frac{2}{7}$. 388. $\beta\approx 52°$ ёки $128°$.

389. $M(3\sqrt{2};\ 3;\ -3)$, $r=3(\sqrt{2}i+j-k)$. 390. $u=2i-6j+3k$, $u=7$. 391. $\overrightarrow{OC}=i-2j+k$, $OC=\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AB}=k-4j-i$; $AB=3\sqrt{2}$. 392. Охири $B(4;\ -2;\ 5)$ ёки $B_1(4;\ -2;\ -7)$, $\cos\alpha=\frac{2}{7}$; $\cos\beta=-\frac{3}{7}$; $\cos\gamma=\pm\frac{6}{7}$. 393. $a=2b-0{,}8c$.

394. $u=3\sqrt{5}$, $\cos\alpha=-\frac{2}{3\sqrt{5}}$. 395. $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

396. 45° ёки 135°. 397. $D(4;\ 0;\ 6)$. 398. $c=2b-2a$. 399. 135°.

400. $B=C=45°$. 401. $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}=0{,}316$; $\varphi=71°35'$.

402. $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}=0{,}894$; $\varphi\approx 26°37'$. 403. 60°. 404. $\arccos 0{,}8$.

405. 90°. 406. $\text{пр}_b a=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 407. 2. 408. 1) $2+\sqrt{3}$; 2) 40.

409. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\cos\varphi$ (косинуслар теоремаси); $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$ (параллелограмм диагоналларининг хоссаси).

410. 7. 411. $R=\sqrt{(a+b+c+d)^2}=10\sqrt{4+2\sqrt{2}}\approx 25{,}3$ *кГ*

412. $\sqrt{7}$ ва $\sqrt{13}$. 413. $\cos(\widehat{a,\ m})=\frac{(2m-n)m}{\sqrt{(2m-n)^2\cdot 1}}=\frac{5}{2\sqrt{7}}$, $\cos(\widehat{a,\ n})=-\frac{2}{\sqrt{7}}$. 414. $\frac{5}{6}$. 415. $\overrightarrow{OM}=2(i+j+2k)$; $\overrightarrow{ON}=2(i+2j+k)$; $\cos\theta=\frac{5}{6}$. 416. $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{7}}$.

417. $\cos\varphi=0{,}26\sqrt{10}$; $\varphi\approx 34°42'$. 418. $D(-1;\ 1;\ 1)$; $\varphi-120°$.

419. $\text{пр}_a q=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{AB}=-6$. 420. $CM=\sqrt{(2+m)^2}=\sqrt{7}$; $ON=$

$= \sqrt{(3m+n)^2} = \sqrt{13}$; $\cos\varphi = \frac{\overline{OM}\cdot\overline{ON}}{OM\cdot ON} = \frac{17}{2\sqrt{91}} = \frac{17}{19{,}08} \approx 0{,}891$;

$\varphi = 27°$. **421.** $120°$. **423.** 8 *кГм*, $\cos\theta = \frac{4\sqrt{2}}{15}$. **424.** $a\sqrt{6}$.

425. $\cos\varphi = -\frac{1}{4}$. **426.** $a \times b$ тенг: 1) $-6j$; 2) $-2k$; 3) $6i - 4j + 6k$. Юз тенг: 1) 6; 2) 2; 3) $2\sqrt{22}$. **427.** 24,5. **428.** $\sqrt{21}$ кв. бир., $h = \sqrt{4{,}2}$. **429.** 1) $2(k-i)$; 2) $2a \times c$; 3) $a \times c$; 4) 3. **430.** Берилган параллелограммнинг диагоналларида ясалган параллелограммнинг юзи берилган параллелограмм юзидан икки марта катта. **431.** $50\sqrt{2}$. **432.** $1{,}5\sqrt{2}$. **433.** $3\sqrt{17}$, $S_\Delta = \frac{3\sqrt{17}}{2}$ кв. бир. **434.** $S_\Delta = 7\sqrt{5}$ кв. бир., $BD = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

435. $|a+b| = |a-b| = \sqrt{5}$; $S = \sqrt{6}$ кв. бир. **437.** 1,5.

438. $V = 51$, чап. **439.** $V = 14$ куб бир, $H = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

441. $c = 5a + b$. **443.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **444.** $V = 14$ куб бир., $N = \sqrt{14}$. **445.** $c = a + 2b$. **446.** $V = |(a+b)\cdot[(b+c)\times(a+c)]| = 2|abc|$.

447. $(m\times n)\cdot p = |m\times n|\cdot 1\cdot\cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. **449.** 52.

451. $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$. **452.** $x + 4y - 2z = 2$. **453.** $x + y = 2a$. **454.** $x - y + z = a$. **455.** $2y - 3z + 7 = 0$. **456.** $3y + 3z = 0$. **457.** $2x + y = 0$. **458.** $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$.

459. $x + y + z = 4$. **460.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$. **462.** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\cos\beta = -\frac{2}{3}$; $\cos\gamma = \frac{1}{3}$; $\alpha = 48°11'$, $\beta = 131°49'$, $\gamma = 70°32'$. **463.** $x - 2y - 3z + 14 = 0$. **464.** $3x - 4z = 0$. **675.** $x + y = 4$. **466.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$. **467.** 1) 45°; 2) 78°30′. **468.** $x - 2y - 3z = 4$. **469.** $2x + 3y + 4z = 3$. **470.** $2x + y + z = a$. **471.** $2x - 2y + z = 2$. **472.** $2x - y + z = 5$. **473.** $3x - y = 0$ ва $x + 3y = 0$. **474.** 3. **475.** $\sqrt{6}$. **476.** $2\sqrt{2}$ **477.** 1) $x - 2y + 2z = 11$ ва $x - 2y + 2z = -1$; 2) $x + y - 2z = 0$ ва $x + y + z = 0$. **478.** 1) $x - 8y + 9z = 21$; 2) $x - y + 2z = 0$ ва $x - y - z = 0$. **479.** (1; −1; 2). **480.** $3x - 4y + z = 11$. **481.** $2y - 5z + 10 = 0$. **482.** Текисликнинг тенгламаси: $x + y - 2z = 0$; унинг $z = 0$ текислик билан ҳосил қилган бурчаги: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$; $\varphi = 35°15'$.

483. $\frac{|a|}{\sqrt{3}}$. **484.** $y = \pm z$. **485.** $\frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$. **486.** $2x + 2y + z = 20$ ва $2x + 2y + z + 4 = 0$. **487.** $7x + 14y + 24 = 0$. **488.** 1) (5; 4; 0) ва (7; 0; 2); 2) (0; −4; 0) ва (2; 0; 2). **489.** $x = -z + 3$, $y =$

$= -z+5;$ $\quad \frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{-1}$. **490.** $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$.

491. $P\{0; 0; 1\}$. **492.** 1) $P=i$; 2) $P=i+k$; 3) $P=j+k$. **493.** $\frac{x+1}{2}=$ $=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$; $\cos\alpha=0{,}3\sqrt{2}$; $\cos\beta=0{,}4\sqrt{2}$; $\cos\gamma=-0{,}5\sqrt{2}$. **494.** $x=2$; $z=3$. **495.** t секунддан кейин M нуқтанинг координаталари $x=4+2t$; $y=-3+3t$; $z=1+t$ бўлади. $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{3}=$ $=\frac{z-1}{1}$. **496.** 1) $x=-2+t$, $y=1-2t$; $z=-1+3t$; 2) $x=1+t$, $y=1-t$, $z=2+t$. **497.** 1) $\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{0}=\frac{z-c}{1}$, демак: $\begin{cases} x=a \\ y=b; \end{cases}$ 2) $z=c$ ва $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}$. **498.** $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **499.** $\cos\varphi=\frac{11}{26}$. **501.** Йўналтирувчи вектор $P=N\times N_1=i+3j+5k$. Тўғри чизиқ тенгламалари: $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{5}$. **502**. $3x+2y=0$, $z=4$. **503.** $0{,}3\sqrt{38}$.

504. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **505.** $(4; 2; 0)$, $(3; 0; 2)$, $(0; -6; 8)$. **506.** $x=6-3z$, $y=-2z+4$; $\frac{x-6}{-3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z}{1}$; излари: $(6; 4; 0)$; $(0; 0; 2)$. **507.** $\frac{x}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z}{3}$. **508.** $P\{0; 1; 0\}$. **509.** $P\{1; 1; 2\}$; $\alpha=\beta=$ $=\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$. **510.** $y=-3$; $2x-z=0$. **511.** Тенгламаларни каноник формага келтирамиз: $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-5}{2}$ ва $\frac{x}{2}=$ $=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{6}$; $\cos\varphi=\frac{20}{21}\approx 0{,}952$; $\varphi=17°48'$. **512.** Берилган тўғри чизиқ тенгламаларини $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-\frac{1}{3}}{1}$ кўринишда ёзиб, изланган тўғри чизиқ тенгламаларини ҳосил қиламиз: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{1}$. **513.** $A(0; +1; 0)$, $\overline{AM}\{3; -1; 4\}$, $P\{1; 2; 2\}$, $d=\sqrt{17}$. **514.** $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{6}}$. **515.** Иккала тўғри чизиқ учун ҳам $Am+Bn+Cp=2\cdot 2+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 3=0$, лекин биринчисининг $(-1; -1; 3)$ нуқтаси текисликда ётмайди, иккинчисининг $(-1; -1; -3)$ нуқтаси эса текисликда ётади. **516.** $y+z+$ $+1=0$ (тўғри чизиқнинг тенгламаларини $\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ кўринишда ёзиш мумкин). **517.** $x-2y+z+5=0$. **518.** $8x-5y+$ $+z-11=0$. **519.** $x+2y-2z=1$. **520.** $\frac{x}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$; $17°33'$. **521.** $(5; 5; -2)$. **522.** $(6; 4; 5)$. **423.** $(5; 5; 5)$. **524.** $(3; 3; 3)$.

525. $d=\frac{\overrightarrow{AA_1}PP_1}{|P\times P_1|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 526. $x+2y-5z=0$. 527. $\frac{x-2}{-9}=\frac{y-1}{8}=$ $=\frac{z}{11}$. 528. $(1;1;2)$; 70°. 529. $(-1;2;2)$, 30°. 530. $(6;2;0)$. 531. $(3;-1;1)$.

532. $x-y-z=0$. 533. $(-1;3;1)$. 534. $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{-1}$.

535. Тўғри чизиқлардаги нуқталар O $(0;0;0)$ ва $A(2;2;0)$; тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари: P $\{0;0;1\}$ ва $P_1\{2;-1;2\}$, $d=\frac{\overrightarrow{OA}PP_1}{|P\times P_1|}=\frac{6}{\sqrt{5}}$. 536. 1) $C(1{,}5;-2{,}5;2)$, $R=2{,}5\sqrt{2}$; 2) $C(0;0;a)$, $R=a$. 537. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$. 538. $x^2+y^2+z^2=8x$. 539. $x^2+y^2+z^2-a(x+y+z)=0$. 541. $y^2=2ax-x^2$. 542. $x^2+y^2=2ax$, $x^2+z^2=2ax$, $y^2+z^2=a^2$. 544. $(1;7;2)$, $R=4$. 545. $(3Y-2Z)^2=$ $=12(3X-Z)$. 546. 1) $y=0$; $x^2=a^2-az$ (парабола); 2) $x=0$; $y^2=a^2-az$ (парабола); 3) $z=h$; $x+y=\pm\sqrt{a(a-h)}$ — бу тўғри чизиқ $x+y=a$ га параллел (341- бет 63- чизмага қар.). 547. Цилиндрик сирт $2x^2+(y-z+2)^2=8$, соянинг формаси $\frac{x^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{8}=$ $=1$ — эллипс. 548. $2x-y+3z-7=0$. 549. $x^2+(y+4)^2+z^2=4$.

550. $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{18}=1$. 553. $(x-z)^2+(y-z)^2=4(x-z)$. 554. $x=4$, $z\pm y=2$. 555. $\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$. 556. $h^2x^2=2pz\,[h(y+a)-az]$.

557. $(0;a;0)$, йўналтирувчи айлана $z=a$, $x^2+(y-a)^2=a^2$. 558. Учи $(0;0;0$, йўналтирувчиси — парабола $z=h$; $x^2=2hy$. 559. $z=0$ бўлганда $x=\pm a$; $y=h$ бўлганда $x^2+y^2=a^2$; $x=\pm c$ бўлганда $z=\pm\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{h}y$, тўғри чизиқлар, яъни сирт, yOz текисликка параллел ва ABC айланани ҳамда Ox ўқини кесувчи тўғри чизиқнинг ҳаракати натижасида ҳосил бўлган (343- бет, 69- чизмага қаралсин). 560. а) $z=x^2+y^2$; б) $\sqrt{y^2+z^2}=x^2$. 561. 1) $z=e^{-(x^2+y^2)^2}$;

2) $z=\frac{4}{x^2+y^2}$. 562. $9(x^2+z^2)=16y^2$. 563. $x^2+z^2=z(y+a)$.

564. а) $x^2+z^2=y^2$; б) $z^2=x^2+y^2$. 565. Ox ва Oy ўқларни Oz ўқи атрофида 45° га буриб, сирт ва текислик тенгламаларини $2Z^2=$ $=X^2-Y^2$, $X=a\sqrt{2}$ кўринишга келтирамиз. Бундан кесим: $X=$ $=a\sqrt{2}$, $\frac{Y^2}{2a^2}+\frac{Z^2}{a^2}=1$; ярим ўқлари $a\sqrt{2}$ ва a бўлган эллипс.

566. $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 567. а) $3{,}84\,\pi$, б) $\frac{45}{4}\pi$. 568. а) $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (бир кавакли гиперболоид); б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$ (икки кавакли гиперболоид).

570. $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{z}{6}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{y}{2}\right)\\ \frac{x}{4}-\frac{z}{6}=3\left(1-\frac{y}{2}\right)\end{cases}$ ва $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{z}{6}=1-\frac{y}{2}\\ \frac{x}{4}-\frac{z}{6}=1+\frac{y}{2}.\end{cases}$

571. $x = \frac{a}{c}[(c-z)\cos t + (c+z)\cos(t+\alpha)]$, $y = \frac{a}{c}[(c-z)\sin t +$ $+ (c+z)\sin(t+\alpha)]$; бундан: $\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ $(1-\cos a) = 1+\cos$ α; $\alpha = 90^\circ$ бўлганда $\frac{x^2+y^2}{2t^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\alpha = 120^\circ$ бўлганда $\frac{x^2+y^2}{a^2} -$ $-\frac{3z^2}{c^2} = 1$; $\alpha = 180^\circ$ бўлганда $\frac{x^2+y^2}{4a^2} - \frac{z^2}{y^2} = 0$ (конус). 572. $x^2+y^2=az$.

574. $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=z; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=2z \\ x-y=2. \end{cases}$ 575. $\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2+z^2}{a^2} = 1$.

576. $x^2+y^2-z^2 = -2a^2$ (икки кавакли гиперболоид).

577. $x = -\frac{z^2+y^2}{4a}$. 578. $9x = \pm 13z$. 579. $4y = \pm 3z$. 580. 1) Маркази (0; 0; a) да ва радиуси $R = a$ бўлган сфера; 2) Oz ўқ атрофида айланма параболоид; 3) цилиндр; 4) гиперболик параболоид; 5) конус; 6) параболик цилиндр; 7) конус; 8) айланма параболоид; 9) конус; 10) цилиндр. 581. $\begin{cases} x+y=2+z \\ x-y=2-z; \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=3(z-2) \\ 3(y-x)=z+2). \end{cases}$ 582. $x^2+y^2=2az$ 583. $z = a - \frac{x^2+y^2}{2a}$.

584. $2y = \pm 3z$. 585. $\begin{cases} 3x+4y=24 \\ 3x-4y=12z, \end{cases}$ $\begin{cases} z=0 \\ 3x=4y. \end{cases}$ 586. 26.

587. -38. 588. 7. 589. $2a$. 590. 1. 591. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$. 592. -10. 593. $4a$. 594. $-2b^2$. 595. $-2x$. 596. $-4a^3$. 597. 144. 598. 72. 599. $(x-y)(y-z)(x-z)$. 600. 1. 601. $\sin(\beta-\alpha)$.

602. 10. 603. $y = x+2$ тўғри чизиқда ётади. 604. 1) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

2) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$. 605. 10. 606. amn. 607. $a(x-z)(y-z)(y-x)$.

608. $4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 610. 1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.

611. $x = 5$; $y = -4$. 612. $x = \frac{4}{a}$; $y = 1$. 613. $x = 0$; $y = 2$. 614. $x = m$; $y = 2m - n$. 615. 5; 6; 10. 616. -1; 0; 1. 617. $7k$; $8k$; $13k$. 618. $5k$; $-11k$; $7k$. 619. $x=y=z=0$. 620. Система биргаликда эмас. 612. Аниқмас: $x = \frac{2+5z}{3}$, $y = \frac{5-7z}{3}$. 622. Система биргаликда эмас.

624. 2; -1; -3; 625. 1; -1; 2. 626. $2k$; k; $-4k$. 627. $x = y = z = 0$. 628. $-k$; $13k$; $5k$. 629. Аниқмас: $y = 7 - 3x$, $z = 18 - 7x$. 630. 1) $12+5i$; 2) a^2+b; 3) $5-12i$; 4) $-2+2i$; 5) i; 6) $1+i$. 634. 1) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 2) $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

640. 1) $32i$; 2) 64; 3) $4(1-i)$; 4) $2(3+2\sqrt{2})i$; 5) $8i$. 641. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \cos^3\alpha$; $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^3\alpha\cos\alpha$.

642. $\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$; $k=0,\ 1,\ \dots,\ 5$. 643. 1) $1,\ \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; 2) $-i,\ \frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$; 3) $\pm i,\ \frac{\pm\sqrt{3}\pm 1}{2}$; 4) $1+i$; $-1{,}36+0{,}365i$. $0{,}365-1{,}36i$. 644. 1) $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[6]{2}\ (\cos\varphi+i\sin\varphi)$; $\varphi=45^\circ,\ 165^\circ,\ 285^\circ$; 3) $\pm 2(\sqrt{3}+i),\ \pm 2\ (-1+i\sqrt{3})$. 645. 1) $-2,\ 1\pm i\sqrt{3}$; 2) $\pm 1\pm i$. 646. 1) $\ln 2+\pi i$; 2) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi i}{4}$; 3) $\frac{\pi i}{2}$; 4) $\ln\sqrt{x^2+y^2}+ i\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$; 5) $\frac{3}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}i$. 647. $\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

648. $\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. 650. 1) $\frac{7-24i}{25}$; 2) $2b(3a^2-b^2)i$;

651. 1) $4\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$; 2) $2e^{\frac{2\pi i}{3}}$; 3) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$; 652. 1) $5\ (\cos 0+i\sin 0)$; 2) $e^{-\frac{\pi i}{2}}$; 3) $2e^{-\frac{3\pi i}{4}}$. 654. Маркази $C(z_0)$ ва радиуси $r=5$ бўлган доира ичидаги нуқталар. 655. 1) $8i$; 2) $512\ (1-i\sqrt{3}$; 3, -27. 657. 1) $\frac{\pm 1\pm i}{\sqrt{2}}$; 2) $\cos\varphi+i\sin\varphi$, бунда $\varphi=0^\circ,\ 72^\circ,\ 114^\circ,\ 216^\circ,\ 288^\circ$.

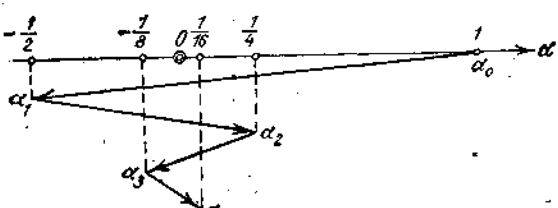
658. 1) $2,\ -1\pm i\sqrt{3}$; 2) $\pm 2i$; $\pm\sqrt{3}\pm i$; 3) $\pm 3,\ \pm 3i$. 659. $\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

660. 1) $-1,\ 2,\ 3$; 2) $5,\ \frac{-1\pm i\sqrt{5}}{2}$. 661. 1) $x_1=3$, $x_2=4$, $x_3=-2$; 2) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$; 3) $x_1=-2$, $x_{2,3}=\pm\frac{1}{3}$; 4) $x_1=1$, $x_{2,3}=\pm\frac{i}{2}$. 662. 1) $\Delta=\frac{49}{4}>0$, $u_1=2$, $v_1=1$, $z_1=3$, $z_{2,3}=\frac{-3\pm i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\Delta=0$, $z_1=4$, $z_2=z_3=-2$. 663. 1) $\Delta<0$, $\varphi=60^\circ$, $z_1=4\cos 20^\circ$, $z_{2,3}=4\cos(20^\circ\pm 120^\circ)$.

665.

α	β	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	k	k_1	$\Delta\alpha$	$\Delta\beta$	
1	2	-10	4	14	31	0,71	$-0{,}13$	$1{,}85<x<1{,}86$.
1,71	1,87	$-3{,}2$	0,36	22	26	0,14	$-0{,}01$	

666. 2,15; 0,524; $-2,66$. 667. 1) 1,305; 2) 4 ва 0,310; 3) $-0,682$ l; 4) $x_1 = 1,494$, $x_2 = -0,798$ $\left(x_1\right.$ ни $x = \sqrt[4]{2x+2}$ формулага асосан, x^2 эса $x = \dfrac{x^4 + 3x - 2}{5}$ формулага асосан топилсин$\left.\right)$. 668. 1) -6, $-1 \pm i\sqrt{2}$; 2) -1; 2; 2. 669. 1) $\Delta = \dfrac{1225}{4} > 0$, $u_1 = 3$, $v_1 = -2$, $z_1 = 1$, $z_{2,3} = \dfrac{-1 \pm 5i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\Delta = -4 < 0$, $\varphi = 45^\circ$, $z_1 = 2\sqrt{2}\cos 15^\circ = -1 + \sqrt{3}$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}$; 3) $\Delta = 0$, $z_1 = -2$, $z_{2,3} = 1$; 4) $x = z - 2$ деб, $z^3 - 3z + 2 = 0$ ни ҳосил қиламиз; $\Delta = 0$; $z_1 = -2$; $z_2 = z_3 = 1$; $x_1 = -4$, $x_2 = x_3 = -1$. 670. 1,76 ва $-2,15$. 672. 1) 1,67. 2) 3,07. 672. 1,67. 675. $0 \leqslant x < 1$. 681. $x_1 = 0$. $x_2 = 4$. 683. 1) $x \leqslant -2$; 2) $-3 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $0 \leqslant x \leqslant 4$. 684. 1) $-4 \leqslant x \leqslant 0$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$. 685. 1) $x \geqslant 0$; 2) $x \leqslant 4$. 686. 1) $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$; 2) $-4 \leqslant x \leqslant +4$. 687. 1) $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(2) = 3$, $f(a+1) = a^2 + a + 1$. 688. 1) $b + a$; 2) $2ah$. 689. $\dfrac{b+a}{b^2 + ab + a^2}$. 690. $F(4; 3) = 19$, $F(3; 4) = -25$. 691. 1) жуфт; 2) тоқ; 3) жуфт, 4) тоқ; 5) тоқ; 6) жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас. 692. $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$. 693. $\log_a x$. 694. a^x. 696. $2 < x \leqslant 3$. 700. 1) $|x| \leqslant 2$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, 4) $|x| \geqslant 2$. 701. 2) $6x^2 + 2h^2$; 3) $4(2 - a)$. 702. $\alpha = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ ўзгарувчининг ўзгариши 39- чизмада график тасвирланган.



39- чизма.

$n > \dfrac{3}{\lg 2}$ ёки $n > \dfrac{3}{0,3} = 10$ бўлганда $|\alpha| < 0,001$ бўлади; $n > \dfrac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$ бўлганда $|\alpha| < \varepsilon$ бўлади. 703. $x = 2$; $\dfrac{2}{3}$; $1\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{6}{7}$; $1\dfrac{1}{9} \ldots \to 1$ $n \geqslant 50$ бўлганда $|x - 1| < 0,01$ ε, $n > \dfrac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon}$ бўлганда $|x - 1| < \varepsilon$ бўлади. 704. $x = 4$; 3,1; 3,01; $\ldots \to 3 + 0$; $x = 2$; 2,9; 2,99; $\ldots \to 3 - 0$.

705. $x = 6;\ 5{,}1;\ 5{,}01;\ \ldots \to 5+0$; $x = 4;\ 4{,}9;\ 4{,}99;\ \ldots \to 5-0$.
$x = -1;\ -1{,}9;\ -1{,}99;\ -1{,}999;\ \ldots \to -2+0$;
$x = -3;\ -2{,}1;\ -2{,}01;\ -2{,}001;\ \ldots \to -2-0$.

707. $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. **708.** $\delta = 0{,}01$. **712.** $|x| > 2500{,}5$ бўлганда. **713.** $|x| \geqslant 7{,}036$ бўлганда. **715.** $\lim\limits_{x\to\infty} x$ биринчи мисолда 1 га тенг, иккинчида -1 га, тўртинчида 0 га, бешинчида 2 га, олтинчида 0 га, учинчи мавжуд эмас.

716.

x	$3;\ 2{,}1;\ 2{,}01;\ \ldots \to 2+0$
$\frac{3}{x-2}$	$3;\ 30;\ 300;\ \ldots \to +\infty$

; $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{3}{x-2} = +\infty$;

x	$1;\ 1{,}9;\ 1{,}99;\ \ldots \to 2-0$
$\frac{3}{x-2}$	$-3;\ -30;\ -300;\ \ldots \to -\infty$

; $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{3}{x-2} = -\infty$.

717.

x	$1;\ 0{,}1\ 0{,}01;\ \ldots \to +0$
$2^{\frac{1}{x}}$	$2;\ 2^{10};\ 2^{100};\ \ldots \to +\infty$

; $\lim\limits_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$.

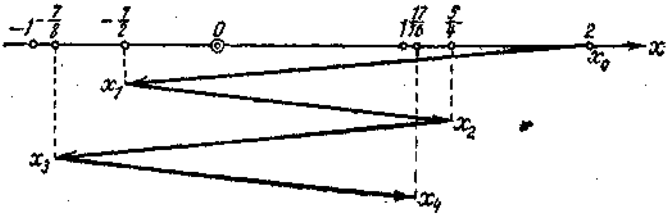
x	$-1;\ -0{,}1;\ -0{,}01;\ \ldots \to -0$
$2^{\frac{1}{x}}$	$\frac{1}{2};\ \frac{1}{2^{10}};\ \frac{1}{2^{100}};\ \ldots \to 0$

; $\lim\limits_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$.

718. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+0} \frac{2}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-0} \frac{2}{x} = -\infty$;
3) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^x = \infty$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x = 0$; 5) $\lim\limits_{x\to+0} \lg_{10} x = -\infty$;
6) $\lim\limits_{x\to 90^\circ-0} \operatorname{tg} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 90^\circ+0} \operatorname{tg} x = -\infty$. **724.** $AB \to \infty$. $CB \to \infty$, $\angle BCD \to 0$, $\angle ACB \to 180^\circ$.

725. $x = 5;\ 4{,}1;\ 4{,}01;\ 4{,}001;\ \ldots \to 4+0$;
$x = 3;\ 3{,}9;\ 3{,}99;\ 3{,}999;\ \ldots \to 4-0$;
$x = -0{,}5;\ -1{,}4;\ -1{,}49;\ -1{,}499;\ \ldots \to -1{,}5+0$;
$x = -2{,}5;\ -1{,}6;\ -1{,}51;\ -1{,}501;\ \ldots \to -1{,}5-0$.

729. Фақат биринчи ўзгарувчигина $\lim\limits_{n\to\infty} x = 1$ лимитга эга. Қолган мисолларда $\lim\limits_{n\to\infty} x$ мавжуд эмас. Агар 39- чизмада координаталар боши O ни 1 га чапга силжитиб, $-\frac{1}{2}$ ўрнига $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$ ўрнига $+\frac{7}{8}$ ва ҳ. к. ёзилса, уни биринчи ўзгарувчининг ўзгариш графиги деб қараса бўлади. Иккинчи ўзгарувчи $x = (-1)^n + \frac{1}{2^n}$ нинг ўзгариши $n=0,\ 1,\ 2\ \ldots$ бўлганда 40- чизма билан тасвирланган. **730.** 1) 0; 2) ∞; 3) ∞; 4) 0; 5) 2; 6) 0; 7) $a > 1$ бўлганда 0, $a=1$ бўлганда $\frac{1}{2}$, $0 < a < 1$ бўлганда a. **733.** 1. **734.** 1) $-0{,}6$; 2) 1. **735.** 4. **736.** 1.



40- чизма.

737. $\frac{3}{2}$. 738. $\frac{1}{2}$. 739. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 740. $\frac{2}{3}$. 741. $a > 0$ бўлганда $-\frac{1}{2}$ ва $a < 0$ бўлганда ∞. 742. $\frac{2}{3}$. 743. $\frac{m}{3}$.

744. 1. 745. $-\frac{1}{2}$. 746. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $-2,5$. 747. 0. 748. ∞.

749. -2. 750. $-\frac{3}{2}$. 751. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 752. $\frac{1}{6}$. 753. $\frac{1}{4}$.

754. -12. 755. -1. 756. $\lim\limits_{x\to\pi+0}\frac{|\sin x|}{\sin x\sqrt{1-\cos x}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

757. 2,5. 758. $\sqrt{3}$. 759. -4. 760. 2. 761. $-\frac{1}{56}$.

762. $-\sqrt{2}$. 763. 4. 764. $\frac{1}{3}$. 765. 1. 766. $\frac{1}{4}$. 767. 2. 768. $6\sqrt{2}$.

769. $2\cos x$. 770. 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$. 771. $\frac{1}{2}$. 772. $\frac{1}{2}$. 773. $\frac{1}{3}$.

774. 8. 775. $\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sqrt{2}\,|\sin x|}{x}=-\sqrt{2}$. 776. 4. 777. $\frac{m^2}{2}$. 778. 3.

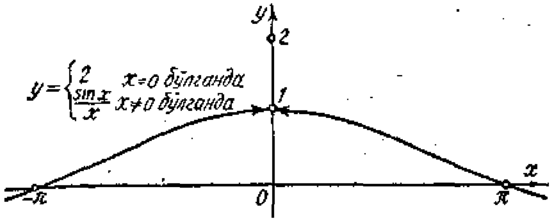
779. $\frac{1}{4}$. 780. 1) $-2\sin x$; 2) $-\frac{1}{2}$. 781. 1. 782. 1,5. 783. $\frac{1}{2}$.

784. 1. 785. $\frac{1}{2}$. 786. $\frac{1}{4}$. 787. -3. 788. $\frac{2}{\pi}$. 789. -2.

