O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi

Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turg‘unbayev R.M.

FUNKSIONAL ANALIZ

(o‘quv qo‘llanma)

5140100 - Matematika va informatika
5140100 - Matematika

Toshkent-2007

Ayupov Sh.A., Berdikulov M.A., Turgunbayev R.M. Funksional analiz. Toshkent, 2007. Pedagogika oliy ta'lim muassasalarining bakalavrlari uchun o'quv qo'llanma.

Ushbu o'quv qo'llanma pedagogika oliy ta'lim muassasalarida tahsil olayotgan bakalavriat talabalarini funksional analizning asosiy tushunchalari (metrik fazo, chiziqli, normallangan, Gilbert fazolari, ularda aniqlangan operator va funksionallarning xossalari) va ularning variatsion hisobdagi tatbiqlari bilan tanishtirishga mo'ljallangan.

Аюпов Ш.А., Бердикулов М.А., Тургунбаев Р.М. Функциональный анализ. Ташкент, 2007. Учебное пособие для бакалавров педагогических вузов.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов-бакалавров педагогических вузов, изучающих функциональный анализ. В нем даются основные понятия функционального анализа (метрические, линейные, нормированные, гильбертовы пространства и свойства операторов и функционалов, определенных в этих пространствах), а также приводятся их приложения в вариационном исчислении.

Ayupov Sh.A., Berdikulov M.A., Turgunbaev R.M. Functional Analysis. Tashkent. 2007. Textbook for bachelors of pedagogical universities.

The present textbook is written for bachelor students of higher pedagogical institutes studying functional analysis. Basic consepts of functional analysis (metric, linear, normed, Hilbert spaces and properties of operators and functionals defined in these spaces) and their applications in calculus of variations are given.

Taqrizchilar:

O'. Toshmetov, Nizomiy nomidagi TDPU, professori

B.Omirov, O'zFA matematika va informatsion texnologiyalar instituti yetakchi ilmiy hodimi, fizika – matematika fanlari doktori

KIRISH

Biz matematik analiz kursida bir oʻzgaruvchili funksiyalarni, $\mathbb{R}^n$ fazo va ularda aniqlangan funksiyalarni oʻrgandik, matematik analizning asosiy tushunchasi boʻlgan funksiya tushunchasini kengaytirdik.

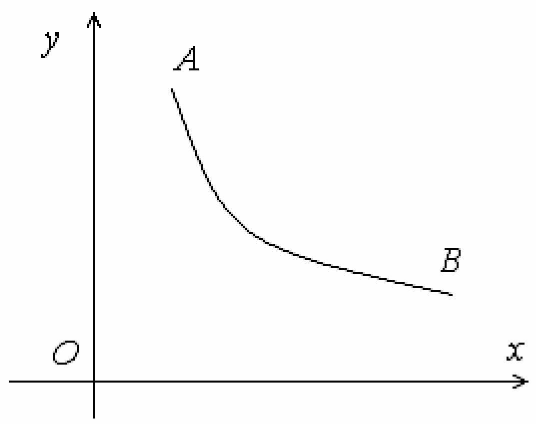
Hozirgi zamon muammolariga matematikaning tatbiqi funksiya tushunchasini yana ham kengaytirish zaruriyatini koʻrsatmoqda.

Matematikaning biz oʻrganmoqchi boʻlgan boʻlimi funksional analiz deb nomlanadi. Funksional analiz chekli va cheksiz oʻlchamli fazolarni oʻrganadi. Bu fazolarning elementlari funksiyalar, vektorlar, matritsalar, ketma-ketliklar, umuman olganda boshqa matematik ob’ektlardan iborat boʻlishi mumkin. Funksional analizda matematik analiz, funksiyalar nazariyasi va toʻplamlar nazariyasi, algebra va geometriya metodlari, gʻoyalari birlashib, uygʻunlashib oʻrganiladi. Bunda funksional bogʻlanishlar (funksiyalar) haqida eng toʻliq, chuqur tasavvur beriladi.

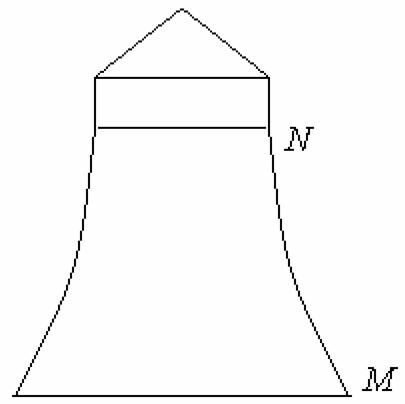
Faraz qilaylik, moddiy nuqta tekislikda biror egri chiziq boʻyicha A nuqtadan B nuqtaga qadar harakatlanayotgan boʻlsin (1-rasm). Ravshanki, moddiy nuqtaning harakatlanish vaqti harakat sodir boʻlayotgan egri chiziq koʻrinishiga bogʻliq boʻladi. Shunday qilib, bu misolda biz avval oʻrganilgan funksional bogʻlanishlardan farqli boʻlgan bogʻlanishga duch kelamiz. Bunda argument sifatida egri chiziq, funksiya qiymati esa harakatlanish vaqtini aniqlovchi sondan iborat.

2-rasmda koʻrsatilgan minorani qurish uchun qancha material ketishi M va N asoslarni tutashtiruvchi aylanma sirtga bogʻliq boʻladi. Bunda argument sifatida aylanma sirtlar, funksiya qiymati esa kerak boʻladigan material miqdorini ifodalovchi sondan iborat.

Savol tugʻiladi. Umuman olganda, elementlari ixtiyoriy boʻlgan A toʻplamda biror funksiyani aniqlab boʻladimi? Boshqacha aytganda, A toʻplamni biror sonli toʻplamga akslantirish mumkinmi?



1-rasm



2-rasm

Quyidagi savolni ham qo‘yish mumkin: argumentning ma’lum ma’noda yetarlicha yaqin qiymatlariga funksiyaning istalgancha yaqin qiymatlari mos kelishi uchun nima ishlar qilish zarur?

Ravshanki, so‘ngi xossa juda muhim. A to‘plamda uning elementlarining yaqinligini aniqlaydigan qoida yoki limitga o‘tish amalini aniqlaydigan qoida berilganda A to‘plamni funksiyaning aniqlanish sohasi deb qarash maqsadga muvofiq bo‘ladi.

Ushbu qo‘llanmaning maqsadi, birinchidan elementlari orasida masofa tushunchasi kiritilgan to‘plamlarni (metrik fazolar, chiziqli, normalangan fazolar), ikkinchidan fazolarni sonlar o‘qiga akslantirishlar (funksionallar) ning va fazoni fazoga akslantirishlar (operatorlar) ning xossalarini o‘rganishdan iborat.

Kelgusida uzluksiz funksional uzluksiz funksiyalarga xos bo‘lgan ko‘pgina xossalarga ega, operatorlar esa funksiya tushunchasining eng zamonaviy, eng umumiy umumlashmasi ekanligini ko‘ramiz.

Funksional analiz matematikaning alohida bo‘limi sifatida XVIII asrning oxiri va XIX asr boshlarida shakllana boshladi. Funksional analizga doir dastlabki ilmiy ishlar italyan matematigi Volterra, fransuz matematigi Puankare va nemis matematigi Gilbertga taalluqlidir. Metrik fazo tushunchasi fanga fransuz matematigi Freshe tomonidan XX asr boshlarida kiritilgan, normalangan fazo tushunchasi 1922 yilda polyak matematigi Banax va unga bog‘liq bo‘lmagan holda amerikalik matematik Viner tomonidan kiritilgan.

Funksional analizning eng muhim, dolzarb yo‘nalishlaridan biri operatorlar algebralari nazariyasi va uning tatbiqlari, Banax algebralari sohasining asosiy qismini tashkil qilib, Respublikamizda keng rivojlantirilmoqda.

Toshkent funksional maktabi vakillarining ko‘plab ilmiy tadqiqotlari, oxirgi 20-30 yil davomida ushbu yo‘nalishga aloqador bo‘lib, aytish mumkinki ko‘plab, chuqur va muhim natijalar olindi.

Banax algebralari nazariyasi bakalavrlar tayyorlash dasturiga kiritilmagan mavzu bo‘lib, magistrlar uchun esa tanishtiruv, umumiy tushunchalarni berish sifatida ozgina berilgan xolos.

Shu sababli ushbu darslikda Banax algebralari bilan yaxshiroq tanishish va tanishtirish, hamda undagi ba’zi yechilmagan masalalarga e’tibor berish nazarda tutilgan.

Ma’lumki, Banax algebralarining paydo bo‘lishida operatorlar algebrasi asosiy rol o‘ynagan.

Odatda, X chiziqli fazoni Y chiziqli fazoga aks ettiruvchi barcha chiziqli operatorlar to‘plamini $L(X,Y)$ orqali belgilanadi va u chiziqli fazo bo‘ladi.

Agar qaralayotgan fazolar normalangan fazolardan iborat bo‘lsa, u holda uzluksiz operatorlar fazosi haqida fikr yuritish mumkin.

Ikki uzluksiz operatorning yig‘indisi va uzluksiz operatorning songa ko‘paytmasi uzluksiz operator bo‘lishi chiziqli amallarning uzluksiz ekanligidan bevosita kelib chiqadi.

Agar $X=Y$ bo‘lsa, $L(X,Y)$ o‘rniga $L(X)$ yozamiz. $L(X)$ chiziqli fazoda ko‘paytma sifatida operatorlarning kompozitsiyasi, $T\circ S$ olinadi va $L(X)$ algebraga aylanadi. Bu algebrani *chiziqli operatorlar algebrasi* deyiladi.

Operator algebralarining eng muhimlari C^*-algebralar, fon Neyman algebralaridir. Ulardan yanada kengroq tushunchalar yordamida aniqlanadigan, o‘z–o‘ziga qo‘shma operatorlar fazosi va Yordan Banax algebralari (JB-algebralar) hozirgi zamon kvant mexanikasi masalalarining matematik modelini yaratishda, ularga matematik talqin berishda asosiy vazifalarni bajarishi asoslangan (Bu sohadagi batafsil ma’lumotlarni [6], [8], [10] adabiyotlardan olishingiz mumkin).

Bu yo‘nalishdagi rivojlanish yarim maydonlar nazariyasi [11] yaratilganidan so‘ng kuchayib ketdi.

Kvant mexanikasida fizik sistemaning tasodifiy miqdorlarini biror N, Gilbert fazosida aniqlangan o‘z-o‘ziga qo‘shma operator yordamida tasvirlash mumkinligi operatorlar algebrasiga bo‘lgan e’tiborni kuchaytirib yubordi [12]. Ma’lum bir aksiomalar sistemasini qanoatlantiruvchi, haqiqiy algebra – yordan algebralari yuqoridagi mulohazalar asosida paydo bo‘ldi. Bu algebralar asosan algebraistlar tomonidan o‘rganilgan bo‘lsa, keyinchalik ularga boshqacha yondashuv, ya’ni algebralarda norma, tartib tushunchalarini kiritib Banax algebralari tadqiq qilina boshlandi.

O‘zbekistonda funksional analizning rivojlanishi, uning g‘oyalarini keng targ‘ib qilgan va funksional analiz bo‘yicha o‘z maktabiga ega bo‘lgan akademik T.A.Sarimsoqov nomi bilan bog‘liq.

I-BOB. METRIK FAZOLAR

1-§. Metrik fazo ta'rifi va misollar

1.1. Metrik fazoning ta'rifi.

1-ta'rif. Agar biror X to'plamning o'zini o'ziga to'g'ri (Dekart) ko'paytmasi $X\times X$ ni $\mathbb{R}_+=[0;+\infty)$ ga aks ettiruvchi $\rho(x,y)$ funksiya berilgan bo'lib, u

1) $\rho(x,y)\geq 0$; $\rho(x,y)=0$ munosabat faqat $x=y$ bo'lganda bajariladi;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (simmetriklik aksiomasi);

3) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$ (uchburchak aksiomasi)

shartlarni qanoatlantirsa, u holda X to'plam *metrik fazo* deyiladi.

Kiritilgan $\rho(x,y)$ funksiya *metrika,* yuqoridagi shartlar esa *metrika aksiomalari* deyiladi.

Odatda metrik fazo (X,ρ) ko'rinishda belgilanadi.

1.2. Metrik fazoga misollar. 1) Haqiqiy sonlar to'g'ri chizig'i: $X=\mathbb{R}$. Bu to'plamda x va y sonlar orasidagi masofa $\rho(x,y)=|y-x|$ bo'yicha hisoblanadi.

2) n–o'lchamli Evklid fazosi: $X=\mathbb{R}^n$, va undagi $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ nuqtalar orasidagi masofa $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$ formula yordamida hisoblanadi. Bu metrik fazo $\mathbb{R}_2^n$ orqali belgilanadi.

Xususan $n=2$ bo'lganda bu metrik fazo Evklid tekisligi deyiladi.

3) n–o'lchamli fazoning $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ nuqtalari orasidagi masofa $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|$ deb aniqlansa, u metrik fazo bo'ladi va $\mathbb{R}_1^n$ orqali belgilanadi.

4) n–o'lchamli fazoning $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ nuqtalari orasidagi masofa $\rho(x,y)=\max\limits_{1\leq k\leq n}|y_k-x_k|$ kabi aniqlansa, u metrik fazo bo'ladi va $\mathbb{R}_\infty^n$ orqali belgilanadi.

5) $X=l_2=\{x=(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ldots), x_i\in\mathbb{R}$ va $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<+\infty\}$, $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-x_i)^2}$;

6) $X=C[a;b]$ – $[a;b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to‘plamida metrikani quyidagicha kiritamiz: $\rho(x,y)=\max\limits_{[a;b]}|y(t)-x(t)|$. Bu funksiyaning metrika bo‘lishini tekshirish qiyin emas.

Metrika aksiomalaridan birinchi va ikkinchisining o‘rinliligi ravshan. Uchburchak aksiomasini tekshiramiz. Ixtiyoriy $t\in[a;b]$ nuqta va $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funksiyalar uchun ushbu munosabat bajariladi:

$|x(t)-y(t)| = |(x(t)-z(t)) + (z(t)-y(t))| \leq |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$.

Bu tengsizlikdan

$\max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|\leq \max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)-z(t)|+\max\limits_{a\leq t\leq b}|z(t)-y(t)|$ bo‘lishi kelib chiqadi. Oxirgi tengsizlik

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$$

ekanligini bildiradi.

7) $C[a;b]$ da metrikani quyidagicha ham kiritish mumkin: $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|y-x|\,dt$. Bu metrik fazo $C_1[a;b]$ orqali belgilanadi.

8) $[a;b]$ kesmada kvadrati bilan integrallanuvchi uzluksiz funksiyalar to‘plamida $\rho(x,y)=\left(\int\limits_a^b(y-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$ funksiya metrika aksiomalarini qanoatlantiradi [2]. Bu metrik fazo $C_2[a;b]$ orqali belgilanadi.

Bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy to‘plamda metrika kiritish mumkinmi degan savolga quyidagi misol ijobiy javob beradi.

9) X- bo‘sh bo‘lmagan ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. $x, y\in X$ uchun

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, \text{ agar } x\neq y \text{ bo'lsa},\\ 0, \text{agar } x=y \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

shart bilan funksiya aniqlaymiz. Bu funksiya metrika aksiomalarini qanoatlantiradi.

Bunday aniqlangan metrik fazo *trivial metrik fazo*, metrika esa, *trivial metrika* deyiladi.

Tekshirish savollari

1. Metrika aksiomalarini ayting.
2. Metrik fazo nima?
3. Metrik fazolarga misollar keltiring.

Mashqlar

1. Tekislikdagi $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalar uchun $\rho(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ kabi aniqlangan funksiya metrika bo‘ladimi?

2. To‘g‘ri chiziqda quyidagi a) $\rho(x,y)=x^3-y^3$; b) $\rho(x,y)=|x^3-y^3|$; c) $\rho(x,y)=|arctgx-arctgy|$ funksiyalarning qaysi biri metrika bo‘ladi?

3. Agar $M=\{a,b,c\}$ to‘plamda $\rho(a,c)=\rho(c,a)=\rho(a,b)=\rho(c,b)=2$, $\rho(b,c)=\rho(b,a)=1$ kabi aniqlangan ρ funksiya metrika bo‘ladimi? ρ uchburchak aksiomasini qanoatlantiradimi?

4. Agar $M=\{a,b,c\}$ to‘plamda $\rho(a,b)=\rho(b,c)=1$ shartni qanoatlantiruvchi ρ metrika berilgan bo‘lsa, u holda $\rho(a,c)$ qanday qiymatlarni qabul qilishi mumkin?

5. Metrika aksiomalari quyidagi

1) $\rho(x,y)=0$ munosabat faqat $x=y$ bo‘lganda bajariladi;

2) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+ \rho(y,z)$

ikkita aksiomaga ekvivalent ekanligini isbotlang.

6. Aylanada $r(A,B)$ - vatar bo‘yicha va $\rho(A,B)$- yoy bo‘yicha metrika kiritish mumkinligini tekshiring. Bu metrikalarning birini ikkinchisi orqali qanday ifodalash mumkin?

7. Uch o‘lchamli fazoda, koordinatalar boshidan chiquvchi nurlar to‘plami ikki nur orasidagi masofa sifatida, ular tashkil qilgan burchaklardan kichigining radian o‘lchovi olinsa metrik fazo bo‘lishini ko‘rsating.

8. Ko‘phadlar fazosida $\rho(P_1,P_2)=|P_1(0)-P_2(0)|$ funksiya metrika aksiomalarini qanoatlantiradimi?

9. Aytaylik, (X,ρ)-metrik fazo, biror A to‘plam va $f:A\to X$ akslantirish berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy $x,y\in A$ uchun quyidagicha aniqlangan $\rho_1(x,y)=\rho(f(x),f(y))$

funksiyani qaraymiz. Bunday aniqlangan funksiya A to‘plamda metrika bo‘lishi uchun f akslantirishning in’ektiv bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

10. Butun sonlar to‘plamida quyidagicha $\rho(a,b)=\begin{cases} 0, & \text{agar } a=b \text{ bo'lsa}, \\ \dfrac{1}{3^k}, & \text{agar } a\neq b \text{ bo'lsa} \end{cases}$

kabi aniqlangan funksiya metrika bo‘lishini isbotlang, bu yerda k soni $a–b$ ayirma qoldiqsiz bo‘linadigan 3 ning eng katta darajasi. ρ(5,7), ρ(7,–2), ρ(7,25) larni hisoblang.

11. Natural sonlar to‘plamida

a) $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{xy}$; b) $\rho(a,b)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x=y \text{ bo'lsa}, \\ 1+\dfrac{1}{x+y}, & \text{agar } x\neq y \text{ bo'lsa} \end{cases}$ funksiyalar metrika bo‘ladimi?

12. Agar X to‘plamda ρ metrika bo‘lsa, u holda $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ funksiya ham X to‘plamda metrika bo‘lishini isbotlang.

13. Aytaylik f funksiya $[0;\infty)$ da aniqlangan va 1) $f(0)=0$; 2) $[0;\infty)$ da o‘suvchi; 3) ixtiyoriy $x,y\in[0;\infty)$ uchun $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ shartlarni qanoatlantirsin.

Agar ρ metrika bo‘lsa, u holda $\rho_1(x,y)=f(\rho(x,y))$ ham metrika bo‘lishini isbotlang.

14. Aytaylik f funksiya $[0;\infty)$ da aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, 1) $f(0)=0$; 2) $[0;\infty)$ da o‘suvchi; 3) $(0;\infty)$ oraliqda ikkinchi tartibli hosilasi mavjud va $f''(x)<0$ shartlarni qanoatlantirsin.

Agar ρ metrika bo‘lsa, u holda

$$\rho_1(x,y)=f(\rho(x,y))$$

ham metrika bo‘lishini isbotlang.

15. Agar ρ_1 va ρ_2 biror X to‘plamda aniqlangan metrikalar bo‘lsa, u holda ixtiyoriy α_1 va α_2 musbat sonlar uchun $\rho(x,y)=\alpha_1\rho_1(x,y)+\alpha_2\rho_2(x,y)$ funksiya ham X to‘plamda metrika bo‘lishini isbotlang.

2-§. Metrik fazoda ba'zi bir geometrik tushunchalar

2.1. Ochiq va yopiq sharlar, nuqtaning ε atrofi

Aytaylik (X,ρ) metrik fazo bo'lsin. Kelgusida, metrik fazo elementi va metrik fazo nuqtasi tushunchalari bir xil ma'noda ishlatiladi.

1-ta'rif. Biror $x_0\in X$ nuqta va $r>0$ son uchun ushbu

$$S(x_0,r)=\{\, x\in X:\ \rho(x\,,x_0)<r\,\}$$

to'plam X fazoda *ochiq shar*;

$$\bar{S}\,(x_0\,,r)\ =\{x\in X:\ \rho(x\,,x_0)\le r\}$$

to'plam *yopiq shar* deyiladi.

x_0 nuqta sharning *markazi*; r son sharning *radiusi* deyiladi.

Zaruriyat tug'ilganda $\{x\in X:\ \rho(x,x_0)=\ r\}$ to'plamni ham ishlatamiz, u x_0 markazli, r radiusli *cfera* deyiladi.

2-ta'rif. $S(x_0,\varepsilon)$ ochiq shar x_0 nuqtaning *ε-atrofi* deyiladi va $O_\varepsilon(x_0)$ kabi belgilanadi.

Nuqta atrofining ba'zi xossalarini o'rganamiz.

1^o. Har bir nuqta o'zining ixtiyoriy atrofiga tegishli bo'ladi.

Haqiqatan, agar $\varepsilon > 0$ bo'lsa, u holda $\rho(a,a)=0 < \varepsilon$ bo'lishi ravshan. Demak, $a\in O_\varepsilon(a)$.

2^o. Huqtaning ixtiyoriy ikki atrofi kesishmasi ham atrof bo'ladi.

Haqiqatan, agar $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ bo'lsa, u holda $O_{\varepsilon_1}(a)\cap O_{\varepsilon_2}(a)=O_{\varepsilon_1}(a)$ bo'ladi.

3^o. Agar $x\in O_\varepsilon(a)$ bo'lsa, u holda x nuqtaning $O_\varepsilon(a)$ da yotuvchi atrofi mavjud.

Haqiqatan, aytaylik $\rho(a,x)=d$ bo'lsin. $x\in O_\varepsilon(a)$ bo'lganligidan $\delta=\varepsilon-d>0$ bo'ladi. Endi, $y\in O_\delta(x)$ olamiz. Metrikaning uchburchak aksiomasiga ko'ra

$$\rho(a,y)\le\rho(a,x)+\rho(x,y)<d+\delta=d+(\varepsilon-d)=\varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $y\in O_\varepsilon(a)$. Bundan $O_\delta(x)\subset O_\varepsilon(a)$ kelib chiqadi.

4^0. Bir-biridan farqli ikki nuqtaning kesishmaydigan atroflari mavjud.

Haqiqatan aytaylik, $a,b\in X$, $a\neq b$ va $\rho(a,b)=r$ bo‘lsin. Agar $\varepsilon=r/3$ bo‘lsa, $O_\varepsilon(a)$ va $O_\varepsilon(b)$ atroflarning kesishmasligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, bu atroflar umumiy x nuqtaga ega bo‘lsin. U holda $\rho(a,x)<\varepsilon$, $\rho(b,x)<\varepsilon$ va $\rho(a,b)\leq \leq\rho(a,x)+ \rho(b,x)<2\varepsilon={}^{2r}/_3 <r$. Bu esa shartga zid.

2.2. Chegaralangan to‘plam.

3-ta’rif. Agar (X,ρ) metrik fazodagi M to‘plam biror shar ichida joylashgan bo‘lsa, bu to‘plam *chegaralangan* deyiladi.

Bu ta’rifning quyidagi ta’rifga ekvivalent ekanligini tekshirish murakkab emas:

Agar (X,ρ) metrik fazodagi M to‘plamga tegishli barcha x va y nuqtalar uchun, $\rho(x,y)<K$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi K musbat son mavjud bo‘lsa, u holda M to‘plam chegaralangan deyiladi.

Agar bir to‘plamda ikki xil metrika berilgan bo‘lsa, u holda qaralayotgan M to‘plam bir metrikaga nisbatan chegaralangan, ikkinchi bir metrikaga nisbatan chegaralanmagan bo‘lishi mumkin.

Masalan, natural sonlar to‘plami $\rho(n,m)=|n-m|$ metrikaga nisbatan chegaralanmagan, lekin

$$\rho_1(n,m)=\begin{cases} 0, & \text{agar } m=n,\\ 1+\dfrac{1}{m+n}, & \text{agar } m\neq n\end{cases}$$

metrikaga nisbatan chegaralangandir.

Ravshanki, 1 dan farqli barcha n larda $\rho_1(1,n)<2$ bo‘ladi, ya’ni bu metrikaga nisbatan barcha natural sonlar to‘plami, markazi 1 nuqtada radiusi 2 ga teng ochiq sharga tegishli bo‘ladi.

2.3. To‘plamning urinish, limit nuqtalari

4-ta’rif. Agar $x_0\in X$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida M to‘plamning x_0 dan farqli elementi mavjud bo‘lsa, u holda x_0 nuqta M ning *limit nuqtasi* deyiladi.

Misollar. 1) $(\mathbb{R}^n,\rho)$ metrik fazodagi $S(x_0,r)$ ochiq sharning limit nuqtalari to‘plami $\bar{S}(x_0,r)$ yopiq shardan iborat bo‘ladi.

2) Endi $(\mathbb{R},\rho)$ metrik fazodagi, ya’ni sonlar o‘qidagi ba’zi to‘plamlarni qaraymiz:

a) $E_1=\mathbb{N}$ natural sonlar to‘plami bo‘lsin. Bu to‘plamning birorta ham limit nuqtasi mavjud emas.

b) $E_2=\{1/n : n=1,2,\ldots\}$ bo‘lsin. Bu to‘plamning birgina limit nuqtasi 0 bor va $0\notin E_2$.

c) $E_3=(0;1)$. Bu to‘plamning limit nuqtalari [0;1] kesmaning barcha nuqtalaridan iborat.

d) $E_4=(0;1)\cap Q$ bo‘lsin. Bu to‘plamning limit nuqtalari ham [0;1] kesmaning barcha nuqtalaridan iborat.

5-ta’rif. Agar $x_0\in X$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida M to‘plamning kamida bitta element mavjud bo‘lsa, x_0 nuqta M ning *urinish nuqtasi* deyiladi.

Limit nuqta urinish nuqtasi bo‘ladi, lekin aksinchasi har doim ham o‘rinli emas. Masalan, chekli to‘plamning har bir nuqtasi urinish nuqta bo‘ladi, ammo u limit nuqta bo‘la olmaydi. Yuqoridagi E_1 va E_2 to‘plamlarning barcha nuqtalari urinish nuqtalardir.

2.4. To‘plamning yopilmasi

6-ta’rif. M to‘plamning urinish nuqtalari to‘plami $\overline{M}$ bilan belgilanib, M ning *yopilmasi* deyiladi.

Misol. $(\mathbb{R}^2,\rho)$ metrik fazoda $S(x_0,r)$ ochiq sharga tegishli ratsional koordinatali nuqtalar to‘plamining yopilmasi $\bar{S}(x_0,r)$ yopiq shardan iborat bo‘ladi.

Teorema. *Ixtiyoriy M, M_1 va M_2 to‘plamlar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinlidir:*

1) $M\subset\overline{M}$ *;*

2) $\overline{M}=\overline{\overline{M}}$ *;*

3) Agar $M_1 \subset M_2$ *bo'lsa, u holda* $\overline{M}_1 \subset \overline{M}_2$ *bo'ladi;*

4) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$.

Isboti. Birinchi xossa to‘plamning urinish nuqtasi ta’rifidan kelib chiqadi.

Ikkinchi xossani isbotlaymiz. Birinchi xossaga asosan $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Shuning uchun $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$ munosabatni isbotlash yetarli. $x \in \overline{\overline{M}}$ bo‘lsin. U holda bu nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida $\overline{M}$ ga tegishli x_1 nuqta topiladi; so‘ng x_1 nuqtaning radiusi $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x, x_1) > 0$ bo‘lgan atrofini olamiz. Agar $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$ bo‘lsa, u holda

$$\rho(z,x) \le \rho(z,x_1) + \rho(x_1,x) < \varepsilon,$$

ya’ni $z \in O_\varepsilon(x)$ bo‘ladi. Shunday qilib, $O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Ammo $x_1 \in \overline{M}$, demak, x_1 ning ε_1-atrofida M ga tegishli x_2 nuqta mavjud. Shuning uchun $x_2 \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Lekin $O_\varepsilon(x)$ shar x nuqtaning ixtiyoriy atrofi bo‘lgani uchun $x \in \overline{M}$.

Uchinchi xossa o‘z-o‘zidan ravshan.

To‘rtinchi xossani isbotlaymiz. Aytaylik $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$ bo‘lsin, u holda x nuqtaning ixtiyoriy $O_\varepsilon(x)$ atrofida $M_1 \cup M_2$ ga tegishli x_1 element mavjud. Agar $x \notin \overline{M_1}$ va $x \notin \overline{M_2}$ bo‘lsa, u holda x ning shunday $O_{\varepsilon_1}(x)$ va $O_{\varepsilon_2}(x)$ atroflari mavjudki, bu atroflar mos ravishda M_1 va M_2 to‘plamlar bilan kesishmaydi. Endi $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ deb olsak, u holda x nuqtaning $O_\varepsilon(x)$ atrofi $M_1 \cup M_2$ to‘plam bilan kesishmaydi. Bu esa x ning tanlanishiga zid. Demak, x nuqta $\overline{M_1}$ yoki $\overline{M_2}$ to‘plamlardan kamida bittasiga tegishli, ya’ni

$$\overline{M_1 \cup M_2} \subset \overline{M_1} \cup \overline{M_2}.$$

Teskari munosabatning o‘rinligi $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ va $M_2 \subset M_1 \cup M_2$ munosabatlardan hamda uchinchi xossadan kelib chiqadi.

Tekshirish savollari

1. Metrik fazoda ochiq (yopiq) sharlarni ta’riflang.
2. Nuqtaning atrofi qanday aniqlanadi?
3. Nuqta atrofining qanday xossalari bor?
4. Limit nuqtani ta’riflang.

5. Urinish nuqtani ta’riflang.

6. To‘plamning yopilmasi qanday aniqlanadi?

7. To‘plam yopilmasi xossalarini ayting.

Mashqlar

1. Biror metrik fazoda ikkita har xil radiusli ochiq sharlar ustma-ust tushishi mumkinmi?

2. Biror metrik fazoda radiusi 3 ga teng bo‘lgan shar radiusi 2 ga teng bo‘lgan sharning xos qismi bo‘lishi mumkinmi?

3. Biror metrik fazoda $r>0$ radiusli shar bo‘sh to‘plam bo‘lishi mumkinmi?

4. Tekislikdagi kabi, agar c nuqta a va b nuqtalardan farqli va $\rho(a,b)=\rho(a,c)+\rho(c,b)$ bo‘lsa, u holda c nuqta a va b nuqtalar orasida yotadi deb aytamiz.

a) Agar c nuqta a va b nuqtalar orasida, d nuqta esa a va c nuqtalar orasida yotsa, u holda d nuqta a va b nuqtalar orasida yotishini isbotlang.

b) Agar c nuqta a va b nuqtalar orasida yotsa, u holda a nuqta c va b nuqtalar orasida yotmasligini isbotlang.

c) Agar c nuqta a va b nuqtalar orasida, d nuqta esa a va c nuqtalar orasida yotsa, u holda c nuqta d va b nuqtalar orasida yotishini isbotlang.

d) Metrik fazoning nuqtalari orasida, har doim shu fazoning kamida bitta nuqtasi yotadimi?

5. X metrik fazoda $[a,b]$ kesma deb shu fazoning a, b va bu nuqtalar orasida yotadigan barcha nuqtalardan tashkil topgan to‘plamga aytiladi. 1–§ dagi 2 b), c); 7; 10; 11 misollarda va trivial metrik fazoda kesmalar qanday bo‘ladi? Bu kesmalar chegaralanganmi?

6. Agar $\{a,b\}\neq\{c,d\}$ bo‘lsa, u holda $[a,b]\neq[c,d]$ ekanligini isbotlang.

7. Aytaylik c nuqta a va b nuqtalar orasida yotsin. Har doim $[a,b]=[a,c]\cup[c,d]$ munosabat o‘rinlimi?

8. $\mathbb{R}_2^2$ tekislikda har qanday to‘g‘ri to‘rtburchakning chegaralangan to‘plam ekanligini ko‘rsating.

9. Metrik fazoda yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralangan to‘plam ekanligini isbotlang.

10. To‘g‘ri chiziqdagi $x_n=(-1)^n+{}^1/_n\ (n\in\mathbb{N})$ nuqtalar to‘plamining urinish va limit nuqtalarini toping.

11. E to‘plam $\mathbb{R}_2^2$ tekislikdagi ratsional koordinatali nuqtalar to‘plami bo‘lsa, uning yopilmasini toping.

12. $\mathbb{R}_2^2$ tekislikda faqat ikkita: $A(1,3)$, $B(3,0)$ limit nuqtaga ega bo‘lgan E to‘plamgi misol keltiring.

3-§. Metrik fazodagi ochiq va yopiq to‘plamlar

3.1. Yopiq to‘plam va uning xossalari, misollar.

(X,ρ) metrik fazo bo‘lsin. Bunda $M\subset X$ to‘plam olamiz.

1-ta’rif. Agar $M=\overline{M}$ bo‘lsa, u holda M *yopiq to‘plam* deyiladi.

Ixtiyoriy (X,ρ) metrik fazoda $\bar{S}(x_0,r)$ yopiq shar, X ning o‘zi, bo‘sh to‘plam va har bir chekli to‘plam yopiq to‘plamlarga misol bo‘ladi.

Shuningdek $(\mathbb{R},\rho)$, $\rho(a,b)=|b-a|$ to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $[c,d]$ kesma yopiq to‘plamdir.

1-teorema. *a) Chekli sondagi yopiq to‘plamlarning birlashmasi yana yopiq to‘plam bo‘ladi;*

b) Ixtiyoriy sondagi yopiq to‘plamlarning kesishmasi yopiq to‘plam bo‘ladi.

Isboti. a) bu xossani ikki to‘plam uchun isbotlash yetarli. Aytaylik F_1 F_2 yopiq to‘plamlar bo‘lsin, ya’ni $\bar{F}_1=F_1$ va $\bar{F}_2=F_2$ o‘rinli. U holda 2-§ dagi teoremaning 4) xossaga ko‘ra $\overline{F_1\cup F_2}=\overline{F_1}\cup\overline{F_2}=F_1\cup F_2$. Demak, ta’rifga ko‘ra $F_1\cup F_2$ yopiq to‘plam.

b) Aytaylik ixtiyoriy sondagi $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yopiq to‘plamlar sistemasi berilgan va x ularning kesishmasi $F=\bigcap\limits_{\alpha}F_\alpha$ to‘plamning urinish nuqtasi bo‘lsin. U holda x ning ixtiyoriy atrofida F ning kamida bitta, masalan, x_1 elementi mavjud va kesishmaning xossasiga ko‘ra α ning barcha qiymatlari uchun $x_1\in F_\alpha$ bo‘ladi. Demak, ixtiyoriy α uchun $x\in\overline{F_\alpha}=F_\alpha$, ya’ni $x\in\cap F_\alpha=F$ bo‘ladi. Demak, F yopiq to‘plam. Teorema isbot bo‘ldi.

3.2. Ochiq to‘plam va uning xossalari, misollar.

(X,ρ) metrik fazo, $M\subset X$ biror to‘plam bo‘lsin.

2-ta’rif. Agar x nuqtaning M to‘plamda butunlay joylashgan biror atrofi mavjud bo‘lsa, u holda x nuqta M to‘plamning *ichki nuqtasi* deyiladi.

Agar M to‘plamning hamma nuqtalari ichki bo‘lsa, u *ochiq to‘plam* deyiladi.

Ixtiyoriy *(X,ρ)* metrik fazoda $S(x_0,r)$ ochiq shar, $\mathbb{R}$ da $(a;b)$ interval ochiq to‘plamga misol bo‘ladi.

$\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar to‘plami ochiq to‘plam emas, chunki ratsional son ichki nuqta bo‘la olmaydi, ya’ni, ixtiyoriy ratsional sonning har bir atrofi faqat ratsional sonlardan iborat emas.

Shu kabi irratsional sonlar to‘plami ham ochiq to‘plam emas.

Bu to‘plamlarning $\mathbb{R}$ da yopiq to‘plam emasligini ham ko‘rish qiyin emas.

2-teorema. *Biror $G\subset X$ to‘plamning ochiq bo‘lishi uchun uning to‘ldiruvchisi, $F=X\backslash G=CG$ yopiq bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isboti. *Zaruriyligi*. Aytaylik G ochiq to‘plam bo‘lsin. U holda har bir $x\in G$ nuqta butunlay G da joylashgan atrofga ega. Demak, bu atrof F bilan kesishmaydi. Bundan ko‘rinadiki, F ning birorta ham urinish nuqtasi G ga kirmaydi. Demak F yopiq to‘plam.

Yetarliligi. Aytaylik $F=X\backslash G$ yopiq to‘plam bo‘lsin. U holda G dan olingan ixtiyoriy nuqta F bilan kesishmaydigan, demak G da butunlay joylashgan atrofga ega, ya’ni G ochiq to‘plam.

Natija. *Bo‘sh to‘plam $\varnothing$ va X fazo ham ochiq, ham yopiq to‘plamlardir.*

3-teorema. Ixtiyoriy sondagi ochiq to‘plamlarning birlashmasi va chekli sonidagi ochiq to‘plamlarning kesishmasi ochiq to‘plam bo‘ladi.

Isboti. Ushbu $\bigcap_{\alpha}(X\backslash G_\alpha)=X\backslash(\bigcup_{\alpha} G_\alpha)$ va $\bigcup_{i=1}^{n}(X\backslash G_i)=X\backslash(\bigcap_{i=1}^{n} G_i)$ tengliklardan va yuqorida isbotlangan teoremalardan kelib chiqadi.

Tekshirish savollari

1. Qanday to‘plam yopiq to‘plam deyiladi?
2. Yopiq to‘plamga misollar keltiring.
3. Qanday to‘plam ochiq to‘plam deyiladi?
4. Ochiq to‘plamga misollar keltiring.
5. Ochiq va yopiq to‘plamlar orasida qanday bog‘lanish mavjud?
6. Ochiq ham, yopiq ham bo‘lmagan to‘plamlarga misollar keltiring.

Mashqlar

1. Metrik fazoda yopiq sharning yopiq to‘plam ekanligini isbotlang.

2. Metrik fazoda ochiq sharning ochiq to‘plam ekanligini isbotlang.

3. Tekislikda musbat koordinatali nuqtalar to‘plami ochiq to‘plam bo‘ladimi? Javobingizni asoslang.

4. $C[a;b]\supset E=\{f|\ \ A<f(x)<B\}$ to‘plamning ochiq to‘plam ekanligini ko‘rsating.

5. Quyidagi $\begin{cases} x+y>5; \\ x^2+y^2<100 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi bilan aniqlangan A to‘plamning R_2^2 fazoda ochiq to‘plam ekanligini isbotlang.

6. Quyidagi $\begin{cases} x+3y-2z\le 6; \\ x^2+y^2+z^2\ge 25 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi bilan aniqlangan A to‘plamning $\mathbb{R}_2^3$ fazoda yopiq to‘plam ekanligini isbotlang.

7. Quyidagi $\begin{cases} y\ge x^2+1; \\ x^2+y^2<64 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi bilan aniqlangan A to‘plamning $\mathbb{R}_2^2$ fazoda ochiq ham, yopiq ham emasligini isbotlang.

8. $C[a,b]$ fazodagi ko‘phadlar to‘plami ochiq ham, yopiq ham emasligini isbotlang.

4-§. Metrik fazoda yaqinlashish tushunchasi

4.1. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar.

1-ta'rif. (X,ρ) metrik fazoda biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ nomer topilib, barcha $n>n_0(\varepsilon)$ lar uchun $\rho(x_n,x)<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik X fazoning x elementiga *yaqinlashadi* deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ yoki $x_n\to x$ orqali belgilanadi.

Bu x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik X fazoning hech bir nuqtasiga yaqinlashmasa, u *uzoqlashuvchi* ketma- ketlik deyiladi.

Ravshanki, metrik fazodagi ketma-ketlik limiti ta'rifini sonli ketma-ketlik limiti ta'rifiga keltirish mumkin:

Agar $n\to\infty$ da $\rho(x_n ,x)\to 0$, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$ bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik X fazoning x elementiga yaqinlashadi deyiladi.

Metrik fazoning elementlari sonlardan, sonli kortejlardan, geometrik fazo nuqtalaridan, chiziqlardan, funksiyalardan, umuman istalgan tabiatli bo'lishi mumkin. Shu sababli ketma-ketlik limitining yuqorida keltirilgan ta'rifi keng tatbiqqa ega.

Misol. $x_n(t)=t^n$ funksiyalar ketma-ketligi $C_1[0;1]$ fazoda $\theta(t)\equiv 0$ funksiyaga yaqinlashadi.

Haqiqatdan ham, bu fazoda $\rho(x_n,\theta)=\int\limits_0^1 t^n dt = \dfrac{1}{n+1}$, demak $n\to\infty$ da $\rho(x_n,x)\to 0$ bo'lishi ravshan.

Funksiyalarning ushbu ketma-ketligi $C[0;1]$ fazoda $\theta(t)\equiv 0$ funksiyaga yaqinlashmaydi, chunki bu holda $\rho(x_n,\theta = \max\limits_{1\le t\le 1} t^n=1$ bo'ladi, ya'ni $\rho(x_n ,x)\not\to 0.$

4.2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik xossalari.

1-teorema. *Yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat bitta limitga ega.*

Isboti. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti ikkita, ya'ni $x_n\to x$ va $x_n\to y$, $x\neq y$ bo'lsin. U holda metrikaning uchburchak aksiomasiga ko'ra,

$$0 \le \rho(x,y) \le \rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)$$

bo‘ladi.

Ammo, bu tengsizlikning o‘ng tomoni $n\to\infty$ da 0 ga intiladi, demak, $\rho(x,y)=0$, bundan $x=y$ kelib chiqadi.

2-teorema. *$\rho(x,y)$ metrika x va y elementlarning uzluksiz funksiyasi, ya'ni $x_n \to x$ va $y_n \to y$ bo‘lsa, u holda $\rho(x_n ,y_n) \to \rho(x ,y)$ bo‘ladi.*

Isboti. Avval ixtiyoriy to‘rtta $x, y, z, u \in X$ elementlar uchun

$$|\rho(x,y)-\rho(z,u)|\le \rho(x,z)+\rho(y,u) \qquad (1)$$

tengsizlikning o‘rinli ekanligini isbotlaymiz.

Uchburchak aksiomasidan foydalanib,

$$\rho(x,y)\le \rho(x,z)+\rho(z,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,u)+\rho(u,y) \qquad (2)$$

tengsizliklarni yozish mumkin. Bundan

$$\rho(x,y) - \rho(z,u)\le \rho(x,z) +\rho(u,y)$$

Bu tengsizlikda x, y larni mos ravishda z, u lar bilan almashtirib,

$$\rho(z,u) - \rho(x,y)\le \rho(x,z) +\rho(u,y) \qquad (3)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. (2) va (3) dan (1) kelib chiqadi.

(1) tengsizlikda z va u ni mos ravishda x_n va y_n bilan almashtirilsa,

$$|\rho(x,y) - \rho(x_n,y_n)|\le \rho(x,x_n) +\rho(y,y_n)$$

tengsizlik hosil bo‘ladi. Bu tengsizlikning o‘ng tomoni, teorema shartiga ko‘ra nolga intiladi, bundan esa $\rho(x_n ,y_n) \to\rho (x ,y)$ kelib chiqadi.

Quyidagi teorema ravshan.

3-teorema. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x ga yaqinlashsa, u holda bu ketma-ketlikning ixtiyoriy $\{x_{n_k}\}$ qism ketma-ketligi ham shu x ga yaqinlashadi.*

4-teorema. *Agar $\{x_n\}$ ketma- ketlik x ga yaqinlashsa va $x_0 \in X$ tayin bir element bo‘lsa, u holda $\{\rho(x_n ,x_0)\}$ sonlar to‘plami chegaralangan bo‘ladi.*

Isboti. $\{\rho(x_n,x)\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lganligi sababli, u chegaralangan bo‘ladi. Uning yuqori chegarasini K bilan belgilaymiz. Metrikaning uchburchak aksiomasiga ko‘ra

$$\rho(x_n ,x_0)\le \rho(x_n ,x)+\rho(x ,x_0)\le K+\rho(x ,x_0)=K_1.$$

Teorema isbot bo‘ldi.