790. $-\frac{1}{4}$. 791. $\frac{1}{2}$. 792. 0. 793. $\frac{1}{2}$. 794. $-\frac{1}{2}$. 795. -1.

796. 1) $\frac{1}{20}$; 2) 3. 797. 1) $\frac{3}{4}$; 2) 2 [1) мисолда $x = t^{12}$ деб, 2) мисолда эса $1 + 2x = t^4$ деб олиш керак]. 798. $-a$. 799. 1) -1; 2) $-0,2$.

800. 1) 3; 2) $\frac{3}{2}$. 801. 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$. 802. 1) -2; 2) $-0,1$. 803. 1) $-2,5$; 2) 1,5. 804. 1) $-\sqrt{2}\pi$; 2) -1. 805. 1) 2; 2) 3. 806. 1) 4; 2) 1; 3) 3.
807. 2-тартибли. 809. $a\to 0$ бўлганда $(1+\alpha)^3-1\approx 3\alpha$. 810. 1) 2,5; 2) $\frac{a}{b}$; 3) 1,5. 811. 2 ва 3. 812. 1) 2; 2) 3; 3) 1. 815. 1) $x = 0$ бўлганда; 2) $x = \frac{2n-1}{2}\pi$ бўлганда; 3) $x = \pm 2$ бўлганда.



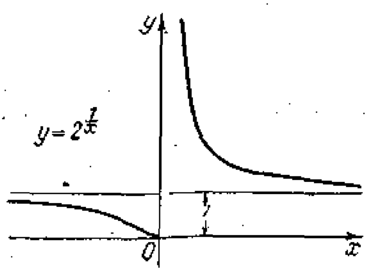
41- чизма.

816. $x=2$ *бўлганда биринчи учта шарт бажарилади ва тўртинчи шарт* бажарилмайди. 817.

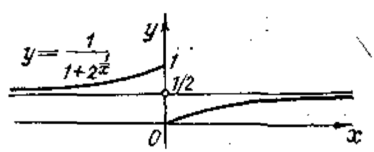
1) $y=\begin{cases}-1, & x<-1 \text{ бўлганда}\\ 1, & x>-1 \text{ бўлганда,}\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}x-1, & x<-1 \text{ бўлганда}\\ x+1, & x>-1 \text{ бўлганда.}\end{cases}$

$x=-1$ бўлганда функциялар I-тур узилишга эга (узлуксизликнинг фақат иккинчи шартигина бажарилади). 818. $x=0$ бўлганда тўртинчи шартгина бажарилмайди (41- чизма). 819. $x=0$ бўлганда узилиш. $\lim\limits_{x\to+0} y=\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} y=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$ (42- чизма). 820. $x=\pm 2$ бўлганда узилишлар. 821. 1) $x=0$ бўлганда биринчи тур узилиш, бунда $\lim\limits_{x\to+0} y=0$, $\lim\limits_{x\to-0} y=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\frac{1}{2}$ (43- чизма);

2) $x=a$ бўлганда биринчи тур узилиш, бунда $\lim\limits_{x\to a-0} y=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to a+0} y=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$; 3) $y=\frac{x^2}{2}$, $x>1$ бўлганда ва $-\frac{x^2}{2}$, $x<1$ бўлганда; $x=1$ бўлганда I тур узилиш, шунинг билан $\lim\limits_{x\to 1-0} y=-\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y=\frac{1}{2}$. 822. $x^2-y^2=0$ тенглама y ни x



42- чизма.



43- чизма.

нинг чексиз кўп бир қийматли функциялари сифатида аниқлайди. Улардан иккитаси: $y=x$ ва $y=-x$ *узлуксиз.* Қолганлари эса (*узилишга* эга бўлганлари) *Ox* ўқнинг баъзи жойларида (участкаларида) $y = x$ тенглама билан, баъзиларида $y = -x$ тенглама билан аниқланади, $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ нуқталарда узилишга эга бўлган *жуфт* функцияни

$$y = \begin{cases} -|x|, & 2n-1 < x < 2n \text{ бўлганда} \\ +|x|, & 2n < x < 2n+1 \text{ бўлганда}, \end{cases}$$

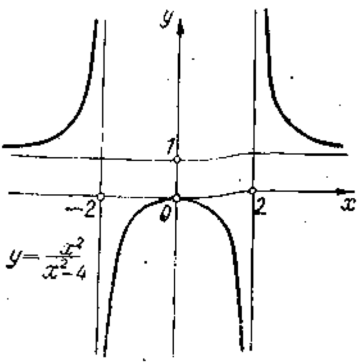
кўринишда тоқ функцияни

$$y = \begin{cases} -x, & 2n-1 < x < 2n \text{ бўлганда} \\ +x, & 2n < x < 2n+1 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

кўринишда аниқлаш мумкин, бунда $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ **823.** $x = -2$ бўлганда, иккинчи тур узилиш $\lim\limits_{x\to-2-0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-2+0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$. **824.** $x = 0$ бўлганда узлуксизликнинг фақат тўртинчи шарти бажарилмайди; $x = \pm 2$ бўлганда учинчи ва тўртинчи шартлар бажарилмайди. **825.** Узилиш нуқталари: 1) $x = 0$; 2) $x = 2$; 3) $x = 0$; 4) $x = 0$; 5) $x = \pm 2$ ва $x = 0$. **826.** Чексиз кўп, улардан: 1) $y = \sqrt{4-x^2}$ ва $y = -\sqrt{4-x^2}$ лар узлуксиз; 2) изланган узлукли функция:

$$y = \begin{cases} -\sqrt{4-x^2}, & |x| \leqslant 1 \text{ бўлганда} \\ +\sqrt{4-x^2}, & 1 < |x| \leqslant 2 \text{ бўлганда}. \end{cases}$$

827. $x = 0$ ва $y = 1$. **828.** 1) $x = 0$ ва $y = x$; 2) $x = -1$ ва $y = x - 1$; 3) $y = 1$. **829.** 1) $x = 0$, $y = -1$; 2) $x = 0$ ва $y = x - 1$; 3) $x = -\frac{n}{m}$ ва $y = \frac{a}{m}$. **830.** 1) $x = -\frac{1}{2}$ ва $y = -2$; 2) $y = x$; 3) $y = -x$. **831.** 1) $y = \pm x$; 2) $x + y = -a$; 3) $y = x \pm \pi$; 4) $y = -\frac{\pi}{4}$. **832.** 1) $y = 0$, 2) $y = \pm 2x$; 3) $x = 0$ ва $y = x$. **833.** Параболалар: 1) $y = \frac{x^3}{3}$; 2) $y = x^2$. **834.** 1) $x = 0$ ва $y = 1$; 2) $x = 0$ ва $y = -x$. **835.** 1) $x = -2$, $y = \frac{1}{2}$; 2) $x = 1$ ва $y = -\frac{x+1}{2}$; 3) $x = 2$, $x = -2$, $y = 1$ (44- чизма). 4) $x = 1$, $x = -1$ ва $y = -x$. **836.** $\frac{1}{e^5}$. **837.** 1) $e^{-\frac{1}{3}}$; 2) e^4. **838.** 1) e^2; 2) e^{-4}. **839.** 1) e^{-1}; 2) e^{-2}. **840.** 1) 3; 2) e^8. **841.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **842.** 1) 1; 2) -1; 3) $2\ln a$. **843.** 3 ва 4. **844.** 1) e^6; 2) $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. **845.** 1) $\frac{1}{e^3}$; 2) -3. **846.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **847.** 1) $\frac{1}{x}$;



44- чизма.

2) -2. 848. 1) $3x^2$; 2) $4x^3$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $\cos x$; 5) $-\frac{1}{x^2}$; 6) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$; 7) $-\frac{2}{x^3}$; 8) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 9) $-\frac{3}{x^4}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$; 11) $-\frac{3}{(3x+2)^2}$; 12) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 849. 1) $(x-2)^2$; 2) $\frac{b}{a}$. 850. 1) $(x^2-1)^2$. 2) x^3-2x.

851. 1) $1+\frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $1-\sqrt{\frac{a}{x}}$. 852. 1) $-\frac{30}{x^4}$; 2) $-\frac{x^2+2x+3}{x^4}$.

853. 1) $\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^2$; 2) $3\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. 854. 1) $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; 2) $\frac{2}{3x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$. 855. 1) $\frac{1-x}{x^4}$; 2) $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

856. 1) $2\sin^2\frac{x}{2}$; 2) $-\operatorname{tg}^2 x$. 857. 1) $x(2\cos x-x\sin x)$; 2) $\frac{x(\sin 2x-x)}{\sin^2 x}$. 858. 1) $-\frac{x\sin x+2\cos x}{x^3}$; 2) $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$;

859. 1) $\frac{1}{(1-4x)^2}$; 2) $\frac{4x-\sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}$. 860. 1) $\frac{1}{1-\sin x}$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$. 861. 1) gt; 2) $2a\sin^2\frac{t}{2}$. 862. 1; 0; 4. 863. 8,25.

864. -90. 865. 1) $-6bx(a-bx^2)^2$; 2) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1\right)$.

866. 1) $\frac{2x-1}{2x^6}$; 2) $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$. 867. 1) $2\cos^2\frac{x}{2}$; 2) $-\operatorname{ctg}^2 x$.

868. 1) $x(2\sin x+x\cos x)$; 2) $\frac{x(\sin 2x+x)}{\cos^2 x}$. 869. 1) $\frac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{x}}$; 2) $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}+\frac{2}{t^2}$. 870. 1) $\frac{(x^2+1)^2}{x^4}$; 2) $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

871. 1) $-\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$; 2) $-\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$. 872. $-\frac{1}{3}$.

873. -1; $-\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{25}$. 874. 1) $6\cos 6x$; 2) $b\sin(a-bx)$.

875. 1) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$; 2) $-2\sin\frac{x}{3}$. 876. 1) $-20(1-5x)^3$; 2) $\frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}$. 877. 1) $\frac{10x}{(1-x^2)^6}$; 2) $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $-2\operatorname{tg}4x\sqrt{\cos 4x}$.

878. $\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}$. 879. $4\sin^3 x\cos x$. 880. 1) $\sin 2x$; 2) $-\sin 2x$; 3) $2\operatorname{tg}x\sec^2 x$. 881. $\frac{3}{\sqrt{2}}\sin 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. 882. $3\operatorname{tg}^4 x$.

883. $\frac{-\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$. 884. $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$. 885. $\pm(\sqrt{1-\sin 2x}+$

$+\sqrt{1+\sin 2x}$); $+$ ишора $\cos 2x > 0$ бўлганда; $-$ ишора $\cos 2x < 0$, да, $\cos 2x = 0$ бўлганда эса y' мавжуд эмас ($\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0} y' = \sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0} y' = -\sqrt{2}$). 886. $\frac{20\sin 4x}{(1+\cos 4x)^6}$. 887. $=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3}}{\sin^2\frac{x}{3}}$.

888. $\sin x(1+\sec^2 x)$. 889. $\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$. 890. $\frac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$. 891. $-\sin\frac{2t}{a}$.

892. 1) $\frac{dr}{d\varphi}=-\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$; 2) $\frac{dr}{d\varphi}=\frac{2\sin^3 2\varphi}{\sqrt{2\varphi+\cos^2\left(2\varphi+\frac{\varphi}{4}\right)}}$.

893. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $f'(\pi)=0$, $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

894. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 895. $\frac{4\cos^2 2x}{\sqrt{4x+\sin 4x}}$. 886. $\frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. 897. $-\sin 4x$.

898. $-\frac{2\sin 6x}{\sqrt[3]{(1+\cos 6x)^2}}$ 899. 1) $\sec^2 x$; 2) $3x^2\sin 2x^3$.

900. $\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$. 901. $\frac{ds}{dt}=\frac{\sin^2\frac{t}{4}}{2\sqrt{\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}}}$. 902. $\frac{dr}{d\varphi}=\frac{1}{2}\cos\varphi$.

903. $-\frac{2(3x+1)}{x^3\sqrt{4x+1}}$. 904. $-\sqrt{\frac{\pi}{6}}$. 905. $k=\operatorname{tg}\alpha=\pm 4$.

906. $y=8-4x$, $x-4y=2$. 907. $y=x+\frac{2}{3}$. 908. $y=0$ ва $y=\pm\frac{1}{2}(3x-1)$. 909. $y=-\frac{x}{2}+2$. 910. $y=\pi-x$. 911. 45° ва 135°. 912. $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. 913. 1) $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{5}$; 2) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

915. $y=x^2-3x+4$. Параметр b $y'=2x+b=4+b=1$ шартдан, c эса (2; 2) нинг уринма нуқта бўлишидан топилади. 916. $y=-4x+8$, $y=-\frac{1}{4}x-2$; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{15}{8}\approx 62°$. 917. $y=4x$, $y=-4x+16$. 918. $x\pm 4y=8$. 919. $y=\pm(3x+8)$ ва $y=0$. 920. $\frac{4}{\sqrt{17}}$. 921. 40°54′ ёки 139°6′. 922. (−2; −4). 923. $\left(\frac{1}{2};\frac{17}{4}\right)$. 924. 1; 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 925. 11°20 ва 7°7′. 926. $y'_-=-1$, $y'_+=1$. 927. $y'_-=-\frac{1}{2}$; $y'_+=\frac{1}{2}$. 928. $y=x$ ва $y=-x$. 929. $y=\pm\frac{x-\pi}{\sqrt{2}}$; 109°30′. 930. $x=0$. 931. $x=2$. 932. $x=0$. 933. $x=2$.

934. $y-1=\pm\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. 935. $x=-1$. 936. $y=\pm 4x$; $28°$

937. 1) $\ln x+1$; 2) $-\frac{\ln x}{x^2}$; 3) $\frac{0{,}4343}{x}$. 938. 1) $\frac{(x+1)^2}{x^3}$; 2) $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$.

939. 1) $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 2) $\operatorname{ctg} x\cos^2 x$. 940. $\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$. 941. $\frac{4a^2x}{a^4-x^4}$.

942. $\frac{2}{x(1-x^2)}$. 943. $\frac{1}{\cos x}$. 944. $\frac{2}{1-4x^2}$. 945. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

946. $\frac{1}{2+\sqrt{x}}$. 947. 1) $-\frac{2\operatorname{ctg}^2 x}{\sin x}$; 2) $\frac{2}{x-ax^5}$. 948. $y=x-1$.

949. $\left(\sqrt{e};\frac{1}{2}\right)$ нуқтада уринади. 950. 1) $2x+3^x\ln 3$; 2) $(2x+$
$+x^2\ln 2)2^x$; 3) $x(2+x)e^x$. 951. 1) $a^{\sin x}\cos x\ln a$; 2) $-2xe^{-x^2}$;
3) $2x(1-x)e^{-2x}$. 952. $e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$. 953. $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

954. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. 955. $\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}\left(\cos\frac{x}{a}-\sin\frac{x}{a}\right)$. 956. 1) $-2e^{-x}\sin x$;
2) $-\frac{x}{1+x}$. 957. $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$. 958. $2a(e^{2ax}-e^{-2ax})$. 959. $-\ln a$.

960. $26°35'$. 962. 1) $x^x(\ln x+1)$; 2) $x^{\sin x}\left[\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right]$.

963. $-\operatorname{tg} x\sin^2 x$. 964. $-\frac{1}{2\sqrt{x^2-x}}$. 965. $-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$.

966. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. 967. $\frac{1}{x(1-x^2)}$. 968. $\operatorname{ctg} 2x$. 969. $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{1-\sin 2x}$.

970. $\frac{\operatorname{tg} x}{1+\cos x}$. 971. $-\frac{x}{\sqrt{ax+x^2}}$. 972. $-\frac{x}{a}e^{-\frac{x}{a}}$.

973. $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$. 974. $-\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$. 975. $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$.

976. $\frac{2}{e^{4x}+1}$. 977. $x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$. 978. 16. 979. $y=-\frac{x}{2}$.

980. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 981. $\frac{x^2}{1+x^3}$. 982. $-\frac{1}{\sqrt{x-4x^2}}$. 983. $\frac{a}{|a|\sqrt{a^2-x^2}}$.

984. $\frac{a}{a^2+x^2}$. 985. $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. 986. $-\frac{1}{1+x^2}$. 987. 1) $2\sqrt{1-x^2}$;
2) $\frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$. 988. $\frac{2}{1-x^4}$. 989. $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$. 990. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$.

991. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. 992. $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$. 993. 1) $\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$;
2) $\frac{1}{x^2+x^4}$. 994. $2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$. 995. $\arccos x$. 996. $\frac{4e^{2x}}{1-e^{8x}}$.

997. $\sqrt{\frac{4}{t}-1}$. 998. $\sqrt{\frac{2}{x}-4}$. 999. $\frac{\pi}{4}-1$. 1000. 1) $\operatorname{sh} 2x$; 2) $\operatorname{th}^2 x$; 3) $\sqrt{\operatorname{ch} x+1}$. 1001. 1,5. 1002. 1) $\operatorname{th} x$; 2) $-\frac{4}{\operatorname{sh}^2 2x}$.

1003. 1) $\operatorname{cth}^2 x$; 2) $\frac{2}{\operatorname{sh} 2x}$. 1004. 1) $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$; 2) $4 \operatorname{sh} 4x$.

1005. $x+1,175y=2,815a$. 1006. $y=3,76x+3,89$.

1008. 1) $\frac{1-x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\operatorname{tg}^3 x$. 1009. $\frac{\sqrt{4x-1}}{2x}$. 1010. $\frac{dx}{dt}=$ $=\frac{2e^t(e^t-1)}{e^{2t}+1}$. 1011. $\frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}$. 1012. $\frac{ds}{dt}=\operatorname{tg}^5 t$. 1013. $\frac{\pi a}{2}$.

1014. 1) $\frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}$; 2) $2\cos(\ln x)$. 1015. $\frac{1}{15}$. 1017. $-\frac{1}{3a}$.

1021. 1) $2\cos 2x$; 2) $2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$; 3) $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$. 1022. 1) $-4\sin 2x$; 2) $-\frac{24}{x^5}$; 3) $-(x\cos x+3\sin x)$. 1023. 1) $-\frac{1}{x^2}$; 2) $e^{-t}(3-t)$; 3) $\frac{2a(3x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^3}$. 1024. $-\frac{2}{(2-t)^{\frac{3}{2}}}$. 1025. 1) $\left(-\frac{1}{a}\right)^n e^{-\frac{x}{a}}$;

2) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$; 3) $\frac{(-1)^{n-1}\, 1\cdot 3\cdot 5\, \ldots\, (2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}$. 1026. 1) $n!$;

2) $\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$. 1028. 1) $-2e^x \sin x$;

2) $xa^x(x^2\ln^2 a+6x\ln a+6)$; 3) $2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$.

1029. 1) $2e^{-x}(\sin x+\cos x)$; 2) $\frac{2}{x}$; 3) $x\sin x-3\cos x$.

1030. $f''(x)=\frac{x+3a}{a^3}e^{\frac{x}{a}}$; $f^{(n)}(x)=\frac{x+na}{a^n}e^{\frac{x}{a}}$; $f^{(n)}(0)=\frac{n}{a^{n-1}}$.

1031. $1, m, m(m-1); m(m-1)(m-2), \ldots, m(m-1)\ldots(m-n+1)$.

1035. 1) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; 2) $\frac{2\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$; 3) $\frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}$.

1036. 1) $a^x(\ln a)^n$; 2) $(-1)^n\frac{2^n\cdot n!}{(1+2x)^{n+1}}$; 3) $-2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

1037. $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\sqrt{3}}{6}$; $\frac{7\sqrt{3}}{36}$. 1038. 1) $e^x(x^3+9x^2+18x+6)$;

2) $\frac{1}{a^3}\left(6a^2\cos\frac{x}{a}-6ax\sin\frac{x}{a}-x^2\cos\frac{x}{a}\right)$; 3) $-xf^{\mathrm{IV}}(a-x)$.

1041. Лейбниц формуласига кўра $f^{(n)}(x)=x^2e^{-\frac{x}{a}}\left(-\frac{1}{a}\right)^n+$ $+n\cdot 2xe^{-\frac{x}{a}}\left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2e^{-\frac{x}{a}}\left(-\frac{1}{a}\right)^{n-2}$. Бундан

$f^{(n)}(0)=\frac{n(n-1)}{a^{n-2}}(-1)^{n-2}=\frac{n(n-1)}{a^{n-2}}(-1)^n$. 1042. $f'(x)=$ $=-2xe^{-x^2}=-2xf(x)$. Сўнгра Лейбниц формуласига кўра, $f^{(n)}(x)=[-2xf(x)]^{(n-1)}$ ва ҳоказо. 1044. 1) $-\frac{x}{y}$; 2) $\frac{p}{y}$; 3) $\frac{b^2x}{a^2y}$.

1045. 1) $-\frac{2x+y}{x+2y}$; 2) $\frac{2x-y}{x-2y}$. 1046. 1) $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$; 2) $\frac{e^{-x}+y}{e^y+x}$.

1047. $-\frac{e\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$. 1048. $\frac{1}{y^2}+1$. 1049. $\frac{1}{3}$.

1050. 1) $-\frac{a^2}{y^3}$; 2) $\frac{2(y-a)}{(x-b)^2}$; 3) $\frac{m(m+n)y}{n^2x^2}$. 1051. $-\frac{b}{a^2}$.

1052. $y=3-x$ ва $y=x-1$. 1053. $\left(\frac{40}{9};\ \frac{40}{9}\right)$ ва $(40;\ 40)$.

1054. 1) $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$; 2) $yy_0=p(x+x_0)$. 1055. $x+y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$.

1056. $\operatorname{arc\,tg} 3$. 1057. 1) $-\frac{b^2x}{a^2y}$; 2) $\frac{x^2-ay}{ax-y^2}$. 1058. 1) $-\frac{a^2}{y^3}$;

2) $-\frac{R^2}{(y-\beta)^3}$; 3) $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$; 4) $-\frac{6a^2}{(x+2y)^3}$. 1059. $2y=-x-3$ ва $2y=x+1$. 1060. $x+2y=4\sqrt{2}$. 1061. $1-\frac{1}{e}$. 1062. $e(e-1)$.

1063. ± 2. 1064. 1) $dy=nx^{n-1}dx$; 2) $dy=3(x-1)^2dx$.

1065. 1) $dy=\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $ds=gt\,dt$. 1066. 1) $dr=4\sin^2\varphi\,d\varphi$;

2) $dx=-\frac{2\,dt}{t^3}$. 1067. 1) $\sin 2t\,dt$; 2) $\sin u\,du$. 1068. 1) $-\frac{a^2dx}{x^2(a^2+x^2)}$;

2) $\frac{(\alpha+1)\,d\alpha}{\alpha}$; 3) $-\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$; 4) $-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 1070. 1) 0,04;

2) 0,05. 1071. 1) $dV=3x^2dx=0{,}75$; $\frac{dV}{x^3}=0{,}006$ ёки 0,6%; 2) $df=\frac{3bds}{8f}$.

1072. 1) $dx\leqslant\frac{0{,}1\cdot 2}{5x\sqrt{x}}<0{,}005$; 2) радиусни хато $\frac{1}{3}$% дан ошмайдиган қилиб ўлчаш керак. 1073. 1) $S=\pi R^2$, $\Delta S\approx dS=2\pi RdR$; 2) $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, $\Delta V\approx dV=4\pi R^2dR$. 1074. 1) $\frac{(2-x)\,dx}{x^3}$;

2) $b\sin(a-b\varphi)\,d\varphi$; 3) $-\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$. 1075. 1) $-\operatorname{tg} x\,dx$; 2) $\frac{du}{2u\sqrt{4u-1}}$;

3) $-2e^{-2t}dt$. 1076. 1) $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; 2) $\operatorname{tg}^2\alpha\,d\alpha$; 3) $b(1+e^{-bt})\,dt$.

1077. 1) $\Delta y=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3=-0{,}2376$, $dy=3x^2dx=$ $=-0{,}24$; 2) $dl=-\frac{14}{\pi}\approx 4{,}46$ *см*; 3) $|dx|\leqslant\frac{x^2\cdot 0{,}1}{4}\leqslant 0{,}006$.

1078. 1) $4y^2=x^3$; 2) $y^2=x\left(\frac{x}{3}-1\right)^2$. 1079. 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$. 1080. 1) $x^2-y^2=1$; $y=\frac{1}{1+x^2}$. 1082. $x=$ $=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$. 1083. $y=x+\frac{(4-\pi)a}{2}$. 1084. $x+y=\frac{a}{\sqrt{2}}$. 1085. 1) $-\frac{1}{a\sin^3 t}$; 2) $\frac{t^2+1}{4t^3}$; 3) $-\frac{1}{4a\sin^3\frac{t}{2}}$. 1086. 1) $y=-x^2-2x$; 2) $(y+2)^3=x^2$. 1087. $x+y=a\left(\frac{3\pi}{2}+2\right)$. 1088. $y=x-\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}$. 1089. 1) $-\frac{1}{4\sin^3 t}$; 2) $\frac{3t^2-1}{4t^3}$; 3) $\frac{3}{4c^t}$. 1090. $x=at-\frac{gt^2}{2}$; $\frac{dx}{dt}=$ $=a-gt$; $\frac{d^2x}{dt^2}=-g$; $t=\frac{a}{g}$ орқали, $x=\frac{a^2}{2g}$ (юқори нуқта). 1091. $\frac{dx}{dt}=t^2-4t+3$; $t_1=1$; $t_2=3$; 1095 $v=\frac{dx}{dt}$, $\frac{dv}{dt}=w$; ҳадма-ҳад кўпайтирамиз. 1096. $2v\frac{dv}{dt}=2a\frac{dx}{dt}=2av$; бундан $w=\frac{dv}{dt}=a$. 1097. $x=10+20t-\frac{gt^2}{2}$; $\frac{dx}{dt}=20-gt$; $\frac{d^2x}{dt^2}=-g$. Энг юқори нуқтада $\frac{dx}{dt}=0$; $t=\frac{20}{g}\approx 2{,}04$ сек. 1098. $\frac{dh}{dt}=\frac{a}{\pi h(2R-h)}=\frac{a}{\pi r^2}$. 1099. $\frac{dx}{dt}=k(A-x)$. 1100. $d(\omega^2)=2\omega\, d\omega$, $\frac{d(\omega^2)}{d\varphi}=2\omega\frac{d\omega}{d\varphi}=$ $=2\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{d\varphi}=2\omega\varepsilon\frac{1}{\omega}=2\varepsilon$. *1101.* *Функциянинг илдизлари* 1; 3. $f'(x)=2x-4$ ҳосиланинг илдизи 2 га тенг; $1<2<3$. 1102. Татбиқ қилиб бўлмайди, чунки $x=0$ бўлганда ҳосила мавжуд эмас. 1103. Чунки $x=0$ синиш нуқтаси (уринма иккита). 1104. (AB) ватарнинг қиялиги $k=\frac{9-1}{3+1}=2$; $f'(x)=2x=2$, $x=1$; $x=1$ нуқтада уринма ватарга параллел. 1105. $f(b)=b^2$, $f(a)=a^2$, $f'(c)=2c$; буни *Лагранж* формуласига қўйсак, $b^2-a^2=(b-a)\cdot 2c$; бундан $c=\frac{b+a}{2}$. 1106. $c=\frac{9}{4}$. 1108. $x=\frac{\pi}{2}$ бўлганда ёй устида синиш нуқтаси бор, бу нуқтада функция ҳосилага эга эмас. 1109. [0; 2] сегментнинг ички нуқталарида функция узлуксиз ва ҳосилага эга, аммо унинг ўнг учида узилишга эга. 1110. $s=f(t)$ ҳаракат тенгламаси, t_1 ва t_2 эса ҳаракатнинг бошланғич ва охирги моментлари бўлсин. Лагранж теоремасига асосан t_1 ва t_2 орасида шундай t_3 топиладики, $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=f'(t_3)$ бўлади, яъни t_3 моментда $40=f'(t_3)=\frac{ds}{dt}$. 1111. $\Phi'(x)=\begin{vmatrix}1 & f'(x) & 0\\ b & f(b) & 1\\ a & f(a) & 1\end{vmatrix}$. $\Phi(b)=\Phi(a)=0$ ва (a, b) ораликда $\Phi'(x)$ ҳосила мавжуд бўлгани учун, Ролль теоремасига асосан a ва b орасида $x=c$ топиладики, унда $\Phi'(c)=0$ бў-

лади, яъни $\begin{vmatrix} 1 & f'(c) & 0 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = 0$; бундан $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.
$\Phi(x)$ функция ΔAPB нинг иккиланган юзидан иборат, бунда P — AB ёйнинг ихтиёрий нуқтаси. **1112.** $\frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} = \frac{3c^2}{2c}$; $c = \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}$.
1113. Уринманинг бурчак коэффициенти $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$, $t = c$ нуқтада эса $k = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. Кесувчининг бурчак коэффициенти $k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$; Коши теоремасига асосан a ва b лар орасида $t = c$ топиладики, унда $k_1 = k$, яъни уринма ватарга параллел бўлади. Шунинг билан бирга $\varphi'(t) \neq 0$ бўлгани учун $\varphi(a) < \varphi(c) < \varphi(b)$ (ёки аксинча), ва уриниш нуқтаси ёйнинг ички нуқтаси. **1117.** $c = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$. **1118.** 1) $\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$; 2) $\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$; 3) $\frac{1}{\ln 2}$.
1119. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\sqrt[3]{\left(\frac{15}{4}\right)^2} \approx 2{,}4$. **1120.** $y = |x - 1|$ функция $x = 1$ бўлганда ҳосилага эга эмас. **1121.** $x = -\frac{1}{2}$ нуқтада. **1122.** 3. **1123.** $\frac{1}{2}$. **1124.** $\frac{1}{na^{n-1}}$. **1125.** 1. **1126.** $\frac{a^2}{b^2}$. **1127.** $\frac{1}{2}$. **1128.** $\frac{1}{6}$. **1129.** 3. **1130.** 1) ∞; 2) 0. **1131.** 0. **1132.** 0. **1133.** 3. **1134.** 2. **1135.** 0. **1136.** 0. **1137.** 1. **1138.** 1. **1139.** e^3. **1140.** 2- тартибли. **1144.** $a - b$. **1145.** $\frac{1}{3}$. **1146.** $\frac{1}{8}$. **1147.** $\ln\frac{a}{b}$. **1148.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1149.** 1. **1150.** 1. **1151.** $-\frac{1}{3}$. **1152.** -2. **1153.** $\frac{1}{e}$. **1154.** $\frac{1}{6}$. **1155.** e^3. **1160.** $x = -2$ бўлганда $y_{\min} = 1$. **1161.** $x = -2$ бўлганда $y_{\min} = -\frac{16}{3}$; $x = 2$ бўлганда $y_{\max} = +\frac{16}{3}$; Ox билан кесишиш нуқталари: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3{,}4$. **1162.** $x = -1$ бўлганда $y_{\max} = 1\frac{2}{3}$; $x = 3$ бўлганда $y_{\min} = -9$; Ox ўқ билан кесишиш нуқталари: $x_1 = 0$ $x_{2,3} \approx 1{,}5 \pm 3{,}3$. **1163.** $x = \pm 2$ бўлганда $y_{\max} = 5$. $x = 0$ бўлганда $y_{\min} = 1$; $y = 0$ бўлганда $x \approx \pm 2{,}9$. **1164.** $x = 0$, $y = 0$ бўлганда — қайрилиш; $x = 3$ бўлганда $y_{\min} = -6\frac{3}{4}$. **1165.** $x = -2$ бўлганда $y_{\max} = -2$; $x = 2$ бўлганда $y_{\min} = 2$; асимптоталар $x = 0$ ва $y = \frac{x}{2}$. **1166.** $x = 0$ бўлганда $y_{\min} = -1$ (қайтиш нуқта); Ox ўқ билан кесишиш нуқталари: $x = \pm 1$. **1167.** $x = 0$ бўлганда $y_{\max} = 1$; $x \to \infty$ бўлганда $y \to 0$, яъни $y = 0$ — асимптота. Эгри чизиқ Oy ўққа нисбатан симметрик (нима учун?). **1168.** $x = 1$ бўлганда $y_{\max} = -4$; $x=5$ бўлганда $y_{\min}=4$; асимптоталар; $x=3$ ва $y=x-3$. **1169.** $x=0$ бўл-

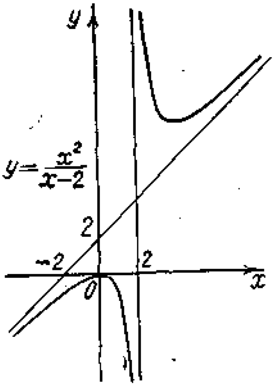
ганда $y_{\min}=0$; $x=\frac{2}{3}$ бўлганда $y_{\max}=\frac{4}{27}$. 1170. $x=4$ бўлганда $y_{\max}=1$, $y=0$ бўлганда $x=3$ ёки $x=5$; $y=-3$ бўлганда $x=-4$ ёки 12. 1171. $x=0$ бўлганда $y_{\max}=1$; асимптота $y=0$. Oy ўққа нисбатан симметрик. 1172. $x=\frac{\pi}{12}$ бўлганда $y_{\max}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1,1$; $x=$ $=\frac{5\pi}{12}$ бўлганда $y_{\min}\approx 0,4$. 1173. $x=\frac{\pi}{3}$ бўлганда $y_{\max}=\frac{4\pi}{3}-$ $-\sqrt{3}\approx 2,45$; $x=-\frac{\pi}{3}$ бўлганда $y_{\min}=\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}\approx -2,45$.

Асимптоталар $x=\pm\frac{\pi}{2}$. 1174. $x=1$ бўлганда $y_{\max}=1$; $x\to 0$ да $y\to-\infty$; $x\to\infty$ да $y\to 0$. Асимптоталар $x=0$ ва $y=0$. Ox ўқ билан кесишган нуқта: $1+\ln x=0$, $\ln x=-1$, $x=e^{-1}\approx 0,4$. 1175. $x=\frac{1}{2}$ бўлганда $y_{\min}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\approx -0,28$; $x=-\frac{1}{2}$ бўлганда $y_{\max}\approx 0,28$. Асимптоталар: $y=x\pm\frac{\pi}{2}$. 1176. 1) $x=2$ бўлганда $y_{\max}=\frac{2}{e}$. Асимптота $y=0$. 2) $x=\frac{1}{e}$ бўлганда $y_{\min}=-\frac{1}{e}$, $\lim\limits_{x\to+0} y=0$ — четки нуқта; $x=1$ бўлганда $y=0$. 1177. 1) $x=0$ бўлганда $y_{\min}=0$ (синиш нуқтаси); $x=\pm\sqrt{\frac{4n+1}{2}}\,\pi$ бўлганда $y_{\max}=1$; 2) $x=0$ бўлганда $y_{\min}=0$ (синиш нуқтаси). 1178. $x=\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; ... бўлганда $y_{\min}=\frac{1}{2}$; $x=0$; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$ ... бўлганда $y_{\max}=1$.

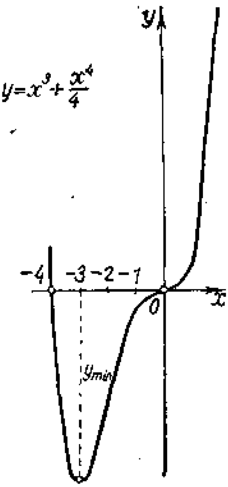
1179. Эгри чизиқнинг жойлашиш соҳаси $x\leqslant 1$; $x=\frac{1}{2}$ бўлганда $y_{\max}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $x_1=0$ ва $x_2=1$ бўлганда $y=0$. 1180. $x=2$ бўлганда $y_{\max}=\sqrt{2}$; эгри чизиқ жойлашган соҳа $x>0$. 1181. Асимптоталар $x=1$ ва $x=4$ (узилишлар); $x=-2$ бўлганда $y_{\min}=-{}^1/_9$; $x=2$ бўлганда $y_{\max}=-1$. 1182. $x=1$ бўлганда $y_{\min}=1,5$. Эгри чизиқ $y=\frac{x^2}{2}$ параболага ва Oy ўққа асимптотик яқинлашади.

1183. $x=0$ ва $x=2$ бўлганда $y_{\min}=\sqrt[3]{4}\approx 1,6$; $x=1$ бўлганда $y_{\max}=2$ (минимум нуқталарда қайтиш нуқталари). 1184. $x=0$ бўлганда y букилиш $=0$, $x=1$ бўлганда $y_{\max}=0,2$ $x=3$ бўлганда $y_{\min}=-5,4$. 1185. $x_1=-2$ бўлганда $y_{\max}=0$, $x_2=-1,2$ бўлганда $y_{\min}\approx -1,1$; $x=0$ бўлганда y букилиш $=0$. 1186. $x=2$ бўлганда $y_{\max}=\frac{1}{2}$; $y=0$ бўлганда $x=1$; асимптоталар — координаталар ўқлари. 1187. $x=-3$ бўлганда $y_{\max}=-4,5$; $x=0$ бўлганда y букилиш $=0$; $x=3$ бўлганда $y_{\min}=+4,5$; асимптоталар $y=x$ ва $x=\pm 3\sqrt{3}$. 1188. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ бўлганда $y_{\max}=1$; $x=\frac{\pi}{2}\pm k\pi$

бўлганда узилишлар. 1189. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ бўлганда $y_{max}=\frac{\pi}{4}+2k\pi-\frac{1}{2}\ln 2$. 1190. 1) $x=1$ бўлганда $y_{min}=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}$; 2) $x=-1$ бўлганда $y_{max}=1$, $x=0$ бўлганда $y_{min}=0$ қиялиги $k=\pm 2$ бўлган синиш нуқтаси). 1191. $x=0$ бўлганда $y_{min}=0$; $x=2$ бўлганда $y_{max}=\frac{4}{e^2}\approx\frac{1}{2}$; асимптота $y=0$. 1192. $x=-1$ бўлганда қайтиш нуқтаси $y_{min}=2$, $x=0$ бўлганда $y_{max}=3$, $y=0$ бўлган-



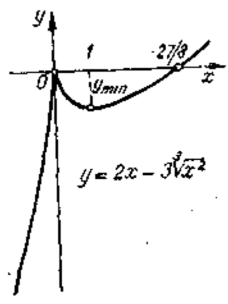
45- чизма.



46- чизма.

да $x\approx 4$. 1193. $x=2$ бўлганда $y_{max}=4$; $y=0$ бўлганда $x_1=0$, $x_2=4$. 1194. $x=-1$ бўлганда $y_{min}=-4$; $y=0$ бўлганда $x_1=1$, $x_2=-3$. 1195. $x=0$ бўлганда $y_{min}=0$; $x=-2$ бўлганда $y_{max}=\frac{4}{3}$; $y=0$ бўлганда $x_1=0$, $x_2=-3$. 1196. $x=-1$ бўлганда $y_{min}=-4$; $x=-3$ бўлганда $y_{max}=0$. 1197. $x=0$ бўлганда $y_{max}=0$; $x=2$ бўлганда $y=\pm\infty$; $x=4$ бўлганда $y_{min}=8$; асимптоталар $x=2$ ва $y=x+2$ (45- чизма). 1198. $x=-3$ бўлганда $y_{min}=-6.75$; $x=0$ бўлганда y букилиш $=0$; $y=0$ бўлганда $x_1=0$, $x_2=-4$ (46- чизма). 1199. $x=\pm 2$ бўлганда $y_{min}=-4$; $x=0$ бўлганда $y_{max}=0$; $y=0$ бўлганда $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{8}\approx\pm 2{,}8$. 1200. $x=0$ бўлганда қайтиш нуқтаси $y_{max}=0$; $x=1$ бўлганда $y_{min}=-1$; $y=0$ бўлганда $x_1=0$, $x_2=3\frac{3}{8}$ (47- чизма). 1201. $x=-1$ бўлганда $y_{max}=2$; $x=1$ бўлганда $y_{min}=0$; $x=0$ бўлганда $y=1$.

Асимптота $y=1$. **1202.** $x=-1$ бўлганда $y_{\min}=-\frac{1}{\sqrt{e}}\approx-0{,}6$; $x=1$ бўлганда $y_{\max}\approx 0{,}6$; Ox ўқи асимптота. **1203.** $x=2$ бўлганда $y_{\min}=2(1-\ln 2)\approx 0{,}6$; Oy ўқи асимптота; $x=1$ бўлганда $y=1$; $x=e^2\approx 7{,}4$ бўлганда $y\approx 3{,}4$. **1204.** $x=0$ бўлганда қайтиш нуқтаси $y_{\max}=0$; $x=2$ бўлганда $y_{\min}=-3\sqrt[3]{4}\approx-4{,}8$; $x=5$ бўлганда $y=0$. График 47- чизмадаги графикка ўхшаш. **1205.** $x=+\frac{\pi}{6}$ бўлганда $y_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\approx 0{,}34$; $x=-\frac{\pi}{6}$ бўлганда $y_{\min}\approx-0{,}34$; $x=\pm\frac{\pi}{2}$ бўлганда $y=\pm\frac{\pi}{2}=\pm 1{,}57$. **1206.** $x=\frac{\pi}{4}$ бўлганда $y_{\min}=$ $=\frac{\pi}{2}+1\approx 2{,}57$; $x=\frac{3\pi}{4}$ бўлганда $y_{\max}=+3{,}71$; асимптоталар $x=0$ ва $x=\pi$. **1207.** $x=-\frac{1}{2}$ бўлганда $y_{\max}=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\approx 1{,}85$; $x=\frac{1}{2}$ бўлганда $y_{\min}\approx 1{,}28$; $x=0$ бўлганда $y=\frac{\pi}{2}$. Асимптота $y=x$. **1208.** $x=1$ да қайтиш нуқтаси $y_{\min}=1$; $x=0$ бўлганда $y=2$; $x=2$ бўлганда $y=2$. **1209.** $x=\frac{\pi}{6}$ ва $\frac{5\pi}{6}$ бўлганда $y_{\max}=1{,}5$; $x=\frac{\pi}{2}$ бўлганда $y_{\min}=1$. **1210.** $x=0$ бўлганда $y_{\min}=0$; $x=1$ бўлганда y букилиш $=1$. **1211.** $x=e$ бўлганда $y_{\max}=\frac{1}{e}\approx 0{,}4$; $y=0$ бўлганда $x=1$. Асимптоталар $x=0$ ва $y=0$. **1212.** $x=$ $=-3$ бўлганда $y_{\min}=6$; $x=-2$ бўлганда $y=\infty$ (узилиш); $x=-1$ бўлганда $y_{\max}=2$. $x=0$, $y=1{,}5$; $y=0$, $x=\pm\sqrt{3}\approx\pm 1{,}7$ — ўқлар билан кесишган нуқталар. Асимптоталар: $x=-2$ ва $y=2-x$. **1213.** $x=1$ бўлганда $y_{\min}=2$; $x=-1$ бўлганда $y_{\max}=$ $=-2$; $x=0$ бўлганда — узилиш. $y=x$ ва $x=0$ — асимптоталар. **1214.** 1) $x=0$ бўлганда $y=a$. Ox ўқ билан кесишган нуқталар; $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Экстремум: $x_1=\frac{3\pi}{4}+$ $+2k\pi$ бўлганда — минимум, $x_2=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$ бўлганда — максимум. Эгри чизиқ — сўнувчи тебранишларнинг графиги; у $y=\pm ae^{-x}$ эгри чизиқлар ичига чизилган; бу эгри чизиқларда экстремум нуқталар ётади. Олдин $y=\pm ae^{-x}$ эгри чизиқларни ясаш керак. Ox ўқ — асимптота. 2) $x=-1$ бўлганда $y_{\max}=2$; $x=0$ бўлганда — букилиш нуқтаси, $x=1$ бўлганда $y_{\min}=-2$; $y=0$ бўлганда $x_1=0$, $x_{2,3}\approx\pm 1{,}3$. **1215.** $x=1$ бўлганда $y_{\min}=3$; $x=2$ бўлганда $y=\infty$ (узилиш); $x=4$ бўлганда y букилиш $=0$; $x=0$ бўлганда $y=3{,}6$. **1216.** $x=-2$ бўлганда $y_{\min}=0$; $x=-4$ бўлганда $y_{\max}\approx 0{,}8$; $x=1$ бўлганда $y_{\max}\approx 2{,}8$; Ox ўқ — асимптота **1217.** $x=\pm 1$ бўл-



47-чизма.

ганда $y_{max}=1$; $y=0$ бўлганда $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\approx\pm 0{,}7$. Ox ва Oy ўқлар—асимптоталар. 1218. $x=0$ бўлганда $y_{max}=1$; $x=1$ бўлганда $y_{min}=0$; $y=0$ бўлганда $x=\pm 1$. 1219. $x=-1$ бўлганда $y_{min}=\frac{1}{3}$; $x=1$ бўлганда $y_{max}=3$; $x=0$ бўлганда $y=1$; $y=1$ асимптота. 1220. $x=-1$ бўлганда $y_{max}=1$, $y=0$ бўлганда $x_1=0$, $x_2=-4$, эгри чизиқнинг жойлашиш соҳаси $x\geqslant 0$. 1221. 1) $x=-2$ бўлганда $y=\infty$ (узилиш); $x=-3$ бўлганда y букилиш $=0$; $x=0$ бўлганда $y_{min}\approx 6\frac{3}{4}$; асимптоталар $x=-2$ ва $y=x+5$; 2) $x=2n\pi$ бўлганда $y_{min}=0$; $x=(2n+1)\pi$ бўлганда $y_{max}=\sqrt{2}$. Минимум нуқталарда y' мавжуд эмас (синиш нуқталари). 1222. 30 $м\times 60$ $м$. 1223. 5 ва 5. 1224. $\frac{ah}{4}$. 1225. $\frac{a}{6}$. 1226. $4м\times 4м\times 2м$. 1227. 20 $см$. 1228. 60°. 1229. $\frac{18}{\pi+4}\approx 2{,}5$. 1230. $\cos\alpha=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}<\frac{a}{AB}\right.$ тенгсизлик бажарилиш шарти билан, бунда $a-AB$ нинг темир йўл йўналишига бўлган проекцияси). 1231. Кучлироқ ёруғлик манбаидан 18 $м$ узоқликда. 1232. $\frac{a}{2v}$ соатдан кейин энг кичик масофа $\frac{a}{2}$ бўлади. 1233. $x=\frac{D}{2}$, $y=\frac{D\sqrt{3}}{2}$. 1234. $\sqrt{3}\approx 1$ 7 марта. 1235. $l\approx 5{,}6\,м$; $l=\frac{2{,}4}{\sin\alpha}+\frac{1{,}6}{\cos\alpha}$ функциянинг максимуми сифатида аниқланади. 1236. Баландлик $x=2$ $дм$ бўлганда $v_{max}=\frac{128\pi}{9}$ $дм^3$. 1237. Баландлик $x=\frac{R}{\sqrt{2}}$ бўлганда $S_{max}=R^2$. 1238. (1; 1). 1239. $\sqrt{ab}$. 1240. $x=2$ $м$ да. 1241. 4 $см$ ва $\sqrt{3}\approx 1{,}7$ $см$. 1242. $x=1{,}5$ 1243. Кесим — томони $\frac{D}{\sqrt{2}}$ бўлган квадрат. 1244. $\alpha=2\pi$ бўлганда $\sqrt{\frac{2}{3}}$ радиан $\approx 294°$. 1245. $F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha=\mu=0{,}25$ $\alpha\approx 14°$. 1246. 1) $y=x^2$, $y''=2>0$; эгри чизиқ барча нуқталарида «пастга» қавариқ; 2) $y=x^3$, $y''=6x$, эгри чизиқ $x>0$ бўлганда «пастга» ва $x<0$ бўлганда «юқорига» қавариқ; $x=0$ қайрилиш нуқтаси; 3) $y=e^x$, $y''=e^x>0$, эгри чизиқ барча нуқталарида «пастга» қавариқ, Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси (0,1); 4) $y=\ln x$ $(x>0)$, $y''=-\frac{1}{x^2}<0$ эгри чизиқ барча нуқталарида «юқорига» қавариқ, Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси (1,0); 5) (0, 0) қайрилиш нуқтаси. 1247. Эгри чизиқларнинг қайрилиш нуқталари: 1) $\left(2;-\frac{8}{3}\right)$; 2) $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};e^{-\frac{1}{2}}\right)$; 3) $\left(\pm\sqrt{3};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ва (0; 0); 4) $x=-\frac{\ln 2}{2}\approx -0{,}35$ бўлганда.

1252. Жойлашиш соҳаси $x > -2$. Ўқлар билан кесишган нуқталари $(-1,\ 0)$ ва $(0;\ \ln 2)$. y барча нуқталарда ўсувчи, эгри чизиқ «юқорига» қавариқ, $x = -2$ — асимптота. 1253. $y > 0$, $y = 0$ — асимптота. 1254. 1) Ox ўққа нисбатан симметрик. Жойлашиш соҳаси $x \geqslant 0$. Юқори шохчаси «пастга», пасткиси «юқорига» қавариқ. Иккала шохча ҳам Ox ўққа $(0;\ 0)$ нуқтада уринади. Эгри чизиқ «ярим кубик парабола» дейилади (Oy ўқ билан K ҳарфини ҳосил қилади); 2) олдингига ўхшаш эгри чизиқ, фақат чап томонга 3 бирликка силжиган. 1255. 1) $x = 0$ бўлганда $y_{max} = -1$, асимптоталар $x = -2$, $x = 2$ ва $y = 0$ (учта шохча); 2) $x = 1$ бўлганда $y_{max} = 2$; $x = -1$ бўлганда $y_{min} = -2$, $x = \pm\sqrt{3}$ бўлганда Ox ўқ билан кесишади, $x = \pm\sqrt{2}$ бўлганда қайрилиш, Ox ва Oy ўқлар асимптоталар. 1256. Жойлашиш соҳаси $x > 0$; $y = 0$ бўлганда $x = 1$; Ox ва Oy ўқлар — асимптоталар. $x = e$ бўлганда $y_{max} = 1$; 2) $x = 1$ бўлганда $y_{max} = 1$, $x = 2$ бўлганда $y_{қайр.} = \frac{2}{e} \approx \frac{2}{3}$, Ox ўқ — асимптота, $x = 0$ бўлганда $y = 0$. 1257. 1) $x = 0$ бўлганда $y_{min} = 2$; $x = -2$ ва $x - y = 0$ — асимптоталар; 2) Oy га нисбатан симметрик, $y = 0$ бўлганда $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0{,}7$; $x = \pm 1$ бўлганда $y_{min} = -1$, Oy ўқ — асимптота. 1258. Жойлашиш соҳаси $x > 0$; $x = 1$ бўлганда $y_{min} = 1$; «пастга» қавариқ; Oy ўқ—асимптота; 2) Oy ўқ—симметрия ўқи, $x = 0$ бўлганда $y_{min} = a$; барча нуқталарда «пастга» қавариқ. Эгри чизиқ *занжир* чизиқ дейилади. 1259. 1) $x = 0$ бўлганда $y_{max} = 0$, $x = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ бўлганда $y_{min} \approx 2{,}1$; $x = -\sqrt[3]{2} \approx -1{,}3$ бўлганда $y_{қайр.} \approx -0{,}8$; $x = 1$ ва $y = -$ асимптоталар; 2) $x = -1$ бўлганда $y_{min} = -3$, $y = 0$ бўлганда $x = -\sqrt[3]{0{,}25} \approx -0{,}6$, Ox ва Oy ўқлар—асимптоталар. 1260. 1) Ox ва Oy ўқларга нисбатан симметрик; жойлашиш соҳаси $|x| < \sqrt{2}$, $x = \pm 1$ бўлганда $y_э = \pm 1$, $y = 0$ бўлганда $x = 0$ ёки $\pm\sqrt{2}$; 2) $y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$ шохчасида $x = 1$ бўлганда $y_{min} = 3$; $y = x - \frac{2}{\sqrt{x}}$ шохчаси Ox ўқни $x = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ бўлганда кесади, иккала шохча ҳам $y = x$ ва $x = 0$ асимптоталарга эга. 1261. $x = -2$ бўлганда $y_{min} = -\sqrt[3]{16} \approx -2{,}52$, $x = 2$ бўлганда $y_{max} \approx 2{,}52$ (икки нуқта ҳам қайтиш нуқталари) Ox ўқ — асимптота, чунки x $\pm$ чексизликка интилганда $(x \to \pm\infty)$

$$y = \frac{8x}{(x+2)^{4/3} + (x^2-4)^{2/3} + (x-2)^{\frac{4}{3}}} \to 0.$$

1262. Ox ўққа нисбатан симметрик, жойлашиш соҳаси $x \geqslant 0$; Ox ўқи—асимптота $(\lim\limits_{x\to\infty} y = 0)$; $x = 1$ бўлганда экстремум $y_э = \pm\frac{1}{e} \approx \pm 0{,}3$.

1264. 1) $\frac{x^3}{3} + x^2 + \ln x + C$; 2) $2x^5 - \frac{1}{x^3} + C$. 1265. 1) $\frac{1-x}{x^2} + C$; 2) $\frac{x^2}{2} + 2\ln x - \frac{1}{2x^2} + C$. 1266. 1) $x\left(\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x}\right) + C$;

2) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+C$. 1267. 1) $\frac{2x\sqrt{x}}{3}-3x+6\sqrt{x}-\ln x+C$;
2) $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x}+C$. 1268. 1) $e^x+\frac{1}{x}+C$; 2) $\frac{a^x}{\ln a}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$.
1269. 1) $-\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{tg}\,x+C$; 2) $-\mathrm{ctg}\,x-x+C$.
1270. 1) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x+C$;
2) $3\,\mathrm{tg}\,x+2\,\mathrm{ctg}\,x+C$. 1271. 1) $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}+C$; 2) $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$.
1272. 1) $2\,\mathrm{arc\,tg}\,x-3\,\arcsin x+C$; 2) $\frac{x^3}{3}-x+\mathrm{arc\,tg}\,x+C$.
1273. 1) $\frac{x^4-1}{2x^2}-2\ln x+C$; 2) $3\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$.
1274. 1) $\frac{2(x+2)}{\sqrt{x}}+C$; 2) 4) $\ln x-\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C$. 1275. 1) $\ln x-$
$-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$; 2) $x+\cos x+C$. 1276. 1) $e^x+\mathrm{tg}\,x+C$;
2) $\frac{a^x}{\ln a}-\frac{1}{4x^4}+C$. 1277. $\cos x-\mathrm{ctg}\,x+C$. 1278. $\mathrm{tg}\,x-x+C$.
1279. $\frac{1}{3}\sin 3x+C$. 1280. $-2\cos\frac{x}{2}+C$. 1281. $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$.
1282. $\frac{1}{5}\mathrm{tg}\,5x+C$. 1283. $2(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})+C$. 1284. $\frac{1}{6}(4x-1)^{3/2}+C$.
1285. $-\frac{(3-2x)^5}{10}+C$. 1286. $-\frac{1}{8}(5-6x)^{4/3}+C$.
1287. $-\sqrt{3-2x}+C$. 1288. $\frac{1}{b}\cos(a-bx)+C$.
1289. $\ln(x^2-5x+7)+C$. 1290. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.
1291. $-0{,}1\ln|1-10x|+C$. 1292. $-\frac{1}{6}\ln|1-3e^{2x}|+C$.
1293. $\ln|\sin x|+C$. 1294. $-\ln|\cos x|+C$. 1295. $\ln|\sin 2x|+C$.
1296. $-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$. 1297. $\frac{1}{2}\ln|1+2\sin x|+C$.
1298. $\ln|1+\ln x|+C$. 1299. $\frac{\sin^3 x}{3}+C$. 1300. $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$.
1301. $-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$. 1302. $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$. 1303. $\frac{2-\cos x}{\sin x}+C$.
1304. $\frac{\sin^2 x}{2}+C$. 1305. $-e^{\cos x}+C$. 1306. $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$.
1307. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$. 1308. $2e^{\sqrt{x}}+C$. 1309. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$.
1310. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3-8)^4}+C$. 1311. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+C$.
1312. $-\sqrt{1-x^2}+C$. 1313. $-\sqrt{1+2\cos x}+C$.

1314. $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C.$ 1315. $\frac{1}{6}(1+4\sin x)^{3/2}+C.$

1316. $-\frac{1}{40}(1-6x^5)^{4/3}+C.$ 1317. $2x+\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})+C.$

1318. $\frac{\sin^4 x}{4}+C.$ 1319. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x}+C.$ 1320. $-\frac{1}{b}\sin(a-bx)+C.$

1321. $\frac{1}{4}(1+3x)^{\frac{4}{3}}+C.$ 1322. $-\frac{1}{7}(1-2x^3)^{\frac{7}{6}}+C.$

1323. $\sqrt{1+x^2}+C.$ 1324. $\frac{\sin x-2}{\cos x}+C.$ 1325. $2\ln|\sin x|-\mathrm{ctg}\,x+C.$

1326. $e^{\sin x}+C.$ 1327. $-\frac{1}{3}\ln|1-x^3|+C.$ 1328. $\frac{1}{2b(a-bx)^2}+C.$

1330. 1) $0{,}1\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C;$ 2) $\frac{1}{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{3}+C.$

1331. 1) $\arcsin\frac{x}{2}+C;$ 2) $\ln(x+\sqrt{x^2+5})+C.$

1332. 1) $\ln|x+\sqrt{x^2-4}+C;$ 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

1333. 1) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C;$ 2) $\frac{1}{6}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x^3}{2}+C.$

1334. 1) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C;$ 2) $\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{bx-a}{bx+a}\right|+C.$

1335. 1) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}+C;$ 2) $\frac{1}{4}\ln(x^4+\sqrt{x^8-1})+C.$

1336. 1) $2{,}5\ln(x^2+4)-\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{2}+C;$ 2) $\frac{3}{2}\ln(x^2-4)-\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$

1337. 1) $\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C;$ 2) $-\sqrt{1+x^2}+\arcsin+C.$

1338. $x-\mathrm{arc\,tg}\,x+C.$ 1339. $\frac{x^3}{3}+3x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C;$

1340. $\mathrm{arc\,tg}(x+2)+C.$ 1341. $\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-3}{2}+C.$

1342. $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})+C.$ 1343. $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$

1344. $\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$ 1345. $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C.$

1346. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$

1347. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+3}|+C.$

1348. $\sqrt{3}\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|\right)+C.$

1349. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+\ln(x+\sqrt{2+x^2})+C.$

1350. $2 \ln (x^2+5) - \sqrt{5} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

1351. $x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| + c.$

1352. $\frac{x^3}{3} - 2x + 2\sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$ 1353. $\arcsin (e^x) + C.$

1354. $\operatorname{arc\,tg} (2x^2) + C.$ 1355. $0{,}2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x+2}{5} + C.$

1356. $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{2} + C.$ 1357. $\arcsin \frac{x+2}{3} + C.$

1358. $\frac{1}{2} \ln (x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

1359. $\frac{1}{2} \ln (2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}) + C.$ 1360. $x \ln |x| - x + C.$

1361. $\frac{x^2}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x + \ln |x-1|\right) + C.$

1362. $\frac{1}{2} e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$ 1363. $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{2} + C.$

1364. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$ 1365. $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$

1367. $x[(\ln|x|-1)^2+1] + C.$ 1368. $-x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$

1369. $-\frac{\ln|x|+1}{x} + C.$ 1370. $2\sqrt{1+x} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C.$

1371. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$ 1372. $-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)+C.$

1373. $x \ln (x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arc\,tg} x + C.$ 1374. $\frac{x}{2} (\cos \ln x + \sin \ln x) + C.$

1375. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln|x| - \frac{2}{3}\right) + C$ 1376. $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8) + C.$

1377. $x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$ 1378. $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$

1379. $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$ 1380. $4\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \arcsin \frac{x}{2} + C.$

1381. $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x\right) + C.$ 1382. $x \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$

1384. $3x + 4 \sin x + \sin 2x + C.$ 1385. $\frac{3x}{2} + \cos 2x - \frac{\sin 4x}{8} + C.$

1386. $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$ 1387. $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$

1388. $\frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C.$ 1389. $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$

1390. $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$ 1391. $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

1392. $\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$ 1393. $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x -$

$-\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$ 1394. $7x+14\sin x+3\sin 2x-\frac{8\sin^3 x}{3}+C.$

1395. $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C.$ 1396. $\frac{1}{\cos x}+\cos x+C.$

1397. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|+C.$ 1398. 1) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C;$ 2) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$

1399. $\frac{1}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]+C.$ 1400. $\int\frac{dx}{\sin x-\cos x}=$

$$=\int\frac{dx}{\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

1401. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C.$ 1402. $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|+C.$

1403. $-\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 2x)+C.$ 1404. $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\right.$ $\left.+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]+C,$ $m\neq n$ бўлганда ва $\frac{x}{2}+\frac{1}{4m}\sin 2mx+C$ $m=n$ бўлганда. 1405. 1) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C;$ 2) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]+C$ $m\neq n$ бўлганда ва $\frac{x}{2}-$ $-\frac{1}{4m}\sin 2mx+C;$ $m=n$ бўлганда. 1406. $-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$