4.3**. Ba’zi metrik fazolarda yaqinlashish tushunchasining ma’nolari.**

1) Trivial metrik fazoda ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun bu ketma-ketlikning hamma elementlari biror hadidan boshlab bir-biriga teng bo‘lishi zarur va yetarli.

2) n–o‘lchamli Evklid fazosida $\{x_k\}$ ketma-ketlikning x elementga yaqinlashishi uchun, x_k vektor koordinatalari, mos ravishda x vektor koordinatalariga yaqinlashishi zarur va yetarli.

Haqiqatan ham, agar $\mathbb{R}_2^n$ da $\rho(x_k,x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-x_i)^2}\to 0$ $(k\to\infty)$ bo‘lsa, u holda $x_i^{(k)}\to x_i$,i=1,2,…,n $(k\to\infty)$ bo‘ladi.

3) $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $C[a;b]$ fazoning elementlari va $x_n(t)\to x(t)\in C[a;b]$, ya’ni

$$\rho(x_n,x)=\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0,\ n\to\infty$$

bo‘lsin. Bundan, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $n_0=n_0(\varepsilon)$ natural son topiladiki, $t\in[a;b]$ bo‘lganda

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, $t\in[a;b]$ ning barcha qiymatlari uchun $n>n_0$ bo‘lganda

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlikning $x(t)$ funksiyaga tekis yaqinlashishini bildiradi. Va aksincha, $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $[a;b]$ kesmada $x(t)$ ga tekis yaqinlashsa, u holda $\rho(x_n,x)\to 0$ bo‘ladi. Demak, $C[a;b]$ fazoda metrika ma’nosida yaqinlashish matematik analizdan ma’lum bo‘lgan tekis yaqinlashish tushunchasi bilan ustma-ust tushar ekan.

Tekshirish savollari

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikni ta’riflang.
2. Ketma-ketlik limitining yagonaligi haqidagi teoremani isbotlang.

3. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ va $C[0;1]$ fazolarda yaqinlashuvchi ketma-ketliklarga misollar keltiring.

Mashqlar

1. Agar $x_n \to a$ va $\rho(x_n, y_n) \to 0$ bo‘lsa, u holda $y_n \to a$ ekanligini isbotlang.

2. Quyidagi funksiyalar ketma-ketligi ko‘rsatilgan fazoda $f(x) \equiv 0$ funksiyaga yaqinlashadimi?

1) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, a) $C[0;1]$; b) $C_1[0;1]$;

2) $f_n(x) = xe^{-nx}$, a) $C[0;10]$; b) $C_1[0;10]$;

3) $f_n(x) = n^{-\frac{1}{8}}\sqrt{2nxe^{-\frac{1}{2}nx^2}}$, a) $C[0;1]$; b) $C_2[0;1]$;

4) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, a) $C[-\pi;\pi]$; b) $C_1[-\pi;\pi]$;

3. $\mathbb{R}_2^n$, $\mathbb{R}_1^n$, $\mathbb{R}_\infty^n$ fazolarda metrikaga nisbatan yaqinlashish bilan birgalikda koordinatalari bo‘yicha yaqinlashish tushunchasi ham qaraladi. Agar $\lim\limits_{k\to\infty} x_m^{(k)} = x_m$ $(m=1,\ldots,n)$ bo‘lsa, u holda $(x^{(k)}) = ((x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}))$ nuqtalar ketma-ketligi $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtaga koordinatalar bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi. $M_n = \left(\dfrac{n-1}{n}, \dfrac{2n}{n+1}\right)$ nuqtalar ketma-ketligi koordinatalar bo‘yicha qanday nuqtaga yaqinlashadi? Bu ketma-ketlik $\mathbb{R}_2^n$, $\mathbb{R}_1^n$, $\mathbb{R}_\infty^n$ fazolarda shu nuqtaga yaqinlashadimi?

4. $\mathbb{R}_2^n$ fazoda yaqinlashuvchi ketma-ketlikning koordinatalar bo‘yicha ham yaqinlashuvchi va aksincha, koordinatalar bo‘yicha yaqinlashuvchi ketma-ketlikning metrika bo‘yicha ham yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

5-§. Metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar

5.1. Uzluksiz akslantirish, misollar. (X,ρ_X) va (Y,ρ_Y) metrik fazolar bo'lib, $T:X\to Y$ akslantirish berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar M to'plamdagi x_0 nuqtaga X da yaqinlashuvchi bo'lgan ixtiyoriy $\{x_n\}\subset M$ ketma-ketlik uchun ushbu $Tx_n\to Tx_0$ munosabat Y da bajarilsa, u holda T akslantirish x_0 nuqtada *uzluksiz* deyiladi.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ son topilib, $\rho_X(x_0,x)<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ lar uchun $\rho_Y(T(x_0),T(x))<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda T akslantirish x_0 nuqtada *uzluksiz* deyiladi.

3-ta'rif. Agar $b=T(x_0)$ nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun X fazoda x_0 nuqtaning $T(U)\subset V$ shartni qanoatlantiruvchi U atrofi mavjud bo'lsa, u holda T akslantirish x_0 *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

Bu uchala ta'rifning teng kuchliligi, yoki boshqacha aytganda ekvivalentligi matematik analiz kursidagi funksiya uzluksizligi kabi isbotlanadi.

Misol. $C[0;1]$ fazoni $\mathbb{R}$ ga akslantiruvchi $T:x\to x(1)$ akslantirish ixtiyoriy a «nuqta»da uzluksiz bo'ladi, bu yerda x va a «nuqtalar» [0;1] kesmada uzluksiz funksiyalar.

Haqiqatan, $\varepsilon>0$ son berilgan bo'lsin. U holda $\delta=\varepsilon$ deb olamiz. Endi $\rho_C(a,x)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-a(t)|$, $\rho_R(Ta,Tx)=|x(1)-a(1)| \le \rho_C(a,x)$ bo'lganligi sababli, $\rho_C(a,x)<\delta$ shartdan $\rho_R(Ta,Tx)<\varepsilon$ tengsizlikning kelib chiqishi ravshan.

$C_1[0;1]$ fazoni $\mathbb{R}$ ga akslantiruvchi $T:x\to x(1)$ akslantirish $\theta(t)\equiv 0$ nuqtada uzluksiz emas.

Haqiqatan, $x_n(t)=t^n$ ketma-ketlik $C_1[0;1]$ fazoda $\theta(t)\equiv 0$ funksiyaga yaqinlashadi, lekin $Tx_n= x_n(1)=1$, $T\theta=0$, demak $\{Tx_n\}$ ketma-ketlik $T\theta$ ga yaqinlashmaydi.

4-ta'rif. Agar T o'z aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda T *uzluksiz akslantirish* deyiladi.

Xususan $Y=\mathbb{R}$ bo'lgan holda, uzluksiz akslantirish uzluksiz *funksional* deyiladi.

$C[0;1]$ fazoni $\mathbb{R}$ ga akslantiruvchi $T(x)=x(1)$ akslantirish uzluksiz funksionalga misol bo‘ladi.

5.2. Izometriya, uning uzluksizligi. (X,ρ_X) va (Y,ρ_Y) metrik fazolar va $T:X\to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin.

5-*ta’rif*. Agar X fazodan olingan ixtiyoriy a va b nuqtalar uchun $\rho_X(a,b)=\rho_Y(T(a),T(b))$ tenglik bajarilsa, u holda T *izometrik akslantirish* yoki *izometriya* deyiladi.

Ravshanki, har qanday izometriya uzluksiz akslantirish bo‘ladi.

Tekislikdagi har qanday harakat izometriyaga misol bo‘ladi.

5.**3. Uzluksiz akslantirishning xossalari.**

1-teorema. *Aytaylik $T: X\to Y$ akslantirish X fazoning a nuqtasida, $f:Y\to Z$ akslantirish Y fazoning $b=T(a)$ nuqtasida uzluksiz bo‘lsin. U holda X ni Z ga akslantiruvchi $x\to F(T(x))$ murakkab akslantirish a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.*

Isboti. Z fazo $c=F(T(a))$ nuqtasining ixtiyoriy W atrofini olamiz. F akslantirish $b=T(a)$ nuqtada uzluksiz va $c= F(b)$ bo‘lganligi sababli, b nuqtaning $F(V)\subset W$ shartni qanoatlantiruvchi V atrofi mavjud. Shunga o‘xshash, T akslantirish a nuqtada uzluksiz bo‘lganligi sababli, bu nuqtaning $T(U)\subset V$ shartni qanoatlantiruvchi U atrofi mavjud. U holda $F(T(U))\subset T(V)\subset W$ ga ega bo‘lamiz. Bu esa, $x\to F(T(x))$ akslantirishning a nuqtada uzluksiz ekanligini isbotlaydi.

2-**teorema**. Agar T akslantirish X metrik fazoni Y metrik fazoga aks ettiruvchi uzluksiz akslantirish bo‘lsa, u holda Y fazodan olingan ixtiyoriy ochiq to‘plamning X fazodagi proobrazi ochiq, yopiq to‘plamniki esa yopiq bo‘ladi.

Isboti. Aytaylik G to‘plam Y da ochiq bo‘lsin. X fazodagi $D=T^{-1}(G)$ to‘plamning barcha nuqtalari ichki nuqta ekanligini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik $a\in D$ va $T(a)=b$ bo‘lsin. U holda $b\in G$ va G ochiq bo‘lganligidan b nuqta G to‘plamning ichki nuqtasi bo‘ladi. Shuning uchun bu nuqtaning G ga to‘laligicha tegishli bo‘lgan V atrofi mavjud. T akslantirishning a nuqtada uzluksizligidan a nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo‘lib, $T(U)\subset V$ bo‘ladi. U holda $T(U)\subset G$, bundan esa $U\subset D=T^{-1}(G)$ kelib chiqadi. Bu esa ixtiyoriy

$a\in D$ nuqtaning D ga tegishli atrofi mavjudligi, ya'ni a ichki nuqta ekanligini isbotlaydi. Shuning uchun D ochiq to'plam.

Yopiq to'plamning to'ldiruvchisi ochiq ekanligidan, Y fazoda biri ikkinchisiga to'ldiruvchi to'plamlarning proobrazlari, X fazoda ham biri ikkinchisiga to'ldiruvchi bo'lishidan va teoremaning isbot qilingan qismidan ikkinchi qismning isboti kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Uzluksiz akslantirishda, ochiq to'plamning obrazi har doim ham ochiq bo'lmaydi. Masalan, $x\to \sin x$ uzluksiz akslantirishda $(-\pi;\pi)$ intervalning obrazi $[-1;1]$ kesmadan iborat.

Tekshirish savollari

1. Uzluksiz akslantirishni ta'riflang.
2. Uzluksiz akslantirishga misollar keltiring.
3. Uzluksiz akslantirishga berilgan ta'riflarning ekvivalentligini isbotlang.
4. Izometriya nima?
5. Uzluksiz akslantirishning xossalarini ayting.

Mashqlar

1. $\mathbb{R}_2^2$ fazoni o'ziga o'tkazuvchi $(x,y)\to(2x-3y+4,\ -x+4y)$ akslantirish berilgan. a) (2,3) nuqtaning obrazini; b) (–4,4) nuqtaning obrazini; c) $y=x$ to'g'ri chiziq obrazini; d) abstsissalar o'qining proobrazini toping.

2. $C[0,1]$ fazoni $\mathbb{R}$ ga o'tkazuvchi

$F\colon y\to\int_0^1 (x^2-y^3(x))dx$ akslantirish berilgan. $F(\sin\pi x)$ ni toping. $F^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ga tegishli ikkita element ko'rsating.

3. $\mathbb{R}_2^2$ fazoni $C[0,1]$ ga o'tkazuvchi $F{:}(x,y)\to\varphi(t)=xt^2-2yt$ akslantirish berilgan. (–1,1) nuqtaning obrazini toping. Quyidagi a) $f(t)=3t^2+4t$; b) $f(t)=5t^2-2$; c) $f(t)=\sin t$ funksiyalarning proobrazlarini toping.

4. Quyidagi $C[a;b]\to\mathbb{R}$ funksionallarni uzluksizlikka tekshiring:

$$a)\ F(y)=\max_{a\le x\le b} y(x); \quad b)\ F(y)=\min_{a\le x\le b} y(x); \quad c)\ F(y)=\int_a^b y(x)dx\,.$$

6-§. To‘la metrik fazolar. To‘ldiruvchi fazo

6.1. Fundamental ketma-ketliklar. Matematik analiz kursidan ma’lumki, ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun u Koshi shartini qanoatlantirishi zarur va yetarli. Bu xossa matematikada katta ahamiyatga ega bo‘lib, haqiqiy sonlar to‘plamining to‘laligini ko‘rsatadi.

Haqiqiy sonlar to‘plamining bu xossasi har qanday metrik fazo uchun o‘rinlimi? - degan savol tug‘iladi. Bu savolga javob berish uchun quyidagi ta’rifni kiritamiz.

1-ta’rif. Agar (X,ρ) metrik fazodan olingan $\{x_n\}$ ketma-ketlik Koshi shartini qanoatlantirsa, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $n(\varepsilon)$ nomer mavjud bo‘lib, $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ tengsizlik barcha $n, m\geq n(\varepsilon)$ uchun bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ *fundamental ketma-ketlik* deyiladi.

1-teorema. *Har qanday fundamental ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi.*

Isboti. Ta’rifga ko‘ra $\varepsilon=1$ uchun $n(\varepsilon)$ nomer mavjud bo‘lib, $\rho(x_n,x_m)<1$ tengsizlik barcha $n, m\geq n(\varepsilon)$ qiymatlar uchun bajariladi. Xususan, $k>n(\varepsilon)$ va $n\geq k$ uchun ham $\rho(x_n,x_k)<1$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Endi k ni tayinlab olamiz, u holda markazi x_k nuqtada radiusi

$$r=max(\rho(x_1,x_k), \rho(x_2,x_k) ,\dots , \rho(x_{k-1},x_k), 1)$$

bo‘lgan shar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlarini o‘z ichiga oladi, ya’ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

2-teorema. *Ixtiyoriy yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental bo‘ladi*.

Isboti. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik a nuqtaga yaqinlashsin. U holda $\varepsilon>0$ son uchun shunday $n(\varepsilon)$ nomer topilib, barcha $n\geq n(\varepsilon)$ uchun $\rho(x_n,a)<\varepsilon/2$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Demak, $n, m \geq n(\varepsilon)$ lar uchun $\rho(x_n,x_m)\leq \rho(x_n,a)+ \rho(a,x_m)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$ munosabat o‘rinli. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligini isbotlaydi. Teorema isbot bo‘ldi.

6.2. To‘la metrik fazoning ta’rifi, misollar.

2-ta’rif. Agar X metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda *X to‘la metrik fazo* deyiladi.

Misollar: 1) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|y-x|$; $(\mathbb{R},\rho)$-to‘la metrik fazo bo‘lishi ravshan;

2) $X=\mathbb{R}_2^n$, $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$; $(\mathbb{R}_2^n,\rho)$-to‘la metrik fazo bo‘ladi, uning to‘laligini ko‘rsatishni o‘quvchiga qoldiramiz;

3) $X=\mathbb{Q}$, $\rho(r_2,r_1)=|r_2-r_1|$; $(\mathbb{Q},\rho)$- to‘la bo‘lmagan metrik fazoga misol bo‘ladi, chunki, masalan $\left\{r_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ratsional sonlar ketma-ketligi fundamental bo‘lib, $\mathbb{Q}$ da yaqinlashuvchi emas, ya’ni uning limiti e, ratsional son emas;

4) $C[a,b]$ to‘la metrik fazo bo‘ladi. Uning to‘laligini ko‘rsatish uchun undagi istalgan $\{x_n(t)\}$ fundamental ketma-ketlikning [a,b] kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyaga yaqinlashishini ko‘rsatishimiz kerak.

Aytaylik $\{x_n(t)\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lsin. $C[a,b]$ fazodagi yaqinlashish funksiyalarning tekis yaqinlashishiga ekvivalent ekanligi ma’lum. Har bir $t\in[a,b]$ nuqtada $\{x_n(t)\}$ sonli ketma-ketlik fundamental bo‘lganligi sababli yaqinlashuvchi bo‘ladi. Uning limitini $x_0(t)$ bilan belgilaymiz. $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $x_0(t)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun $x_0(t)$ funksiya uzluksiz bo‘ladi, Demak, $x_0(t)\in C[a,b]$ bo‘ladi.

6.3. Ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligi

Matematik analiz kursida ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi, haqidagi teorema o‘rganilgan edi. Bu teorema to‘la metrik fazolar uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

3-teorema. *(X,ρ) to‘la metrik fazoda ($\overline{S}_n=\overline{S}_n(a_n,\varepsilon_n)$) yopiq sharlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, ular uchun quyidagi shartlar bajarilsin:* $\overline{S}_{n+1}\subset\overline{S}_n$

$(n=1,2,\ldots)$ va $n\to\infty$ da $\varepsilon_n\to 0$. U holda bu sharlarning umumiy qismi birgina nuqtadan iborat bo'ladi.

Isboti. Berilgan $\overline{S}_n$ sharlarning markazlaridan iborat bo'lgan quyidagi ketma-ketlikni tuzamiz:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad (1)$$

Teorema shartiga ko'ra $a_{n+p}\in\overline{S}_n$ $(p=1,2,\ldots)$. Shuning uchun $\rho(a_{n+p},a_n)\le\varepsilon_n$ yoki $n\to\infty$ da $\rho(a_{n+p},a_n)\to 0$ bo'ladi.

Demak, (1) ketma-ketlik fundamental. X to'la metrik fazo bo'lganligi uchun bu ketma-ketlik biror $a\in X$ elementga yaqinlashuvchi bo'ladi. Endi, ixtiyoriy $\overline{S}_m$ yopiq sharni olamiz (m-tayin natural son); u holda $a\in\overline{S}_m$, chunki $(a_m,\ a_{m+1},\ldots)$ nuqtalar ketma-ketligi (1) ketma-ketlikning qism ketma-ketligi bo'lganligi uchun a nuqtaga yaqinlashadi. Bu ketma-ketlikning har bir hadi $\overline{S}_m$ ga tegishli va $\overline{S}_m$ yopiq bo'lganligi uchun $a\in\overline{S}_m$, $m=1,\ 2,\ \ldots$. Demak, $a\in\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{S}_m$ bo'ladi.

Endi a nuqtaning yagonaligini isbotlash uchun teskarisini faraz qilamiz: $\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{S}_m$ ga a nuqtadan farqli yana biror b element ham tegishli bo'lsin.

U holda $0<\rho(a,b)\le\rho(a,a_n)+\rho(a_n,b)\le 2\varepsilon_n$ va $n\to\infty$ da $\varepsilon_n\to 0$ bo'lganligi uchun $\rho(a,b)=0$, ya'ni $a=b$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

4-teorema. *Agar (X,ρ) metrik fazoda, 3-teorema shartlarini qanoatlantiruvchi har qanday yopiq sharlar ketma-ketligi bo'sh bo'lmagan umumiy qismga ega bo'lsa, u holda X to'la metrik fazo bo'ladi.*

6.4. To'ldiruvchi fazo haqidagi teorema

Quyida funksional analizning asosiy qoidalaridan biri bo'lgan to'ldiruvchi fazo haqidagi teorema isbotini keltiramiz.

3-ta'rif. Agar (X,ρ) metrik fazo uchun shunday (X^*,ρ^*) to'la metrik fazo mavjud bo'lib, X fazo X^* ning hamma yerida zich (ya'ni $\overline{X}\supset X^*$) bo'lsa, u holda (X^*,ρ^*) metrik fazo *(X,ρ) fazoning to'ldiruvchisi* deyiladi.

Misol. $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar to'plami $\rho(r,q)=|q-r|$ metrikaga nisbatan to'la emas. Ammo $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to'plami $\rho(x,y)=|y-x|$ metrikaga nisbatan to'la metrik fazo. Shuningdek, bilamizki $\mathbb{Q}$ to'plam $\mathbb{R}$ da zich, ya'ni $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, demak $\mathbb{R}$ fazo $\mathbb{Q}$ fazoning to'ldiruvchisi bo'ladi.

5-**teorema**. *Ixtiyoriy (X,ρ) metrik fazo to'ldiruvchiga ega bo'lib, u X ning elementlarini o'z o'rnida qoldiruvchi izometriya aniqligida yagona bo'ladi, ya'ni har qanday ikki to'ldiruvchi fazoning birini ikkinchisiga aks ettiruvchi va X fazoning har bir nuqtasini o'z o'rnida qoldiruvchi izometriya doim mavjud.*

Isboti. Avval, agar to'ldiruvchi fazo mavjud bo'lsa, uning yagonaligini isbotlaymiz. Aytaylik (X^*,ρ_1) va (X^{**},ρ_2) fazolar (X,ρ) fazoning to'ldiruvchilari bo'lsin. Bizning maqsadimiz uchun quyidagi:

1) φ - izometriya;
2) ixtiyoriy $x\in X$ uchun $\varphi(x)=x$

xossalarga ega bo'lgan $\varphi\colon X^*\to X^{**}$ akslantirishning mavjudligini ko'rsatish yetarli.

Bunday φ izometriyani quyidagicha aniqlaymiz. Aytaylik $x^*\in X^*$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin. To'ldiruvchi fazoning ta'rifiga asosan x^* ga yaqinlashuvchi va X ning elementlaridan tuzilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud. Bu ketma-ketlik X^{**} fazoga ham tegishli. X^{**} to'la bo'lganligi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik biror $x^{**}\in X^{**}$ nuqtaga yaqinlashuvchi bo'ladi. O'z-o'zidan ravshanki, x^{**} nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikni tanlashga bog'liq emas. Akslantirishni $\varphi(x^*)=x^{**}$ ko'rinishda aniqlaymiz. Ravshanki, ixtiyoriy $x\in X$ uchun $\varphi(x)=x$.

Endi faraz qilaylik, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ lar X fazodagi fundamental ketma-ketliklar bo'lib, ular X^* fazoda mos ravishda x^* va y^* nuqtalarga, X^{**} fazoda mos ravishda

x^{**} va y^{**} nuqtalarga yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda metrikaning uzluksizligiga asosan

$$\rho_1(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty}\rho_1(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n),$$

$$\rho_2(x^{**},y^{**})=\lim_{n\to\infty}\rho_2(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n),$$

munosabatlar, ya’ni $\rho_1(x^*,y^*)=\rho_2(x^{**},y^{**})$ tenglik o‘rinli. Shunday qilib, φ biz izlagan izometriya bo‘ladi.

Endi to‘ldiruvchi fazoning mavjudligini isbotlaymiz. X metrik fazoda $\{x_n\}$ va $\{x'_n\}$ fundamental ketma-ketliklar uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x'_n)=0$ bajarilsa, biz ularni *ekvivalent* deymiz va $\{x_n\}\sim\{x'_n\}$ ko‘rinishda belgilaymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabat bo‘ladi. Demak, X fazodagi fundamental ketma-ketliklar to‘plami o‘zaro ekvivalent bo‘lgan, ketma-ketliklar sinflariga ajraladi. Endi biz (X^*,ρ) fazoni quyidagicha aniqlaymiz.

X^* ning elementlari deb, o‘zaro ekvivalent bo‘lgan fundamental ketma-ketliklar sinflariga aytamiz.

Agar x^*, $y^*\in X^*$ ikki sinf bo‘lsa, biz ularning har biridan $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ fundamental ketma-ketliklarni olib, X^* fazoda metrikani

$$\rho(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n) \qquad (1)$$

ko‘rinishda aniqlaymiz. (Buning metrika bo‘lishini mustaqil isbotlang).

Endi X ni X^* ning qism fazosi deb hisoblash mumkinligini ko‘rsatamiz.

Ixtiyoriy $x\in X$ elementga shu elementga yaqinlashuvchi bo‘lgan fundamental ketma-ketliklar sinfini mos qo‘yamiz. Bu sinf bo‘sh emas, chunki bu sinf statsionar bo‘lgan (ya’ni hamma x_n elementlari x ga teng bo‘lgan) ketma-ketlikni o‘z ichiga oladi. Agar $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ bo‘lsa, u holda $\rho(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$. Shu tarzda har bir $x\in X$ ga yuqorida aytilgan sinfni mos qo‘ysak, X ni X^* ga izometrik akslantirish hosil bo‘ladi. Shuning uchun X ni uning X^* dagi tasviri bilan aynan teng deb hisoblaymiz.

X ni X^* ning hamma erida zich ekanligini isbotlaymiz. Aytaylik $x^*\in X^*$ ixtiyoriy element va $\varepsilon>0$ bo‘lsin. x^* sinfga tegishli bo‘lgan biror $\{x_n\}\in x^*$

fundamental ketma-ketlikni olamiz. n_0 natural son shunday bo‘lsinki, ushbu $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ tengsizlik ixtiyoriy $n,m>n_0$ lar uchun bajarilsin. U holda m bo‘yicha limitga o‘tsak, $\rho(x_n,x^*)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_m)\leq\varepsilon$ tengsizlik ixtiyoriy $n>n_0$ uchun bajariladi. Demak, x^* nuqtaning ixtiyoriy atrofida X ning elementi mavjud, ya’ni X ning yopilmasi X^* ga teng.

Nihoyat, X^* ning to‘la ekanligini isbotlaymiz. Avval shuni aytish kerakki, X^* ning ta’rifiga ko‘ra X ning elementlaridan hosil bo‘lgan ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ fundamental ketma-ketlik X^* ning biror x^* elementiga yaqinlashadi, aniqrog‘i, shu elementni o‘z ichiga oluvchi sinf bilan aniqlangan x^* elementga yaqinlashadi. X fazo X^* fazoda zich bo‘lgani tufayli X^* ning elementlaridan tuzilgan ixtiyoriy $x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n, \dots$ fundamental ketma-ketlik uchun unga ekvivalent bo‘lgan va X ning elementlaridan tuzilgan $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketlik mavjud. Buni ko‘rsatish uchun x_n sifatida X ning ushbu $\rho(x_n,x^*_n)<\dfrac{1}{n}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy elementini olsa bo‘ladi. O‘osil bo‘lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik X da fundamental, va demak, biror x^* elementga yaqinlashuvchi bo‘ladi. Shuningdek, bu holda $\{x^*_n\}$ ketma-ketlik ham x^* ga yaqinlashadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Tekshirish savollari

1. Qanday ketma-ketlik fundamental deyiladi?
2. Fundamental ketma-ketlikka misollar keltiring.
3. Fundamental bo‘lmagan ketma-ketlikka misollar keltiring.
4. To‘la metrik fazoga ta’rif bering.
5. To‘la metrik fazoga misollar keltiring.
6. To‘ldiruvchi fazoga ta’rif bering.
7. To‘ldiruvchi fazoga misollar keltiring.
8. Izometriya nima?
9. Qachon ikki metrik fazo izometrik deyiladi?
10. Qanday ketma-ketliklar ekvivalent deyiladi? Misollar keltiring.

11. Teorema isbotini qismlarga ajrating (rejasini yozing).

Mashqlar

1. Sonlar o‘qida $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini isbotlang.

2. $y_n(x)=x^n$ funksiyalar ketma-ketligi *a)* $C[-0,5;0,5]$; *b)* $C[0;1]$ fazoda fundamental ketma-ketlik bo‘ladimi?

3. $\mathbb{R}_2^n$ fazoning to‘laligini isbotlang.

4. $\mathbb{R}_1^n$ fazoning to‘laligini isbotlang.

5. $C[a;b]$ fazoning ko‘phadlardan iborat qism fazosi to‘la bo‘ladimi?

7-§. Qisqartirib akslantirish prinsipi

7.1. **Akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasi.**

Aytaylik (X,ρ) metrik fazoni o‘z-o‘ziga aks ettiruvchi T akslantirish berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar X fazoda shunday a nuqta topilib, $T(a)=a$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda a nuqta *T akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasi* deyiladi.

Misollar. 1) Sonlar o‘qini o‘ziga aks ettiruvchi $T: x\to x^2$ akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalari $x=x^2$ tenglama yechimlaridan, ya’ni 0 va 1 dan iborat.

2) $\begin{cases} u = 2x + 3y - 2 \\ v = x + y + 1 \end{cases}$ formulalar tekislikni o‘z-o‘ziga akslantiradi. Bu akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalari $\begin{cases} x = 2x + 3y - 2 \\ y = x + y + 1 \end{cases}$ sistemaning yechimidan, ya’ni (-1;1) nuqtadan iborat.

3) Agar $y(x)$ funksiya $[0;1]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda $y^2(x)-y(x)-x^2$ funksiya ham [0;1] kesmada uzluksiz funksiya bo‘ladi. Shuning uchun $T(y)= y^2- - y - x^2$ formula bilan aniqlangan akslantirish $C[0;1]$ fazoni o‘z-o‘ziga akslantiradi.

Bu akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalari $y^2(x)-y(x)-x^2=y(x)$ funksional tenglama yechimlaridan, ya’ni $y=1+\sqrt{1+x^2}$ va $y=1-\sqrt{1+x^2}$ funksiyalardan iborat bo‘ladi.

7.2. Qisqartirib akslantirish.

(X,ρ) metrik fazoni o‘z-o‘ziga aks ettiruvchi T akslantirish berilgan bo‘lsin.

2-ta’rif. Agar X fazodan olingan ixtiyoriy x va y nuqtalar uchun

$$\rho(Tx,Ty) \le \alpha\rho(x,y) \qquad (1)$$

tengsizlikni va $0<\alpha<1$ shartni qanoatlantiradigan α son mavjud bo‘lsa, u holda T *qisqartirib akslantirish* deyiladi.

Misol: $X=[0;1/3]$, $\rho(x,y)=|y-x|$, $T(x)=x^2$ bo‘lsin. Agar x_1 va x_2 kesmaning ixtiyoriy nuqtalari bo‘lsa, u holda

$\rho(Tx_1,Tx_2)=|x_2^2-x_1^2|=|x_2+x_1|\cdot|x_2-x_1|\le {}^2/_3\cdot|x_2-x_1|= {}^2/_3\cdot\rho(x_1,x_2)$

bo‘ladi. Demak, T akslantirish qisqartirib akslantirish ekan.

1-teorema. *Agar T qisqartirib akslantirish bo‘lsa, u holda T uzluksiz bo‘ladi.*

Isboti. Aytaylik a nuqta X fazoning ixtiyoriy nuqtasi va $\varepsilon>0$ bo‘lsin. U holda $\rho(x,a)<\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ lar uchun (1) tengsizlikka ko‘ra quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\rho(Tx,Ta)\le \alpha\rho(x,a)<\alpha\varepsilon<\varepsilon$$

Bu esa ixtiyoriy a nuqtada T akslantirishning uzluksiz ekanligini isbotlaydi. Teorema isbot bo‘ldi.

7.3. Qisqartirib akslantirish prinsipi.

2-teorema. *(X,ρ) to‘la metrik fazoda aniqlangan har qanday T qisqartirib akslantirish, yagona qo‘zg‘almas nuqtaga ega, ya’ni $Tx=x$ tenglamaning yagona yechimi mavjud.*

Isboti. Aytaylik a_0 nuqta X fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. T akslantirish X fazoni o‘z-o‘ziga akslantirgani uchun a_0 nuqtaning obrazi ham X fazoga tegishli bo‘ladi. Bu nuqtani a_1 bilan belgilaymiz, ya’ni $a_1=T(a_0)$. Endi a_1 nuqtaning obrazini topib, uni a_2 bilan belgilaymiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib X fazoning elementlaridan tuzilgan quyidagi ketma-ketlikka ega bo‘lamiz:

$$a_1=T(a_0),\ a_2=T(a_1)=T^2(a_0),\ \ldots,\ a_{n+1}=T(a_n)=T^n(a_0),\ \ldots \qquad (2)$$

Bu ketma-ketlikning fundamental ekanligini ko‘rsatamiz.

(1) va metrikaning uchburchak tengsizliklaridan, ixtiyoriy n va m natural sonlar $(m>n)$ uchun

$$\rho(a_n,a_m)=\rho(T^n(a_0),T^m(a_0))=\rho(T^n(a_0),T^m(a_{m-n}))\le\alpha^n\cdot\rho(a_0,a_{m-n})\le$$

$$\le\alpha^n\cdot(\rho(a_0,a_1)+\rho(a_1,a_2)+\ldots+\rho(a_{m-n-1},a_{m-n}))\le\alpha^n\cdot(\rho(a_0,a_1)+{}+\alpha\rho(a_0,a_1)+\ldots+$$

$$+\alpha^{m-n-1}\rho(a_0,a_1))\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(a_0,a_1),$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Endi $\alpha<1$ bo‘lganligi sababli, n yetarlicha katta bo‘lganda bu tengsizlikning o‘ng tomonini istalgancha kichik qilish mumkin.

Demak, $\{a_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo‘ladi. Bundan $\{a_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ va X fazoning to‘laligidan $a\in X$ kelib chiqadi. T uzluksiz akslantirish bo‘lganligidan $T(a)=T(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} T(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=a.$ Demak, a qo‘zg‘almas nuqta ekan.

Endi qo‘zg‘almas nuqtaning yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik qo‘zg‘almas nuqta ikkita $T(a)=a$ va $T(b)=b$ bo‘lsin. U holda $\rho(a,b)=\rho(T(a),T(b))\leq\alpha\cdot\rho(a,b)$ bo‘ladi. Bundan $\rho(a,b)=0$ va demak, $a=b$ kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Tekshirish savollari

1. Qo‘zg‘almas nuqtaga ta’rif bering
2. Qisqartirib akslantirishni ta’riflang va misollar keltiring.
3. Qisqartirib akslantirishning uzluksizligini isbotlang.
4. Qisqartirib akslantirish haqidagi asosiy teoremaning isboti rejasini tuzing va shu asosda isbotlang.

Mashqlar

1. Tekislikni o‘ziga akslantiruvchi $\begin{cases} u = x(y-1) - 2y^2 + 5y + x - 3, \\ v = -x(y+1) + 5 \end{cases}$ akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtalarini toping.

2. To‘g‘ri chiziqni o‘ziga akslantiruvchi $f(x)=5x^2+2x+3-2sinx$ akslantirishning qo‘zg‘almas nuqtasining mavjudmasligini ko‘rsating.

3. $f(x)=sinx$ funksiya sonlar o‘qida qisqartib akslantirish bo‘ladimi?

4. $\begin{cases} u = 0{,}7x + 0{,}8y, \\ v = 0{,}2x - 0{,}05y \end{cases}$ sistema bilan aniqlangan $f:(x,y)\to(u;v)$ akslantirish tekislikni *a)* $\mathbb{R}_2^2$; *b)* $\mathbb{R}_1^2$ fazo deb qaralsa, qisqartirib akslantirish bo‘ladimi?

5. $f(x)=\sqrt[3]{1000-x}$ funksiya [9;10] kesmani o‘ziga akslantirishini ko‘rsating. Bu qisqartirib akslantirish bo‘ladimi?

8-§. Qisqartirib akslantirishning tatbiqlari

8.1. Differensial va integral tenglamalarga tatbiqi

Uzluksiz $y=y(x)$ funksiyalardan tuzilgan $C[a,b]$ fazoda

$$Ay=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

akslantirish berilgan bo‘lsin. Bu yerda $f(x,y)$ uzluksiz funksiya bo‘lib, $G=\{(x;y): a\le x\le b,\ M<y\le N,\ a,\ b,\ M$ va N berilgan sonlar$\}$ sohada Lipshits shartini qanoatlantiradi, ya’ni G sohadan olingan ixtiyoriy ikkita $(x_1;y_1)$ va $(x_2;y_2)$ nuqta uchun quyidagi munosabat bajariladi:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,$$

bu yerdagi L soni G soha bilan aniqlanuvchi va $(x;y_1),\ (x;y_2)\in G$ nuqtalarga bog‘liq bo‘lmagan musbat son.

Yuqoridagi A akslantirishning $|x-x_0|$ yetarlicha kichik bo‘lganda qisqartirib akslantirish ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan y va y_1 funksiyalar $C[a,b]$ fazoning ixtiyoriy elementlari bo‘lsin. U holda

$$\rho(Ay,Ay_1)=\max_{x\in[a;b]}|Ay-Ay_1|\le\max_{x\in[a;b]}\int_{x_0}^{x}|f(x,y)-f(x,y_1)|\cdot|dx|\le$$

$$\le\max_{x\in[a;b]}\int_{x_0}^{x}L\,|y-y_1|\cdot|dx|=|x-x_0|\cdot\max_{x\in[a;b]}|y-y_1|=\theta\rho(y,y_1),$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Shuningdek $|x-x_0|<1/L$ bo‘lganda, $\theta=L|x-x_0|<1$ bo‘ladi.

$C[a,b]$ fazoning to‘laligidan A akslantirishning yagona qo‘zg‘almas nuqtasi mavjudligi kelib chiqadi.

Demak $y=Ay$ tenglamaning yoki

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \qquad (1)$$

integral tenglamaning quyidagi

a) $f(x,y)$ funksiya L o‘zgarmas songa ko‘ra Lipshits shartini qanoatlantiradi;

b) $|x–x_0|<1/L$ (2)

shartlarni qanoatlantirganda yagona uzluksiz yechimi mavjud.

(1) integral tenglama $y_0=y(x_0)$ boshlang‘ich shart bilan berilgan

$$y'=f(x,y) \qquad (3)$$

differensial tenglamaga teng kuchli bo‘lganligi sababli, yuqoridagi mulohazalardan (3) differensial tenglamaning (2) shartlar bajarilganda yechimining mavjudligi va yagonaligi kelib chiqadi.

8.2. Algebradagi tatbiqi. Quyidagi tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$x=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + b_i\ , \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (4)$$

Bu tenglamalar sistemasini n o‘lchamli vektor fazodagi $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)$ vektor va $T=(a_{ij})$ matritsa orqali ifodalab, $x=Tx$ ko‘rinishda yozish mumkin. n o‘lchamli vektor fazoda quyidagi metrikani qaraymiz: $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i–y_i|$, bu yerda $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$. U holda ixtiyoriy ikkita $x'=(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ va $x''=(x_1'',x_2'',\ldots,x_n'')$ nuqta uchun

$$\rho(Tx',Tx'')=\rho(y',y'')=\max_{1\le i\le n}|y'_i–y''_i|=\max_{1\le i\le n}|\sum_k a_{ik}\ (x'_k–x''_k)|\le$$

$$\le\max_{1\le i\le n}\sum_k|\ a_{ik}\ |\cdot|x'_k–x''_k|\ \le\max_{1\le i\le n}\sum_k|\ a_{ik}\ |\cdot\max_{1\le k\le n}|x'_k–x''_k|=\rho(x'_k,x''_k)\cdot\max_{1\le i\le n}\sum_k|\ a_{ik}\ |$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Bundan T akslantirish qaralayotgan metrikaga nisbatan qisqartirib akslantirish bo‘lishi uchun

$$\sum_k|\ a_{ik}\ |\le\alpha<1,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (5)$$

tengsizliklarning o‘rinli bo‘lishi yetarli ekan. Demak, (4) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘lishi uchun (5) tengsizliklarning o‘rinli bo‘lishi yetarli.

8.3. Matematik analizdagi tatbiqi.

Quyida, oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

3-teorema. *Aytaylik* $f(x,y)$ *funksiya* $G=\{(x,y):\ a\le x\le b,\ –\infty<y<+\infty\}$ *sohada* x *bo‘yicha uzluksiz va* y *bo‘yicha musbat, chegaralangan hosilaga ega* *bo‘lsin:*$0<m\leq f_y'\leq M$. *U holda* $f(x,y)=0$ *tenglama* $[a;b]$ *kesmada yagona uzluksiz yechimga ega.*

Isboti. $C[a;b]$ fazoni o‘z-o‘ziga aks ettiruvchi $Ay=y-\frac{1}{M}f(x,y)$ akslantirishni qaraymiz. Bu akslantirishning qisqartirib akslantirish ekanligini ko‘rsatamiz. Agar y_1 va y_2 funksiyalar $C[a;b]$ fazoning elementlari bo‘lsa, u holda

$$\rho(Ay_1,Ay_2)=|Ay_1-Ay_2|=|(y_1-\frac{1}{M}f(x,y_1))-(y_2-\frac{1}{M}f(x,y_2))|=$$

$$=|(y_1-y_2)-\frac{1}{M}f'_y(x,y_1+\theta(y_2-y_1))(y_1-y_2)|\leq|1-\frac{m}{M}||y_1-y_2|=\theta\rho(y_1,y_2)$$

bo‘ladi. Bu yerda $0<\theta<1$.

Demak, ixtiyoriy $y_0\in C[a;b]$ nuqta uchun $y_1=Ay_0,\ y_2=Ay_1,\ \ldots$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$ funksiya $f(x,y)=0$ tenglamaning $[a;b]$ kesmadagi yagona uzluksiz yechimi bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Tekshirish savollari

1. Differensial tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremani ayting. Qanday qilib differensial tenglamani taqribiy yechish mumkin?

2. n noma’lumli n ta tenglamalar sistemasining yechimi mavjudligining yetarli sharti R^n fazodagi metrikalarga qanday bog‘liq?

3. Oshkormas funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi teoremani isbotlang.

Mashqlar

1. Berilgan a musbat sonning kvadrat ildizini hisoblashda ixtiyoriy $x_0\geq\sqrt{a}$ uchun $x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)$ formula bilan qurilgan ketma-ketlik yaqinlashishidan foydalanish mumkinligini isbotlang.

2. Quyidagi rekurrent formulalar bilan berilgan ketma-ketliklarning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang va limitini hisoblang:

a) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$, ($x_0$=1);

b) $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{3 - x_{n-1}}$, ($x_0$=–5)

3. $f(x) \in C[a;b]$ bo‘lsin. $y(x)+{}^1/_2 \sin y(x)+f(x)=0$ tenglama yagona $y(x) \in C[a;b]$ yechimga ega ekanligini isbotlang.

II-BOB. SEPARABELLIK VA KOMPAKTLILIK

Ushbu bobda metrik fazolarning, sonlar o‘qidagi kabi o‘xshash xossalarini o‘rganamiz.

1-§. Separabel fazo. $\mathbb{R}^n$, C[*a*,*b*] va l_p fazolarning separabelligi.

1-ta’rif. (X,ρ) metrik fazoda *M*, *N* to‘plamlar uchun $\overline{M}\supset N$ bo‘lsa, *M* to‘plam *N to‘plamda zich* deyiladi. Xususan, agar *M* to‘plam *X* da zich bo‘lsa, u holda *M hamma yerda zich* to‘plam deyiladi.

1-misol. Agar $(\mathbb{R},\rho)$ metrik fazoda $M=[0,1]\cap\mathbb{Q}$, $N=[0,1]$ bo‘lsa, u holda $\overline{M}=[0,1]\supset N$ bo‘ladi. Ta’rifga ko‘ra *M* to‘plam *N* to‘plamda zich.

2-misol. Yuqoridagi misolda *N* sifatida $[0,1]\cap J$ to‘plamni qaraymiz. Bu holda ham *M* to‘plam $N=[0,1]\cap J$ da zich bo‘ladi.

3-misol. Agar $(\mathbb{R},\rho)$ metrik fazoda $M=[0,1]\cap J$, $N=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ (yoki $N=[0,1]$, yoki $N=[0,\frac{1}{2}]$) bo‘lsa, ravshanki $\overline{M}\supset N$ bo‘ladi. Ta’rifga ko‘ra *M* to‘plam *N* da zich bo‘ladi.

2-ta’rif. Agar *M* to‘plam hech bir sharda zich bo‘lmasa, u holda *M* to‘plam *hech qaerda zich emas* deyiladi. Ya’ni, agar ixtiyoriy *S* sharning ichida *M* to‘plam bilan kesishmaydigan S_1 shar topilsa, *M* to‘plam *hech qaerda zich emas* deyiladi.

4-misol. $(\mathbb{R}^n,\rho)$ metrik fazoda $M=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ to‘plam, bu yerda $e_k=(0,0,...,1,0,...,0)$ hech qaerda zich emas.

5-misol. $(\mathbb{R}^n,\rho)$ metrik fazo ixtiyoriy chekli to‘plam, hech qaerda zich bo‘lmagan to‘plamga misol bo‘ladi.

3-ta’rif. Agar (X,ρ) metrik fazoning hamma yerida zich bo‘lgan sanoqli yoki chekli to‘plam mavjud bo‘lsa, u holda *X separabel fazo* deyiladi.

6-misol. $\mathbb{R}^n$ separabel fazo bo‘ladi. Haqiqatdan ham, $\mathbb{R}^n$ fazoda koordinatalari ratsional sonlardan iborat bo‘lgan nuqtalar to‘plami sanoqli bo‘lib, $\mathbb{R}^n$ ning hamma yerida zich.

7-*misol*. C[a,b] metrik fazo separabel fazo bo‘ladi. Haqiqatdan ham, koordinatalari ratsional sonlardan iborat bo‘lgan ko‘phadlar to‘plami P_r sanoqli to‘plam va bu to‘plam ko‘phadlar to‘plami P da zich, P esa matematik analizdagi Veyershtrass teoremasiga ko‘ra C[a,b] da zich. Bu esa C[a,b] ning separabel fazo ekanligini ko‘rsatadi.