1407. 1) $\frac{5}{16}x-\cos x\left(\frac{\sin^6 x}{6}+\frac{5\sin^3 x}{24}+\frac{5\sin x}{16}\right)+C.$ 1408. 1) $\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+$ $+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C;$ 2) $-\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$

1409. $\frac{11x}{2}+3\sin 2x+\frac{9}{8}\sin 4x+C.$ 1410. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+$ $+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$ 1411. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$

1412. $\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C.$ 1413. $\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$

1414. $7x-14\cos x-3\sin 2x+\frac{8\cos^3 x}{3}+C.$ 1415. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|-x+C.$

1416. $\frac{1}{8}(2\sin 2x-\sin 4x)+C.$ 1417. $\frac{1}{\cos x}+\cos x+\operatorname{tg}x+C.$

1418. $-\frac{1}{4}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}x+C.$ 1419. 1) $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+$ $+8\ln|x-2|+C;$ 2) $\frac{x^3}{3}-a^2x+a^3\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C;$ 3) $\frac{x^3}{3}+\frac{a^3}{3}\ln|x^3-a^3|+C.$

1420. $\ln\frac{C(x-2)^2}{x-3}.$ 1421. $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right|+C.$ 1422. $\ln\frac{C\,x^3(x-1)}{x+1}.$

1423. $\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{(x-1)^3}{|x|}+C.$ 1424. $\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C.$

1425. $\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{x-a}{x}\right|+\frac{x-a}{ax^2}+C.$ 1426. $\ln Cx(x-1)+\frac{2}{x-1}.$

1427. $\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|-\frac{2}{x+1}+C.$ 1428. $\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10)-\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{3}+C.$

1429. $2\ln(x^2-0{,}2x+0{,}17)-5\operatorname{arc\,tg}\frac{10x-1}{4}+C.$

1430. $\ln|x+1|\sqrt{x^2+4}+C.$ 1431. $3\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C$

1432. $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$ 1433. $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|}-$

$-\frac{1}{x+1}+\operatorname{arc\,tg}x+C.$ 1434. 1) $\frac{1}{2b^3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}+\frac{bx}{x^2+b^2}\right)+C;$

2) $\frac{1}{8b^4}\left[\frac{x(5b^2+3x^2)}{(x^2+b^2)^2}+\frac{3}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}\right]+C.$ 1435. 1) $-\frac{x+9}{8(x^2+2x+5)}-$

$-\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2}+C;$ 2) $\frac{1}{8}\left[\frac{(x-3)(3x^2-18x+32)}{(x^2-6x+10)^2}+3\operatorname{arc\,tg}(x-3)\right]+C.$

1436. $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|}+\frac{x-1}{x^2+1}+C.$ 1437. $\frac{x-2}{4(x^2+2)}+\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

1438. $\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{x+a}\right|+C.$ 1439. $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C.$

1440. $\frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{2}{x}\right|+C.$ 1441. $\frac{1}{10\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-$

$-\frac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$ 1442. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

1443. $\frac{1}{4}\int\frac{4+x^2-x^2}{x(4+x^2)}dx=\frac{1}{4}\ln\frac{|x|}{\sqrt{4+x^2}}+C.$ 1444. $\ln\frac{C(x-2)^3}{x-1}.$

1445. $\ln C(x-1)\sqrt{2x+3}.$ 1446. $\ln\frac{C(x-1)^3}{(x+2)^2(x-2)}.$

1447. $3\ln\frac{C(x-1)}{x+2}-\frac{2}{x+2}.$ 1448. $2\ln\frac{C(x-2)}{x}-\frac{1}{x-2}$

1449. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2-2x+2}}+2\operatorname{arc\,tg}(x-1)+C.$ 1450. $\frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|x|}+$

$+\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$ 1451. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

1452. $\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+x.$

1453. $-\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\operatorname{arc\,tg}(x+1)\right]+C.$

1454. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right|+C.$ 1455. $\frac{1}{3}\int\frac{x^2+3-x^2}{x^2(x^2+3)}dx=$

$=-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$ 1456. $\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}dx=$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$ **1457.** $\frac{1}{3}\int \frac{x^2+1-(x^2-2)}{(x^2+1)(x^2-2)}\,dx =$
$= \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + C.$ **1485.** $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C.$

1459. $\frac{2x+1}{12}(2\sqrt{2x+1}-3)+C.$ **1490.** $6\left[\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln(1+\sqrt[6]{x})\right]+C.$ **1461.** $\frac{2}{15}(3x^2-ax-2a^2)\sqrt{a-x}+C.$

1462. $\frac{3}{4}\left[\frac{\sqrt[3]{(x^4+1)^2}}{2}-\sqrt[3]{x^4+1}+\ln(\sqrt[3]{x^4+1}+1)\right]+C.$

1463. $\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3}+C.$ **1464.** $\mp\arcsin\frac{1}{x}+C$ ($x>0$ бўлганда — ва $x<0$ бўлганда $+$). **1465.** $\ln\frac{Cx}{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}.$

1466. $-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}+C.$ **1467.** $\ln\frac{C(x+1)}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}.$

1468. $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right]+C.$

1469. $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C.$ **1470.** $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{4}(2-x)^2\sqrt{4-x^2}+C.$

1471. $\frac{x^3}{3a^2\sqrt{(a^2+x^2)^3}}+C.$ **1472.** $\int\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx;\ x-1=2\sin t$ алмаштиришни татбиқ қилиб ечамиз, $\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\;2\cos t\,dt =$
$= 2\arcsin\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}{2}+C.$ **1473.** $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}-$
$-\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$ **1474.** $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2+2x+2}-3{,}5\ln(x+1+$
$+\sqrt{x^2+2x+2})+C.$ **1475.** $-\sqrt{3-2x-x^2}-\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$

1477. $\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}+C.$

1478. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1}\right|+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^3}+C.$

1479. $-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}+C.$ **1480.** $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{2}+\frac{3}{2}=$ бутун сон; $x^{-2}+1=t^2$ деб $\int\frac{x^{-2}x^{-3}\,dx}{(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}}=-\int\frac{t^2-1}{t^2}\,dt=$
$=-\frac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}}+C$ ни ҳосил қиламиз. **1481.** $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=$

$=$ бутун сон; $a - bx^2 = t^2$ деб $\frac{1}{b^2}\int \frac{t^2 - a}{t^2}\,dt = \frac{2a - bx^3}{b^2\sqrt{a - bx^2}} + C$

ни ҳосил қиламиз. 1482. $\frac{(x-2)\sqrt{2x-1}}{3} + C$. 1483. $\frac{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}{2} +$
$+ (3x+1)^{\frac{1}{3}} + \ln\left|(3x+1)^{\frac{1}{3}} - 1\right| + C$. 1484. $x - 2\sqrt{x} +$
$+ 2\ln(\sqrt{x} + 1) + C$. 1485. $-0{,}3\,(2x + 3a)\sqrt[3]{(a-x)^2} + C$.
1486. $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\ \mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$. 1487. $\frac{3(x^2+1)}{2} \times$
$\times \left(\frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{4} + \frac{1}{3}\right) + C$. 1488. $\ln(1 + \sqrt{1+x^2}) +$
$+ \frac{1}{1 + \sqrt{1+x^2}} + C$. 1489. $x^2 + \frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3} + C$; бу мисолда аввал махражда иррационалликдан қутилиш қулай.
1490. $\mp\sqrt{\frac{x+2}{x}} + C$ ($x > 0$ бўлганда $-$ ва $x < -2$ бўлганда $+$).
1491. $\arccos\frac{1}{x-1} + C$. 1492. $2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + C$.
1493. $2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x - x^2} + C$.
1494. $\frac{2+x}{2}\sqrt{4x + x^2} - 2\ln\left|x + 2 + \sqrt{4x + x^2}\right| + C$.
1495. $-\frac{x+6}{2}\sqrt{5 + 4x - x^2} + \frac{17}{2}\arcsin\frac{x-2}{3} + C$.
1496. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{|x|} + C$. 1497. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.
1498. $1 - x^3 = t^2$ деб
$\int \frac{x^2\,dx}{x^3\sqrt{1-x^3}} = \frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right| + C$ ни топамиз.
1499. $x = \frac{1}{t}$ деб
$-\int\frac{dt}{\sqrt{3 - 2t - t^2}} = -\frac{dt}{\sqrt{4 - (t+1)^2}} = \arccos\frac{x+1}{2x} + C$ ни топамиз.
1500. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1) - 2\,\mathrm{arc\,tg}(e^x) + C$. 1501. $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\,x + x + C$.
1502. $\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4\ln(e^x + 2) + C$. 1503. $\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.
1504. $\frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C$. 1505. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 2}\right| + C$.
1506. $-\frac{\mathrm{ctg}^3 x}{3} - \mathrm{ctg}\,x + C$. 1507. $\frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{2}\right) + C$.

1508. $e^x + \ln|e^x - 1| + C$. 1509. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$.

1510. $e^x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C$. 1511. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right) + C$.

1512. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C$. 1513. $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg} x) + C$. 1514. $\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C$. 1515. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} + C$.

1516. $2\ln|e^x - 1| - x + C$. 1517. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + \ln|\operatorname{tg} x|) + C$.

1518. 1) $\frac{\operatorname{sh} 6x}{12} - \frac{x}{2} + C$; 2) $\frac{x}{2} + \operatorname{ch} 2x + \frac{\operatorname{sh} 4x}{8} + C$.

1519. 1) $\operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + C$. 1520. $\ln|\operatorname{ch} x| + C$. 1521. $-\frac{1 - \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} + C$.

1522. $-\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}\right) + C$. 1523 ва 1524. 161- бетдаги № 1366 га қар. 1525. $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$. 1526. $-\frac{x}{5\sqrt{x^2-5}} + C$.

1527. $\frac{\operatorname{ch}^3 3x}{9} - \frac{\operatorname{ch} 3x}{3} + C$. 1528. $\frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{x}{8} + C$. 1529. $\frac{\operatorname{sh}^5 x}{5} + C$.

1530. $x - \operatorname{cth} x + C$. 1531. $2\sqrt{\operatorname{ch} x - 1} + C$ (олдин интеграл белгиси остидаги ифоданинг сурат ва махражини $\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$ га кўпайтириш керак). 1532. $\frac{\operatorname{sh} x - 2}{\operatorname{ch} x} + C$. 1533. $\frac{3}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - 3}| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 3} + C$. 1534. $\ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| - \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} + C$.

1535. $2\sqrt{x+1} + \ln\left|\frac{x + 2 - 2\sqrt{1+x}}{x}\right| + C$. 1536. $\frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{2} + C$.

1537. $\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{x + a}{x}\right| - \frac{1}{ax} + C$. 1538. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C$.

1539. $2\arcsin\sqrt{x} + C$ ($x = \sin^2 t$ деб олинсин). 1540. $ab \times \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) + C$. 1541. $\frac{1}{4}\left(x^2 + x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$.

1542. $\ln C(e^x + 1) - x - e^{-x}$. 1543. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$. 1544. $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C$.

1545. $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C$. 1546. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C$.

1547. $-\frac{1}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{\cos x}{b} + C$. 1548. $3x^{\frac{1}{3}} - 12x^{\frac{1}{6}}\ln\left(x^{\frac{1}{6}} + 2\right) + C$.

1549. $\frac{b - 3ax}{6a(ax + b)^3} + C$ ($ax + b = t$ деб олинсин). 1550. $-\frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg} x + C$.

1551. $-\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}$ (сурат ва махраж $\cos^2$ га бўлиниб, $\operatorname{tg} x = t$ деб олинсин). 1552. $\frac{2}{b}\sqrt{a+b\ln x}+C$.

1553. $\frac{1}{3b(n-1)(a-bx^3)^{n-1}}+C \cdot n \neq 1$ бўлганда ва $-\frac{1}{3b}\ln|a-bx^3|+C$; $n=1$ бўлганда. 1554. Радикал остида тўлиқ квадратни ажратиб $x+1=\sqrt{2}\sin t$ деб олиш керак (ёки аниқмас коэффициентлар методи билан ечиш керак), $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. 1555. $-\frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)^2}+C$. 1556. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}+C$. 1557. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{e^x}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln(4+e^{2x}+C$.

1558. $\ln\left|\frac{C\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}\right|$. 1559. $x+\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$.

1560. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{2}+C$. 1561. 1) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{ctg} x}{\sqrt{3}-\operatorname{tg} x}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\right|+C$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}-\operatorname{tg} x}\right|+C$.

1562. 1) махраждаги иррационалликдан қутилиш керак; $\frac{2}{3a}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right]+C$; 2) $\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x^2]+C$.

1563. $\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{C(x-1)^2}{x}$. 1564. $-\frac{1}{3}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}+C$; $\left(x=\frac{1}{t}\right.$ деб олинсин). 1565. $\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^3-1}+C$ ($x^3-1=t^2$ деб олинсин).

1566. $\frac{1}{2}[x+\ln|\sin x+\cos x|]+C$. 1567. $2[\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}]+C$. 1568. $\operatorname{tg}^2 x+C$ ёки $\frac{1}{\cos^2 x}+C_1$.

1569. $\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^4 x}dx=-\int\operatorname{ctg}^2 x\,d(\operatorname{ctg} x)+\int d(\operatorname{ctg} x)=\operatorname{ctg} x-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C$. 1570. $-\operatorname{ctg} x\ln(\cos x)-x+C$. 1571. $e^{-x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$. 1572. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$ ($\operatorname{tg} x=t$ деб олинсин).

1573. $\ln|x| - \frac{x+1}{x}\ln|x+1| + C$. 1574. $\int\sqrt{1-\sin x}\,dx = \pm\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x}} = \pm 2\sqrt{1+\sin x} + C$ ($\cos x > 0$ бўлганда $+$ ва $\cos x < 0$ бўлганда $-$). 1575. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\ \operatorname{tg} x) + C$.

1576. $\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2-2)} = \frac{1}{6}\int\frac{x^2+1-(x^2-2)}{(x^2+1)(x^2-2)}\,d(x^2) = \frac{1}{6}\ln\frac{|x^2-2|}{x^2+1} + C$. 1577. $-2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) + C$.

1578. $2\sqrt{x}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} - \ln|1+x| + C$. 1579. $\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$ ($\operatorname{tg} x = t$ деб олинсин). 1580. $\ln|x| - \frac{x^2+1}{2x^2}\ln(x^2+1) + C$. 1581. $\frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg}(a^x) + C$. 1582. $2(\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}) + C$.

1583. $\frac{2(x+7)}{3}\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2}\ln\frac{|\sqrt{x+1}-\sqrt{2}|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} + C$; ($x+1 = t^2$ деб олинсин). 1584. $x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C$. 1585. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ $\left(x = \frac{1}{t}\ \text{деб олинсин}\right)$. 1586. $-\frac{3x^2+3x+1}{3(x+1)^3} + C$; ($x+1 = t$ деб олинсин). 1587. $\sqrt{2ax+x^2} - 2a\ln|x+a+\sqrt{2ax+x^2}| + C$ (170-бет. 4°). 1588. $\ln\frac{(2x-1)^2}{|x^2+x|} + C$. 1589. $-\frac{1+\cos x+\sin^2 x}{\sin x} + C$.

1590. $\frac{1}{16}\ln\frac{C(x^2+2x+2)}{x^2-2x+2} + \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{2-x^2}$ [махражнинг кўпайтувчиларга ажралиши: $x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-4x^2 =$ ва ҳоказо.] 1592. $s_5 = 0{,}646$, $S_5 = 0{,}746$ $\int_1^2\frac{dx}{x} = 0{,}693$. 1593. 20.

1594. $2\frac{5}{8}$. 1595. $\frac{14}{3}$. 1596. $\frac{\pi}{6}$. 1597. $\frac{\pi}{12a}$ 1598. $3(e-1)$.

1599. $\ln(1+\sqrt{2})$. 1600. $\frac{1}{2}$. 1601. $x = t^2$ деб, чегараларини ўзгартсак, $\int_2^3\frac{2t\,dt}{t-1} = [2t + 2\ln(t-1)]_2^3 = 2(1+\ln 2)$ ни ҳосил қиламиз.

1602. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$. 1603. $2-\ln 2$. 1604. $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 1605. $\ln\frac{2e}{e+1}$.

1606. $\frac{a(\pi-2)}{4}$ ($x = a\sin^2 t$ деб олинсин). 1607. $\frac{1}{3}$. 1608. $\frac{\pi a^2}{16}$.

1609. $2\ln 2 - 1$. 1610. $\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$. 1611. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$.

1612. $\ln\frac{3}{2}$. 1613. 1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2}$. 1614. $-\frac{a^3}{6}$.
1615. $\frac{1}{6}$. 1616. 1. 1617. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 1618. $2\ln 1{,}5-\frac{1}{3}$. 1619. $\operatorname{arctg} e-$
$-\frac{\pi}{4}\approx 0{,}433$. 1620. $\frac{17}{6}$. 1621. $\frac{\pi-2}{4}$. 1622. $\frac{\pi}{2}-1$. 1623. $\frac{1-\ln 2}{2}$.
1624. 1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2}$. 1625. $\frac{32}{3}$. 1626. πab.
1627. $(2\sqrt{2ph})$ асоснинг h баландликка кўпайтмасининг $\frac{2}{3}$ қисми.
1628. $\frac{32}{3}$. 1629. $8\ln 2$. 1630. 1. 1631. $\frac{16}{3}$. 1632. 19,2. 1633. 25,6. 1634.
$8\frac{8}{15}$. 1635. $\frac{8}{3}$. 1636. $20\frac{5}{6}$. 1637. πa^2 (60- чизмага қар., 330- бет). 1638.
0,8 (328- бет, 57- чизма). 1639. $\frac{(4-\pi)a^2}{2}$; $x=2a\sin^2 t$ деб олинсин
(356- бет, 88- чизма). 1640. $2a^2\operatorname{sh}1=a^2(e-e^{-1})\approx 2{,}35a^2$. 1641. $3\pi a^2$.
1642. $\frac{3\pi a^2}{8}$. 1643. a^2. 1644. $\frac{3\pi a^2}{2}$. 1645. $r_{\max}=4$; $2\varphi=90°+360°n$
бўлганда, яъни $\varphi=45°+180°n=45°, 225°$ бўлганда; $r_{\min}=2$; $2\varphi=$
$=-90°+360°n$ бўлганда, яъни $\varphi=-45°+180°n=135°, 315°$ бўлганда.
45° ва 135° бўлганда қўшни экстремал радиус векторлар. Изланган юз

$\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(3+\sin 2\varphi)^2\,d\varphi=\frac{19\pi}{8}$ га тенг. 1646. $\frac{3\pi}{4}$. 1647. $\frac{\pi a^2}{2}$. 1648. $\frac{\pi a^2}{4}$.

1649. $r=a(\sin\varphi+\cos\varphi)=a\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$; $r_{\max}=a\sqrt{2}$,
$\varphi-\frac{\pi}{4}=0$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$ бўлганда; $\varphi-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{2}$, $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ ва $\frac{3\pi}{4}$ бўл-

ганда $r_{\min}=0$. Юз $S=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(a\sqrt{2})^2\cos^2\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)d\varphi=\frac{\pi a^2}{2}$. Агарда

декарт координаталарига ўтилса, жавоб соддароқ ҳосил бўлади:
$x^2+y^2=a(x+y)$ — айлана. 1650. $\frac{7a^2}{4\pi}$. 1651. $(10\pi+27\sqrt{3})\frac{a^2}{64}$.
1652. $\frac{3}{2}a^2$. 1653. 36. 1654. 12. 1655. $\frac{32}{3}$. 1656. $\frac{4}{3}$ (328- бет, 56- чизмага қар.). 1657. $\frac{14}{3}$. 1658. 2. 1659. $\frac{16}{3}$. 1660. $17{,}5-6\ln 6$

1661. $2\int_{-1}^{0}-x\sqrt{x+1}\,dx=\frac{8}{15}$ (327-бет, 53-чизмага қар.). 1662. $r_{\max}=4$, $2\varphi=180°+360°n$, $\varphi=90°+180°n=90°$ ёки $270°$ бўлганда; $r_{\min}=2$, $2\varphi=0°=360°n$, $\varphi=180°n$; $0°$ ёки $180°$ бўлганда. Юз

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(3+\cos 2\varphi)^2\,d\varphi=\frac{19\pi}{8}.$$ 1663. $\frac{3\pi}{4}$. 1664. $\frac{\pi a^2}{2}$. 1665. $\frac{\pi a^2}{4}$.

1666. $\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})=\frac{a^2}{2}\operatorname{sh}2\pi$. 1667. $4ab\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$. 1668. $\frac{11}{8}\pi a^2$.

1669. πph^2. 1670. $\frac{8\pi a^2 b}{3}$. 1671. 12π. 1672. $58{,}5\pi$. 1673. $2\pi^2a^2b$

1674. $\pi a^3\left(\frac{\operatorname{sh}2}{2}+1\right)$. 1675. $\frac{512\pi}{15}$. 1676. $\frac{7}{6}\pi a^3$. 1677. $3\pi^2$.

1678. $\frac{512\pi}{7}$. 1679. $\frac{\pi}{4}\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 1680. $\frac{\pi a^3}{6}$. 1681. $\frac{\pi^2}{2}$.

1682. $\frac{64\pi}{3}$. 1683. $\frac{(\pi+2)\pi}{4}$. 1684. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. 1685. $\frac{32\pi a^3}{105}$.

1686. $19{,}2\pi$. 1687. $\frac{8\pi a^3}{3}$. 1688. $V=\frac{128\pi}{3}$. 1689. $5\pi^2a^3$.

1690. 72π. 1691. $\frac{112}{27}$. 1693. $6a$. 1694. $\frac{670}{27}$. 1695. $8a$. 1696. Ўқлар билан кесишиш нуқталари $t_1=0$ ва $t_2=\sqrt[4]{8}$. $s=$

$$=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^4+1}\cdot t^3dt=4\frac{1}{3}.$$ 1697. $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

1698. $2a\operatorname{sh}1\approx 2{,}35a$. 1699. $s=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$; $1+x^2=t^2$ деб оламиз;

$$s=\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{13}{5}}\frac{t^2\,dt}{t^2-1}=\left[t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_{1,25}^{2,6}=1{,}35+\ln 2\approx 2{,}043.$$ 1700. Ўқлар билан кесишиш нуқталари $x_1=0$ ва $x_2=\frac{\pi}{3}$; $s=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=$

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \ln(2+\sqrt{3}) \approx 1{,}31.$ 1701. 1) $4\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{2}\ln(2\,\mathrm{ch}\,2) \approx 1{,}009.$ 1702. 1) $8a$; 2) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}).$ 1703. $\frac{3\pi a}{2}$. 1705. $\frac{28}{3}$. 1706. $\ln 3$. 1707. $2\ln 3 - 1$. 1708. $p[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] \approx 2{.}29p$. 1709. $4\sqrt{3}$. 1711. $\frac{14\pi}{3}$. 1712. $\pi a^2(\mathrm{sh}\,2 + 2)$. 1713. $2\pi\left(1+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)$. 1714. $2\pi[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$. 1715. $\frac{64}{3}\pi a^2$. 1716. 3π. 1717. $4\pi^2 ab$. 1718. $\frac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$. 1719. $\frac{62\pi}{3}$. 1720. $2{,}4\,\pi a^3$. 1721. $29{,}6\pi$. 1722. 144 *т*; пастки ярмига бўлган босим 108 *т*. 1723. $\frac{ah^2}{6}$. 1724. $\frac{2}{3}R^3$. 1725. 240 *т*. 1726. $J_x = \frac{ab^3}{3}$; $J_y = \frac{a^3b}{3}$. 1727. $J_x = \frac{ab^3}{12}$; $J_y = \frac{a^3b}{12}$. 1728. 6,4. 1729. $M_x = M_y = \frac{a^3}{6}$; $x_c = y_c = \frac{a}{3}$. 1730. $M_x = \int\limits_0^a \frac{y}{2}\,y\,dx = 0{,}1\,ab^3$;

$M_y = \int\limits_0^a xy\,dx = \frac{1}{4}ba^2$; $S = \int\limits_0^a y\,dx = \frac{ab}{3}$; $x_c = \frac{3}{4}a$, $y_c = 0{,}3b$. 1731. $x_c = 0$,

$$y_c = \frac{2\int\limits_0^a \frac{y}{2}\,y\,dx}{0{,}5\,\pi a^2} = \frac{4}{3\pi}a \approx \frac{4}{9}a.$$ 1732. 1) 1120π *кГм*; 2) $250\,\pi R^4$ *кГм*.

1733. $\int\limits_R^{R+h} \frac{mgR^2}{x^2}\,dx = \frac{mgRh}{R+h}$. 1734 $\frac{1000\,\pi R^2 H^2}{6} \approx 21$ *кГм*.

1735. 1241 *кГм* 1736. 0,024 π *кГм*. 1737. $t = \int\limits_0^H \frac{S\,dx}{0{,}6\,s\sqrt{2gx}} =$ $= 100$ сек. 1738. $t = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}}\int\limits_h^{H+h} x\sqrt{x}\,dx$, бунда $h \approx 2$ — қўшимча конуснинг баландлиги. Ҳисоблаш натижасида $t \approx 42$ сек. га эришамиз. 1739. $\frac{ah^2}{3}$. 1740. $17\frac{1}{15}$. 1741. $\frac{h}{\sqrt{2}}$. 1742. Ҳар бир деворга босим 2,4 m. **1743.** $I_x = \int\limits_0^a y^2 x\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{\pi a^4}{16}$.

1744. $x_c = 0$; $y_c = \frac{\int\limits_0^2 y^2\,dx}{2\int\limits_0^2 y\,dx} = \frac{8}{5}$. **1745.** $\frac{\pi R^2 \cdot 1000}{H^2} \int\limits_0^H (H-x)^2\,x\,dx \approx$

$\approx 30\pi$ $кГм$. **1746.** $\frac{p_0 v_0}{k-1}\left[\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1} - 1\right] \approx 1598$ $кГм$. **1747.** $t =$
$= \frac{14\pi R^2}{15 \cdot s \cdot 0{,}8}\sqrt{\frac{R}{2g}} = \frac{400\pi}{3} \approx 419$ сек. **1748.** 1) 1; 2) ва 3) интеграллар узоқлашувчи; 4) $n > 1$ бўлганда $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}$; $n < 1$ бўлганда узоқлашади. **1749.** 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) 1; 5) $\ln 2$; 6) 16
1750. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$; 3) $\frac{\pi - 2}{8}$. **1751.** 1) $6\sqrt[3]{2}$; 2) узоқлашади 3) 6. **1752.** 1) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ яқинлашади, чунки $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{x^{3/2}}$;
$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ эса яқинлашади. (1748- масалага қар.); 2) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ узоқлашади, чунки $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}} > \frac{1}{x}$. $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x}$ эса узоқлашади; 3) $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$ яқинлашади, чунки $x \geqslant 1$ бўлганда $\frac{e^{-x}}{x} \leqslant e^{-x}$, $\int\limits_1^\infty e^{-x}\,dx$ эса яқинлашади (1749- масалага қар.); 4) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^2}$ абсолют яқинлашади, чунки $\frac{|\sin x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$, $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x_0}$ яқинлашади (1748- масалага қар.);
5) $\int\limits_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$ узоқлашади, чунки $x > 1$ бўлганда $\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} >$

$> \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}}, \int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2}}$ эса узоқлашади; б) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx +$
$+ \int\limits_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ яқинлашади, чунки $x \geqslant 1$ бўлганда $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$,
$\int\limits_1^{\infty} e^{-x}dx$ эса яқинлашади. 1753. 1) $n < 1$ бўлганда $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^x} = \frac{1}{1-n}$;
$n \geqslant 1$ бўлганда узоқлашади. 2) $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \frac{(b-a)^{1-n}}{1-n}$, $n < 1$ бўлганда, $n \geqslant 1$ бўлганда узоқлашади. 1754. π. 1755. 2. 1756. $3\pi a^2$.
1757. $2\pi^2 a^3$. 1758. $\pi[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$. 1759. $\frac{4\pi}{3}$. 1761. $\frac{1}{2}$;
2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) узоқлашади. 1762. 1) $\ln(1+\sqrt{2})$; 2) 2; 3) $1-\frac{\pi}{4}$.
1763. $\frac{1}{2}$. 1764. 16π. 1765. 2π. 1766. 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) $\frac{3\ln 2}{\pi}$; 3) $\frac{1}{e-1}$;
4) $\frac{a^2+ab+b^2}{3}$; 5) $\frac{\pi}{4}$. 1768. 1) $\varepsilon(h) = (0,2)$ $|\varepsilon(h) \leqslant \frac{4}{15} < 0,3$.
1770. $\frac{55}{6}\pi \approx 28,8$ $дм^3$. 1772. $\ln 2 = 0,6932$; $|\varepsilon(h) \leqslant \frac{2\cdot 10^{-4}}{15} < 0,0001$.
1773. 8, 16π. 1777. $\approx 1,22\pi$. 1778. $R = \frac{1}{2}$. 1779. $R = \frac{1}{2}$. 1780. (2; 0) учида $R_1 = \frac{1}{2}$; (0; 1) учида $R_2 = 4$. 1781. $R = 4a$. 1782. $y_{\max} = \frac{1}{e}$, $x=1$ бўлганда; $R = e$. 1783. (4;4). 1784. (3; -2). 1785. (0; 1). 1786. $27X^2 + 8Y^3 = 0$. 1787. $(2X)^{2/3} + Y^{2/3} = 3^{2/3}$. 1788. $X^{2/3} - Y^{2/3} = (2a)^{2/3}$
1789. $X = a\cos t$; $Y = a\sin t$ ёки $X^2 + Y^2 = a^2$. 1790. $k = e^x(1+e^{2x})^{-3/2}$;
$k_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ $x = -\frac{\ln 2}{2} \approx -0,347$ нуқтада. 1792. 1) $R = \frac{2}{3}\sqrt{2ar}$;
2) $\frac{a^2}{3r}$; 3) $\frac{r^3}{a^2}$. 1793. $\frac{1}{2}$. 1794. 2. 1795. 1. 1796. 1 1797. (-2; 3)
1798. $\left(0; -\frac{4}{3}\right)$. 1799. $\left(-\frac{11}{2}; \frac{16}{3}\right)$. 1800, $X = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \approx -0,7$,
$Y = -\sqrt{2} \approx -1,4$. 1801. $8X^3 - 27Y^2 = 0$. 1802. $X = -t\left(1+\frac{t^2}{2}\right)$.
$Y = 4t\left(1+\frac{t^2}{3}\right)$; эгри чизиқ ва унинг эволютасини ясаш учун $t = 0$; ± 1; $\pm\frac{3}{2}$ бўлганда x, y, X, Y ларнинг жадвалини тузиш керак. 1803. $(X+Y)^{\frac{2}{3}} - (X-Y)^{\frac{2}{3}} = 4$. 1804. $(X+Y)^{\frac{2}{3}} + (X-Y)^{\frac{2}{3}} =$

$=2a^{\frac{2}{3}}$; ўқларни $45°$ га бурганда бу тенглама $x_1^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{2}{3}}=(2a)^{\frac{2}{3}}$ кўринишига келади, яъни астроиданинг эвалютаси, ўлчовлари икки баравар ошган ва $45°$ га бурилган астроида бўлади. 1806. 21. 1807. $5t$. 1808. 7,5. 1809, 2π. 1810. $2\,\mathrm{sh}\,1\approx 2{,}35$. 1811. $\frac{3+\ln 2}{2}$.

1812. $3x+4y=0$; $\frac{dr}{dt}=4i-3j$. 1813. $y=\frac{4}{3}x-\frac{x^2}{9}$; $\frac{dr}{dt}=3i+2(2-t)j$.

1814. $w=\frac{d^2r}{dt^2}=-2j$; $w_\tau=\frac{4\,|t-2|}{\sqrt{4t^2-16t+25}}$; $w_n=\frac{6}{\sqrt{4t^2-16t+25}}$;

$t=0$ бўлганда $w_\tau=1{,}6$; $w_n=1{,}2$. 1815. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $v=-a\sin t\,i+$

$+b\cos t\,j$; $w=-r$. 1816. $\frac{x-t}{1}=\frac{y-t^2}{2t}=\frac{z-t^3}{3t^2}$. 1817. $\frac{X-x}{1}=$

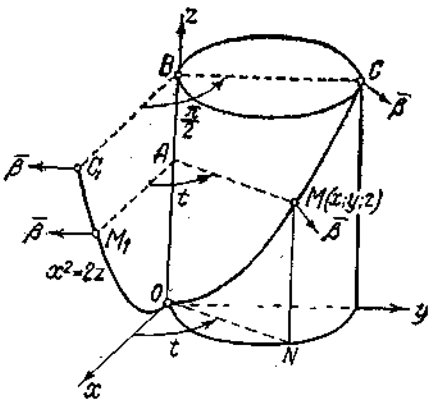
$=\frac{Y-x^2}{2x}=\frac{Z-\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$. 1818. $\frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}$. 1819. $\dot{r}=$

$=-i+k$, $B=i+k$, $N=-2j$; $\tau=\frac{-i+k}{\sqrt{2}}$, $\beta=\frac{i+k}{\sqrt{2}}$, $\nu=-j$.

1820. $B=\dot{r}\times\ddot{r}=6i-6j+2k$, $N=(\dot{r}\times\ddot{r})\times\dot{r}=-22i-16j+$ $+18k$, бош нормалнинг тенгламалари: $\frac{x-1}{11}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{-9}$; бинормаль: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}$ ва ёпишма текислик: $3x-3y+z=1$.

1821. $N=3(i+j)$, $B=-i+j+2k$. Бош нормалнинг тенгламалари $x=y$, $z=0$; бинормаль: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$. 1822. t ни йўқотиб, конус сиртнинг тенгламасини $x^2+y^2=z^2$ кўринишда ҳосил қиламиз. $\dot{r}=(\cos t-t\sin t)\,i+(\sin t+t\cos t)\,j+k=i+k$; $\ddot{r}=(-2\sin t-$ $-t\cos t)\,i+(2\cos t-t\sin t)\,j=2j$; $B=\dot{r}\times\ddot{r}=2i+2k$, $N=4j$. Уринма: $x=z$ ва $y=0$ бош нормаль: Oy ўқи; Бинормаль: $x+z=0$ ва $y=0$. 1823. $t=\frac{\pi}{2}$ бўлганда $\frac{x}{-a}=\frac{z-\frac{b\pi}{2}}{b}$, $y=a$.

1824. $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\cos\beta=\pm\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\cos\gamma=$ $=\pm\frac{\sqrt[4]{4ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; ишорани танлаш эгри чизиқнинг ҳар бир шохчасидаги йўналишни танлашга боғлиқ. 1825. $x=\sin 2t$, $y=1-\cos 2t$, $z=2t^2$ винт чизиғининг тенгламаларидир, бунда t — бурилиш бурчаги (48- чизма). $\left(t=\frac{\pi}{2}\text{ бўлганда}\right)$ C нуқтадаги бирлик бинормаль вектор $\beta=$ $=\frac{\pi i+j+k}{\sqrt{2+\pi^2}}$. 1826. $t=\frac{\pi}{2}$ бўлганда $v=a(i+j)$, $\omega=ai$. 1827.



48- чизма.

$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-8}{8}$. 1828. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}$ ва $z=3$. 1829. $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$. 1830. 120°, 60°, 45°. 1831. $N=-26i-31j+22k$, $B=16i-12j+2k$; $\frac{x-1}{26}=\frac{y-1}{31}=\frac{z-1}{-22}$; $\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z-1}{1}$. 1832. $N=-4j-4k$, $B=2j-2k$. Бош нормаль тенгламалари: $x=\pi$, $z=y+2$; бинормаль: $x=\pi$, $y+z=6$ 1834. $v=\dot{r}=i+(1-2t)j$, $w=\ddot{r}=-2j$, $\frac{1}{R}=\frac{|V+\omega|}{v^3}=\frac{2}{v^3}$; $v=\sqrt{2-4t+4t^2}$; $w_\tau=\dot{v}=\frac{4t-2}{\sqrt{2-4t+4t^2}}=-\sqrt{2}$. $w_n=\frac{v^2}{R}=\frac{2}{v}=\sqrt{2}$. 1835. $v=\dot{r}=-4\sin t\, i+3\cos t\, j=\frac{-4i+3j}{\sqrt{2}}$, $w=\ddot{r}=-\frac{4i+3j}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{R}=\frac{12}{v^3}$ $v=\sqrt{16\sin^2 t+9\cos^2 t}$, $\dot{v}=\frac{7\sin 2t}{2v}$; $t=\frac{\pi}{4}$ бўлганда $v=\frac{5}{\sqrt{2}}$, $w_\tau=\dot{v}=\frac{7}{5\sqrt{2}}=0{,}7\sqrt{2}$, $w_n=\frac{v^2}{R}=\frac{12}{v}=\frac{12\sqrt{2}}{5}=2{,}4\sqrt{2}$. 1836. $v=\dot{r}=i+2tj+2t^2k$, $w=2j+4tk$, $v=2t^2+1$, $\frac{1}{R}=\frac{|v\times\omega|}{v^3}=\frac{2}{(2t^2+1)^2}=\frac{2}{9}$; $w_\tau=\dot{v}=4t=4$, $w_n=\frac{v^2}{R}=\frac{2(2t^2+1)}{(2t^2+1)^2}=2$ (ихтиёрий нуқтада). 1837. Аввал векторлар координаталарининг ушбу матрицасини тузамиз:

$$\begin{array}{l|lll|}
r & t & t^2 & t^3 \\
\dot r & 1 & 2t & 3t^2 \\
\ddot r & 0 & 2 & 6t \\
\dddot r & 0 & 0 & 6 \\
\dot r \times \ddot r & 6t^2 & -6t & 2
\end{array}$$

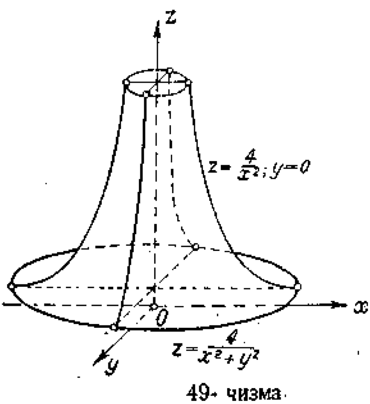
Сўнгра топамиз:

1) $|\dot r| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$

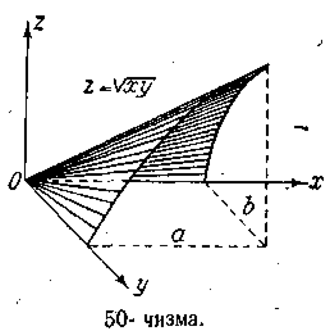
2) $|\dot r \times \ddot r| = 2\sqrt{9t^4+9t^2+1}$; 3) $\dot r\ \ddot r\ \dddot r = 12$; 4) $\frac{1}{R} = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{\sqrt{(1+4t^2+9t^4)^3}} = 2$; 5) $\frac{1}{\rho} = \frac{12}{4(9t^4+9t^2+1)} = 3$. **1838.** $\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. **1839.** $\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{3}$.

1840. «Ўнг» винт чизиғида: $\frac{1}{\rho} = \frac{b}{a^2+b^2}$; «чапда»: $\frac{1}{\rho} = -\frac{b}{a^2+b^2}$.

1841. $\frac{1}{R} = \frac{2t}{(2t^2+1)^2} = \frac{2}{9}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{2t}{(2t^2+1)^2} = -\frac{2}{9}$. **1842.** $r = \frac{y^2}{1}i + yj = \frac{y^4}{4}k$; $\frac{1}{R^2} = \frac{9y^4+4y^6+1}{(y^2+1+y^6)^3} = \frac{14}{27}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{3}{7}$. **1843.** $\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{3}$. **1844.** 3) (0, 0) нуқтадан бошқа бутун текислик; 4) $x^2+y^2 \leqslant a^2$; 5) $xy > 0$ (биринчи ва учинчи квадрантлар); 6) $x^2+y^2 < 1$; 7) тўғри чизиқдан бошқа бутун текислик. 1) ва 2) тенгламалар айланма параболоидларни аниқлайди; 3) $z = \frac{4}{x^2}$ ва $y = 0$ эгри чизиқнинг Oz ўқи атрофида айланишдан ҳосил бўлган айланма сирт (49- чизма); 4) ярим сфера; 5) конус, буни тасвирлаш учун $x = a$, $z^2 = ay$ ва $y = b$, $z^2 = bx$ — параболалардан иборат кесимларни олиш керак (50- чизма); 6) $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = 0$ эгри чизиқнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт; 7) Ясовчилари $y = kx$, $z = \frac{kx}{k-1}$, йўналтирувчилари эса асимптотала-

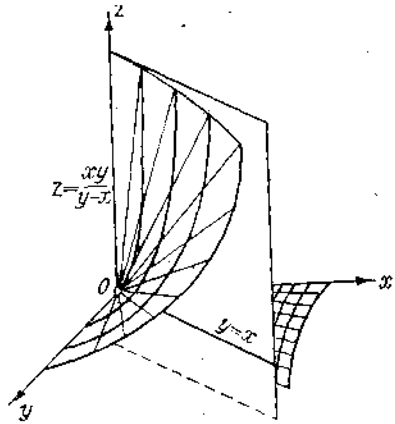


49- чизма.



50- чизма.

ридан бири $y=x(x=h,\ \ y=h)$ текисликда ётган ва учлари Oy ўқда бўлган $y=h$, $(x-h)(z+h)=-h^2$ тенг томонли гиперболалардан иборат конус: олдингига ўхшаш гиперболалар $x=h$ ва $z=h$ кесимда ҳам ҳосил бўлади (51- чизма).



51- чизма.

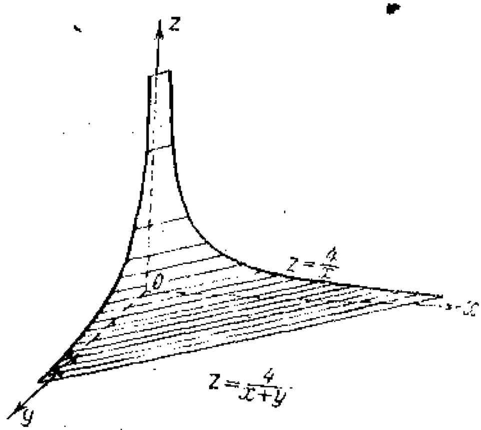
1845. $s=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$. $0<x<p$, $0<y<p$ ва $x+x>p$. Функциянинг мавжудлик соҳаси, яъни $x=p$, $y=p$ ва $x+y=p$ чизиқлар билан чегараланган учбурчак ичида нуқталар тўплами. 1848. $\Delta_x z=(2x-y+\Delta x)\Delta x=0{,}21$; $\Delta_y z=(2y-x+\Delta y)\times\Delta y=-0{,}19$; $\Delta z=\Delta_x z+\Delta_y z-\Delta x\Delta y=0{,}03$. 1849. $|y|\leqslant|x|$ соҳада узлуксиз ва бир қийматли бўлганда $z=+\sqrt{x^2-y^2}$ ва $z=-\sqrt{x^2-y^2}$ функциялар айланма конуснинг (Ox ўқ билан) юқори ва қуйи сиртлари билан тасвирланади. $z=\pm\sqrt{x^2-y^2}$ тенглама билан аниқланувчи узлукли функцияга мисол сифатида қуйидагиларни келтириш мумкин:

$$z=\begin{cases}+\sqrt{x^2-y^2}, & 0\leqslant x<1\\ -\sqrt{x^2-y^2}, & 1\leqslant x<2\\ +\sqrt{x^2-y^2}, & 2\leqslant x<3\end{cases}$$

бўлганда $x=1$, $x=1$ ва ҳ. к. тўғри чизиқлар — узилиш чизиқлари ва ҳоказо.

Бу функциянинг тасвири конуснинг юқори ва қуйи сиртларидан кетма-кет олинган полосалар бўлади. Функциянинг аниқланиш соҳаси $|y|\leqslant|x|$, яъни $y=\pm x$ тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчакнинг ичида ва тўғри чизиқларда ётувчи нуқталар тўплами. 1854. 2) $y=-x$ тўғри чизиқдан бошқа бутун текислик; 3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс ичида ва унда ётувчи нуқталар; 4) бутун текислик; 5) $|y|\leqslant|x|$ бурчак ичидаги ва унинг томонларидаги нуқталар; 6) текисликнинг $x\geqslant 0$ ва $y\geqslant 0$ квадранти, (2) текислик ясовчилари $z=h$, $x+y=\frac{4}{h}$ ва йўналтирувчиси $z=\frac{4}{x}$, $y=0$ бўлган цилиндрик сирт

(52- чизма). (5) ва (6) сиртлар — конус сиртлардир; (4) эса — параболоиддир. 1858. $3x(x+2y)$; $3(x^2-y^2)$. 1860. $-\frac{y}{x^2}$; $\frac{1}{x}$. 1861. $\frac{-y}{x^2+y^2}$; $\frac{x}{x^2+y^2}$. 1862. $-\frac{y^2}{(x-y)^2}$; $\frac{x^2}{(x-y)^2}$. 1863. $\frac{\sqrt[3]{t}}{3x\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{t}\right)}$;



52- чизма.

$\frac{\sqrt[3]{x}}{3t\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{x}\right)}$. 1864. $\frac{\partial c}{\partial a}=\frac{a-b\cos\alpha}{c}$; $\frac{\partial c}{\partial b}=\frac{b-a\cos\alpha}{c}$; $\frac{\partial c}{\partial \alpha}=\frac{ab\sin\alpha}{c}$. 1866. $\frac{\partial y}{\partial x}=e^{-xy}(1-xy)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2e^{-xy}$. 1867. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{5t}{(x+2t)^2}$; $\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{5x}{(x+2t)^2}$. 1868. $\frac{\partial \alpha}{\partial x}=\frac{t}{2\sqrt{x-x^2t^2}}$; $\frac{\partial \alpha}{\partial t}=\sqrt{\frac{x}{1-xt^2}}$.
1874. $\frac{\partial z}{\partial x}=-a\sin(ax-by)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=b\sin(ax-by)$. 1875. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y\,|x|}{x^2\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{|x|}{x\sqrt{x^2-y^2}}$. 1876. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3y}{(3y-2x)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3y}{(3y-2x)^2}$. 1877. $\frac{\partial u}{\partial x}=\operatorname{ctg}(x-2t)$; $\frac{\partial u}{\partial t}=-2\operatorname{ctg}(x-2t)$. 1878. $\frac{\partial u}{\partial x}=2\sin y\cos(2x+y)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2\sin x\cos(x+2y)$. 1885. 1) 0,075. 2) $-0{,}1e^2\approx-0{,}739$. 1887. $-0{,}1$. 1888. $1{,}2\pi$ дм³. 1889. 0,13 см; 1890. 1) $dz=-\left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)dy$; 2) $ds=\ln t\,dx+\frac{x\,dt}{t}$. 1891. $\Delta z=0{,}0431$, $dz=0{,}04$. 1892. 0,15. 1893. -30π см³. 1895. $\frac{dz}{dt}=-(e^t+e^{-t})=-2\operatorname{ch}t$. 1897. $\frac{dz}{dx}=e^y+xe^y\frac{dy}{dx}$. 1899.

$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{x}{y}\left(4+\frac{x}{y}\right)$. 1900. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}=$ $=m\frac{\partial z}{\partial u}+p\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=n\frac{\partial z}{\partial u}+q\frac{\partial z}{\partial v}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=x\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}$. 1901. $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi$; $\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi+\right.$ $\left.+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\right)r$. 1903. 1) $\frac{\partial z}{\partial t}=2\left[(Ax+By)\cos t-(Bx+Cy)\sin t\right]=$ $=(A-C)\sin 2t+2B\cos 2t$; 2) $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}$. 1906. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+$ $+\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}+\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}+\frac{\partial z}{\partial v}$.

1907. $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{2-x}{y+3}$. 1908. 1) $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$; 2) $\frac{2ye^{2x}-e^{2y}}{2xe^{2y}-e^{2x}}$, 1910. $\pm\frac{3}{4}$.

1911. -1. 1912. 1) $(-1; 3)$ ва $(-1; -1)$; 2) $(1; 1)$ ва $(-3; 1)$. 1913. $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=\frac{3-x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$. 1914. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2z}$. 1915. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{a}{c}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=\frac{b}{c}$. 1918. $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{x}{4y}$. 1919. $-\frac{y}{x}$. 1920. $\frac{x^2+xy+y^2}{xy}$.

1921. $\frac{1}{2}$. 1922. $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{5}$. 1923. $\frac{\partial z}{\partial x}=1$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x-z}$. 1926. 6; 2; 0; 6.

1929. $-\frac{6y}{x^4}$; $\frac{2}{x^3}$; 0; 0. 1931. $\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

1938. 1) $\frac{2}{x^4}\left(3y^2\,dx^2-4xy\,dx\,dy+x^2\,dy^2\right)$; 2) $-\frac{(y\,dx-x\,dy)^2}{xy^2}$.

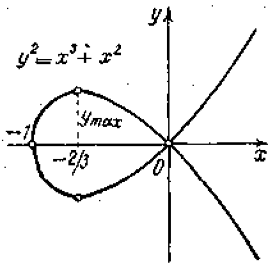
1942.
$$\begin{array}{ll|l}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(3\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z & =9\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+6\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} & 1\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\left(3\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)z & =3\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} & -4\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z & =\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} & 3\\
\hline
\frac{\partial^2 z}{dx^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & =-4\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}. &
\end{array}$$

1943. 1942-масаладагидай ёзиб, $4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ га эга бўламиз.

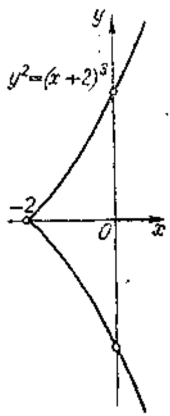
1945.
$$\begin{array}{l|l}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial z}{\partial v} & x^2\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} & -y^2\\
\hline
x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{2y}{x}\frac{\partial z}{\partial v}. &
\end{array}$$

1946. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. 1947. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{1-2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{4x}{(1-2y)^2}$;

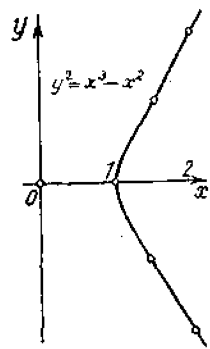
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(1-2y)^3}$. 1948. 0; 0; $\frac{4}{9t^2\sqrt[3]{t}}$; $-\frac{28x}{27t^3\sqrt[3]{t}}$. 1953. $d^2u =$
$= -\frac{y}{x^2}dx^2 + \frac{2}{x}dx\,dy$; $d^3u = \frac{2y}{x^2}dx^3 - \frac{3}{x^2}dx^2\,dy$. 1954. $4a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$.
1955. $-v^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{v^2}{u}\frac{\partial z}{\partial v}$. 1959. $u = \frac{x^2}{2} + x\ln y - \cos y + C$.
1962. $u = \frac{x}{z} + \frac{1}{x} + \ln y - \operatorname{arctg} z + C$. 1963. $u = xy^2 - y + \frac{3y^2}{2} + C$.
1964. $u = x\sin 2y + y\ln\cos x + y^2 + C$. 1965. $u = xy + \frac{\sin^2 y}{x} + y + C$.
1966. $u = \sqrt{x}\,(1 + \sqrt{t^2+1}) + C$. 1967. $u = x\ln y - x\cos 2z + yz + C$.
1968. $u = \frac{x-3y}{z} + C$. 1969. $y = \pm x\sqrt{1+x}$; жойлашиш соҳаси: $1 + x \geqslant 0$; $x \geqslant -1$. Ox ўқ билан кесишиш нуқталари: $y = 0$, $x = 0$ ёки -1 махсус нуқта $O(0, 0)$ — тугун. $x = -\frac{2}{3}$ бўлганда y нинг экстремуми $y_э = \mp\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx \mp\frac{2}{5}$ (53- чизма). 1970. $y = \pm(x+2) \times \times \sqrt{x+2}$; $x \geqslant -2$ жойлашиш соҳаси. $(-2; 0)$ махсус нуқта — қайтиш нуқтаси. Ўқлар билан кесишган нуқталар: $x = 0$ бўлганда $y = \pm \pm 2\sqrt{2}$; $y = 0$ бўлганда $x = -2$ (54- чизма. 1971. $y = \pm x\sqrt{x-1}$. Жойланиш соҳаси $x \geqslant 1$, $x = 0$, $y = 0$ — махсус яккаланган нуқта.



53- чизма.

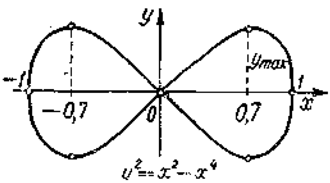


54- чизма.

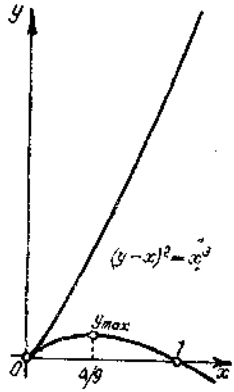


55- чизма.

$x = 1$ бўлганда $y = 0$, $x = 2$ бўлганда $y = \pm 2$. Букилиш нуқтаси: $x = \frac{4}{3}$, $y = \pm\frac{4}{3\sqrt{3}}$ (55- чизма). 1972. $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$; жойлашиш соҳаси $|x| \leqslant 1$ ёки $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Ўқлар билан кесишган нуқталари: $y = 0$ бўлганда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Махсус нуқта $O(0; 0)$ — тугун. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0,7$ бўлганда экстремумлар $y_э = \pm \frac{1}{2}$ (56-чизма). **1973.** $y = x \pm x\sqrt{x}$ Жойлашиш соҳаси $x \geqslant 0$; ўқлар билан кесишиш нуқталари: $y = 0$ бўлганда $x = 0$ ёки $x = 1$; махсус нуқта $O(0, \ 0)$ — уринмаси $y = x$ бўлган биринчи тур қайтиш нуқтаси. $y = x - x\sqrt{x}$ функция $x = \frac{4}{9}$ бўлганда $y_{max} = \frac{4}{27}$ экстремумга эга

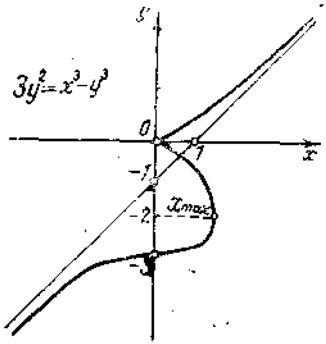


56- чизма.

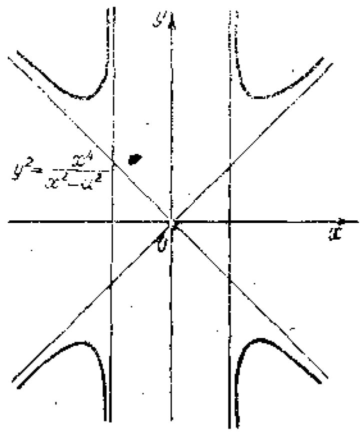


57- чизма.

(57-чизма); **1974.** $y = \pm(x-2)\sqrt{x}$; $x \geqslant 0$; $y = 0$ бўлганда $x = 0$ ёки $x = 2$; махсус нуқта (2; 0) — тугун. Эгри чизиқнинг шакли 53-чизмадагидай, фақат ўнг томонга силжиган. **1975.** $y = \pm(x+2a) \times \times \sqrt{-\frac{x+2a}{x}}$; эгри чизиқ x ва $x + 2a$ ҳар хил ишорага эга, яъни $-2a \leqslant x < 0$ бўлган соҳада жойлашган. Махсус нуқта $(-2a; \ 0)$ — қайтиш нуқтаси; $x = 0$ асимптота. Эгри чизиқнинг шакли 89-чизмадаги циссоидадай, фақат $2a$ га чапга силжиган. **1976.** $y = \pm\sqrt{\frac{x^3 - y^2}{3}}$; жойлашиш соҳаси $y \leqslant x$. Ўқлар билан кесишиш нуқталари: $x = 0$ бўлганда $y = 0$ ёки $y = -3$. Махсус нуқта (0; 0) — қайтиш нуқтаси. $y = kx + b$ кўринишдаги асимптотани топайлик. Тенгламанинг ҳадларини x^2 га бўлиб, $1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{1}{x} = 0$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3y^2}{x^2 + xy + y^2} = -1$. Шундай қилиб, асимптота $y = x - 1$ бўлади. $y = -2$ бўлганда $x = \varphi(y) = \sqrt[3]{y^3 + 3y^2}$ функциянинг экстремуми $x_э = \sqrt[3]{4} \approx 1,6$; $x = 0$ бўлганда $y = -3$ — букилиш (58-чизма). **1977.** $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Декарт япроғи (366-масалага қаранг). $O(0; 0)$ махсус нуқта — уринмалари $y = 0$ ва $x = 0$ бўлган тугун. $y = kx + b$ кўринишдаги асимптотасини топамиз. Бунда тенгламани $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3a\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = 0$ кўринишга келтирсак, бундан $k = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = -1$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y + x) =$

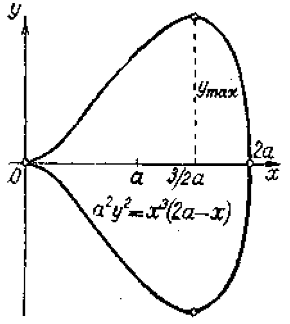


58- чизма.

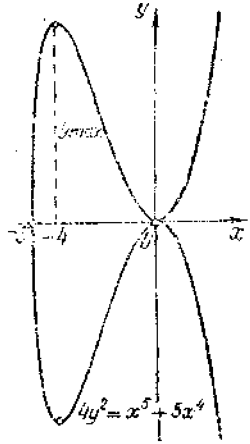


59- чизма.

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3axy}{x^2-xy+y^2}=-a$. Демак, $y=-x-a$ — асимптота (83- чизмага қаранг). 1978. $y=\pm\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$. Ox ва Oy ўқларига нисбатан симметрик. Жойланиш соҳаси $|x|>a$ ва $|y|>|x|$. $O(0, 0)$ — махсус яккаланган нуқта. $x=\pm a\sqrt{2}$ бўлганда $y=\pm 2a$ экстремум. Асимптоталар $x=\pm a$ ва $y=\pm x$ (59- чизма). 1979. $y=\pm x\sqrt{2-x}$; жойланиш соҳаси $x\leqslant 2$. $y=0$ бўлганда Ox ўқи билан кесишиш нуқталари $x_1=0$, $x_2=2$. Махсус нуқта $(0; 0)$ — тугун. $x=\frac{4}{3}$ бўлганда y нинг экстремуми $y_э=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\pm 1{,}08$. (Эгри чизиқнинг шакли 53- чизмадагидай.) 1980. $y=\pm\frac{x}{a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}$ жойланиш соҳаси $|x-a|\leqslant a$, ёки $-a\leqslant x-a\leqslant a$, ёки $0\leqslant x\leqslant 2a$. $y=0$ бўлганда $x_1=0$, $x_2=2a$. $(0; 0)$ нуқта махсус нуқта (қайтиш нуқтаси). $y'=0$ бўлганда $\sqrt{2ax-x^2}+\frac{x(a-x)}{\sqrt{2ax-x^2}}=0$, $x=\frac{3a}{2}$, $y_э=\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}a\approx\pm\frac{5}{4}a$ (60- чизма). 1981. $y=\pm(x+2)\sqrt{x}$. Жойланиш соҳаси $x\geqslant 0$ ва $(-2; 0)$ яккалашган нуқта. $x=\frac{2}{3}$ бўлганда қайрилиш нуқтаси. Эгри чизиқ 55- чизмадагидай, фақат чапга силжиган. 1982. Жойланиш соҳаси иккита: 1) $x>0$; 2) $x<-a$. Асимптоталар учта: $y=x+\frac{3a}{2}$, $y=-x-\frac{3x}{2}$ ва $x=0$. $(-a; 0)$ қайтиш нуқтаси.

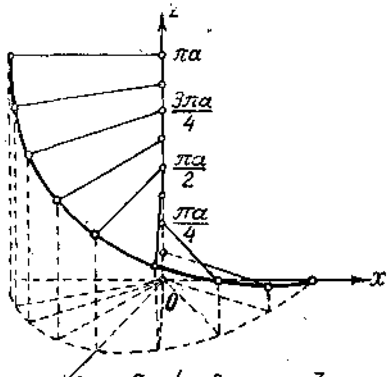


60- чизма.



61- чизма.