Endi l_p fazoning separabel ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun $\overline{D} = l_p$ bo‘ladigan $D = \{x = (x_1, x_2, ...),\ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^p < \infty\}$ sanoqli to‘plamning mavjudligini isbotlash yetarli.

Aytaylik, $x \in l_p$ bo‘lsin. Bu elementga l_p fazoda ushbu ko‘rinishdagi sanoqli to‘plamni mos qo‘yamiz:

$$x^{(1)} = (x_1, 0, 0, ...),$$
$$x^{(2)} = (x_1, x_2, 0, 0, ...),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{(n)} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Bunda $\rho(x, x^{(n)}) = (\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k{}^p)^{\frac{1}{p}}$ bo‘lib, u etralicha katta n ni tanlash evaziga oldindan berilgan ε musbat sondan kichik qilib olinishi mumkin.

$x^{(n)}$ nuqtalar to‘plami bilan bir qatorda quyidagicha aniqlanadigan $\overline{x}^{(n)}$ musbat nuqtalar to‘plamini qaraymiz:

$$\overline{x}^{(1)} = (r_1, 0, 0, ...),$$
$$\overline{x}^{(2)} = (r_1, r_2, 0, 0, ...),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{x}^{(n)} = (r_1, r_2, ..., r_n, 0, ...),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bu yerda $r_1, r_2, ..., r_n$ ratsional sonlar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$|x_1 - r_1| < \frac{\varepsilon}{2^{1+\frac{1}{p}}},$$

$$|x_2 - r_2| < \frac{\varepsilon}{2^{1+\frac{2}{p}}},$$

. . . .

$$|x_n - r_n| < \frac{\varepsilon}{2^{1+\frac{n}{p}}},$$

. . . .

Bunday tanlashni har doim bajarish mumkin.

$$\rho(x^{(n)}, \overline{x}^{(n)}) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - r_i|^p)^p < \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^p}{2^{p+i}}} < \sqrt[p]{\frac{\varepsilon^p}{2^p}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ikkinchi tomondan, yetarlicha katta n-larda $\rho(x, x^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ o‘rinli. Demak, $\rho(x, \overline{x}^{(n)}) \leq \rho(x, x^{(n)}) + \rho(x^{(n)}, \overline{x}^{(n)}) < \varepsilon$ yetarlicha katta n larda o‘rinli. Bundan x nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida $\overline{x}^{(n)}$ nuqtalar mavjud. Bunday nuqtalar to‘plami l_p fazo, demak, l_2 fazo ham separabel fazo ekan.

2-§. L_p fazoning separabelligi

Quyidagicha aniqlangan chegaralangan o‘lchovli funksiyalar to‘plamini qaraymiz:

$$x_N(t) = \begin{cases} x(t), & \text{agar} \quad |x(t)| \le N, \\ N, & \text{agar} \quad |x(t)| > N \end{cases}$$

Ravshanki, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ va ixtiyoriy $x(t) \in L_p$ uchun yetarlicha katta N larda $x_N(t)$ funksiyani topish mumkinki,

$$\rho(x(t), x_N(t)) = (\int_a^b |x(t) - x_N(t)|^p \, dt)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

bo‘ladi. $C[a,b]$ fazoning xossasiga ko‘ra ixtiyoriy ε va ixtiyoriy $x_N(t)$ funksiya uchun $y(t) \in C[a,b]$ mavjud bo‘lib,

$$\rho(x_N(t), y(t)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

o‘rinli bo‘ladi.

O‘z navbatida $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan ixtiyoriy $y(t)$ funksiya uchun ratsional koeffitsientli $p(t)$ ko‘phad mavjud bo‘lib,

$$\rho\big(y(t), p(t)\big) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$

o‘rinli bo‘ladi. (1), (2), va (3) munosabatlardan $\rho\big(x(t), p(t)\big) < \varepsilon$ ekanligi kelib chiqadi.

Ma’lumki, $P(t)$ ko‘phadlar to‘plami sanoqli demak, yuqoridagi mulohazalardan bu to‘plam L_p da sanoqli zich to‘plam bo‘ladi. Bu esa L_p ning separabel fazo ekanligini isbotlaydi.

3-§. Separabel bo'lmagan fazoga misol

Endi m fazoning separabel emasligini isbotlaymiz. Buning uchun $M = \{\overline{x} = (x_1,\, x_2\ ,...),\ x_i = 0$ yoki $1\}$ to'plamni qaraymiz. M to'plamning har bir elementi m fazoga tegishli ekanligi ravshan. M to'plamning ixtiyoriy ikkita elementi orasidagi masofa 1 ga teng. M to'plamning quvvati kontinuumga teng, haqiqatdan ham, har bir M to'plamdan olingan har bir $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_i ...)$ nuqtaga $0, x_1, x_2, ..., x_i ...$ ikkilik kasrni mos qo'yamiz. Bu moslik o'zaro bir qiymatli. Ravshanki, barcha ikkilik kasrlar to'plamining quvvati kontinuumga teng.

Endi m separabel bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda m ning hamma erida zich bo'lgan A to'plam mavjud bo'ladi. A to'plamning har bir elementi atrofida radiusi $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$ ga teng bo'lgan sharni olamiz. U holda bu sharlarning birlashmasida m fazoning hamma elementlari joylashgan bo'ladi. Ammo sharlarning soni ko'pi bilan sanoqli bo'lganligi sababli M to'plamning kamida ikkita x va u elementi bitta sharga tegishli bo'ladi. Shu sharning markazi $\overline{x}$ nuqtada bo'lsin. U holda

$1 = \rho(x, y) \le \rho(x, \overline{x}) + \rho(\overline{x}, y) \le \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ ziddiyat kelib chiqadi. Bu ziddiyat m to'plamning separabel emasligini isbotlaydi.

Teorema. *Aytaylik,* (X, ρ) *separabel metrik fazo bo'lsin. U holda bu fazoning ixtiyoriy* X_0 *qism to'plami ham* ρ *metrikaga nisbatan separabel metrik fazo bo'ladi.*

Isboti. (X, ρ) separabel fazo bo'lganligi uchun $A = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...\}$ sanoqli to'plam mavjud bo'lib, $\overline{A} = X$ bo'ladi.

Ushbu belgilashni kiritamiz:

$$a_n = \inf_{x \in X_0} \rho(\xi_n, x), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Ixtiyoriy $n,\ k$ natural sonlar uchun infimumning xossalariga ko'ra shunday $x_{n,m} \in X_0$ nuqta topiladiki, $\rho(\xi_n, x_{n,k}) < a_n + \dfrac{1}{k}$ bo'ladi. Biror $\varepsilon > 0$ sonni olaylik va u $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$ shartni qanoatlantirsin. A to‘plam X ning hamma yerida zich bo‘lganligi sababli ixtiyoriy $x_0 \in X_0$ uchun shunday n topiladiki,

$$\rho(\xi_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ bo‘ladi.}$$

Demak,

$$\rho(\xi_n, x_{n,k}) < a_n + \frac{1}{k} \leq \rho(\xi_n, x_0) + \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3}$$

U holda

$$\rho(x_0, x_{n,k}) < \rho(x_0, \xi_n) + \rho(\xi_n, x_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Shunday qilib, ixtiyoriy $x_0 \in X_0$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida $x_{n,k} \in X_0$ ko‘rinishdagi nuqta mavjud. Ya’ni $\{x_{n,k}\}$ ko‘rinishdagi to‘plam X_0 fazoning hamma yerida zich. Demak, X_0 separabel metrik fazo.

4-§. Metrik fazoda kompakt to‘plamlar

4.1. Kompakt to‘plam ta’rifi, misollar.

To‘g‘ri chiziqning ajoyib xossalaridan biri shuki, undagi chegaralangan har qanday cheksiz to‘plam kamida bitta limit nuqtaga ega. Bu fakt Bolsano-Veyershtrass teoremasida o‘z ifodasini topgan. Lekin ixtiyoriy metrik fazoda bunday sodda natija, umuman aytganda, o‘rinli emas. Shuning uchun quyidagi savolning qo‘yilishi tabiiy: Metrik fazoda qanday to‘plamlar sinfi uchun Bolsano-Veyershtrass teoremasining mazmuni saqlanadi? savol munosabati bilan quyidagi muhim ta’rifni kiritamiz.

1-ta’rif. X metrik fazodagi M to‘plamning elementlaridan tuzilgan ixtiyoriy ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin bo‘lsa, u holda M to‘plam X da *kompakt* deyiladi.

Misollar. 1) Yuqorida keltirilgan, to‘g‘ri chiziqdagi har qanday kesma;

2) Tekislikdagi $r>0$ radiusli yopiq shar;

3) Tekislikda koordinatalari $a\le x\le b$, $c\le y\le d$ shartlarni qanoatlantiruvchi $(x;y)$ nuqtalar to‘plami kompakt to‘plamlar bo‘ladi.

4.2. To‘plam kompakt bo‘lishining zaruriy shartlari.

1-teorema. *Kompakt to‘plam chegaralangan bo‘ladi.*

Isboti. M kompakt to‘plam bo‘lib, chegaralanmagan bo‘lsin deb faraz qilamiz. M dan ixtiyoriy x_1 nuqtani olib, radiusi $r_1=1$ ga teng $S(x_1,r_1)$ sharni ko‘ramiz. M chegaralanmaganligi uchun u bu sharda to‘la joylashgan bo‘lmaydi. M to‘plamning $S(x_1,r_1)$ sharga kirmagan biror x_2 elementini olamiz. U holda $\rho(x_1,x_2)\ge r_1$. Co‘ngra radiusi $r_2=\rho(x_1,x_2)+1$ ga teng $S(x_2,r_2)$ sharni qurib, M to‘plamning bu sharga kirmagan x_3 elementini olamiz. Bunday element mavjud, chunki M chegaralanmagan to‘plam va $\rho(x_1,x_3)\ge r_2$. Bu jaryonni cheksiz davom ettiramiz. Natijada $\{x_n\}$ $(x_n\in M)$ ketma-ketlik va o‘sib boruvchi $\{r_n\}$ sonli ketma-ketlik hosil bo‘lib, ular uchun ushbu

$$\rho(x_1,x_n)+1 = r_n > r_{n-1} \ (n=1,2,\dots)$$

tengsizliklar bajariladi.

Endi ixtiyoriy $n>m\ge 2$ natural sonlar uchun

$$\rho(x_1,x_n)+1 = r_n > r_{n-1} \geq r_m;\ \rho(x_1,x_m)+1 = r_m$$

munosabatlar o‘rinli. Bulardan va quyidagi

$$\rho(x_1,x_n) \leq \rho(x_1,x_m) + \rho(x_m,x_n)$$

tengsizlikka asosan ushbu

$$r_n \leq r_m + \rho(x_m,x_n),$$

demak, $\rho(x_m,x_n) \geq 1$ munosabat kelib chiqadi.

Oxirgi tengsizlikdan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning o‘zi ham va uning biror qismi ham fundamental bo‘la olmasligi, ya’ni yaqinlashuvchi bo‘la olmasligi kelib chiqadi. Bu esa M to‘plamning kompaktligiga zid. Teorema isbot bo‘ldi.

Bu teoremaning teskarisi o‘rinli emas. Masalan, l_2 fazoda

$$e_1=(1, 0, 0, 0, \ldots), \qquad e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \qquad e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots$$

elementlardan iborat chegaralangan to‘plamni tuzamiz. Bu elementlarning ixtiyoriy ikkitasi orasidagi masofa $\rho(e_m,e_n)=\sqrt{2}$ ga teng $(m \neq n)$. Shuning uchun bu ketma-ketlik va uning hech qanday qismi yaqinlashuvchi bo‘lmaydi, demak, tuzilgan to‘plam kompakt emas.

2-teorema. *Kompakt to‘plam yopiq bo‘ladi.*

Isboti. M to‘plam kompakt bo‘lib, yopiq bo‘lmasin deb faraz qilamiz. U holda yaqinlashuvchi $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlik mavjud bo‘lib uning limiti (b bilan belgilaymiz) M ga tegishli bo‘lmaydi. Bu ketma-ketlikdan M to‘plamning a elementiga yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin emas. Aks holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik ikkita, a va b limitga ega bo‘lar, bu esa mumkin emas. Demak, M kompakt emas. Teorema isbot bo‘ldi.

Kompakt to‘plamning istalgan yopiq qism to‘plami ham kompakt to‘plam bo‘lishini isbotlashni o‘quvchiga mashq sifatida qoldiramiz.

4.3. n-o‘lchamli fazoda kompakt to‘plamlar

3-teorema. $\mathbb{R}^n$ *fazoda* M *to‘plamning kompakt bo‘lishi uchun uning chegaralangan va yopiq bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti. Zaruriyligi yuqoridagi teoremadan kelib chiqadi.

Yetarliligi. Aytaylik M chegaralangan va yopiq to‘plam bo‘lsin. M chegaralangan bo‘lganligi sababli uni o‘z ichiga oluvchi, n-o‘lchamli parallelepiped P, ya’ni $P=\{x=(x_1, x_2, \ldots,x_n): a_i\le x_i\le b_i, i=1,2,\ldots,n\}$, mavjud. Bu parallelepipedning kompakt to‘plam ekanligi matematik analizdagi Bolsano-Veyershtrass teoremasi kabi isbotlanadi. Buning uchun parallelepipedni teng ikkiga emas, balki teng 2^n bo‘lakka bo‘lish kerak. Endi M to‘plam yopiq va P kompakt to‘plamning qismi ekanligidan M to‘plamning kompakt ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Tekshirish savollari

1. Kompakt to‘plamga ta’rif bering.

2. To‘plam kompakt bo‘lishning zaruriy shartlarini ayting.

3. $\mathbb{R}^n$ fazoda to‘plamning kompakt bo‘lishi uchun zaruriy va yetarli shartlari qanday?

Mashqlar

1. $\mathbb{R}_2^n$ fazoning quyida berilgan to‘plamostilarning qaysilari kompakt ekanligini aniqlang, javobingizni asoslang:

a) n-o‘lchamli shar;

b) n-o‘lchamli sfera;

c) n-o‘lchamli kub;

d) $x_n=c$ tekislik;

e) to‘g‘ri chiziq;

f) barcha koordinatalari ratsional bo‘lgan nuqtalar to‘plami.

2. $C[0,1]$ fazoning quyida berilgan to‘plamostilarning qaysilari kompakt ekanligini aniqlang, javobingizni asoslang:

a) $C[0,1]$ fazoning o‘zi;

b) barcha ko‘phadlar to‘plami;

c) koeffitsientlarining moduli 1 dan katta bo‘lmagan barcha ko‘phadlar to‘plami;

d) darajasi n dan, koeffitsientlarining moduli 1 dan katta bo‘lmagan barcha ko‘phadlar to‘plami;

e) $U=\{f \,|\, |f(x)|\le 1\}$ yopiq birlik shar;

f) birlik sfera.

g) $E=\{f\in C[0,1]: f(0)=0, f(1)=1, \max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|\le 1\}$.

3. Kompakt to'plamning yopiq qism to'plami kompakt bo'lishini isbotlang.

4. Kompaktlarning kesishmasi kompakt ekanligini isbotlang.

5. Ikkita kompaktning birlashmasi kompakt ekanligini isbotlang.

6. Ixtiyoriy K kompaktda ixtiyoriy $F_1\supset F_2\supset\ldots\supset F_n\supset\ldots$ ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligi uchun $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$ ekanligini isbotlang.

7. Agar M to'plamning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligi kesishmasi bo'sh bo'lmasa, u holda M to'plamning kompakt ekanligini isbotlang.

8. Aytaylik, M kompakt to'plam, $G_1,G_2,\ldots,G_n,\ldots$ M to'plamni qoplaydigan (ya'ni, $M\subset\bigcup\limits_{n=1}G_n$) ochiq to'plamlar sistemasi bo'lsin. $G_1,G_2,\ldots,G_n,\ldots$ to'plamlardan M to'plamni qoplaydigan chekli qism sistema ajratib olish mumkinligini isbotlang.

9. Faraz qilaylik, M to'plamning ochiq to'plamlardan iborat ixtiyoriy qoplamasidan chekli qoplama ajratib olish mumkin bo'lsin. U holda M to'plamning kompakt ekanligini isbotlang.

10. F orqali $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, bu erda $a_1=0$, $n>1$ da $a_n=\dfrac{1}{2^{n-2}}$, to'plamni belgilaymiz. Ushbu $G_n=\left(a_n-\dfrac{1}{10\cdot 2^{n-1}}, a_n+\dfrac{1}{10\cdot 2^{n-1}}\right)$, $n\in\mathbb{N}$ intervallar sistemasi F ni qoplaydi. F ning kompaktligini isbotlang. Berilgan intervallar sistemasidan F ni qoplovchi chekli qism sistema ajrating.

11. $G_n=\left(\dfrac{1}{n+2},\dfrac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$ intervallar sistemasi (0,1) intervalning ochiq qoplamasi bo'ladi. Ushbu qoplamadan chekli qoplama ajratib olish mumkinmi?

12. [0,1] kesmaga tegishli bo‘lgan barcha ratsional sonlar to‘plami X ni nomerlab chiqamiz: $X=\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$. Har bir r_n ni $\left(r_n-\frac{1}{10\cdot 2^n}, r_n+\frac{1}{10\cdot 2^n}\right)$ interval bilan qoplaymiz. Ushbu intervallar sistemasidan X to‘plamning chekli qoplamasini ajratib olish mumkinmi? Bu to‘plam kompaktmi?

5-§. Kompaktlik kriteriyasi

Aytaylik, A va B lar (X,ρ) metrik fazodan olingan to‘plamlar va ε musbat son bo‘lsin.

Ta’rif. Agar A dan olingan ixtiyoriy x element uchun B da $\rho(x,y)<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi y element mavjud bo‘lsa, B to‘plam A to‘plamga nisbatan *ε to‘r deyiladi.* Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun A to‘plam chekli ε to‘rga ega bo‘lsa, u holda A *to‘la chegaralangan to‘plam* deyiladi.

1-misol. $\mathbb{R}^2$ da koordinatalari butun sonlardan iborat to‘plam 1 to‘rni tashkil etadi.

2-misol. $\mathbb{R}^n$ fazoda har qanday chegaralangan A to‘plam chekli ε to‘rga ega, ya’ni A to‘la chegaralangan bo‘ladi.

3-misol. l_2 fazoda A to‘plamni quyidagicha aniqlaymiz:

$$x=(a_1,a_2,...a_n,...)\in A, \text{ bu yerda } |a_1|\le 1,\ |a_2|\le\frac{1}{2},...,|a_n|\le\frac{1}{2^n},...$$

bu to‘plam ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun chekli ε to‘rga ega. Haqiqatdan ham, $\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{4}$ berilgan bo‘lsin.

A dan olingan har bir $x=(a_1,a_2,...a_n,...)$ nuqtaga shu to‘plamning o‘zidan olingan

$$x^*=(a_1,a_2,...a_n,0,0,...) \qquad (1)$$

nuqtani mos qo‘yamiz. U holda $\rho(x,x^*)=(\sum_{k=n+1}^{\infty}a^2{}_k)\le(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}})^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}$ bo‘lib, (1) ko‘rinishdagi nuqtalardan iborat B to‘plam $\mathbb{R}^n$ fazoda chegaralagan, demak, B to‘plam ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun chekli $\frac{\varepsilon}{2}$ to‘rga ega bo‘lib, to‘la chegaralangan bo‘ladi.

4-misol. l_2 fazoda $\{e_n\}$ to‘plam e_n=(0,0,…,1,0,0,…) chegaralangan, lekin to‘la chegarlangan emas. Chunki $\varepsilon<\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo‘lganda, unga ε to‘r qurib bo‘lmaydi.

Quyidagi teorema to‘plam kompakt bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlarini ifodalaydi.

Teorema. *X to‘la metrik fazoda joylashgan A to‘plamning kompakt bo‘lishi uchun uning to‘la chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isboti. *Zarurligi*. Aytaylik A kompakt to‘plam to‘la chegaralangan bo‘lmasin, ya’ni biror $\varepsilon > 0$ uchun A dan olingan ixtiyoriy x_1 nuqta uchun shunday x_2 nuqta mavjudki, $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ bo‘ladi. So‘ng shunday x_3 nuqta mavjud bo‘ladiki, $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon,\ \rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ bo‘ladi. Bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz. Natijada

$$\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon, \quad m \neq n$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikka ega bo‘lamiz:

Ravshanki, bunday $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin emas. Bu esa A ning kompaktligiga zid.

Yetarligi. X to‘la fazo, A unda to‘la chegaralagan to‘plam bo‘lsin. A ning kompaktligini ko‘rsatamiz.

Faraz qilaylik, A to‘plamning elementlaridan tuzilgan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Har bir $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$ $(k = 1, 2, ...)$ uchun A da mos ε_k to‘rni qaraymiz.

Aytaylik ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun chekli ε to‘r mavjud bo‘lsin. Monoton kamayuvchi va 0 ga intiluvchi ketma-ketlikdan olingan har bir ε_i (i=1, 2, 3, …) uchun ε_i to‘r tuzib olamiz:

$$x_1^1,\ x_2^1, ..., x_{k_1}^1, ...,$$

$$x_1^2,\ x_2^2, ..., x_{k_2}^2, ...,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Endi A to‘plam elementlaridan tuzilgan $\{x_n\}$ cheksiz ketma-ketlikni qaraymiz va undan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkinligini isbotlaymiz. ε_1 to‘rning har bir nuqtasini markazi ε_1 to‘r nuqtalarida $x_1', x_2', x_3', ..., x_{k_1}'$

va radiusi ε_1 ga teng sfera bilan o‘rab chiqamiz. Bu holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari qurilgan sferaning ichida joylashgan bo‘ladi. $\{x_n\}$ ketma-ketlik hadlar chekiz ko‘p sferalar esa chekli bo‘lganligi sababli qurilgan sferalardan kamida biri $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p hadlarini o‘z ichiga oladi. Shu sferani T_1 bilan belgilaymiz.

Bu sferada joylashgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p hadlaridan tuzilgan to‘plamni A_1 bilan belgilaymiz. ε_2 to‘rning T_1 sfera ichida joylashgan nuqtalarini qaraymiz. Bu nuqtalarning har birini markazi shu nuqtada va radiusi ε_2 ga teng bo‘lgan sferalar bilan o‘rab chiqamiz. A_1 to‘plamning barcha nuqtalari radiusi ε_2 ga teng bo‘lgan sferalar ichida joylashadi. Bu sferalardan kamida biri A_1 to‘plamning cheksiz ko‘p nuqtalarini o‘z ichiga oladi. Shu xossaga ega bo‘lgan sferani T_2 bilan A_1 ning shu sferaga tegishli qismini A_2 bilan belgilaymiz.