$x = \frac{a}{2}$ бўлганда y нинг экстремуми $y_э = \pm \frac{3\sqrt{3a}}{2} \approx \pm 2{,}6\,a$. **1983.** $y = \pm \frac{x^2}{2}\sqrt{x+5}$; $x \geqslant -5$. (0; 0) нуқта махсус — ўз-ўзига уриниш нуқтаси. y нинг экстремумлари: $x = -4$ бўлганда $|y|_{max} = 8$; $x = 0$ бўлганда $|y|_{min} = 0$ (61- чизма). **1984.** $y = \pm x\sqrt{x^2 - 1}$. Жойланиш соҳаси $|x| \geqslant 1$ ва $O(0;\ 0)$ яккалашган нуқта. Графиги 55- чизмадагидай, фақат чап томонда симметрик чизиқ қўшилиб олиниши керак. **1985.** $y = 0$ бўлганда $x_1 = 0$ ва $x_2 = -4$; $x = 0$ бўлганда $y_1 = 0$, $y_2 = -1$. (0; 0) махсус нуқта — оғмаликлари $k = \pm 2$ бўлган уринмаларга эга тугун. $x = -\frac{8}{3}$ бўлганда $y_{max} = 1{,}8$ ва $x = 0$ бўлганда $y_{min} = -1$. Асимптота $y = x + 1$. Эгри чизиқ асимптотани $x = -0{,}4$ да кесиб, сўнгра (0; 0) ва (0; -1) нуқталардан ўтиб илмоқ чизади. **1986.** 1) $y = \pm (x - a)\sqrt{\frac{x}{2a - x}}$; эгри чизиқ x ва $2a - x$ бир хил ишорага эга, яъни $0 \leqslant x < 2a$ соҳада жойлашган. (a; 0) махсус нуқта — оғмаликлари $k = \pm 1$ бўлган уринмаларга эга тугун. Асимптота $x = 2a$ (88- чизма); 2) $x = \pm \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}$; жойланиш соҳаси $|x| > a$ ва $|y| > a$ ва (0; 0) яккаланган нуқта. Асимптоталар $x = \pm a$ ва $y = \pm a$. $|x| > a$ ва $|y| > x$ бўлгани учун ҳар икки асимптота орасида махсус нуқтадан бошқа эгри чизиқнинг нуқталари йўқ. Эгри чизиқ $x = \pm a$ ва $y = \pm a$ асимптоталарга яқинлашувчи тўртта симметрик шохчалардан иборат. **1987.** 1) $y = \pm x\sqrt{\frac{a - x}{x + a}}$, $-a < x \leqslant a$. Ox ўқ билан кесишиш нуқталари: $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = a$. Махсус нуқта (0; 0) — тугун. $x = -a$ — асимптота. Эгри чизиқ строфоида бўлиб 88-чизмани Oy ўқ бўйича буклаб, сўнгра Oy ўқни a қадар чапга суришдан ҳосил бўлади. 2) Жойланиш соҳалари: $x \geqslant a$; $x < -a$ ва $x = 0$. (0; 0) нуқта — якkaланган. Асимптоталар $x = -a$, $y = a - x$ ва $y = x - a$. $x = -\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2} \approx -1{,}6a$ бўлганда $y_э \approx \pm 3{,}3a$. **1988.** 1) $y = -\frac{x^2}{4}$; 2) $y = \pm 2x$. **1989.** 1) $y = \pm R$; 2) $y = 0$ ва $y = -x$. **1990.** 1) $y = 1$; 2) $y = 1$ — ўрама бўлмасдан, қайтиш нуқталарнинг геометрик ўрнидир; 3) $y - 1$ ҳам ўрама, ҳам қайтиш нуқталарнинг геометрик ўрни; 4) $y = x - \frac{4}{3}$ — ўрама, $y = x$ — қайтиш нуқталарнинг геометрик ўрни. **1991.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **1992.** $y^2 = -\frac{x^3}{x+2}$. **1993.** $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy$. **1994.** $y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2b^2\cos^2\alpha}$ траекториялярнинг оиласи. Буларнинг ўрамаси $y = \frac{b^2}{2g} - \frac{gx^2}{2b^2}$ («хавфсизлик» параболаси). **1995.** 1) $x^2 + y^2 = b^2$; 2) $y^2 = 4x$; 3) $y = 1$. **1996.** $y^2 = 4(x+1)$. **1997.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. **1998.** $y = -\frac{4}{3}x^2$. **1999.** $2x + 4y - z = 3$. **2000.** $xy_0 + yx_0 = 2zz_0$. **2001.** $xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0y_0 = 3a^3$. **2002.** $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1$. **2003.** $x + y - z = \pm 9$. **2004.** $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{-5}$; (0; 0; 0) нуқтада. **2005.** $\cos\alpha = -\cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **2006.** $y = 0$, $x + z + 1 = 0$; сирт 323-бетдаги 49-чизмада тасвирланган. **2009.** $x - y + 2z = \frac{\pi a}{2}$ уринма текислик. Унинг координаталар бошидан узоқлиги $\frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$. Геликоид — «чизиқли» сирт. Тўғри чизиқлар $z = h$ кесимларда ҳосил бўлади. $z = 0$ бўлганда $y = 0$; $z = \frac{\pi a}{4}$ бўлганда $y = x$; $z = \frac{\pi a}{2}$ бўлганда $x = 0$; $z = \frac{3\pi a}{4}$ бўлганда $y = -x$; $z = \pi a$ бўлганда $y = 0$ (62-чизма). **2010.** $z = 0$ ва $x + y - z = \frac{a}{2}$. **2012.** $\frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}$. **2013.** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\cos\beta =$



Геликоид $y = x\operatorname{tg}\frac{z}{a}$

62-чизма.

$= -\frac{2}{3}$; $\cos\gamma = -\frac{1}{3}$. **2014.** $z + y - x = a$. текислик, $p = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
2016. 1) $z = 4$; 2) $2x + 2y + z = 6$. **2017.** $\operatorname{grad} z = -2xi - 2yj = -2(i + 2j)$. **2018.** 1) $\operatorname{grad} z = \frac{-i + j}{2x}$; 2) $\operatorname{grad} z = \frac{i + j}{2x}$.
2019. $\operatorname{grad} h = -\frac{x}{2} i - 2j$. **2020.** $\operatorname{tg}\varphi = |\operatorname{grad} z| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4xy}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0{,}79$. **2021.** $\frac{du}{dl} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **2022.** $\frac{du}{dl} = 2 + \sqrt{2}$; $\operatorname{grad} u = 2i + 2j + 2k$; $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{3}$. **2023.** $\operatorname{grag} u = \pm 4i$.
2024. $\frac{6}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **2025.** $\operatorname{grad} z = 0{,}32i - 0{,}64j$; $|\operatorname{grad} z| = 0{,}32\sqrt{5}$.
2026. $\frac{du}{dl} = \frac{yz + xz + xy}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$. **2027.** $\operatorname{grad} u = 2(xi + yj - zk)$; $|\operatorname{grad} u| = 2z\sqrt{2}$. **2028.** $\operatorname{grad} u = \frac{xi + yj + zk}{u}$; $|\operatorname{grad} u| = 1$ —ихтиёрий нуқтада. **2029.** $-\frac{3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **2030.** $z_{\min} = -1$, бунда $x = -4$, $y = 1$. **2031.** $z_{\max} = 12$, $x = y = 4$ бўлганда. **2032.** $z_{\min} = 0$, $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$ бўлганда. **2033.** Экстремум йўқ. **2034.** $z_{\min} = -\frac{2}{e}$ $x = -2$, $y = 0$ бўлганда. **2035.** $x = y = \frac{\pi}{3}$ бўлганда $z_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
2036. $x = y = 1$ бўлганда $z_{\min} = 2$. **2037.** $x = y = -2$ бўлганда $z_{\max} = -4$ ва $x = y = -2$ бўлганда $z_{\min} = 4$. **2038.** $x = y = \sqrt[3]{2V}$, $z = 0{,}5\sqrt[3]{2V}$. **2039.** $\left(\frac{8}{5}; \frac{3}{5}\right)$, $\left(-\frac{8}{5}; -\frac{3}{5}\right)$. **2040.** $x^2 - y^2 - 4 = 0$ шарт бажарилганда $z = d^2 = x^2 + (y - 2)^2$ функциянинг минимумини топиш керак. Изланган нуқта $(\pm\sqrt{5};\ 1)$ бўлади. **2041.** $R = 1$, $H = 2$. **2041.** 1) Учлари $(\pm 3; -1)$ ва $(0; 2)$ нуқталарда; 2) табиатдагидек нур A дан B га шундай ўтиши керакки, $\sin\alpha : \sin\beta = v_1 : v_2$ бўлсин. **2043.** $x = 0$ ва $y = 3$ бўлганда $z_{\min} = 9$. **2044.** $x = y = 2$ бўлганда $z_{\min} = 0$. **2045.** $x = 0$ ва $y = 0$ бўлганда $z_{\min} = 0$. **2046.** $x = 2$, $y = 4$ бўлганда $z_{\min} = 0$. **2047.** $x = y = \pm 1$ бўлганда $z_{\max} = 1$; $x = -y = \pm 1$ бўлганда $z_{\min} = -1$. **2048.** $V = 8$. **2049.** 1) $4x - y^2 = 0$ бажарилганда $d = \frac{x - y + 4}{\sqrt{2}}$ ёки $z = x - y + 4$ нинг минимумини топиш керак. Изланган нуқта $(1; 2)$; 2) $2ab$. **2050.** $R = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$.
2051. Интеграл чизиқларнинг тенгламалари: 1) $y = \frac{x^3}{3}$; 2) $y = x^3$; 3) $y = -\frac{x^3}{3}$. **2053.** $xy' = 2y$. **2054.** 1) $y^2 - x^2 = 2xyy'$; 2) $x^2 + y = xy'$. **2057.** $y = Cx$, $y = -2x$. **2058.** $xy = C$, $xy = -8$. **2059.** $x^2 + y^2 = C^2$, $x^2 + y^2 = 20$. **2060.** $y = Ce^x$, $y = 4e^{x+2}$. **2061.** $y = Ce^{\frac{1}{x}}$.

2062. $x+y=\ln C(x+1)\quad(y+1)$. 2063. $r=Ce^{\frac{1}{\varphi}}+a$. 2064. $s^2=$
$=\frac{t^2-1+Ct}{t}$. 2065. $y=Ce^{\sqrt{x}}$, $y=e^{\sqrt{x-2}}$. 2066. $y=\frac{C\sin^2 x-1}{2}$;
$y=2\sin^2 x-\frac{1}{2}$. 2067. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=C$; $y=-x$. 2068. Умумий интеграллар: 1) $y=C(x^2-4)$; 2) $y=C\cos x$. Биринчи тенгламанинг барча интеграл чизиқлари Ox ўқни $x=\pm 2$ да кесади, иккинчининг интеграл чизиқлари эса $x=(2n-1)\frac{\pi}{2}$ да кесади (*махсус* нуқталар). 2069. $y=\frac{x^3}{3}$. 2070. $\int\limits_0^x ydx=a\int\limits_0^x\sqrt{1+y'^2}\,dx$, бундан
$y=a\sqrt{1+y'^2}$, $y'=\pm\sqrt{\frac{y^2}{a^2}-1}$; $y=a\operatorname{ch}u$ десак, у вақтда $a\operatorname{sh}u\cdot u'=\pm\operatorname{sh}u$. Бундан: 1) $\operatorname{sh}u=0$, $\operatorname{ch}u=1$, $y=a$; 2) $a\,du=$
$=\pm dx$, $au=\pm(x+c)$, $y=a\operatorname{ch}u=a\operatorname{ch}\frac{x+c}{a}$; $x=0$ бўлганда $y=a$ ва $C=0$. Шундай қилиб, ёки $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ — занжир чизиқ, ёки $y=a$ — тўғри чизиқ. 2071. $y^2=ax$. 2072. $y^2=4(x+2)$. 2073. 40 мин. *Ечиш.* t секунддан кейин жисмнинг температураси T бўлсин; $\frac{dT}{dt}=-k(T-20^\circ)$, бунда k — ҳозирча номаълум пропорционаллик коэффициенти; $\ln(T-20^\circ)=-kt+C$; $t=0$ бўлганда $T=100^\circ$, шунинг учун $C=\ln 80^\circ$, $kt=\ln\frac{80^\circ}{T-20^\circ}$; бунга $T_1=25^\circ$ ва $T_2=60^\circ$ ларни қўйиб, ҳадма-ҳад бўлиш натижасида k йўқотилади: $\frac{kt}{k\cdot 10}=\frac{\ln 16}{\ln 2}$, $t=40$. 2074. $\sum X_i=-H+T\cos\alpha=0$,
$\sum Yi=-px+T\sin\alpha=0$; бундан $\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{px}{H}$, $y=\frac{p}{2H}x^2+$
$+C$ (парабола). 2075. Уринманинг тенгламаси. $Y-y=y'(X-x)$ $Y=0$ деб, уринманинг Ox ўқ билан кесишган A нуқтасини топамиз: $X_A=x-\frac{y}{y'}$. Шартга асосан $X_A=2x$; $x=-\frac{y}{y'}$; бу дифференциал тенгламани ечиб, изланган эгри чизиқни топамиз: $xy=$
$=-a^2$ (гипербола). 2076. $x^2+2y^2=c^2$. 2077. $y^2-x^2=C$.
2078. $2x^2+3y^2=3a^2$. 2079. $y=Cx^4$. 2080. $y=Ce^{-\frac{1}{x^2}}$. 2081. $2y=$
$=\frac{Cx^2}{(1+x)^2}-1$. 2082. $y=C(x+\sqrt{x^2+a^2})$. 2083. $y=\frac{C-x}{1+Cx}$.
2084. $r=C\cos\varphi$, $r=-2\cos\varphi$. 2085. $\sqrt{y}=x\ln x-x+C$, $\sqrt{y}=$
$=x\ln x-x+1$. 2086. $y=\frac{C\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$.
2087. $xy=-1$. 2088. $y=ae^{\frac{x}{a}}$. 2089. $y=\frac{2x}{1-x}$. 2090. $x^2y=C$.

2091. Радиус-вектор $OM = \sqrt{x^2+y^2}$, норма кесмаси $MN = \frac{y}{\cos\alpha} = y\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = y\sqrt{1+y'^2}$. Изланган чизиқ $x^2+y^2=C^2$ (айлана) ёки $x^2-y^2=C$ (гипербола). **2092.** $y=Cx^2$. **2093.** $y-x=Ce^{\frac{x}{y-x}}$. **2094.** $x^2-y^2=Cx$. **2095.** $s^2=2t^2\ln\frac{C}{t}$. **2096.** $y=Cx^3-x^2$. **2097.** $y=\frac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$. **2098.** $y=\frac{C-\cos 2x}{2\cos x}$. **2099.** $y=\frac{1}{x\ln Cx}$. **2100.** $y^2=\frac{e^{x^2}}{2x+C}$. **2101.** $\sin\frac{y}{x}+\ln x=C$. **2102.** $y=\frac{x}{C-\ln x}$. **2103.** $y=\ln x+\frac{C}{x}$. **2104.** $y^3=\frac{3}{2x}+\frac{C}{x^3}$. **2105.** $x=\frac{x^2-1}{2}$. **2106.** $s=Ct^2+\frac{1}{t}$; $s=2t^2+\frac{1}{t}$. **2107.** $y=xe^{Cx}$; $y=xe^{-\frac{x}{2}}$. **2108.** $(x-y)^2=Gy$. **2109.** $x^2+y^2=2Cy$. **2110.** $i=\frac{kt}{R}+\frac{kL}{R}\left(e^{-\frac{R}{L}t}-1\right)$. **2111.** $Y-y=y'(X-x)$, уринма тенгламасида $X=0$ деб $V_0=-ON=y-xy'$, $ON=xy'-y=OM=\sqrt{x^2+y^2}$ ни топамиз. Бундан $y=\frac{x^2-C^2}{2C}$.

Кўзгу айланиш параболоиди бўлиши керак. **2112.** $y^2=Cxe^{-\frac{y}{x}}$. **2113.** $y=\frac{\ln C(x+\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^2+x^2}}$. **2114.** $x>0$ бўлганда $\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln\frac{C}{x}$, $x<0$ бўлганда $\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln Cx$. **2115.** $y=\frac{x-1}{3}+\frac{C}{\sqrt{2x+1}}$. **2116.** $y=1+\frac{\ln C\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\cos x}$. **2117.** $s=t^3(\ln t-1)+Ct^2$. **2118.** $y^2=\frac{1}{1+Ce^{x^2}}$. **2119.** $y=2(\sin x-1)+Ce^{-\sin x}$. **2120.** $y=\frac{2x}{1-Cx^2}$; $y=\frac{2x}{1-3x^2}$. **2121.** $y^3=x+Ce^{-x}$; $y^3=x-2e^{1-x}$. **2122.** $y=\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}-1}$. **2123.** $(x-a)^2+y^2=a^2$. **2124.** $y=\frac{\ln Cx}{x}$. **2125.** $y^3=x(Cy-1)$. **2126.** $xy=\frac{y^4}{4}+C$. **2127.** $\frac{x}{y}+\frac{y^2}{2}=C$. **2128.** $y=\cos x+\frac{C}{\sin x}$. **2129.** $s=\frac{t}{C+t-t\ln t}$. **2130.** $x^2y^2+2\ln x=C$. **2131.** $s=\frac{Ct-1}{t^2}$. **2132.** $y=x^2+Cx$. **2133.** $\sin y=x+\frac{C}{x}$. **2134.** $y=\frac{x}{C+2e^{-\frac{x}{2}}}$. **2135.** $4x^2+y^2=Cx$.

2136. $x^3e^y - y = C$. 2137. $y + xe^{-y} = C$. 2138. $x^2\cos^2 y + y = C$.

2139. $\mu = \frac{1}{x^2}$; $x + \frac{y}{x} = C$. 2140. $\ln\mu = \ln\cos y$; $x^2\sin y + \frac{1}{2}\cos 2y = C$. 2141. $\mu = e^{-2x}$; $y^2 = (C - 2x)e^{2x}$. 2142. $\mu = \frac{1}{\sin y}$; $\frac{x}{\sin y} + x^3 = C$. 2143. $x^3 + 2xy - 5y = C$. 2144. $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = C$. 2145. $\frac{x^2\cos 2y}{2} + x = C$. 2146. $\mu = \frac{1}{y}$; $xy - \ln y = 0$. 2147. $\mu = \frac{1}{x^4}$; $y^2 = Cx^3 + x^2$ 2148. $\mu = e^{-y}$; $e^{-y}\cos x = C + x$. 2149. $\ln\mu = -\ln x$; $\mu = \frac{1}{x}$; $x\sin y + y\ln x = C$.
2150. $y = (C \pm x)^2$. $M(1,4)$ нуқтадан $y = (1 + x)^2$ ва $y = (3 - x)^2$ чизиқлар ўтади. 2151. $y = \sin\ (C \pm x)$. $M\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ нуқтадан $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ва $y = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$ чизиқлар ўтади. 2152. $y = Cx^2 + \frac{1}{C}$; махсус интеграллар $y = \pm 2x$. 2153. 1) $y = x + C$ ва $x^2 + y^2 = C^2$; 2) $x\left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} \pm 1\right)^2 = C$ ёки $(y - C)^2 = 4Cx$. Махсус интеграллар $x = 0$ ва $y = -x$. Параболаларнинг жойланиш соҳалари: $x > 0$ бўлганда $y \geqslant -x$, $x < 0$ бўлганда $y < -x$. Параболалар Oy ўққа ва $y = -x$ чизиққа уринади. 2154. 1) $y = 1 + \frac{(x - C)^2}{4}$; махсус интеграл $y = 1$; 2) $x = 2p - \frac{1}{p^2}$. $y = p^2 - \frac{2}{p} + C$. 2155. 1) $y = (C + \sqrt{x + 1})^2$; махсус интеграл $y = 0$; 2) $x = Ct^2 - 2t^3$; $y = 2Ct - 3t^2$, бунда $t = \frac{1}{p}$; 3) $Cy = (x - C)^2$, махсус интеграллар $y = 0$ ва $y = -4x$. 2156. 1) $y = Cx - C^2$; махсус интеграл $y = \frac{x^2}{4}$; 2) $y = Cx - a\sqrt{1 + C^2}$; махсус интеграл $x^2 + y^2 = a^2$; 3) $y = Cx + \frac{1}{2C^2}$; махсус интеграл $y = 1{,}5x^{\frac{2}{3}}$. 2157. $y = 1 - \frac{(x + C)^2}{4}$; $M\left(1;\ \frac{3}{4}\right)$ дан икки: $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ ва $y = x - \frac{x^2}{4}$ эгри чизиқ ўтади.
2158. 1) $x = 2p + \frac{3}{2}p^2 + C$; $y = p^2 + p^3$; 2) $x^2 + (y + C)^2 = a^2$.
2159. $y = -\frac{x^2}{4} + Cx + C^2$; $y = -\frac{x^2}{2}$. 2160. 1) $y = Cx + \frac{1}{C}$, махсус интеграл $y^2 = 4x$; 2) $y = C(x + 1) + C^2$, $y = -\frac{(x + 1)^2}{4}$. 2161. $Y - y = y'\ (X - x)$ уринманинг ўқлардаги

кесмалари: $X_A = x - \frac{y}{y'}$, $Y_B = y - xy'$. Шартга кўра $\frac{X_A \cdot Y_B}{2} = 2a^2$; $(y - xy')^2 = -4a^2 y'$, $y = xy' \pm \sqrt{-4a^2 y'}$ — бу эса Клеро тенгламасидир. $y = -Cx + 2a\sqrt{C}$ оиланинг ихтиёрий тўғри чизиғи ва шунингдек $xy = a^2$ махсус интеграл билан аниқланган эгри чизиқ масаланинг ечими бўлади. **2162.** Парабола $(y - x - a)^2 = 4ax$. **2163.** 1) $y = 3\ln x + 2x^2 - 6x + 6$; 2) $y = -1\cos 2x$; 3) $y = C_1 x + x\operatorname{arc\,tg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C^2$. **2164.** $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2$. **2165.** $y^2 = C_1 x + C_2$. **2166.** $y = C_1 \sin x - x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_2$. **2167.** $y^3 + C_1 y + C_2 = 3x$. **2168.** $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$. **2169.** $\operatorname{ctg} y = C_2 - C_1 x$. **2170.** 1) $y = e^x(x-1) + C_1 x^2 + C_2$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2$ $(C_1 > 0$ бўлганда). $\frac{1}{2\sqrt{-C_1}} \left| \frac{x - \sqrt{-C_1}}{x + \sqrt{-C_1}} \right| + C_2$ $(C_1 <$ бўлганда), $C_2 - \frac{1}{x}$ $(C_1 = 0$ бўлганда). **2171.** $y'' = \frac{P}{EI}(l - x)$. $x = 0$ бўлганда $y = 0$ ва $y' = 0$, $y = \frac{P}{2EI}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$ — эгилиш эгри чизиғининг тенгламаси. **2172.** $C_1 y = \frac{(C_1 x + C_2)^2}{4} + 1$. **2173.** $y = a\operatorname{ch}\frac{(x-b)}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{\frac{x-b}{a}}\right)$. **2174.** $y = \frac{x^3}{6}$. **2175.** $y = C_1 x + C_2 - \ln\cos x$; хусусий интеграл $y = \ln(\cos x)$. **2176.** $y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + C_1 \operatorname{arc\,tg} x + C_2$. **2177.** $C_1 y^2 = 1 + (C_1 x + C_2)^2$. **2178.** $y = (C_1 x + C_2)^3$. **2179.** $s = -\frac{t^2}{4} + C_1 \ln t + C_2$. **2180.** $4(C_1 y - 1) = (C_1 x + C_2)^2$, **2181.** $y = C_2 - C_1 \cos x - x$. **2182.** 2177 га қар. **2183.** $y = -\ln\cos x$. **2184.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. **2185.** $y = (C_1 + C_2 x)\,e^{2x}$. **2186.** $y = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$. **2187.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} = A\operatorname{ch} 2x + B\operatorname{sh} 2x$. **2188.** $y = A\cos 2x + B\sin 2x = a\sin(2x + \varphi)$. **2189.** $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$. **2190.** $x = C_1 e^t + C_2 e^{-4t}$. **2191.** $\rho = A\cos\frac{\varphi}{2} + B\sin\frac{\varphi}{2}$. **2192.** $s = e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$; $s = e^{-t}(\cos t + 2\sin t)$. **2193.** $y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)\,e^{2x}$. **2194.** $y = C_1 \operatorname{ch} 2x + C_2 \operatorname{sh} 2x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$. **2195.** $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos x\sqrt{3} + C_3 \sin x\sqrt{3})$. **2196.** $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\,e^{-ax}$. **2197.** $y = A\sin x\operatorname{sh} x + B\sin x\operatorname{ch} x + C\cos x\operatorname{sh} x + D\cos x\operatorname{ch} x$. **2198.** $y = A\operatorname{ch} x + B\operatorname{sh} x + C\cos\frac{x}{2} + D\sin\frac{x}{2}$. **2199.** Мувозанат ҳолатидан узоқлашиши $x = a\sin\sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0)$; давр $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. **2200.** $x =$

$= a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$; давр $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. 2201. $x = ae^{-kt}\sin(\omega t+\varphi)$, бунда, $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4}}$. 2202. $y = C_1e^{-2x} = C_2e^{-x}$. 2203. $y=(C_1x+C_2)e^{ax}$. 2204. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. 2205. $x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$. 2206. $x=C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$. 2207. $s=C_1+C_2e^{-at}$. 2208. $x=e^{-t}(A\cos t\sqrt{2} + B\sin t\sqrt{2})$. 2209. $y=C_1e^{-x}+(C_2x+C_3)e^{2x}$. 2210. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos x+C_4\sin x$. 2211. $y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x$. 2212. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x$. 2214. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-2x^3-3x$. 2215. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+0{,}25\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$. 2216. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+e^x$. 2217. $y=C_1+C_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$. 2218. $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+x^2-8x+7$. 2219. $y=C_1e^{2x}+(C_2-x)e^x$. 2220. $x=A\sin k(t-t_0)-t\cos kt$. 2221. $y=C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}-(x-2)e^{-x}$. 2222. $y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{x^3}{6}$. 2223. $y=\frac{1}{2}e^{-x}+xe^{-2x}+C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$. 2224. $x=e^{-kt}(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+\sin kt-2\cos kt$. 2225. $y=C_1+C_2x+(C_3+x)e^{-x}+x^3-3x^2$. 2226. $y=C_1e^{3x}+\left(C_2-\frac{x}{4}\right)e^{-3x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$. 2227. $x=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t+t^2-6t$. 2228. $y=\left(C_1+\frac{x}{12}\right)e^{-2x}+(C_2\cos x\sqrt{3}+C_3\sin x\sqrt{3})e^x$. 2229. 1) $x=\left(C_1+C_2t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-2t}$; 2) $x=A\cos\frac{t}{a}+B\sin\frac{t}{a}+\frac{1}{a}$. 2230. Бизнинг мисолимизда $y_1=\cos 2x$, $y_2=\sin 2x$, $w=2$; $A=-\frac{x}{2}+C_1$; $B=\frac{1}{4}\ln\sin 2x+C_2$ ва $y=\left(C_1-\frac{x}{2}\right)\cos 2x+\left(C_2+\frac{1}{4}\ln\sin 2x\right)\sin 2x$. 2231. $y=[(C_1+\ln\cos x)\cos x+(C_2+x)\sin x]e^{2x}$. 2232. $y=(C_1-\ln x+C_2x)e^x$. 2233. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. 2234. 1) $y=C_1+C_2e^{-x}-(1+e^{-x})\ln(1+e^x)+x$; 2) $y=e^{-2x}\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2x}\right)$. 2235. $x=a(e^{-t}+t-1)$. 2236. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-3(x^2+x+1{,}5)$. 2237. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{6}(5\cos 3x-\sin 3x)$. 2238. $y=(C_1x+C_2)e^{-x}+\frac{1}{4}e^x$. 2239. $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{3x}{2}+C_2\sin\frac{3x}{2}\right)-$

$-6\cos 2x+8\sin 2x$. 2240. $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-\frac{x}{2}}-x^3$. 2241. $y=C_1e^x+$ $+\left(C_2-\frac{x}{2}\right)e^{-x}$. 2242. $s=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+(t-1)^3$.

2243. 1) $y=e^{mx}(C_1+C_2x)+\frac{\cos mx}{2m^2}$; 2) $y=C_1e^{\frac{2x}{n}}+C_2e^{-\frac{2x}{n}}-\frac{2}{n}$.

2244. $y=A\cos x+B\sin x+C\cos 2x+D\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos x$.

2245. $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{x^3}{6}\right)e^x$. 2246. $y=\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{3x^2}{4}+\right.$ $\left.+C_1+C_2x\right)e^{-2x}$. 2247. 1) $y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2\cos x}$; 2) $y=(C_1-\ln|\sin x|)\cos 2x+\left(C_2-x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\right)\sin 2x$;

2248. $y=\left(C_1+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\frac{x}{2}+C_2x\right)e^x$.

2249. $y=\frac{C-(x+2)e^{-x}}{x+1}$. 2250. $y=1+C\cos x$. 2251. $y=x(1+$ $+C\sqrt{1-x^2})$, чизиқли. 2252. $y=C\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. 2253. $s=$ $=\frac{e^t+C}{t^2}$ 2254. $\sqrt{y}=Cx^2-1$. 2255. $2Cy^2=x(C^2x^2-1)$.
2256. $y=x\ln x-2x+C_1\ln x+C_2$. 2257. $y(C_2-C_1x)=1$.
2258. $y=C_1e^{mx}\left(C_2-\frac{x}{2m}\right)e^{-mx}$. 2259. $y=\ln x+\frac{C}{\ln x}$.

2260. $y=xe^{\frac{C}{x}-1}$. 2261. $y^2=\frac{1}{x+Ce^x}$. 2262. $y=(C_1+C_2x)e^x+$ $+C_3+\frac{x^3}{3}+2x^2+6x$. 2263. $C_1y=1+C_2e^{C_1x}$. 2264. $s=C_1e^{2t}+$ $+e^{-t}(C_2+Ct_3)-\frac{\sin t}{2}$. 2265. 1) $s=(t^2+C)\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; 2) $y^2=Cx^2-1$. 2266. 1) $y=\frac{\sin x+C\cos x}{x}$; 2) $y=e^{-x}\left(C_1+\frac{x}{3}\right)+$ $+C_2e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_3e^{-x}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}$. 2267. 1) $y=$ $=(C_1-\ln\sqrt{1+e^{2x}})e^x+(C_2+\operatorname{arctg} e^x)e^{2x}$; 2) $y=C_1e^{\sqrt{cx}}+$ $+C_2e^{-\sqrt{cx}}$ ва $y=C_1x+C_2$. 2268. $\frac{a^2}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+1000x=0$, $x=A\cos\frac{10\sqrt{10g}}{a}t+B\sin\frac{10\sqrt{10g}}{a}t$, давр $T=\frac{\pi a}{5\sqrt{10g}}$.

2269. $\frac{dT}{dr}=-\frac{R}{4\pi r^2}$; $T=\frac{k}{8\pi r}+C$; k ва C катталикларни $20^\circ=\frac{k}{8\pi 2a}+C$ ва $100^\circ=\frac{k}{8\pi\cdot a}+C$ шартлардан топамиз; $T=$

$=\frac{160^\circ a}{r}-60^\circ=40^\circ$. 2270. 1) $y=C_1x+C_2x^{-1}+C_3x^3$; 2) $y=\frac{C_1}{x}+C_2x^2$; 3) $y=C_1x^n+C_2x^{-(n+1)}$. 2271. 1) $y=x^{-2}(C_1+C_2\ln x)$; 2) $y=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)$. 2272. 1) $y=\frac{5x^2}{3}+C_1x^{-1}+C_2$; 2) $y=C_1x^3+\frac{C^2}{x^2}-2\ln x+\frac{1}{3}$. 2273. 1) $y=C_1x+C_2x^2-4x\ln x$; 2) $y=\frac{C_1+C_2\ln x+\ln^2 x}{x}$. 2274. 1) $y=\left(\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2\right)x^2$; 2) $y=\frac{x}{2}+C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)$. 2275. $x=C_1e^t+C_2e^{-3t}$, $y=-\frac{dx}{dt}=C_1e^t-3C_2e^{-3x}$. 2276. $x=e^t+C_1+C_2e^{-2t}$, $y=e^t+C_1-C_2e^{-2t}$. 2277. $x=2e^{-t}+C_1e^t+C_2e^{-2t}$, $y=3e^{-t}+3Ce^t+2C_2e^{-2t}$. 2278. $x=e^t+C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}+C_3\cos(t+\varphi)$. 2279. $x=e^{-2t}(1-2t)$. 2280. $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+t\operatorname{ch}t$.
2281. 1) $u=\varphi(x)+\psi(y)$; 2) $u=y\varphi(x)+\psi(x)$; 3) $u=x\varphi(y)+\psi(x)$; 4) $u=ax^2\ln y+bxy+\varphi(x)+\psi(y)$. 2282. $z=y^3(x+y-1)$.

2283. $A\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=E$ тенгламани каноник кўринишга келтириш учун $Ady^2-2B\,dx\,dy+Cdx^2=0$ характеристик тенгламани ечиш керак: унинг иккита $\varphi(x,y)=\xi$ ва $\psi(x,y)=\eta$ интегралида ξ ва η ларни янги ўзгарувчилар деб, берилган тенгламани шу янги ўзгарувчиларга алмаштириш керак (1941 ва 1942- масалаларга қаранг). Бизнинг мисолимизда $dx^2+4dx\,dy+3dy^2=0$ тенгламани ечиш керак, бундан $dy+dx=0$, $dy+3dx=0$, $y+x=\xi$, $y+3x=\eta$ тенгламанинг янги ўзгарувчилардаги кўриниши $\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=0$. Бундан $u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)=\varphi(y+x)+\psi(y+3x)$.

2284. Характеристик тенглама $x^2dy^2-2xy\,dx\,dy+y^2dx^2=0$ ёки $(xdy-ydx)^2=0$ ёки $d\left(\frac{y}{x}\right)=0$; бундан $\frac{y}{x}=\xi$, $y=\eta$. Ечимлар тенг бўлгани учун η деб y ни оламиз. Шундай қилиб, характеристикалар $\frac{y}{x}=\xi$ ва $y=\eta$. Тенглама $\frac{\partial^2u}{d\eta^2}=0$ кўринишга келади (1944 ва 1945- масалага қаранг); $u=\eta\varphi(\xi)+(\psi)$ ёки $u=y\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$. 2285. $u=y\varphi(y+2x)+\psi(y+2x)$.

2286. $u=xy+\sin y\cos x$. 2287. (1944- масалага қар.) $u=y\ln x+2y+1$. 2288. $u=\sqrt{xt}\,\varphi\left(\frac{x}{t}\right)+\psi(xt)$; хусусий ечим $u=\frac{x^2(1+t^3)}{t}$. 2289. $u=e^{-x}\varphi(x-t)+\psi(x)$; хусусий ечим

$u = (x-t)e^{-t} - x$, 2290. Хусусий ечим $u = xat + \frac{1}{3}a^2t^3$.

2291. $u = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz$.

2292. $6 - 4\ln 2 \approx 3{,}28$. 2293. 1) $10^2/_3$ кв. бир.; 2) 4 кв. бир.

2294. $20\frac{5}{6}$. 2295. $\frac{9a^2}{2}$. 2296. $\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$. 2297. 1) $\int_0^a dx\int_0^x dy = \int_0^a dy\int_y^a dx = \frac{a^2}{2}$; 2) $\int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx = \int_0^a dx\int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = a^2\left(\frac{\pi-2}{4}\right)$;

3) $\frac{\pi a^2}{4}$. 2298. 1) $\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2} dy = \int_0^1 dy\int_0^y dx + \int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2-y}} dx = 1\frac{1}{6}$;

2) $\int_{-2}^0 dy\int_{y^2-4}^0 dx = \int_{-4}^0 dx\int_{-\sqrt{4+x}}^0 dy = \frac{16}{3}$. 2299. $\left(\frac{\pi}{4}+2\right)a^2$.

2300. Кичик сегмент юзи: $\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)a^2 \approx 2{,}457\,a^2$.

2301. $\frac{3a^2}{2} - \ln 2$. 2302. $\frac{868}{15}a^2$. 2303. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 2304. 4,5. 2305. $\frac{a^2}{6}$.

2306. $\sqrt{2} - 1$. 2307. $\frac{9}{2}a^2$. 2308. $8\pi + 9\sqrt{3}$. 2309. $\left(2-\frac{\pi}{4}\right)a^2$.

2310. $7\ln 2$. 2311. 1) $\int_a^b dx\int_a^x dy = \int_a^b dy\int_y^b dx = \frac{(b-a)^2}{2}$;

2) $\int_0^a dy\int_{\sqrt{ay}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx = \int_0^a dx\int_0^{\frac{x^2}{a}} dy + \int_a^{a\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy = \frac{a^2(3\pi-2)}{12}$;

3) $\int_0^4 dx\int_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy = \int_0^4 dy\int_0^{\frac{y^2}{4}} dx + \int_4^8 dy\int_0^{8-y} dx = \frac{40}{3}$. 2312. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$.

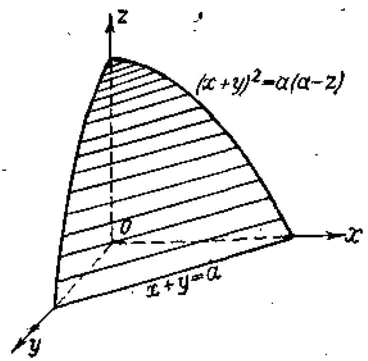
2313. (3; 4,8). 2314. $\left(\frac{2a}{5}; \frac{a}{2}\right)$. 2315. $\left(0; \frac{4a}{3\pi}\right)$. 2316. $\left(0; \frac{256a}{315\pi}\right)$.

2318. $\frac{17a^4}{96}$. 2319. $\frac{a^4}{4}$. 2320. $\frac{a^4}{6}$. 2321. $\frac{\pi a^4}{8}$. 2322. $\frac{\pi a^4}{2}$;

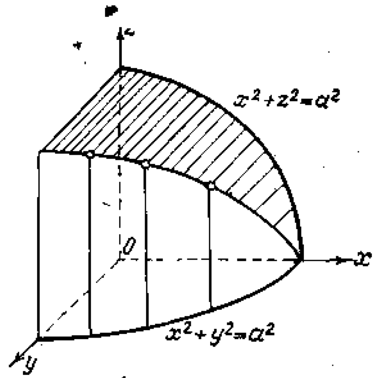
2323. $\frac{88a^4}{105}$. 2324. $\left(\frac{3a}{5}; \frac{3a}{8}\right)$. 2325. $\left(0; \frac{4b}{3\pi}\right)$. 2326. $\frac{a^4}{30}$.

2327. 3. 2328. $\frac{ab(a^2+b^2)}{12}$. 2329. 47,5 2330. $\frac{35\pi a^4}{16}$.

2331. $42\frac{2}{3}$. 2332. $\frac{79}{60}a^3$. 2333. $z=h$ текислик билан ҳосил бўлган кесимлар $x+y=\pm\sqrt{a(a-h)}$ — параллел тўғри чизиқлардир, яъни сирт цилиндрик сирт (63-чизма). Изланган ҳажм $V=$



63-чизма.



64-чизма.

$=2\int_0^a dx\int_0^{a-x} z\,dy=\frac{a^3}{2}$. 2334. $\frac{16}{3}a^3$ (64-чизма). 2335. (323-бет, 50-чизмага қаралсин) $\frac{8}{9}a^3$. 2336. $\frac{a^3}{3}$. 2337. $\frac{\pi^1}{12}a^3$. 2338. $3\pi a^3$.

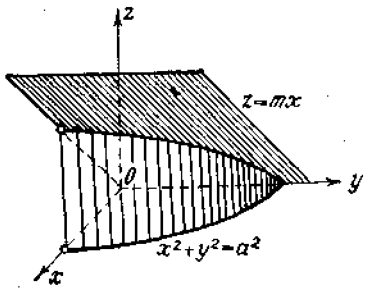
2339. $V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} m\cos\varphi\,d\varphi\int_0^a r^2dr=\frac{4ma^3}{3}$ (65-чизма). 2340. $\frac{\pi a^3}{2}$.

2341. $4\pi\sqrt{3a^3}$. 2342. $\frac{4a^3}{9}(3\pi-4)$ (66-чизма). 2343. π^2a^2 (62-чизма).

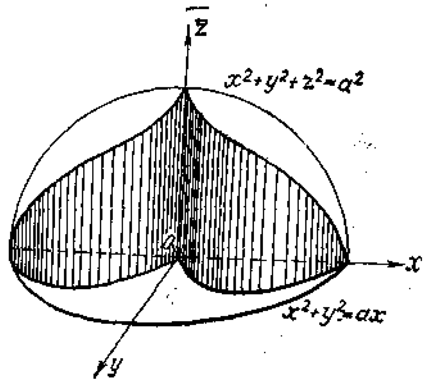
2344. $\frac{16\sqrt{2}}{15}a^3$. 2345. $\frac{\pi abc}{2}$. 2346. $\pi abc\left(1-\frac{1}{e}\right)$. 2347. $\frac{4\pi a^3}{35}$.

2348. $\frac{8}{15}a^3$. 2349. $V=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 z\,dy=\frac{88}{105}$ (67-чизма). 2350. $V=$

$=4\int_0^{3a} dx\int_{\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}}\sqrt{4ax-y^2}\,dy=3a^3(4\pi-3\sqrt{3})$ (68-чизма).

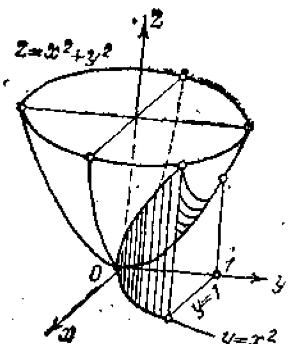


65-чизма.

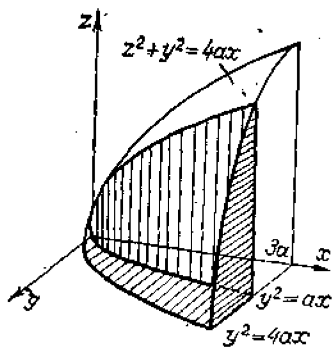


66-чизма.

2351. $V = 8\int\limits_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy = \frac{16\,ab^2}{3}.$

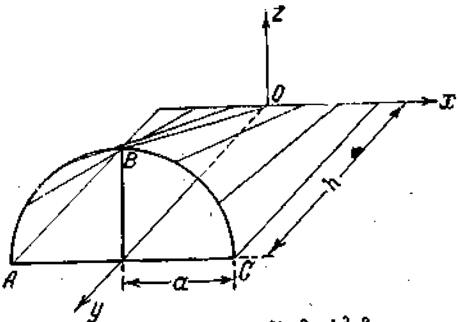


67-чизма.



68-чизма.

2352. $V = 4\int\limits_0^a dx \int\limits_0^h \frac{y}{h}\sqrt{a^2 - x^2}\,dy = \frac{\pi a^2 h}{2}$ каноид асосининг юзини баландликнинг ярмига кўпайтирилганига тенг (69-чизма). **2353.** $\frac{128}{105}a^3$. **2354.** 18π. **2355.** $2\pi a^3$. **2356.** $8\pi\ln 2$ (49-чизмага қаранг). **2357.** $\frac{3}{16}\pi a^3$. **2358.** $\frac{5\pi a^3}{16}$. **2359.** $\frac{4\pi abc}{3}$. **2360.** 13.



Коноид $(a^2-x^2)y^2=h^2z^2$

69-чизма.

2361. $\frac{8\sqrt{2}}{3}a^2$. **2362.** $2\pi a^2$. **2363.** $\frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **2364.** $2\pi p^2\sqrt{2}$. **2365.** $8a^2$. **2366.** $4a^2(\pi-2)$. **2367.** $\frac{14}{3}\pi a^2$. **2368.** $\sigma = \iint\limits_{(S)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}\,dxdy = \frac{\pi\beta}{180}R^2\sin\alpha$; $\beta = 60^\circ$ ва $\alpha = 30^\circ$ бўлганда $\sigma = \frac{\pi R^2}{6}$. **2369.** $\frac{\pi a^3}{12}$ (*кесим радиуси* $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$). **2370.** $\frac{2\pi a^3}{3}\times(2-\sqrt{2})$. **2372.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{a-x-y} zdz = \frac{a^4}{24}$. **2373.** $\left(\frac{a}{4};\ \frac{a}{4};\ \frac{a}{4}\right)$. **2374** $\left(0,\ 0; \frac{a}{3}\right)$. **2375.** $\frac{a^5}{4}$. **2376.** $\frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$. **2377.** 1) $\frac{\pi a^3}{3}$; 2) $\frac{\pi a^3}{60}$. **2378.** $\frac{\pi a^3}{6}(8\sqrt{2}-7)$. **2379.** $\frac{32}{3}\pi$. **2380.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **2381.** $\frac{\pi h^4}{4}$. **2382.** $\frac{a^4}{12}$. **2383.** $\left(0;\ 0;\ \frac{3a}{8}\right)$. **2384.** $\frac{32\sqrt{2}a^5}{135}$. **2385.** $\frac{a^3}{360}$. **2386.** $6k\pi a^2$, бунда k — пропорционаллик коэффициенти.

2387. $\int (x+y)\,dx = \begin{cases} 4 & OA \text{ тўғри чизиқ бўйича}, \\ \frac{10}{3} & OA \text{ ёй бўйича}, \\ 2 & OBA \text{ синиқ чизиқ бўйича}. \end{cases}$

2388. 1) 8; 2) 4. **2389.** Икки ҳолда ҳам $\int (x\,dy + y\,dx) = 8$, чунки бунда $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. **2390.** 1) $1{,}5a^2$; 2) a^2. **2391.** $8a^2$. **2392.** πa^2. **2393.** $\frac{\pi mab}{4}$. **2394.** 0. **2396.** 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $2-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2397. $\frac{2a^3}{3}$. 2398. πab. 2399. $\frac{8}{15}$. 2400. $\frac{3}{2}a^2$.

2401. $X = 0$, $Y = \frac{2kmM}{\pi a^2}$. 2402. $Y = \frac{kmM}{a^2\sqrt{2}}$.

2403. $Y = \frac{kmM}{a^2}$. 2404. 1) -16; 2) $-\frac{52}{3}$; 3) -12. 2405. 1) $\frac{3a^2}{2}$; 2) $\frac{a^2}{2}$. 3) $\frac{11a^2}{6}$. 2408. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 2409. $\frac{4}{3}$. 2410. $\frac{a^3}{2}$.

2411. $\frac{\pi a^4}{48}$. 2412. Формуланинг ҳар бир қисми $4\pi a^3$ га тенг. 2413. Формуланинг ҳар бир қисми $\frac{a^4}{3}\left(\frac{4}{5}+\frac{\pi}{16}\right)$ га тенг. 2419. Формуланинг ҳар бир қисми $\frac{12}{5}\pi a^5$ га тенг. 2421. $0{,}15\ a^5$. 2422. *Бажарилмайди.* 2423. *Бажарилади.* 2424. *Бажарилади.* 2425. Қатор узоқлашади. 2426. Узоқлашади. 2427. $\int_1^\infty \frac{x\,dx}{(x+1)^3} = \frac{3}{8}$ бўлгани учун қатор яқинлашади. 2428. $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ бўлгани учун қатор яқинлашади. 2429. $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}dx = \infty$ бўлгани учун қатор узоқлашади.

2430. $\int_1^\infty \frac{dx}{(2x+1)^2-1} = \left[\frac{1}{4}\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^\infty = \frac{1}{4}\ln 2$ бўлгани учун яқинлашади. 2431. Яқинлашади. 2432. Яқинлашади. 2433. Яқинлашади. 2434. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ бўлгани учун яқинлашади. 2435. Узоқлашади. 2436. Узоқлашади. 2437. Яқинлашади. 2438. Узоқлашади. 2439. Яқинлашади. 2440. Узоқлашади. 2442. 1. 2443. $\frac{1}{3}$. 2444. Яқинлашади, лекин абсолют эмас. 2445. Абсолют яқинлашади. 2446. Яқинлашади, лекин абсолют эмас. 2447. Абсолют яқинлашади. 2448. Биринчи марта ҳадларнинг ўрнини алмаштириб қаторни $\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots$ кўринишда ёзамиз. Қавслар ичидаги амалларни бажарсак, ҳадлари берилган қатор ҳадларидан икки марта кичик бўлган қатор ҳосил қиламиз. Ҳадларнинг ўрнини иккинчи хил алмаштиргандан сўнг ҳадларнинг *n- учталигини* қуйидагича ёзамиз: $\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n-3} = \frac{1}{4n-2} +$

$+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$; $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ бўлганда биринчи тўртта ҳад, йиғиндиси S бўлган берилган қаторни, охирги иккита ҳад эса — йиғиндиси $\frac{1}{2}S$ бўлган қаторни ҳосил қилади. **2449.** Яқинлашади. **2450.** Узоқлашади, чунки $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{100x-99}=\infty$. **251.** Яқинлашади, чунки $\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{\pi}{8}$. **2452.** Узоқлашади, чунки $\int\limits_1^{\infty}\frac{2x-1}{x^2}\,dx=$ $=\infty$. **2453.** Яқинлашади. **2454.** Яқинлашади, чунки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n+1}{u_n}=$ $=\frac{1}{2}<1$. **2455.** Яқинлашади, чунки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{20n+21}{3(20n+1)}=$ $=\frac{1}{3}<1$. **2456.** Яқинлашади. **2457.** Яқинлашади, лекин абсолют эмас. **2458.** Абсолют яқинлашади. **2459.** $a>1$ бўлганда абсолют яқинлашади, $a=1$ бўлганда яқинлашади, лекин абсолют эмас, $a<1$ бўлганда узоқлашади. **2460.** $^1/_2$. **2461.** $^1/_4$. **2462.** $x<1$ бўлганда қаторнинг йиғиндиси $S(x)=\frac{1}{1-x}$, қолдиғи эса $R_n=S-S_n=\frac{x^n}{1-x}$. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ кесмада $n-1>\frac{\lg 1000}{\lg 2}$; $n\geqslant 11$ бўлганда $|R_n|<\frac{1}{2^{n-1}}<$ $<0{,}001$. **2463.** Қаторнинг йиғиндиси

$$S=\frac{x}{1-(1-x)}=\begin{cases}1, & 0<x<1\ \text{бўлганда},\\ 0, & x=0\ \text{бўлганда}\end{cases}$$

ва қолдиғи $R_n=\begin{cases}(1-x)^n, & 0<x\leqslant 1\ \text{бўлганда},\\ 0, & x=0\ \text{бўлганда}.\end{cases}$

$x<1-\sqrt[n]{0{,}9}$да ҳар қандай n учун қолдиқ R_n, масалан, 0,9 дан катта бўлади, яъни $[0,1]$ сегментда қаторнинг яқинлашиши *текис эмас.* Лекин $\left[\frac{1}{2},1\right]$ сегментда у текис яқинлашади, чунки бу кесмадан олинган ҳар қандай x учун $n>\frac{-\lg\varepsilon}{\lg 2}$ бўлганда $|R_n|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ бўлади; жумладан, $n\geqslant 7$ бўлганда $|R_n|<0{,}01$. **2464.** Ишораси алмашинувчи қаторнинг қолдиқ ҳади модуль бўйича биринчи ташланган ҳаддан кичик. Шунинг учун $[0,1]$ сегментда $n+1\geqslant 10$ ёки $n\geqslant 9$ бўлганда $|R_n(x)|\leqslant\frac{x^{n+1}}{n+1}<\frac{1}{n+1}\leqslant 0{,}1$. **2465.** Қаторнинг йиғиндиси

$$S=\begin{cases}1+x^3, & x>0\ \text{бўлганда}\\ 0, & x=0\ \text{бўлганда}\end{cases}\ \text{ва қолдиғи}$$

$$R_n=\begin{cases}\frac{1}{(1+x)^{n-1}}, & x>0\ \text{бўлганда}\\ 0, & x=0\ \text{бўлганда}.\end{cases}$$

Ҳар қандай n учун $x^3 < \sqrt[n-1]{10} - 1$ бўлганда қолдиқ R_n, масалан, 0,1 дан катта бўлади, яъни $x > 0$ бўлганда, қатор нотекис *яқинлашади*. Аммо, $x \geqslant 1$ бўлганда у *текис* яқинлашади, чунки у ҳолда $n - 1 > \frac{-\lg \varepsilon}{\lg 2}$ бўлганда ҳар қандай $x \geqslant 1$ учун $|R_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ бўлади; жумладан, $n \geqslant 11$ бўлганда $|R_n| < 0{,}001$.

2466. Ҳар қандай манфиймас x учун берилган қатор ҳадлари яқинлашувчи сонлар қатори $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$ нинг ҳадларидан кичик (ёки тенг). Демак, барча $x \geqslant 0$ лар учун қатор текис яқинлашади, $R_n(x)$ эса сонлар қатори қолдиғидан кичик, яъни ҳар қандай $x \geqslant 0$ учун $3^{n-1} > 50$ ёки $n \geqslant 5$ бўлганда $R_n(x) < \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} < 0{,}01$. **2467.** Ҳар қандай x учун $n \geqslant 100$ бўлганда $|R_n(x)| < \frac{1}{n^2} \leqslant 0{,}0001$. **2468.** $u_n = \frac{1}{x + n - 1} - \frac{1}{x + n}$. Шунинг учун $S_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + n}$; ҳар қандай $x \neq 0$ учун $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{x}$. Чунончи, $x > 0$ учун $n \geqslant 10$ бўлганда $R_n(x) = \frac{1}{x + n} < \frac{1}{n} \leqslant 0{,}1$.

2469. Манфий бўлмаган ҳар қандай x учун қаторнинг ҳадлари яқинлашувчи сонлар қатори $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ нинг ҳадларидан кичик (ёки тенг). Шу сабабли ҳар қандай $x \geqslant 0$ учун қатор текис яқинлашади, $2^{n-1} > 100$ ёки $n \geqslant 8$ бўлганда $R_n(x) < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} < 0{,}01$. **2470.** $-3 \leqslant x < 3$. **2471.** $-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}$. **2472.** $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. **2473.** Барча сонлар ўқида абсолют яқинлашади. **2474.** $-1 < x \leqslant 1$. **2475.** $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$. **2476.** 1) $R = 0$; 2) $R = e$. **2477.** $-5 \leqslant x < 3$. **2478.** $1 < x \leqslant 2$. **2479.** $\frac{1}{(1 - x)^2}$, $|x| < 1$ бўлганда. **2480.** $\operatorname{arc\,tg} x$, $|x| \leqslant 1$ бўлганда. **2481.** $\frac{1 + x}{(1 - x)^3}$ $|x| < 1$ бўлганда. **2482.** $(1 + x)^m$. **2483.** $-\frac{\sqrt{5}}{2} < x \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$. **2484.** $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$. **2485.** $-0{,}1 < x \leqslant 0{,}1$. **2486.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2487. $-1 \leqslant x < 3$. 2488. $-1 \leqslant x < 0$. 2489. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $|x| < 1$ бўлганда. 2490. $-\ln(1-x)$, $-1 \leqslant x < 1$ бўлганда. 2491. $\frac{1-2x}{(1+x)^2}$, $|x| < 1$ бўлганда. 2492. 1) $\cos(x-\alpha) = \sin\alpha\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) + \cos\alpha\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right)$; $|R_n(x)| = \frac{x^n}{n!}\cos\left(\theta x - \alpha + n\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\sin^2 x = \frac{2\cdot x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5\cdot x^6}{6!} - \ldots$; 3) $xe^x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \ldots$;

4) $\sin\left(mx + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^4x^4}{4!} - \ldots\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{mx}{1} - \frac{m^3x^3}{3!} + \frac{m^5x^5}{5!} - \ldots\right)$. 2493. $\ln(1+e^{kx}) = \ln 2 + \frac{kx}{2} + \frac{k^2x^2}{2!\,2^2} - \frac{k^3x^4}{4!\,2^3} + \ldots$

2497. 1) $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right]$; 2) $\ln(2-3x+x^2) = \ln(1-x)(2-x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}(1+2^{-n})\frac{x^n}{n}$; 3) $\ln(1-x+x^2) = \ln\frac{1+x^3}{1+x} = -\left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{2x^6}{6} + \ldots\right] = -2\sum \cos\frac{\pi n}{3}\frac{x^n}{n}$ 2498. $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. 2499. $e^{\frac{x}{a}} = e\left[1 + \frac{x-a}{1!a} + \frac{(x-a)^2}{2!a^2} + \frac{(x-a)^3}{3!a^3} + \ldots\right]$, $R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!a^n}e^{1+\theta\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)}$. 2500. $x^3 - 3x = -2 + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$. 2501. $x^4 = 1 - 4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4$. 2502. $\frac{1}{x} = -\frac{1}{2\left(1 - \frac{x+2}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{x+2}{2} + \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(x+2)^3}{8} + \ldots\right]$, $-4<x<0$ бўлганда.

2503. 1) $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{2}{2}}\left[1 - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{1!\,2} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!\,2^2} + \ldots\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!\,2^{n-1}}\cos\frac{(2n-1)\pi}{4}$; бунда 0! шартли 1 га тенг деб қабул қилинган (188- бетдаги 1760- масалага берилган кўрсатмага қар.)

2) $\sin 3x = \sum_{n=1} (-1)^n \dfrac{(3x+\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

2504. $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{1-(x+1)} = -1 + \dfrac{x+1}{3\cdot 1!} + \dfrac{2(x+1)^2}{3^2\cdot 2!} + \dfrac{2\cdot 5(x+1)^3}{3^3\cdot 3!} + \ldots =$

$= -1 + \dfrac{x+1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!}(x+1)^{n+1}$, $-2 < x < 0$ бўлганда

2505. 1) $2^x = 1 + \dfrac{x\ln 2}{1!} + \dfrac{x^2\ln^2 2}{2!}\ldots$; $|R_n| = \dfrac{x^n \ln^n 2}{n!} 2^{\theta x}$;

$2\cos\left(mx + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \dfrac{mx}{1!} - \dfrac{m^2x^2}{2!} + \ldots\right] =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(mx)^{n-1}}{(n-1)!}\cos(2n-1)\dfrac{\pi}{4}$ $(0! = 1$ деб$)$. 2506. $x^4 - 4x^2 =$

$= (x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 20(x+2)^2 - 16(x+2)$. 2507. $\cos^2 x =$

$= \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left[\dfrac{x-\frac{\pi}{3}}{1!} - \dfrac{2^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3}{3!} + \dfrac{2^4\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^5}{5!} - \ldots\right] +$

$+ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2!} - \dfrac{2^3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4}{4!} + \dfrac{2^5\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^6}{6!} - \ldots\right]$.

2508. $\sin\dfrac{\pi x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi^n(x-1)^n}{3^n n!}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(0! = 1$ деб$)$.

2509. $\sqrt{x} = 2\left[1 + \dfrac{x-4}{2^3\cdot 1!} \dfrac{(x-4)^2}{2^6\cdot 2!} + \dfrac{1\cdot 3(x-4)^3}{2^9\cdot 3!} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5(x-4)^4}{2^{12}\cdot 4!} + \ldots\right]$.

2511. $\arcsin x = x + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\dfrac{x^7}{7} + \ldots$ 2512. $\sqrt{0{,}992} =$

$= \sqrt{1-0{,}008} \approx 1 - 0{,}004 = 0{,}996$; $\sqrt{90} = \sqrt{81+9} = 9\sqrt{1+\dfrac{1}{9}} \approx$

$\approx 9\left(1 + \dfrac{1}{18}\right) = 9{,}5$. 2513. $\sqrt[3]{0{,}991} = \sqrt[3]{1-0{,}009} \approx 0{,}997$; $\sqrt[3]{130} =$

$= \sqrt[3]{125+5} = 5\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{25}} \approx 5\left(1+\dfrac{1}{75}\right) = 5\dfrac{1}{15}$. 2515. $\operatorname{arctg} x =$

$= \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots$ 2517. $\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \dfrac{1}{3\cdot 3} + \dfrac{1}{5\cdot 3^2} - \dfrac{1}{7\cdot 3^3} +\right.$

$\left.+ \dfrac{1}{9\cdot 3^4}\right) = 1{,}814\sqrt{3} \approx 3{,}142$. 2519. 1) $\int \dfrac{\sin x}{x}dx = C + x - \dfrac{x^3}{3!3} +$

$+ \dfrac{x^5}{5!5} - \ldots$; 2) $\int \dfrac{e^x}{x}dx = C + \ln x + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!2} + \dfrac{x^3}{3!3} + \ldots$

2520 $\Phi(x) = \int_0^x e^{-x^2}dx = x - \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \ldots$; $\Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx$ $\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} \approx 0{,}419$ бундаги хато $\frac{1}{2430}$ дан кичик.

2521. $\Phi(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1+x^2}\,dx = x + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3^2\,2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{2\cdot 5}{3\cdot 3!}\,\frac{x^7}{7} - \ldots$; $\Phi\left(\frac{1}{5}\right) \approx \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3\cdot 5^3} \approx 0{,}2008$, $\frac{1}{3^2\cdot 5^6} < 0{,}0001$ дан кичик хато билан. **2522.** Тенгламани n марта дифференциаллаб, $x=0$ деб олинса, $y_0^{(n+2)} = n(n-1)\,y_0^{(n-2)}$ тенглама ҳосил бўлади. Бундан $y_0'' = y_0''' = 0$, $y^{\mathrm{IV}} = 2\cdot 1$, $y_0^{\mathrm{V}} = 3\cdot 2$, $y_0^{\mathrm{VI}} = 0$ ва ҳоказо. Бу қийматларни $y = y_0 + \frac{y_0'}{1!}x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \ldots$, Маклорен формуласига қўйиб, $y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} + \ldots$ ни ҳосил қиламиз.