Bu jarayonni cheksiz davo ettirib $T_1 \supset T_2 \supset T_3 ...$ sferalar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz. Bu sferalar radiusi shartga ko‘ra 0 ga intiladi.

Endi $\{x_n\}$ ketma-ketlik elementlarini quyidagicha ajratib olamiz:

$\overline{x}_{n_1} \in T_1, \overline{x}_{n_1} \notin T_2,$

$\overline{x}_{n_2} \in T_2, \overline{x}_{n_2} \notin T_3,$

....

Bu xolda $\left\{\overline{x}_{n_1}\right\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lib, X fazoning to‘laligiga ko‘ra uning limiti X ga tegishli bo‘ladi. Demak, $\left\{\overline{x}_{n_1}\right\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo‘ladi.

6-§. C[*a*,*b*] fazodagi to‘plamning kompaktligi

$C[a,b]$ da uzluksiz funksiyalardan tashkil topgan cheksiz to‘plamlar mavjud bo‘lib, ulardan yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratib olish mumkin emas. Masalan, $C[0,1]$ da $x, x^2, x^3,...$ funksiyalar ketma-ketligi qaraylik.

Bu funksiyalar ketma-ketligi [0;1] da chegaralangan, uning limit funksiyasi

$$y=\begin{cases}0, & \text{agar } 0\le x<1,\\ 1, & \text{agar } x=1\end{cases} \tag{1}$$

bo‘lib, u uzluksiz funksiya emas, ya’ni $C[0,1]$ ga tegishli emas. Yuqoridagi ketma-ketlikning ixtiyoriy qism ketma-ketligi ham (1) funksiyaga yaqinlashadi, ya’ni $C[0,1]$ da yaqinlashmaydi.

$C[0,1]$ da kompaktlik shartini keltiramiz. Avval quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

1-ta’rif. Aytaylik M to‘plam $[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalarning biror to‘plami bo‘lsin. Agar barcha $x\in[a,b]$ va M to‘plamdan oligan barcha $f(x)$ funksiyalar uchun

$$|f(x)|<k$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi k son mavjud bo‘lsa, M funksiyalar to‘plami *tekis chegaralangan* deyiladi.

2-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilib,

$$|x_1-x_2|<\delta$$

tengsizlik bajarilganda, M to‘plamga tegishli ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uchun

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

bo‘lsa, M to‘plam *tekis darajada uzluksiz* deyiladi.

Teorema (Arsel teoremasi). *[a,b] segmentda aniqlangan uzluksiz funksiyalardan iborat M to‘plam C[a,b] fazoda kompakt bo‘lishi uchun M to‘plamning tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isboti. *Zaruriyligi*. Aytaylik, M kompakt to‘plam bo‘lsin. M to‘plam tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini isbotlaymiz.

Avval M ning tekis chegaralanganligini ko‘rsatamiz. To‘la metrik fazoda to‘plamning kompakt bo‘lishining zaruriy va yetarli shartiga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $\frac{\varepsilon}{3}$ to‘rni tashkil qiluvchi

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x) \qquad (1)$$

funksiyalar mavjud bo‘ladi. Bu funksiyalarning har biri [a,b] da uzluksiz bo‘lganligi uchun chegaralangan bo‘ladi, ya’ni $|f_i(x)| < k_i,\ i = 1, 2, ..., k$ bo‘ladi. Chekli $\frac{\varepsilon}{3}$ to‘rning ta’rifiga ko‘ra M dan olingan ixtiyoriy $f(x)$ uchun (1) dagi soni chekli funksiyalar orasida $f_i(x)$ funksiya topilib, uning uchun

$$\rho(f, f_i) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Natijada

$$|\varphi| \le |\varphi_i| + \frac{\varepsilon}{3} \le k_i + \frac{\varepsilon}{3} \le k, \quad k = \max_{1 \le i \le k} k_i + \frac{\varepsilon}{3},$$

ya’ni M tekis chegaralangan bo‘ladi.

Endi M to‘plamning tekis darajada uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz. (1) funksiyaning har biri uzluksiz, [a,b] da tekis uzluksiz va ularning soni chekli. Demak, $\frac{\varepsilon}{3}$ uchun shunday δ_i son mavjudki, buning uchun quyidagilarni yozish mumkin:

agar $|x_1 - x_2| < \delta_i$ bo‘lsa, u holda $|f_i(x_i) - f_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. $\delta = \min_{1 \le i \le k} \delta_i$ belgilash kiritamiz.

Agar $|x_1 - x_2| < \delta_i$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $f \in M$ uchun f_i ning (1) funksiyalar orasidan $\rho(f, f_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ tengsizlikni qanoatlantiradiganini olib, quyidagi munosabatni yoza olamiz:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f_i(x_1) + f_i(x_1 - f(x_2) + f_i(x_2)| \le |f(x_1) - f_i(x_1)| +$$

$$+ |f_i(x_1) - f_i(x_2)| + |f_i(x_2) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Bu esa M ning tekis darajada uzluksizligini isbotlaydi.

Yetarligi. M tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo‘lsin. Agar ixtiyoriy ε>0 uchun unga nisbatan $C[a,b]$ da chekli ε to‘r mavjud bo‘lsa, bu M to‘plamning $C[a,b]$ da kompaktligini ko‘rsatgan bo‘lamiz.

Ixtiyoriy ε>0 son uchun δ ni shunday tanlab olamizki, $|x_1 - x_2| < \delta, \quad f(x) \in M$ uchun $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$ bo‘lsin.

Endi xOy tekislikda $a \le x \le b, \; -k \le y \le k$ to‘g‘ri to‘rtburchakni quyidagicha tanlaymiz:

$$|x_{k+1} - x_k| < \delta, \quad |y_{k+1} - y_k| < \frac{\varepsilon}{4} .$$

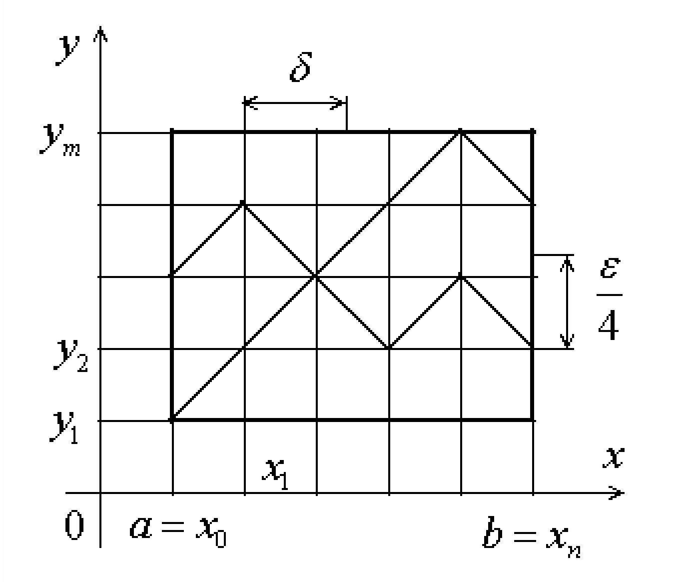
Ya’ni, uni $a < x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b, \; -k = y_0 < y_1 < ... < y_n = k$ bo‘linish nuqtalari yordamida o‘zaro teng to‘g‘ri burchakli to‘rtburchaklarga ajratamiz (3-rasm). Kichik to‘g‘ri to‘rtburchaklar diagonallaridan tuzilgan barcha $\varphi(x)$ uzluksiz siniq chiziqlardan iborat funksiyalarni qaraymiz. Bunday funksiyalar chekli to‘plam tashkil qiladi. Bu to‘plamning M uchun ε to‘r tashkil qilishini ko‘rsatamiz. M to‘plamdan ixtiyoriy $f(x)$ funksiya olamiz. Ravshanki, $\varphi(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyadan eng kam uzoqlashgan aniq funksiya bo‘ladi.

U holda

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi(x)| &= |f(x) - f(x_k) + f(x_k) - \varphi(x_k) + \varphi(x_k) - \varphi(x)| \le \\ &\le |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \varphi(x)| \end{aligned} \tag{2}$$

bo‘lib, bu yerda x_k nuqta x nuqtaga chap tomondan eng yaqin bo‘lgan bo‘linish nuqtasi. Shuning uchun $|f(x) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{4}$ bo‘ladi.

Shuningdek, $|x - x_k| < \delta$ va $|f(x_k) - \varphi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \; |\varphi(x_k) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ bo‘lganligi sababli (2) dan $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ kelib chiqadi. Demak, siniq chiziqlardan iborat funksiyalar M da ε to‘r tashkil qiladi. Teorema isbot bo‘ldi.



3- rasm

7-§. Kompaktlar ustida uzluksiz akslantirishlar

7.1. Uzluksiz akslantirishdagi kompaktning obrazi haqida.

1-teorema. *Kompakt to‘plamning uzluksiz akslantirishdagi obrazi kompakt to‘plam bo‘ladi.*

Isboti. Aytaylik M kompakt to‘plam va $T:M\to Y$ uzluksiz akslantirish bo‘lsin. $M^*=T(M)$ to‘plamning kompakt ekanligini isbotlaymiz.

M^* to‘plamdan ixtiyoriy $\{x_n'\}$ ketma-ketlikni olib, x_n orqali x_n' nuqtaning T akslantirishdagi obrazini belgilaymiz. U holda M to‘plamda $\{x_n\}$ ketma-ketlikka ega bo‘lamiz. M kompakt to‘plam bo‘lganligi sababli bu ketma-ketlikdan M to‘plamning biror c nuqtasiga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

T akslantirishda bu qism ketma-ketlik $\{x_n'\}$ ning $\{x'_{n_k}\}$ qism ketma-ketligiga o‘tadi. T akslantirishning c nuqtada uzluksizligidan

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = \lim_{k\to\infty} T(x_{n_k}) = T(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = T(c) \in M^*.$$

Shunday qilib, M^* to‘plamdan olingan har bir ketma-ketlik M^* da yaqinlashuvchi qism ketma-ketlikka ega. Bu esa M^* to‘plamning kompakt ekanligini bildiradi. Teorema isbot bo‘ldi.

7.2. Uzluksiz funksionalning xossalari.

Aytaylik (X,ρ) metrik fazo bo‘lsin. Agar f akslantirishning obrazi haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ dan iborat bo‘lsa, f ni funksional deyiladi. Aytaylik X da f uzluksiz funksional berilgan bo‘lsin.

2-teorema. Ixtiyoriy uzluksiz f funksional kompakt to‘plamda chegaralangan hamda o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi.

Isboti. Biror M kompakt to‘plam olamiz. Yuqoridagi teoremaga asosan f funksionalning qiymatlar to‘plami $f(M)=E$, kompakt to‘plam bo‘ladi. Demak, E chegaralangan, ya’ni shunday a va b sonlar topilib, $a\le f(x)\le b$ bo‘ladi. Bundan f funksionalning M da chegaralanganligi kelib chiqadi.

E to‘plamning chegaralanganligidan, uning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari mavjud. Endi $\alpha=supE$ belgilash kiritamiz va 0 ga yaqinlashuvchi $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlikni olamiz. Aniq yuqori chegaraning ta’rifiga ko‘ra, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlikning har bir hadi uchun, M to‘plamga tegishli shunday x nuqtalar topilib, $\alpha-\frac{1}{n}<f(x)<\alpha$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. So‘nggi tengsizlikni qanoatlantiruvchi x nuqtalardan birini x_n bilan belgilaymiz. U holda bu nuqtalar uchun

$$\alpha - \frac{1}{n} < f(x_n) < \alpha, \quad (n=1,2,\dots) \qquad (1)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Hosil bo‘lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan M to‘plamning x_0 nuqtasiga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qism ketma-ketlik ajratamiz. Bu nuqtada f funksional uzluksiz, shu sababli $f(x_0)=\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\alpha$ bo‘ladi. Demak, f funksional o‘zining eng katta qiymatini qabul qiladi.

Shunga o‘xshash, f funksionalning eng kichik qiymatiga erishishi isbotlanadi. Teorema isbot bo‘ldi.

7.3. Kantor teoremasi.

(X,ρ) metrik fazoda uning biror M qism to‘plami va f funksional berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ topilsaki, $\rho(x_1,x_2)<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x_1,x_2\in M$ uchun ushbu

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda f funksional M to‘plamda *tekis uzluksiz* deyiladi.

M to‘plamda tekis uzluksiz funksionalning shu to‘plamda uzluksiz bo‘lishini ko‘rish qiyin emas.

Haqiqatan, aytaylik x_0 nuqta M to‘plamga tegishli bo‘lsin. Hadlari M to‘plamga tegishli bo‘lib, x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi biror $\{x_n\}$ ketma-ketlikni tuzib olamiz. U holda, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ topiladiki, yetarlicha katta n

larda $\rho(x_n,x_0)<\delta$ tengsizlikning bajarilishidan $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\{f(x_n)\}$ sonli ketma-ketlik $f(x_0)$ ga yaqinlashadi. Bu esa f funksionalning x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini bildiradi. Tanlashimizga ko‘ra x_0 nuqta M to‘plamning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lganligi sababli, f funksional M to‘plamda uzluksiz bo‘ladi.

Quyidagi teorema funksional tekis uzluksizligining yetarli shartini ifodalaydi.

3-teorema (*Kantor*). *Agar X metrik fazodagi f funksional M kompakt to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda f funksional shu to‘plamda tekis uzluksiz bo‘ladi.*

Isboti. f funksional M to‘plamda uzluksiz, lekin tekis uzluksiz bo‘lmasin deb faraz qilamiz. U holda, ε musbat son uchun, M to‘plamning $\rho(x_1,x_1')<1$, $|f(x_1)-f(x_1')|\geq\varepsilon$ shartlarni qanoatlantiruvchi x_1 va x_1' nuqtalarini tanlab olish mumkin. Shunga o‘xshash M to‘plamning

$$\rho(x_2,x_2')<\frac{1}{2}, \qquad |f(x_2)-f(x_2')|\geq\varepsilon$$

shartlarni qanoatlantiruvchi x_2 va x_2' nuqtalar juftini tanlaymiz. Shu kabi, $\rho(x_n,x_n')<1/n,$ $|f(x_n)-f(x_n')|\geq\varepsilon$ shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar juftini tanlash cheksiz davom ettirilib, $\{x_n\}$ va $\{x_n'\}$ nuqtalar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz.

Kompakt M to‘plamning nuqtalaridan tuzilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin. Bu qism ketma-ketlikning limiti $x_0\in M$ bo‘lsin. Ikkinchi ketma-ketlikning shu nomerlarga mos hadlaridan tuzilgan $\{x_{n_k}'\}$ qism ketma-ketlik ham x_0 nuqtaga yaqinlashadi. Endi

$$\varepsilon\leq|f(x_n)-f(x_n')|\leq|f(x_n)-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x_n')|$$

bo‘lganligi sababli o‘ng tomondagi qo‘shiluvchilarning kamida biri n ga bog‘liq bo‘lmagan holda $\varepsilon/2$ dan kichik bo‘la olmaydi. Bu esa funksionalning uzluksizligiga zid. Teorema isbot bo‘ldi.

Tekshirish savollari

1. Uzluksiz akslantirishda kompakt to‘plamning tasviri qanday to‘plam bo‘ladi?

2. Akslantirish bilan funksional qanday farq qiladi?

3. Tekis uzluksiz funksionalni ta’riflang.

4. Kantor teoremasining mazmunini ayting.

III-BOB. CHIZIQLI FUNKSIONALLAR VA OPERATORLAR

1-§. Chiziqli fazo va uning xossalari

Chiziqli fazo tushunchasini kiritishdan avval, o'zimizga yaxshi tanish bo'lgan n o'lchamli vektorlar fazosi $\mathbb{R}^n$ ni ko'rib chiqamiz. Bu, n o'lchamli vektorlar ustida qo'shish va songa ko'paytirish amalini kiritamiz.

Ikki $a=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ va $b=\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ vektorlarning yig'indisi deb $a+b=(a_1+b_1,\, a_2+b_2...,a_n+b_n)$ vektorga aytiladi.

Vektorning koordinatalari sonlar va sonlarni qo'shish amali kommutativ va assotsiativ bo'lgani uchun vektorlarning yig'indisi ham shu xossalarga ega, ya'ni

1) $a+b=b+a$ (kommutativlik xossasi);

2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (assotsiativlik xossasi).

Hamma koordinatalari noldan iborat vektor *nol vektor* deyiladi va $\theta=(0,0,...,0)$ orqali yoziladi.

Ushbu $-a=(-a_1,-a_2,...,-a_n)$ vektor a vektorga *qarama-qarshi vektor* deyiladi.

Ravshanki, $a+(-a)=\theta$. Demak, kiritilgan qo'shish amaliga nisbatan, n o'lchamli vektorlar to'plami kommutativ gruppa hosil qiladi.

Vektorlar ustida yana bir amalni kiritamiz. a vektorning λ haqiqiy songa ko'paytmasi deb $\lambda a=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n)$ vektorga aytiladi.

Haqiqiy sonlardagi ko'paytirish amalining xossalaridan kiritilgan amalning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

3) $\lambda\,(a+b)=\lambda\, a+\lambda b$;

4) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$;

5) $(\lambda\mu)(a)=\lambda(\mu a)$;

6) $0\cdot a=\theta$;

7) $1\cdot a=a$.

Bu yerda a, b va θ lar - vektorlar, λ, μ, 0, 1 lar-haqiqiy sonlar.

Berilgan natural son uchun hamma n o‘lchamli vektorlar to‘plami (kiritilgan amallar bilan birgalikda) *n o‘lchamli vektor fazo* deyiladi va $\mathbb{R}^n$ orqali belgilanadi.

Xususan, p=2 va p=3 bo‘lganda, yuqorida kiritilgan qo‘shish amali vektorlarning «parallelogramm» qoidasi bo‘yicha geometrik qo‘shish bilan ustma-ust tushadi.

Shuningdek, a vektorni λ songa ko‘paytirish amali quyidagicha geometrik ma’noga ega: agar $\lambda > 0$ bo‘lsa, bu amal vektorning uzunligini λ marta orttiradi. Agar $\lambda < 0$ bo‘lsa, bu amal vektorning uzunligini $|\lambda|$ marta orttiradi va yo‘nalishini teskarisiga almashtiradi.

Agar n=1 bo‘lsa, vektor bir koordinata bilan aniqlanadi va bunda vektorlar ustida amallar haqiqiy sonlar ustidagi qo‘shish va ko‘paytirish amallari bilan mos tushadi. Shuning uchun $\mathbb{R}^1$ fazoni haqiqiy sonlar fazosi deb hisoblaymiz.

Endi chiziqli fazo tushunchasini umumlashtiramiz.

Ta’rif. Biror L to‘plamning ixtiyoriy ikki x va y elementi uchun qo‘shish amali berilgan bo‘lib, unga nisbatan L kommutativ gruppa hosil qilsin, ya’ni

1. $x+y = y+x$;

2. $x+(y+z) = (x+y)+z$;

3. L ning barcha elementlari uchun $x+\theta = x$ shartni qanoatlantiruvchi va *nol* deb ataluvchi θ element mavjud.

4. L da har qanday x element uchun $x+(-x)=\theta$ shartni qanoatlantiruvchi va $(-x)$ element mavjud.

Bu elementni x ga *qarama-qarshi* element deyiladi.

Bulardan tashqari, har qanday $\alpha \in \mathbb{R}$ son va $x \in L$ element uchun ularning *ko‘paytmasi* deb ataladigan $\alpha x \in L$ element aniqlangan bo‘lib, quyidagilar o‘rinli:

5. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

6. $1 \cdot x = x$;

7. $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$;

8. $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$.

Agar L dagi bu ikki amal uchun 1 - 8 shartlar bajarilsa, u holda L to‘plam *haqiqiy sonlar ustidagi chiziqli fazo* deyiladi.

Yuqorida ko‘rib chiqilgan n–o‘lchamli vektor fazo $\mathbb{R}^n$ ning chiziqli fazoga misol bo‘lishi ravshan. Shu sababli chiziqli fazo va vektor fazo tushunchalari bitta ma’noda ishlatiladi.

Misollar. 1) Kompleks sonlar to‘plami, unda kiritilgan qo‘shish va haqiqiy songa ko‘paytirishga nisbatan chiziqli fazo bo‘ladi.

2) Yuqorida keltirilgan n–o‘lchamli vektor fazo $\mathbb{R}^n$ chiziqli fazoga misol bo‘ladi.

3) Bir o‘zgaruvchili, darajasi n dan oshmaydigan $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}\, x^n$ ko‘phadlar fazosi chiziqli fazodir.

4) Eng katta darajasi n ga teng bo‘lgan ko‘phadlar to‘plami chiziqli fazo tashkil qilmaydi. Chunki, ikki ko‘phad yig‘indisining darajasi n dan kichik bo‘lib qolishi mumkin. Masalan, $f(x)$=1+x^n va $g(x)$=2+7$x^{n-2} - x^n$ darajasi n ga teng ko‘phadlar, lekin ularning yig‘indisi, darajasi n-2 ga teng ko‘phad bo‘ladi.

5) Elementlari haqiqiy sonlar bo‘lgan n satr va m ustunli matritsalar to‘plami, mos elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan nxm o‘lchamli chiziqli fazo hosil qiladi.

6) $\mathbb{R}$ to‘g‘ri chiziqdagi musbat sonlar to‘plami chiziqli fazo bo‘lmaydi. Chunki, α musbat son uchun qarama – qarshi element -α bu to‘plamga kirmaydi. Bu to‘plamni $\mathbb{R}$ dagi konus deyish mumkin.

Elementlari funksiyalar yoki sonli ketma-ketliklar bo‘lgan chiziqli fazolar *funksional fazolar* deyiladi. Shunday fazolarga ham misollar keltiramiz.

7) l_2 haqiqiy fazo. Uning elementlari

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \quad (1)$$

shartni qanoatlantiruvchi $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ketma-ketliklardan iborat. Bu fazoda amallar quyidagicha kiritiladi:

$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)+(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n, \ldots)$,

$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots)$.

l_2 fazo chiziqli fazo bo‘lishi uchun yuqoridagi kabi kiritilgan, ikki element yig‘indisi ham shu fazoda yotishi kerak. Bu esa (1) shartni qanoatlantiruvchi ikki ketma - ketlik yig‘indisi ham shu shartni qanoatlantirishidan, bu tasdiq esa $(a_1+a_2)^2 \le 2a_1^2 + 2a_2^2$ sodda tengsizlikdan kelib chiqadi.

8) Biror $[a,b]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz haqiqiy funksiyalar to‘plami $C[a,b]$ ni qaraylik. Funksiyalarni odatdagi qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan $C[a,b]$ chiziqli fazo hosil qiladi.

2-§. Normalangan fazolar

Ta'rif. Aytaylik X haqiqiy chiziqli fazo bo'lib, uning har bir x elementiga haqiqiy, $||x||$ orqali belgilangan sonni mos qo'yuvchi $||\cdot||:X\to\mathbb{R}$ akslantirish berilgan bo'lsin. Agar bu akslantirish

1. Har doim $||x||\geq 0$. Shuningdek, $x=\theta$ uchun $||x||=0$ va aksincha, agar $||x||=0$ bo'lsa, u holda $x=\theta$;

2. Ixtiyoriy λ son uchun $||\lambda x||=|\lambda|\cdot||x||$;

3. Ixtiyoriy ikki x va y elementlar uchun $||x+y||\leq||x||+||y||$

shartlarni qanoatlantirsa, u *norma* deyiladi.

Bu shartlar *norma aksiomalari* deb ham yuritiladi. Uchinchi shart *uchburchak aksiomasi* deyiladi.

Norma kiritilgan chiziqli fazo *normalangan* fazo deyiladi. Odatda $||x||$ son *x elementning normasi* deyiladi. Agar $\rho(x,y)=||x-y||$ belgilash kiritsak, u holda $\rho(x,y)$ metpika ekanligi bevosita ko'rinib turibdi. Demak, har qanday normalangan fazo metrik fazo bo'ladi.

Aytaylik X normalangan fazo bo'lsin.

Ta'rif. Nol, θ elementning $\varepsilon>0$ atrofi deb, $U=\{x: ||x||<\varepsilon\}$ to'plamga aytiladi.

Bu kiritilgan U to'plam, norma yordamida aniqlangan metrika tilida, markazi θ nuqtada, radiusi ε bo'lgan ochiq shar deyiladi.

Shuningdek, $x\in X$ elementning ε atrofi deb $x+U$ to'plamga aytiladi.

Eslatib o'tish lozim, $V=\{x: ||x||\leq\varepsilon\}$ to'plam markazi θ nuqtada, radiusi ε bo'lgan yopiq shar deyiladi.

Kelgusida, $X_1=\{x: ||x||\leq 1\}$ to'plam X normalangan fazoning *birlik shari* deyiladi.

Normalangan fazolar metrik fazolarning xususiy holi bo'lgani uchun, normalangan fazolarning to'la yoki to'la emasligi haqida gap yuritish mumkin.

Norma yordamida fazoning to'laligi quyidagicha ifodalanadi:

Aytaylik X normalangan fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar biror x element uchun $\{||x_n - x||\}$ sonli ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik x ga yaqinlashadi deyiladi va $x_n \to x$ kabi belgilanadi.

Shuningdek, agar $\{||x_n - x_{n+m}||\}$ sonli ketma-ketlikning limiti, ixtiyoriy m uchun 0 ga teng bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik *fundamental* deyiladi.

Agar X normalangan fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu fazo to'la deyiladi.

To'la normalangan fazo qisqacha *Banax fazosi* yoki B-fazo deyiladi va normalangan fazolar ichida muhim rol o'ynaydi.

Misollar. 1) Agar x haqiqiy son uchun $||x||=|x|$ deb olsak, u holda $\mathbb{R}^1$ chiziqli fazo, ya'ni to'g'ri chiziq normalangan fazo bo'ladi.

2) n o'lchamli $\mathbb{R}^n$ haqiqiy fazoda $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ element uchun normani quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \qquad (1)$$

Bunda normaning 1, 3 shartlari bajarilishi ravshan, 2 shart esa Koshi – Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi.

Shu $\mathbb{R}^n$ fazoning o'zida quyidagi normalarni ham kiritish mumkin:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad (2) \qquad\qquad \|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k| \qquad (3)$$

3) $C[a,b]$ fazoda normani quyidagicha aniqlaymiz: $\|f\| = \max_{a\le t\le b} |f(t)|$. Ravshanki, bu norma uchun ham 1, 3 shartlar bevosita bajariladi. 2 shartining bajarilishini ko'rsatamiz.

Har qanday $t \in [a,b]$ nuqta va f, g funksiyalari uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$|(f+g)(t)| = |f(t) + g(t)| \le |f(t)| + |g(t)| \le \max_{a\le t\le b} |f(t)| + \max_{a\le t\le b} |g(t)| = \|f\| + \|g\|.$$

Bu yerda t ixtiyoriy bo'lgani uchun bundan $\|f+g\| = \max_{a\le t\le b} |(f+g)(t)| \le \|f\| + \|g\|$ kelib chiqadi.

4) m chiziqli fazoda $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$ elementining normasi deb $\|x\|=\sup\limits_{1\le n<\infty}|x_n|$ songa aytamiz. Bu misol uchun norma aksiomalari bevosita tekshiriladi.

Normalangan X fazoning X_0 vektor qism fazosi yopiq bo'lsa, u holda X_0 ni normalangan X fazoning qism fazosi deyiladi.

Uchinchi misoldagi $C[a,b]$ fazoda olingan *P(x)* ko'phadlar to'plami yopiq bo'lmagan vektor qism fazoga misol bo'ladi. Demak, normalangan fazo ma'nosida *P(x)* fazo $C[a,b]$ning qism fazosi emas.

Normalangan X fazoda biror A to'plamning chiziqli qobig'i bo'lgan $L[A]$ vektor qism fazoni olamiz. $L[A]$ ni A to'plamning *chiziqli yopilmasi* deyiladi.

Agar elementlarning biror $\{x_n\}$ sistemasi uchun, uning chiziqli yopilmasi X fazoning o'ziga teng bo'lib qolsa, u holda $\{x_n\}$ sistema *to'la sistema* deyiladi.

Yuqoridagi $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^n$, C[a,b] fazolarning to'laligini ko'rsatish mumkin, (masalan [1,2,3] kitoblarga qarang). Demak, ular Banax fazolaridir.

Yana misollar ko'ramiz.

5) $C_2[a,b]$ – kvadrati bilan integrallanuvchi uzluksiz funksiyalar fazosida normani quyidagicha kiritamiz: $\|x\|=\left(\int\limits_a^b x^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Norma aksiomalari bevosita tekshiriladi. Uchburchak aksiomasi umumiy holda isbotlangan Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi. Bu fazoning to'la emasligi [3] da ko'rsatilgan.

6) l_2 haqiqiy fazoda normani

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2}\quad, x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

ko'rinishida kiritsak, l_2 fazo B - fazoga misol bo'ladi.

Banax fazosiga muhim bir misol ko'ramiz. X kompakt to'plam bo'lib, *C(X)* fazo X da aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi bo'lsin. Ravshanki, *C(X) chiziqli fazo* bo'ladi.

Bu fazoda normani quyidagicha kiritamiz: $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$.

Bu sonning chekli ekanligi II bob 7-paragrafdagi 2-teoremadan kelib chiqadi. Normaning xossalari esa bevosita tekshiriladi.

Teorema. *C(X) fazo kiritilgan normaga nisbatan Banax fazosi bo'ladi.*

Isboti. Aytaylik $\{f_n(x)\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Ya'ni, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N natural son topiladiki, ixtiyoriy $m, n \geq N$ uchun $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ tengsizlik hamma x nuqtalarda bajariladi. Bitta $x \in X$ nuqtani tayinlab, $\{f_n(x)\}$ conli ketma-ketlikni qarasak u fundemental bo'ladi. Demak, $\{f_n(x)\}$ biror $f(x)$ songa yaqinlashadi.

Yuqoridagi tengsizlikda t bo'yicha limitga o'tsak,

$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$ ya'ni $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$

munosabat hosil bo'ladi. Demak, $\{f_n(x)\}$ ketma–ketlik $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi. Endi $f(x)$ ning uzluksizligini isbotlash kifoya.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday m con topiladiki, $\|f - f_m\| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ushbu m conni tayinlab olsak, $f_m(x)$ funksiya ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi, ya'ni x_0 nuqtaning shunday U_{x_0} atrofi topiladiki, ixtiyoriy $x \in U_{x_0}$ nuqtada $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, ixtiyoriy $x \in U_{x_0}$ nuqta uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| +$$

$$+|f_m(x_0) - f(x_0)| \leq \|f - f_m\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f - f_m\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ya'ni, $f(x)$ uzluksiz funksiya.

Ushbu paragraf so'ngida asosiy normalangan fazolarni jadval shaklida keltiramiz:

Belgilash	Fazo elementlari	Norma uchun formula

$\mathbb{R}_2^n$	Haqiqiy sonlarning tartiblangan chekli ketma-ketligi (kortej) $x=(x_1,x_2,...,x_n)$	$\lVert x \rVert=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$
$\mathbb{R}_1^n$	Haqiqiy sonlarning tartiblangan chekli ketma-ketligi (kortej) $x=(x_1,x_2,...,x_n)$	$\lVert x \rVert=\sum_{k=1}^{n} \lvert x_k \rvert$
$\mathbb{R}_\infty^n$	Haqiqiy sonlarning tartiblangan chekli ketma-ketligi (kortej) $x=(x_1,x_2,...,x_n)$	$\lVert x \rVert=\max_{1\le k\le n} \lvert x_k \rvert$
ℓ_2	Ushbu $\sum_{k=1}^{\infty} x_k{}^2<\infty$ sharti qanoatlantiruvchi $x=(x_1,x_2,...,x_n...)$ cheksiz sonlar ketma-ketligi.	$\lVert x \rVert=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k{}^2}$
ℓ_1	Ushbu sharti $\sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k \rvert<\infty$ qanoatlantiruvchi $a=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ cheksiz sonlar ketma-ketligi.	$\lVert x \rVert=\sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k \rvert$
m	Chegaralangan ketma-ketliklar	$\lVert x \rVert=\sup_{1\le k\le\infty} \lvert x_k \rvert$
$C_2[a,b]$	$[a,b]$ da uzluksiz funksiyalar	$\lVert f \rVert=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$
$C_1[a,b]$	$[a,b]$ da uzluksiz funksiyalar	$\lVert f \rVert=\int_a^b \lvert f(x) \rvert dx$
$C[a, b]$	$[a,b]$ da uzluksiz funksiyalar	$\lVert f \rVert=\max_{a\le x\le b} \lvert f(x) \rvert$
$D^n[a,b]$	$[a,b]$ da barcha n-chi tartibli xosilalarigacha uzluksiz bo‘lgan funksiyalar.	$\lVert f \rVert=\max_{a\le x\le b} \lvert f^k(x) \rvert \quad k=1,2,...,n$

3-§. Evklid fazolari

Endi biz normalangan fazoning xususiy holi bo‘lgan va funksional analizda keng qo‘llaniladigan Evklid fazosini ko‘rib chiqamiz.

Ta’rif. Haqiqiy E chiziqli fazoning ikki x va y elementlari uchun aniqlangan, (x,y) ko‘rinishida belgilanuvchi va quyidagi

1. $(x,y)=(y,x)$;
2. $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$;
3. $(\lambda x,y)=\lambda(x,y),\ \ \lambda\in R$;
4. $(x,x)\geq 0; (x,x)=0 <=> x=0$

to‘rt shartni (aksiomalarini) qanoatlantiruvchi funksiya *skalyar ko‘paytma* deyiladi:

Skalyar ko‘paytma kiritilgan chiziqli fazo *Evklid fazosi* deyiladi. Skalyar ko‘paytma yordami bilan Evklid fazosida norma quyidagicha kiritiladi:

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}\ .$$

Bu yerda arifmetik ildiz nazarda tutilgan.

Normaning birinchi sharti skalyar ko‘paytmaning to‘rtinchi aksiomasidan bevosita kelib chiqadi. Normaning ikkinchi sharti skalyar ko‘paytmaning uchinchi aksiomasi natijasidir.

Haqiqatan, $\|\lambda x\|=\sqrt{(\lambda x,\lambda x)}=\sqrt{\lambda^2(x,x)}=|\lambda|\cdot\|x\|.$

Normaning uchinchi shartini isbotlash uchun biz oldin, quyidagi *Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini isbotlaymiz*:

$$|(x,y)|\leq\|x\|\,\|y\| \qquad (1)$$

Isboti. Ixtiyoriy λ son olib quyidagi ifodani tuzamiz:

$$\varphi(\lambda)=(\lambda x+y,\lambda x+y)=\lambda^2(x,x)+2\lambda(x,y)+(y,y)=\|x\|^2\lambda^2+2(x,y)\lambda+\|y\|^2\ .$$

Ushbu $\varphi(\lambda)=\|\lambda x+y\|^2\geq 0$ munosabatiga ko‘ra $\varphi(\lambda)$ kvadrat uchhadning diskriminanti $(x,y)^2-\|x\|^2\cdot\|y\|^2$ musbat emas, ya’ni $(x,y)^2\leq\|x\|^2\|y\|^2$.

Bu tengsizlikdan kerak bo‘lgan (1) tengsizlik kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$\|x+y\|^2 = \varphi(1) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Ya'ni normaning uchunchi aksiomasi $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ isbotlandi.

Skalyar ko'paytma yordami bilan, Evklid fazosida ikki element orasidagi burchak tushunchasini kiritish mumkin:

$$\cos\phi = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}, \quad 0 \le \phi \le \pi.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifodaning absolyut qiymati Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga binoan birdan katta emas, ya'ni har qanday noldan farqli x va y uchun ϕ aniqlangan.

Agar $(x,y)=0$ bo'lsa, u holda $\phi = \frac{\pi}{2}$ bo'ladi. Bu holda x va y elementlar *ortogonal* deb ataladi.

Agar x element A to'plamning har bir elementiga ortogonal bo'lsa, u holda x element *A to'plamiga ortogonal* deyiladi va $x \perp A$ kabi belgilanadi.

A_1 to'plamining har bir elementi A_2 to'plamining ixtiyoriy elementiga ortogonal bo'lsa, A_1 va A_2 to'plamlar *ortogonal* deyiladi va $A_1 \perp A_2$ bilan belgilanadi.

Evklid fazosining ayrim xossalarini keltiramiz.

1. Agar $x_n \to x,\ y_n \to y$ norma ma'nosida yaqinlashsa, u holda $(x_n, y_n) \to (x,y)$ bo'ladi (skalyar ko'paytmaning uzluksizligi).

Isboti. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga asosan

$$|(x,y) - (x_n, y_n)| \le |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \le \|x\|\,\|y - y_n\| + \|x - x_n\|\,\|y_n\|$$

Yaqinlashuvchi $\{y_n\}$ ketma-ketlikning normasi chegaralangan bo'lgani uchun oxirgi ifoda nolga intiladi.

2. Evklid fazosining ixtiyoriy x, y elementlari uchun

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

tenglik o'rinli (parallelogramm formulasi).

Haqiqatan,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+$$
$$+(y,y)+(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y)=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

3. a) $x\perp y_1$ va $x\perp y_2$ munosabatlaridan $x\perp(\lambda y_1+\mu y_2)$ munosabat kelib chiqadi (λ,μ-haqiqiy sonlar).

b) $x\perp y_n$ (n=1,2,...) bo‘lib, $\{y_n\}$ ketma-ketlik y elementga yaqinlashsa, u holda $x\perp y$ bo‘ladi.

Darhaqiqat, $x\perp y_n$ bo‘lgani uchun $(x,y_n)=0,$ $y_n\to y$ dan 1-xossaga asosan $(x,y_n)\to(x,y)$. Demak, $(x,y)=0$, ya’ni $x\perp y$ bo‘ladi.

c) $x\perp A$ bo‘lsa, u holda $x\perp\overline{L[A]}$ bo‘ladi.

d) A to‘plamning har bir elementiga ortogonal bo‘lgan barcha elementlar to‘plamini $A^{\perp}$ bilan belgilaymiz.

a) xossasiga asosan $A^{\perp}$ to‘plam E ning vektor qism fazosi bo‘ladi. b) ga asosan $A^{\perp}$ yopiq. Demak, $A^{\perp}$ to‘plam normalangan E fazosining qism fazosi ekan.

4-§. Gilbert fazolari

Evklid fazosini normalangan fazo sifatida qarasak, u to‘la bo‘lishi yoki bo‘lmasligi mumkin. Agar E Evklid fazosi to‘la bo‘lmasa, u holda uning to‘ldiruvchisi bo‘lgan Banax fazosini $\hat{E}$ bilan belgilaymiz.

1-teorema. *Evklid fazosining to‘ldiruvchisi ham Evklid fazosi bo‘ladi.*

Isboti. Bu teorema metrik fazolarning to‘ldiruvchisi haqidagi teorema isbotiga o‘xshab isbotlanadi. To‘ldiruvchi fazo $\hat{E}$ ning x va u elementlarini olamiz. Aytaylik $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ E fazoning elementlaridan tuzilgan va mos ravishda x va u ga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar bo‘lsin.

Agar (x_n, y_n) conli ketma-ketlikni qarasak, ushbu

$$\left|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\right| \le \left|(x_n, y_n - y_m)\right| + \left|(x_n - x_m, y_m)\right| \le$$
$$\le \|x_n\| \|y_n - y_m\| + \|x_n - x_m\| \|y_m\|$$

tengsizlikdan $\{(x_n, y_n)\}$ ketma-ketlikning fundamental ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n)$ mavjud.

Bu limit $\{x_n\},\{y_n\}$ ketma-ketliklarga emas, balki faqat x va y elementlarigagina bog‘liqligi bevosita tekshiriladi.

Endi $\hat{E}$ da skalyar ko‘paytmani aniqlaymiz: $(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n)$.

Bu ifodaning skalyar ko‘paytma ekanligi E dagi skalyar ko‘paytma ta’rifining 1-4 shartlarida limitga o‘tish natijasida kelib chiqadi.

Masalan, 1- shart

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n, x_n) = (y, x).$$

Shunga o‘xshash

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{(x_n, x_n)} = \sqrt{(x, x)}.$$

Demak, $\hat{E}$ Evklid fazosi ekan.

Ta’rif. Cheksiz o‘lchamli to‘la Evklid fazosi *Gilbert fazosi* deyiladi.

2-teorema. *Banax fazosi Gilbert fazosi bo‘lishi uchun undagi norma, ixtiyoriy x, y uchun*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

shartni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

Misollar. 1) l_2 fazoning elementlari $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$ shartni qanoatlantiruvchi $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ketma-ketliklardan iborat.

Bu fazoda skalyar ko‘paytma $(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i$ kabi aniqlanadi.

2) $L_2[a,b]$ - fazo, $[a,b]$ oraliqda kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosi.

Bu fazoda skalyar ko‘paytma $(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)dt$ ko‘rinishda olinadi.

3) Agar H_1, H_2 Gilbert fazolari bo‘lsa, u holda ularning to‘g‘ri yig‘indisi yordamida yangi Gilbert fazosini aniqlash mumkin: $H=H_1\oplus H_2$.

H ning elementlari (h_1,h_2) ko‘rinishdagi juftliklardan iborat. Bu yerda $h_1\in H_1$, $h_2\in H_2$ va H da skalyar ko‘paytma

$$\left((h_1,h_2),(h_1',h_2')\right)=(h_1,h_1')+(h_2,h_2')$$

ko‘rinishda kiritiladi.

Tekshirish savollari

1. Chiziqli fazoni ta’riflang. Misollar keltiring.
2. Norma aksiomalarini ayting.
3. Normalangan fazoni ta’riflang, misollar keltiring.
4. Normalangan fazo va metrik fazo orasida qanday munosabat mavjud?
5. Normalangan fazo bo‘lmaydigan metrik fazoga misol keltiring.
6. Qanday fazoga Banax fazosi deyiladi? Misollar keltiring.
7. Banax fazosi bo‘lmagan normalangan fazoga misol keltiring.
8. Skalyar ko‘paytma aksiomalarini ayting.
9. Skalyar ko‘paytmaga misollar keltiring.
10. Qanday fazoga Evklid fazosi deyiladi?

11. Evklid fazosiga misollar keltiring.

12. Skalyar ko‘paytma orqali norma qanday kiritiladi?

13. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini yozing.

14. Skalyar ko‘paytmaning uzluksizligi deganda nimani tushunasiz?

15. Ikkita elementning ortogonalligi tushunchasi qanday kiritiladi?

16. Qachon biror element to‘plamga ortogonal deyiladi?

17. Gilbert fazosini ta’riflang. Misollar keltiring.

Mashqlar

1. Sonlar o‘qida quyidagi funksiyalar yordamida normani aniqlab bo‘ladimi?

a) $|arctgx|$; b) $\sqrt{x}$; c) $|x-1|$; d) $\sqrt{x^2}$ e) x^2

2. Aytaylik, L tekislikdagi vektorlar to‘plami, x va y lar $\vec{a}$ vektorning Dekart koordinatalari bo‘lsin. L da quyidagi funksiyalar norma yordamida normani aniqlab bo‘ladimi?

a) $f(\vec{a})=\sqrt{|xy|}$; b) $f(\vec{a})=|x|+|y|$;

c) $f(\vec{a})=\max\{|x|;|y|\}$ d) $f(\vec{a})=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{|xy|}$

3. Aytaylik, P haqiqiy koeffitsentli ko‘phadlarning chiziqli fazosi bo‘lsin. P to‘plamda norma sifatida

a) ko‘phadning 0 nuqtadagi qiymatining absolyut qiymatini;

b) ko‘phad koeffitsentlari modullari yig‘indisini olish mumkinmi?

4. Norma aksiomalari sistemasi zidsiz va erkli ekanligini isbotlang.

5. Chiziqli normalangan fazo $\rho(x,y)=\|x-y\|$ masofaga nisbatan metrik fazo ekanligini isbotlang.

6. $\mathbb{R}_1^n$ ning normalangan fazo ekanligini tekshiring.

7. $\mathbb{R}_\infty^n$ ning normalangan fazo ekanligini tekshiring.

8. m ning normalangan fazo ekanligini tekshiring.

9.a) $C_1[a,b]$, b) $D^n[a,b]$ larning normalangan fazo ekanligini tekshiring.

10. Sonlar o‘qida quiydagi formulalar skalyar ko‘paytmani aniqlaydimi?

a) $(x,y)=xy$; b) $(x,y)=xy^3$; c) $(x,y)=5xy$;

11. Aytaylik, V tekislikdagi vektorlar to‘plami, $\vec{a}=(a_1,a_2)$ va $\vec{b}=(b_1,b_2)$ bo‘lsin. Quyidagi formulalar V da skalyar ko‘paytma aniqlaydimi?

a) $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1;$ b) $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1-a_2b_2;$

c) $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+2a_2b_2;$ d) $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+2a_2b_2-a_1b_2-a_2b_1;$

e) $(\vec{a},\vec{b})=\sqrt{(a_1^{\,2}+a_2^{\,2})(b_1^{\,2}+b_2^{\,2})};$

12. Tekislikdagi vektorlar to‘plami V da ushbu formula

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos^3\alpha$$

bu yerda α $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak, skalyar ko‘paytma aniqlaydimi?