2523. $y = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} - \ldots$ **2524.** Ечим «нолинчи тартибли Бессель функцияси» бўлади: $I_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots$: **2525.** $\sqrt{1{,}005} \approx 1{,}0025$; $\sqrt[3]{1{,}0012} \approx 1{,}0004$; $\sqrt{0{,}993} \approx 0{,}9965$: $\sqrt[3]{0{,}997} \approx 0{,}999$; $\sqrt{110} = \sqrt{100+10} \approx 10\left(1+\frac{1}{20}\right) = 10{,}5$; $\sqrt[3]{70} \approx 4\left(1+\frac{1}{32}\right) = 4{,}125$; $\sqrt[5]{40} \approx 2\left(1+\frac{1}{20}\right) = 2{,}1$. **2527.** $\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\,5\cdot 2^5} + \ldots\right) \approx 3(1 + 0{,}0417 + 0{,}0047) \approx 3{,}14$. **2528.** $\pi = 2\left[1 - \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^4} - \frac{1}{7\cdot 2^6} + \ldots\right] + \frac{4}{3}\left[1 - \frac{1}{3\cdot 3^2} + \frac{1}{5\cdot 3^4} - \frac{1}{7\cdot 3^6} + \ldots\right] = \frac{10}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1}{4^n} + \frac{2}{9^n\cdot 3}\right)$. **2532.** $s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt =$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt = 2\pi a\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2^2} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots\right],$$

бунда ε — эллипснинг эксцентриситети, a —

унинг катта ярим ўқи (1624- масалага ва унинг жавобига қаралсин).

2533. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\,dx = \left[x + \frac{x^4}{2\cdot4} - \frac{x^7}{2^2\cdot2!\,7} + \ldots\right]_0^{0,5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\times$ $\times\frac{1}{2^4} - \ldots \approx \frac{65}{128} \approx 0,508$, $\frac{1}{7\cdot2^{10}}$ дан кичик хато билан 2534. $\Phi(x) = x - \frac{1}{2!}\frac{x^5}{4^2\cdot5} + \frac{1}{4!}\frac{x^9}{4^4\cdot9} - \ldots$; $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5\cdot2^{10}} + \ldots \approx 0,499805 <$ $< \frac{1}{27\cdot2^{20}}$ дан кичик хато билан. 2535. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3^2\cdot7} + \frac{2\cdot x^{11}}{3^3\cdot7\cdot11} + \ldots$

2536. Тенгламани n марта дифференциаллаб, $x = 0$ деб олинса, $y_0^{(n+2)} = -ny_0^{(n-1)}$ ни ҳосил қиламиз, бундан $y_0 = 1$, $y_0' = 0$, $y_0'' = 0$ $y_0''' = -1$, $y_0^{IV} = y_0^{V} = 0$, $y_0^{VI} = 1\cdot4, \ldots$, $y = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1\cdot4\cdot x^6}{6!} -$ $- \frac{1\cdot4\cdot7\cdot x^9}{9!} + \ldots$ 2537. $x = \int\limits_0^s \cos\frac{s^2}{2C}\,ds = s\left[1 - \frac{s^4}{2!\,(2C)^2\,5} + \ldots\right]$,

$y = \int\limits_0^s \sin\frac{s^2}{2C}\,ds = \frac{s^3}{2C}\left[\frac{1}{3} - \frac{s^4}{3!\,(2C)^2\cdot7} + \ldots\right]$, бундаги ўзгармас $C = R\cdot L$, R — доиравий эгри чизиқ радиуси ва L — кўчма эгри чизиқ узунлиги. Эгри чизиқ *клотоида* дейилади (257- бетдаги, 92-чизмага қаранг.) 2538. $F(x+h,\ y+l) = x^2 + xy + y^2 + h(2x+y) + l(2y+x) + h^2 + hl + l^2$. 2539. $x^3 + 2xy^2 = 9 + 11(x-1) + 8(y-2) + 3(x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2 + (x-1)^3 + 2(x-1)(y-2)^2$. 2540. $\ln(x-y) = x-(y+1) - \frac{x^2}{2} + x(y+1) - \frac{(y+1)^2}{2} + R_3$, бунда $R_3 = \frac{(x-y-1)^3}{3[\theta x + 1 - \theta(y+1)]^3}$.

2541. $\sin(mx+ny) = mx + ny - \frac{(mx+ny)^3}{3!} + \frac{(mx+ny)^4}{4!}\times$ $\times\sin\theta(mx+ny)$. 2543. $dx = 0,1$; $dy = -0,2$; $\Delta z = (2x-y)\,dx + (2y-x)\,dy + dx^2 - dx\,dy + dy^2 = -0,63$. 2544. $\Delta z = -(a\,dx - b\,dy)\sin(ax-by) - \frac{1}{2!}(a\,dx - b\,dy)^2\cos(ax - by) + R_3$, бунда $R_3 = \frac{1}{3!}(a\,dx - b\,dy)^3\sin[a(x+\theta\,dx) - b(y+\theta\,dy)]$.

2545. $x^2y = -1 - 2(x-1) + (y+1) - (x-1)^2 + (x-1)(y+1)$.

2546. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = y - (x-1)\,y + \ldots$ 2547. $y^x = 1 + 2(y-1) + (x-2)\times$ $\times(y-1) + \frac{(y-1)^2}{2} + \ldots$; $1,1^{2,1} \approx 1 + 2\cdot0,1 + 0,1\cdot0,1 + \frac{0,1^2}{2} = 1,215$. 2548. $dx = -0,01$, $dy = 0,02$; $\Delta z = 2yx\,dx + (x^2 - 2y)\,dy + y\,dx^2 + x\,dx\,dy - dy^2 + \frac{1}{3}dx^2dy \approx -0,1407$.

2549. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. 2550. $\frac{\pi}{2}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2x-1)^2}$.

2551. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{\cos nx}{n^2}$. 2552. $\frac{3\pi}{4}-\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\right.$
$\left.+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right]+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right]$.

2553. $\frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l}+\ldots\right]$.

2554. $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos\pi x}{l^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\ldots\right]$. 2555. $\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{l}+\right.$
$\left.+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l}+\ldots\right]+\frac{l}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l}+\ldots\right]$.

2556. 1) $\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{2}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}-\right.$
$\left.-\frac{2}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{2}+\ldots\right]$; 2) $\frac{2}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\ldots\right]+$
$+\frac{4}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{2}-\ldots\right]$.

2557. $u=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}$.

2558. $u=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$, бунда

$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi\xi\,d\xi$. 2559. $u=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{a\pi^2n^2t}{l^2}$,

бунда $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$. 2560. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$.

2561. $f(x)=\frac{2\beta}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{\beta^2+\lambda^2}d\lambda$.

2562. $f(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos\lambda)\sin\lambda}{\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda$.

2563. $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right]$.

2564. $|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right]$.

2565. $$\frac{4}{\pi}\left[\sin x-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\ldots\right].$$

2566. $$\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi x}{l}}{1^2}+\frac{\cos\frac{3\pi x}{l}}{3^2}+\ldots\right].$$

2567. $$\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\cos\pi x}{1^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\ldots\right]-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\pi x}{1}+\frac{\sin 2\pi x}{2}+\ldots\right].$$

2568. $$\operatorname{sh} l\left[\frac{1}{l}-2l\left(\frac{\cos\frac{\pi x}{l}}{\pi^2+l^2}-\frac{\cos\frac{2\pi x}{l}}{2^2\pi^2+l^2}+\ldots\right)+2\pi\left(\frac{1\cdot\sin\frac{\pi x}{l}}{\pi^2+l^2}-\frac{2\sin\frac{2\pi x}{l}}{2^2\pi^2+l^2}+\ldots\right)\right].$$

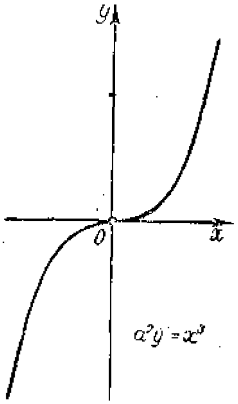
2569. $$u=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{2n+1}{2}t\sin\frac{2n+1}{2}x,$$

бунда $$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\xi)\sin\frac{2n+1}{2}\xi\,d\xi.$$

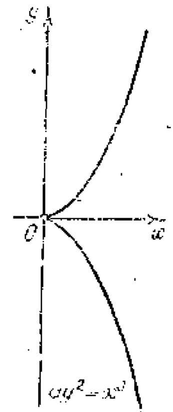
2570. $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}\,d\lambda.$$

ИЛОВАЛАР

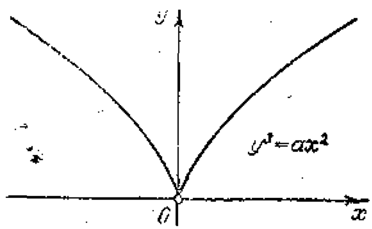
1. КЎП УЧРАЙДИГАН БАЪЗИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР



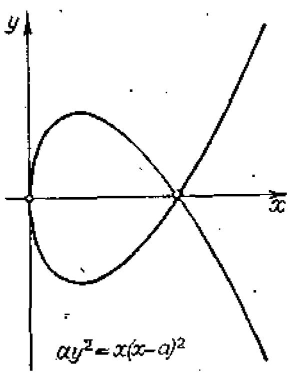
70- чизма. Кубик парабола.



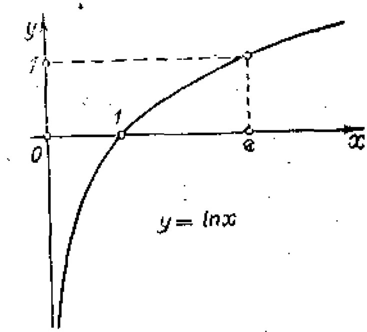
71- чизма. Ярим кубик парабола.



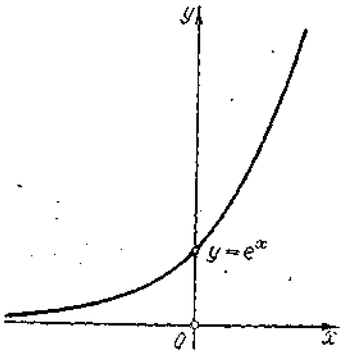
72- чизма. Ярим кубик парабола.



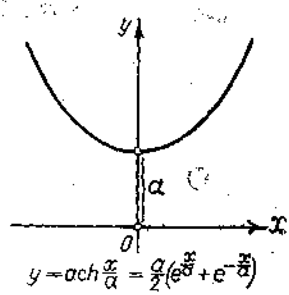
73- чизма. Илмоқли парабола.



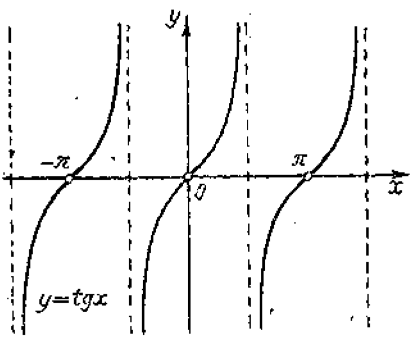
74- чизма. Логарифмика.



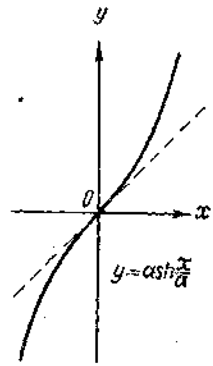
75- чизма. Логарифмика.



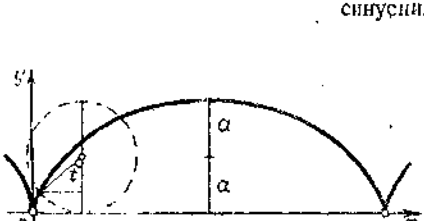
77- чизма. Занжир чизиқ.



76- чизма. Тангенсоида.

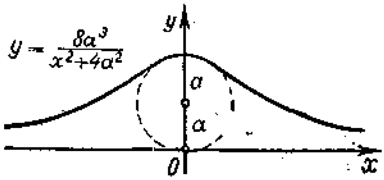


78- чизма. Гиперболик синуснинг графиги.

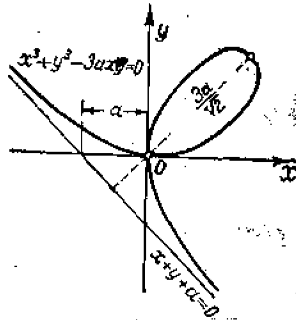


$x = a(t - \sin t)$ $\quad y = a(1 - \cos t)$

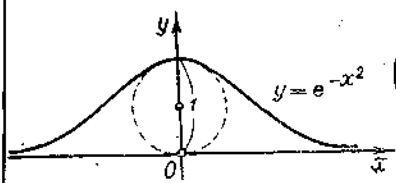
79- чизма. Циклоида.



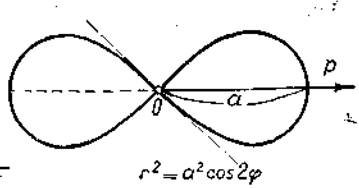
80- чизма. Локон (зулф).



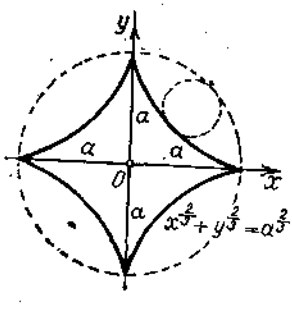
83- чизма. Декарт япроғи.



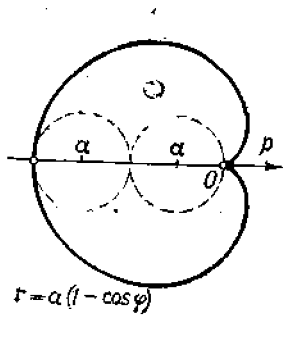
81- чизма. «Эҳтимоллик» чизиғи.



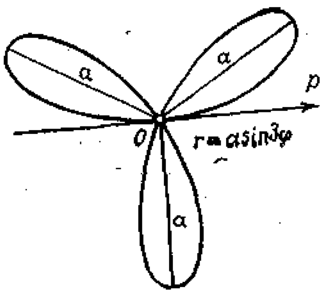
84- чизма. Бернулли лемнискатаси.



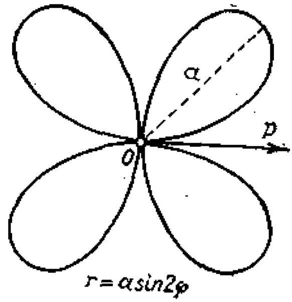
82- чизма. Астроида.



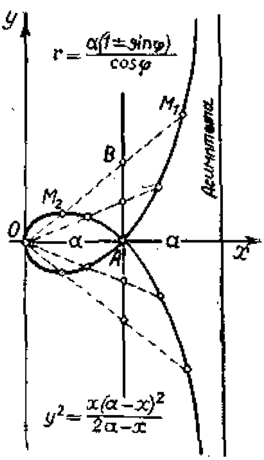
85- чизма. Кардиоида.



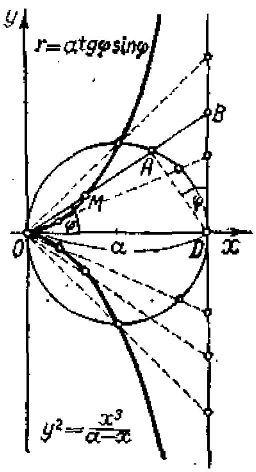
86- чизма. Уч япроқли гул.



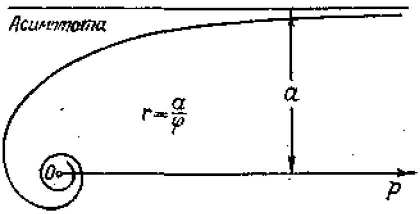
87- чизма. Тўрт япроқли гул.



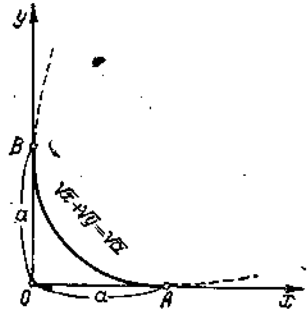
88- чизма. Строфоида.



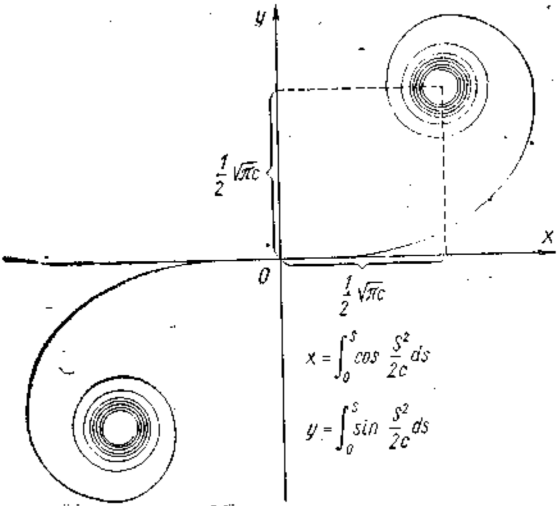
89- чизма. Циссоида.



90- чизма. Гиперболик спираль.



91- чизма. xOy бурчак ичига чизилган парабола ёйи.



92- чизма. Клотоида.

II. ЖАДВАЛЛАР

1. Тригонометрик функциялар

α°	sin α	tg α	ctg α	cos α		α°	α радиан	sin α	tg α
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90	0	0	0,000	0,000
1	0175	0175	57,3	1,000	89	5,73	0,1	0,100	+0,100
2	0349	0349	28,6	0,999	88	11,5	0,2	0,199	+0,203
3	0523	0524	19,1	999	87	17,2	0,3	0,296	+0,310
4	0697	0699	14,3	998	86	22,9	0,4	0,389	+0,422
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85	28,7	0,5	0,480	+0,547
6	1045	1051	9,51	995	84	34,4	0,6	0,564	+0,684
7	1219	1228	8,11	993	83	40,1	0,7	0,644	+0,842
8	139	141	7,11	990	82	45,0	$\frac{\pi}{4}$	0,707	+1,000
9	156	158	6,31	998	81				
10	0,174	0,176	5,67	0,985	80	45,8	0,8	0,717	+1,028
11	191	194	5,145	982	79	51,6	0,9	0,784	+1,260
12	208	213	4,705	978	78	57,3	1,0	0,842	+1,558
13	225	231	4,331	974	77	63,0	1,1	0,891	+1,963
14	242	249	4,011	970	76	68,8	1,2	0,932	+2,579
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75	74,5	1,3	0,964	+3,606
16	276	287	487	961	74	80,2	1,4	0,985	+5,789
17	292	306	271	956	73	86,0	1,5	0,998	+14,30
18	309	325	3,078	951	72	90,0	$\frac{\pi}{2}$	1,000	—
19	326	344	2,904	946	71				
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70	91,7	1,6	0,999	−33,75
21	358	384	605	934	69	97,4	1,7	0,992	−7,695
22	375	404	475	927	68	103,1	1,8	0,974	−4,292
23	391	424	356	921	67	108,9	1,9	0,646	−2,921
24	407	445	246	914	66	114,6	2,0	0,909	−2,184
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65	120,3	2,1	0,863	−1,711
26	438	488	2,050	899	64	126,1	2,2	0,808	−1,373
27	454	510	1,963	891	63	131,8	2,3	0,745	−1,118
28	469	522	881	883	62	135,0	$\frac{3\pi}{4}$	0,707	−1,000
29	485	554	804	875	61				
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60	137,5	2,4	0,676	−0,916
31	515	601	664	857	59	143,2	2,5	0,599	−0,748
32	530	625	600	848	58	149,0	2,6	0,515	−0,602
33	545	649	540	839	57	154,7	2,7	0,428	−0,472
34	559	675	483	829	56	160,4	2,8	0,336	−0,356
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55	166,1	2,9	0,240	−0,247
						171,9	3,0	0,141	−0,142
	cos α	ctg α	tg α	sin α	α°				

α°	sin α	tg α	ctg α	cos α	
36	588	727	376	809	54
37	601	754	327	799	53
38	616	781	280	788	52
39	629	810	235	777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	656	869	150	755	49
42	669	900	111	743	48
43	682	933	072	731	47
44	695	966	036	719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	cos α	ctg α	tg α	sin α	α°

177,6	3,1	0,042	−0,042
180,0	π	0,000	0,000

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},$$

$$\sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1.$$

α градуслар	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α радианлар	0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,122	0,140	0,157

1 радиан = 57°17′45″

Гиперболик функциялар

x	sh x	ch x	x	sh x	ch x
0	0	1			
0,1	0,100	1,005	2,1	4,022	4,289
0,2	0,201	1,020	2,2	4,457	4,568
0,3	0,304	1,045	2,3	4,937	5,037
0,4	0,411	1,081	2,4	5,466	5,557
0,5	0,521	1,128	2,5	6,050	6,132
0,6	0,637	1,185	2,6	6,695	6,769
0,7	0,759	1,255	2,7	7,407	7,474
0,8	0,888	1,337	2,8	8,192	8,253
0,9	1,026	1,433	2,9	9,060	9,115
1,0	1,175	1,543	3,0	10,02	10,07
1,1	1,336	1,669	3,1	11,08	11,12
1,2	1,509	1,811	3,2	12,25	12,29
1,3	1,698	1,971	3,3	13,54	13,58
1,4	1,904	2,151	3,4	14,97	15,00
1,5	2,129	2,352	3,5	16,54	16,57
1,6	2,376	2,578	3,6	18,29	18,32
1,7	2,646	2,828	3,7	20,21	20,24
1,8	2,942	3,107	3,8	22,34	22,36
1,9	3,268	3,418	3,9	24,69	24,71
2,0	3,627	3,762	4,0	27,29	27,31

$x > 4$ бўлганда, 0,1 аниқлик билан $\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx \frac{e^x}{2}$ деб ҳисоблаш мумкин.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x; \quad e^{xi} = i \sin x + \cos x.$$

3. Тескари миқдорлар, квадрат ва куб илдизлар, логарифмлар, кўрсаткичли функция

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
1,0	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	000	0,000	2,72	1,0
1,1	0,909	05	32	03	22	79	041	095	3,00	1,1
1,2	833	10	46	06	29	93	079	192	3,32	1,2
1,3	769	14	61	09	35	5,07	114	252	3,67	1,3
1,4	714	18	74	12	41	19	146	336	4,06	1,4
1,5	0,667	1,23	3,87	1,15	2,47	5,13	176	0,405	4,48	1,5
1,6	625	27	4,00	17	52	43	204	470	4,95	1,6
1,7	588	39	12	19	57	54	230	530	5,47	1,7
1,8	556	34	24	22	62	65	255	588	6,05	1,8
1,9	526	38	36	24	67	75	279	642	6,69	1,9
2,0	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	301	0,693	7,39	2,0
2,1	476	45	58	28	76	94	322	742	8,17	2,1
2,2	435	48	69	30	80	6,03	342	789	9,03	2,2
2,3	435	52	80	32	84	13	362	833	9,97	2,3
2,4	417	55	90	34	88	21	380	875	11,0	2,4
2,5	0,400	1,58	5,00	1,36	2,92	6,30	398	0,916	12,2	2,5
2,6	385	61	10	38	96	38	415	955	13,5	2,6
2,7	370	64	20	39	3,00	46	431	993	14,9	2,7
2,8	357	67	29	41	04	54	447	1,030	16,4	2,8
2,9	345	70	39	43	07	62	462	065	18,2	2,9
3,0	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	477	1,099	20,1	3,0
3,1	323	76	57	46	14	77	491	131	22,2	3,1
3,2	313	79	66	47	18	84	505	163	24,5	3,2
3,3	303	81	75	49	21	91	519	194	27,1	3,3
3,4	294	84	83	50	24	98	532	224	30,0	3,4
3,5	0,286	1,87	5,92	1,52	3,27	7,05	544	1,253	33,1	3,5
3,6	278	90	6,00	53	30	11	556	281	36,6	3,6
3,7	270	92	08	55	32	18	568	308	40,4	3,7
3,8	263	95	16	56	36	24	580	335	44,7	3,8
3,9	256	98	25	57	39	31	591	361	49,4	3,9
4,0	0,250	2,00	6,33	1,59	3,42	7,37	602	1,386	54,6	4,0
4,1	244	03	40	60	45	43	613	411	60,3	4,1
4,2	238	05	48	61	48	49	623	435	66,7	4,2
4,3	233	07	56	63	50	55	634	458	73,7	4,3
4,4	227	10	63	64	53	61	644	482	81,5	4,4
4,5	0,222	2,12	6,71	1,65	3,56	7,66	653	1,504	90,0	4,5
4,6	217	15	78	66	58	72	663	526	99,5	4,6
4,7	213	17	86	68	61	78	672	548	110	4,7
4,8	208	19	93	69	63	83	681	569	121	4,8
4,9	204	21	7,00	70	66	88	690	589	134	4,9

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
5,0	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	699	1,609	148	5,0
5,1	196	26	14	72	71	99	708	629	164	5,1
5,2	192	28	21	73	73	8,04	716	649	181	5,2
5,3	189	30	28	74	76	09	724	668	200	5,3
5,4	185	32	35	75	78	14	732	686	221	5,4
5,5	0,182	2,35	7,42	1,77	3,80	8,19	740	1,705	244	5,5
5,6	179	37	48	78	83	24	748	723	270	5,6
5,7	175	39	55	79	85	29	756	740	299	5,7
5,8	172	41	62	80	87	34	763	758	330	5,8
5,9	170	43	68	81	89	39	771	775	365	5,9
6,0	0,167	2,45	7,75	1,82	3,92	8,43	778	1,792	403	6,0
6,1	164	47	81	83	94	48	785	808	446	6,1
6,2	161	49	87	84	96	53	792	825	493	6,2
6,3	159	51	94	85	98	57	799	841	545	6,3
6,4	156	53	8,00	86	4,00	62	806	856	602	6,4
6,5	0,154	2,55	8,06	1,87	4,02	8,66	813	1,872	665	6,5
6,6	152	57	12	83	04	71	820	887	735	6,6
6,7	149	59	19	89	06	75	826	902	812	6,7
6,8	147	61	25	90	08	79	833	918	898	6,8
6,9	145	63	31	90	10	84	839	932	992	6,9
7,0	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	845	1,946	1097	7,0
7,1	141	67	43	92	14	92	851	968	1212	7,1
7,2	139	68	49	93	16	96	857	974	1339	7,2
7,3	137	70	54	94	18	9,09	863	982	1480	7,3
7,4	135	72	60	95	20	05	869	2,001	1636	7,4
7,5	0,133	2,74	8,66	1,96	4,22	9,09	875	2,015	1808	7,5
7,6	132	76	72	97	24	13	881	028	1998	7,6
7,7	130	78	78	98	25	17	887	041	2208	7,7
7,8	128	79	83	98	26	21	892	954	2440	7,8
7,9	127	81	89	99	29	24	898	067	2697	7,9
8,0	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	903	2,079	2981	8,0
8,1	124	85	9,00	01	33	32	909	092	3294	8,1
8,2	122	86	06	02	34	36	914	104	3641	8,2
8,3	121	88	11	03	36	40	919	116	4024	8,3
8,4	119	90	17	03	38	44	924	128	4447	8,4
8,5	0,118	2,92	9,22	2,04	4,40	0,47	929	2,140	4914	8,5
8,6	116	93	27	05	41	51	935	152	5432	8,6
8,7	115	95	33	06	43	55	940	163	6003	8,7
8,8	114	97	38	07	45	58	945	175	6694	8,8
8,9	112	98	43	07	47	62	949	186	7332	8,9

x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x
9,0	0,111	8,00	9,49	2,08	4,48	9,66	954	2,197	8193	9,0
9,1	110	02	54	09	50	69	959	208	8955	9,1
9,2	109	03	59	10	51	73	964	219	9897	9,2
9,3	108	05	64	10	53	76	969	230	10938	9,3
9,4	106	07	69	11	55	80	973	241	12088	9,4
9,5	0,105	3,08	9,75	2,12	4,56	9,83	978	2,251	13360	9,5
9,6	104	10	80	13	58	87	982	263	14765	9,6
9,7	103	11	84	13	60	90	987	272	16318	9,7
9,8	102	13	90	14	61	93	991	282	18034	9,5
9,9	101	15	95	15	63	97	996	293	19930	9,9
10,0	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	000	2,303	22026	10,0

$\lg x$ графасида ўнли логарифмларнинг мантиссалари берилган.

10 дан катта ёки 1 дан кичик сонларнинг натурал логарифмларини топиш учун

$$\ln (x\cdot 10^k) = \ln x + k \ln 10$$

формуладан фойдаланиш керак

Қуйидагиларни эслатиб ўтайлик:

$\ln 10 = 2,303;$ $\qquad$ $\ln 10^2 = 4,605;$

$\lg x = 0,4343 \ln x;$ $\qquad$ $\ln x = 2,303 \lg x$

Илдизларни тақрибий ҳисоблаш формулалари:

1) $|x| < 1$ бўлганда, $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n} + \frac{1-n}{2n^2}x^2.$

2) $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ бўлганда, $\sqrt[n]{a^n + b} \approx a\left(1 + \frac{b}{na^n} + \frac{1-n}{2n^2}\cdot\frac{b^2}{a^{2n}}\right).$

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

ВАСИЛИЙ ПАВЛОВИЧ МИНОРСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие для высших технических учебных заведений

Третье издание соответствует 11-ому изданию изд-ва «Наука», М., 1971

Издательство «Ўқитувчи»—Ташкент—1977

Таржимон *М. Холиқов* Техредактор *Т. Скиба*
Редакторлар: *И. Аҳмаджонов, Р. Каримов* Корректор *Д. Саъдуллаева*
Бадиий редактор *Е. Соин*

Теришга берилди 18/VI-1976 й. Босишга рухсат этилди 9/XI-1976 й. Қоғоз № 3. 84 X 108 1/32. Физ. б. л. 11,5 Шартли. б. л 19, 32. Нашр. л. 20,11. Тиражи 20000.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент. Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 103 — 76. Баҳоси 56 т. Муқоваси 10 т.

ЎзССР Министрлар Советининг нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитетининг Тошкент полиграфия комбинати. Навоий кўчаси, 30 1976 й. Зак. № 876.

Ташполиграфкомбинат Государственного Комитета Совета Министров УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ташкент, Навои, 30.