Ko‘rsatma: $\vec{a}=(1;0),$ $\vec{b}=(0;1),$ $\vec{c}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ vektorlar uchun skalyar ko‘paytmaning 2-aksiomasini tekshiring.

Izoh. Bu misol skalyar ko‘paytmaning 2-aksiomasi qolgan aksiomalarga bog‘liq emasligini ko‘rsatadi.

13. Skalyar ko‘paytmaning birinchi aksiomasi qolgan aksiomalarga bog‘liq emasligini ko‘rsating.

14. Skalyar ko‘paytmaning to‘rtinchi aksiomasi qolgan aksiomalarga bog‘liq emasligini isbotlang.

15. Evklid fazosi $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ normaga nisbatan normalangan fazo ekanligini isbotlang.

16. C_2 $[a,b]$ ning normalangan fazo ekanligini isbotlang.

17. ℓ_2 - normalangan fazo ekanligini isbotlang.

18. Koshi tengsizligini isbotlang:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^{\,2}},$$

bu yerda a_k, b_k (k=1, 2, 3, …, n) ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

19. Koshining umumlashgan tengsizligini isbotlang:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k{}^2}\ ,$$

bu yerda a_k va b_k $\sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^2$ va $\sum_{k=1}^{\infty} b_k{}^2$ qatorlar yaqinlashuvchi bo‘ladigan ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

20. a) Bunyakovskiy tengsizligini isbotlang:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx};$$

b) Minkovskiy tengsizligini isbotlang:

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)g(x))^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\ ,$$

bu yerda f va g $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lgan ixtiyoriy funksiyalar.

21. (3; -5; -3) elementning $\mathbb{R}_2^3$, $\mathbb{R}_1^3$, $\mathbb{R}_\infty^3$ fazolardagi normasini toping.

22. a) $\mathbb{R}_2^2$, b) $\mathbb{R}_1^2$, c) $\mathbb{R}_\infty^2$ fazolarda normasi 3 ga teng bo‘lgan elementlarga misol keltiring.

23. $y = \dfrac{1}{5}(4x^3 - x^4)$ funksiyaning a) C[-1; 5], b) C_1[-1; 5], c) D^1[-1; 5] fazolardagi normasini hisoblang.

24. C_1 [-1; 1] markazi $f_0(x) = x^3$, radiusi 1/4 ga teng bo‘lgan ochiq sharga tegishli bo‘lgan biror elementni ko‘rsating.

25. $x = (-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, ..., \dfrac{(-1)^n}{2^n}, ...)$ element a) ℓ_2, b) ℓ_1, c) m fazoning markazi 0=(0,0,0,…) nuqtada bo‘lgan ochiq sharga tegishli bo‘ladimi?

26. $x = (-1, \dfrac{1}{4}, ..., \dfrac{(-1)^n}{n^2}, ...)$ elementning a) ℓ_2, b) ℓ_1, c) m fazolardagi normasini toping.

5 – §. Chiziqli funksionallar

Aytaylik X haqiqiy chiziqli fazo bo‘lsin. Xuddi metrik fazolardagi kabi X ning har bir elementiga haqiqiy sonni mos qo‘yuvchi f: $X\to\mathbb{R}$ akslantirishni *funksional* deb ataymiz.

1–ta’rif. Agar f funksional ixtiyoriy $x, y\in X$ elementlar va λ son uchun

1. $f(x+y)=f(x)+f(y)$;
2. $f(\lambda x)=\lambda f(x)$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda *f chiziqli funksional* deyiladi.

Bu ikki shartni birlashtirib, ixtiyoriy $x, y\in X$ elementlar va α, β sonlar uchun $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$ shart bajarilsa, u holda f ni chiziqli funksional deyiladi, deyish ham mumkin.

Izoh. Yuqoridagi birinchi tenglik funktsionalning *additivlik* xossasi, ikkinchi tenglik esa *bir jinslilik* xossasi deyiladi.

5.1. Chiziqli funksional uzluksizligi. Normalangan fazolardagi chiziqli funksionallar.

Chiziqli funksionalning uzluksizligi, xuddi metrik fazolardagi kabi aniqlanadi. Shu sababli, chiziqli funksional berilgan chiziqli fazoda yaqinlashish tushunchasi kiritilgan bo‘lishi lozim.

Aytaylik E normalangan fazo va f undagi chiziqli funksional bo‘lsin.

2-ta’rif. Agar E ning x_0 nuqtasiga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $f(x_n)\to f(x_0)$ munosabat bajarilsa, u holda f chiziqli funksional x_0 nuqtada *uzluksiz* deyiladi.

Bu ta’rifni normalangan fazo tushunchalari yordamida, quyidagicha aytish mumkin:

3-ta’rif. Agar ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son uchun, shunday $\delta>0$ kichik son topilib, $\|x\|<\delta$ ekanligidan $|f(x)|<\varepsilon$ munosabat kelib chiqsa, u holda f chiziqli funksional nol nuqtada *uzluksiz* deyiladi.

1-teorema. *Agar f chiziqli funksional nol nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda f funksional E ning ixtiyoriy nuqtasida uzluksiz bo‘ladi.*

Isboti. Aytaylik f chiziqli funksional nol nuqtada uzluksiz bo‘lsin. E ning biror x nuqtasini olamiz. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo‘lsa, u holda $\{x_n - x\}$ ketma-ketlik nolga yaqinlashuvchi bo‘ladi. Demak, $f(x_n - x) \to 0$ va f chiziqli bo‘lgani uchun, bundan $f(x_n) - f(x) \to 0$, $f(x_n) \to f(x)$ kelib chiqadi. Bu esa, f ning x nuqtada uzluksizligini bildiradi. Teorema isbot bo‘ldi.

2-teorema. *Normalangan fazodagi chiziqli funksionalning uzluksiz bo‘lishi uchun, uning birlik shardagi qiymatlari chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarli.*

Misollar. 1) Agar α haqiqiy son uchun $f(x)=\alpha x$ deb olsak, u holda f akslantirish $\mathbb{R}$ da chiziqli funksional bo‘ladi. Masalan, $f(x)=2x$.

2) $\mathbb{R}^n$ fazoda chiziqli funksional. Koordinatalari haqiqiy sonlardan tuzilgan biror $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ vektor olamiz. Endi, $\mathbb{R}^n$ ning ixtiyoriy $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elementi uchun f chiziqli funksionalning qiymatini $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ formula orqali aniqlaymiz. Buning chiziqli funksional bo‘lishini tekshirish qiyin emas. Masalan, $\mathbb{R}^2$ fazoda ixtiyoriy $x=(x_1,x_2)$ uchun $f(x)=2x_1+3x_2$.

3) $C[a,b]$ fazoda chiziqli funksional.

Ixtiyoriy $x(t)\in C[a,b]$ uchun $f(x) = \int_a^b x(t)dt$ formula chiziqli funksional aniqlaydi.

Shuningdek, biror $y_o(t)\in C[a,b]$ funksiyani tayinlab, $x(t)\in C[a,b]$ uchun $f(x) = \int_a^b x(t) y_o(t) dt$ formula orqali C$[a,b]$ fazodagi ixtiyoriy chiziqli funksional aniqlanadi.

4. Gilbert fazosidagi chiziqli funksional.

Aytaylik H Gilbert fazosi, $(\cdot,\cdot)$ undagi skalyar ko‘patma bo‘lsin. Agar biror y_o elementni tayinlab qo‘ysak, ixtiyoriy $x\in H$ uchun

$$f(x)=(x,y_o)$$

formula chiziqli funksional bo‘ladi.

Umuman olganda quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. *Gilbert fazosidagi ixtiyoriy f chiziqli funksional uchun shunday bir u_o element topiladiki, $f(x)=(x,y_o)$ munosabat o'rinli bo'ladi.*

5.2. Chiziqli funksional normasi. Qo'shma fazo. Chiziqli funksionallarning sust yaqinlashuvi.

Aytaylik E normalangan fazo va f undagi chiziqli funksional bo'lsin. Quyidagicha aniqlangan

$$\| f \| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)|$$

son, ya'ni $|f(x)|$ qiymatlarning birlik shardagi aniq yuqori chegarasi bo'lgan son f funksionalning *normasi* deyiladi.

Masalan, yuqoridagi 1–misoldagi chiziqli funksional uchun $\|f\|=|\alpha|$, 2 – misol uchun $\|f\|=\|a\|$, 3 – misol uchun $\|f\|=b-a$ va $\|f\|=\int_a^b |y_o(t)|dt$ bo'ladi.

Chiziqli funksionallar uchun qo'shish va songa ko'paytirish amallarini quyidagicha kiritamiz.

Aytaylik E biror chiziqli fazo, f_1 va f_2 undagi ikki chiziqli funksional bo'lsin. Ularning f_1+f_2 *yig'indisi* va αf_1 *songa ko'paytirish* amallari, ixtiyoriy $x\in E$ uchun

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \text{va} \quad f(x) = \alpha f_1(x)$$

munosabatlar bilan aniqlanadi.

Bu tengliklarni tushunarli bo'lishi uchun

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \text{va} \quad (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x)$$

kabi yozamiz. Demak, f_1+f_2 va αf_1 lar ham chiziqli funksionallardir. Bu amallarga nisbatan chiziqli funksionallar to'plami chiziqli fazo hosil qilishi ravshan.

Shuningdek, E normalangan fazodagi f_1 va f_2 funksionallarning uzluksizligidan f_1+f_2 va αf_1 larning uzluksizligi kelib chiqadi. Kelgusida, barcha uzluksiz chiziqli funksionallar fazosini E^* orqali belgilaymiz va E ga *qo'shma fazo* deyiladi.

Aytaylik E normalangan fazo bo'lsin.

4-ta'rif. Agar E dan olingan $\{x_n\}$ elementlar ketma-ketligi va ixtiyoriy f uzluksiz chiziqli funksional uchun $\{f(x_n)\}$ sonlar ketma-ketligi $f(x_0)$ ga yaqinlashsa, ya'ni $f(x_n)\to f(x_0)$ munosabat bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik x_0 elementga *sust yaqinlashadi* deyiladi.

3-teorema. *Agar $\{x_n\}$ sust yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'lsa, u holda shunday bir C o'zgarmas son topiladiki, $||x_n||\le C$ bo'ladi. Boshqacha aytganda, normalangan fazodagi sust yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.*

Misollar. 1) $\mathbb{R}^n$ fazoda sust yaqinlashish mos koordinatalar yaqinlashishi bilan ustma – ust tushadi.

2) $C[a,b]$ fazoda sust yaqinlashish.

Aytaylik $\{x_n(t)\}$ funksiyalar ketma-ketligi sust yaqinlashishi uchun

a) u tekis chegaralangan, ya'ni barcha n=1,2,. . ., va $a\le t\le$b uchun $|x_n(t)|\le C$ bo'lishi;

b) har bir nuqtada yaqinlashuvchi bo'lishi zarur.

6–§. Chiziqli operatorlar. Chiziqli operatorning uzluksizligi, xossalari

6.1. Chiziqli fazolardagi chiziqli operatorlar

Aytaylik X va Y haqiqiy sonlar maydoni ustida berilgan chiziqli fazolar, hamda ular orasida $T: X \to Y$ akslantirish berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar har qanday $x,y \in X$ va $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uchun

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, T *chiziqli akslantirish* yoki *chiziqli operator* deyiladi.

*Misollar.*1) $X = \mathbb{R}^n$ va $Y = \mathbb{R}^m$ ($m<n$) bo‘lsin. T akslantirish X ning har bir $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elementiga $Tx = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ elementni mos qo‘ysin. T ning chiziqli operator ekanligini tekshirish qiyin emas.

Umuman T chiziqli akslantirish $\mathbb{R}^n$ fazoni $\mathbb{R}^m$ fazoga o‘tqazsa u $m \times n$ o‘lchamli matritsadan iborat ekanligi chiziqli algebra kursidan ma’lum.

Haqiqatan, $\mathbb{R}^n$ dagi bazisni $e_1, e_2, \ldots, e_n$ orqali $\mathbb{R}^m$ dagi bazisni $f_1, f_2, \ldots, f_m$ orqali belgilab ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}^n$ uchun $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ yoyilmaga ega bo‘lamiz. Berilgan T akslantirish chiziqli operator bo‘lgani uchun uni

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} x_i T e_i$$

kabi yozish mumkin. Endi $Te_i \in \mathbb{R}^m$ bo‘lgani uchun bu elementni $f_1, f_2, \ldots, f_m$ bazis orqali ifodalaymiz: $Te_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j$, $i=1,2, \ldots, n$.

Bu yoyilmadagi a_{ij} koeffitsentlar T akslantirishning matritsa ko‘rinishdagi yozuvi elementlarini tashkil qiladi.

Yuqoridagi $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ akslantirishning matritsa ko‘rinishi quyidagicha:

$$T=\begin{pmatrix} \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hphantom{1\quad 0\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad 0}}^{m}} & & & \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

2) $X=\mathbb{R}^n$, $Y=P^{n-1}(x)$ bo‘lsin. Bu yerda $P^{n-1}(x)$ – darajasi n-1 dan katta bo‘lmagan ko‘phadlar fazosi. $T: X \to Y$ operatorni

$$T((a_1, a_2, ..., a_n)) = a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^{n-1}$$

kabi aniqlaymiz.

T chiziqli operator bo‘ladi.

Haqiqatan, agar $a=(a_1, a_2, ..., a_n)$, $b=(b_1, b_2, ..., b_n)$ ixtiyoriy elementlar bo‘lsa , u holda

$T(a+b)=T(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ ...,\ a_n+b_n)=a_1+b_1+(a_2+b_2)x+...+(a_n+b_n)x^{n-1}=$

$=(a_1+a_2x + \ldots +a_nx^{n-1})+(b_1+b_2x+ \ldots +b_nx^{n-1})=T(a) + T(b),$

Xuddi shuningdek, $T(\lambda a)=\lambda T(a)$ bo‘lishi oson tekshiriladi.

3) Aytaylik $X=Y=C[0,1]$ uzluksiz funksiyalar fazosi bo‘lsin. T operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$y = Tx = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds.$$

Bu yerda $K(t,s)$ funksiya $[0,1]\times[0,1]$ to‘plamda uzluksiz deb olinadi.

Osongina tekshirish mumkin (integral xossasidan foydalanib), T operator $C[0,1]$ fazoni $C[0,1]$ fazoga aks ettiruvchi chiziqli operator bo‘ladi.

6.2. Normalangan fazolardagi chiziqli operatorlar

Aytaylik X va Y normalangan fazolar, T esa X ni Y ga akslantiruvchi chiziqli operator bo‘lsin.

2-ta’rif. Agar T operator uchun

$$\|Tx\| \le M \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $M>0$ soni mavjud bo‘lsa, u holda T operator *chegaralangan* deyiladi.

Teorema. *Berilgan $T: X \to Y$ chiziqli operator uzluksiz bo‘lishi uchun uning chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isboti. *Zarurligi.* Berilgan T chiziqli operator uzluksiz, ammo chegaralanmangan bo‘lsin deb faraz qilaylik. U holda ixtiyoriy n natural son uchun shunday $x_n \in X$ element topiladiki, $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$ tengsizlik bajariladi.

Ravshanki, $x_n \neq 0$. Ushbu $y_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$ elementni olsak, ko‘rinib turibdiki $\|y_n\| = \dfrac{1}{n} \to 0$, ya’ni $y_n \to 0$. T uzluksiz bo‘lgani uchun $T\,y_n \to 0$ bo‘ladi. Ammo

$$\|Ty_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\cdot\|Tx_n\| > \frac{1}{n\|x_n\|}\cdot n\cdot\|x_n\| = 1.$$

Demak , $\|Ty_n\| > 1$. Bu esa $T\,y_n \to 0$ ekaniga zid.

Yetarliligi. Aytaylik T chegaralangan chiziqli operator bo‘lsin. U holda ta’rifga ko‘ra shunday M topiladiki, $\|Tx\| \leq M\cdot\|x\|$ bo‘ladi. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlik 0 ga intilsa, u holda $\|x_n\| \to 0$ bo‘lishi ravshan. Demak,

$$\|Tx_n\| \leq M\cdot\|x_n\| \to 0, \text{ ya'ni } T\,x_n \to 0.$$

Bundan T operatorning 0 nuqtada va, demak fazoning har bir nuqtasida uzluksizligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Endi normalangan fazolarda operatorning normasini aniqlaymiz.

3-ta’rif. T chiziqli operatorning *normasi* deb

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\,\|x\|,\ \forall x \in X\}.$$

kabi aniqlanadigan songa aytiladi:

Operator normasini hisoblash uchun turli formulalar bor.

Lemma. *Normalangan fazo X da aniqlangan T operator uchun*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

tengliklar o‘rinli.

Isboti. Ixtiyoriy $M>\|T\|$ son va $\|x\|\leq 1$ bo‘lgan x element uchun $\|Tx\|\leq$M o‘rinli, bundan $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|\leq$M kelib chiqadi. Demak, $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|\leq\|T\|$, ya’ni

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\leq\sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|\leq\|T\| \qquad (*)$$

bo‘lishi tushunarli.

Agar $\|T\|>0$ bo‘lsa, u holda $0<b<\|T\|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy b sonni olamiz. Ta’rifga asosan $\|Tx_0\|>b\|x_0\|$ shartni qanoatlantiruvchi, noldan farqli($x_0\neq 0$) x_0 element topiladi. Demak, $y_0=\dfrac{x_0}{\|x_0\|}$ elementni olsak, u holda $\|y_0\|=1$ va $\|Ty_0\|=\dfrac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|}>b$ bo‘ladi va bundan

$\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|>b$ munosabatga ega bo‘lamiz. Olingan b son $\|T\|$ dan kichik ixtiyoriy son bo‘lgani uchun oxirgi tengsizlikdan $\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|\geq\|T\|$ tengsizlik hosil bo‘ladi. Bu tengsizlikni yuqoridagi (*) tengsizlik bilan solishtirib kerakli munosabatni olamiz.

Misollar. 4) Nol operator $\theta x=0$ (X ning ixtiyoriy x elementi uchun) tenglik bilan aniqlanadi. Bu holda, ko‘rinib turibdiki $\|\theta\| = 0$.

5) Birlik operator I ni qaraymiz. Ixtiyoriy x element uchun $Ix=x$ bo‘lganligi sababli

$$\|I\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ix\|=\sup_{\|x\|=1}\|x\|=1$$

tenglik o‘rinli. Demak, $\|I\| =1$.

6) Normalangan X fazoda T chiziqli operatorni quyidagicha aniqlaymiz: $Tx = \lambda x$, λ- haqiqiy son. U holda

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|=1}\|\lambda x\| = \sup_{\|x\|=1}|\lambda|\cdot\|x\| =|\lambda|,$$

ya’ni, ushbu operator uchun $\|T\| = |\lambda|$ ekan.

7) $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ bo‘lsin. n - o‘lchamli X fazoda $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ bazisni, m - Y fazoda $\{f_1,f_2,...,f_m\}$ bazisni olamiz.

Ravshanki, T: $X \to Y$ chiziqli operatorni $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazis elementlarida aniqlash yetarli. Natijada, T operator $\left(a_{ij}\right)$ matritsa yordamida aniqlanib, u $x = \left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right)$ elementga ushbu ko‘rinishda qo‘llanadi:

$$Tx = T\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Endi X va Y fazolarda Evklid normasini qarasak, u holda T chegaralangan chiziqli operator bo‘ladi, hamda uning normasi

$$\|T\| = \sqrt{\sum_{i,k} |a_{ik}|^2}$$

kabi hisoblanadi.

Xususan, agar X va Y chekli o‘lchamli fazolar Evklid normasi bilan qaralsa, u holda ixtiyoriy $T: X \to Y$ chiziqli operator uzluksiz bo‘ladi.

6.3. Chiziqli operatorlar fazosi

X normalangan fazoni Y normalangan fazoga aks ettiruvchi barcha chiziqli operatorlar to‘plamini $L(X,Y)$ orqali belgilaymiz.

Har qanday ikki T va S chiziqli operatorlar uchun ularning yig‘indisi $T+S$ va T operatorni λ songa ko‘paytmasi λT operator quyidagicha aniqlanadi:

4-ta’rif. T va S operatorlarning $T+S$ *yig‘indisi* deb, shunday N operatorga aytiladiki, u har bir x elementga

$$N(x)=T(x)+S(x)$$

elementni mos qo‘yadi. Shuningdek, $(\lambda T)(x)= \lambda T(x)$.

Ravshanki, $N=T+S$, λT operatorlar ham chiziqli operatorlar bo‘ladi.

Shunday qilib, X ni Y ga aks ettiruvchi chiziqli operatorlar to‘plami $L(X,Y)$ bu amallarga nisbatan chiziqli fazo bo‘lar ekan.

Operatorlar normasi uchun quyidagi xossalar o‘rinli.

1°. $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$;

2°. $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$, λ-haqiqiy son, $T: X \to Y$;

3°. $\|T_1 + T_2\| \le \|T_1\| + \|T_2\|$, $T_1 : X \to Y$; $T_2 : X \to Y$.

Bu xossalarning isboti yuqorida keltirilgan lemma yordamida isbotlanadi. Masalan, 3- xossani isbotlaylik:

$$\|T_1 + T_2\| \le \sup_{\|x\|\le 1}\|(T_1 + T_2)(x)\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|T_1x + T_2x\| \le \sup_{\|x\|\le 1}(\|T_1x\| + \|T_2x\|) \le$$

$$\le \sup_{\|x\|\le 1}\|T_1x\| + \sup_{\|x\|\le 1}\|T_2x\| = \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Demak, $L(X,Y)$ chiziqli fazo yuqorida kiritilgan normaga nisbatan normalangan fazoga aylanar ekan.

Ikki uzluksiz operatorning yig‘indisi va uzluksiz operatorning songa ko‘paytmasi, uzluksiz operator bo‘lishi normalangan fazolardagi amallarning uzluksiz ekanligidan bevosita kelib chiqadi.

Agar $X = Y$ bo‘lsa, $L(X,Y)$ o‘rniga $L(X)$ yozamiz.

Endi $L(X)$ chiziqli fazoda ko‘paytma kiritamiz. Ko‘paytma sifatida operatorlarning kompozitsiyasi $T\circ S$ ni olamiz:

$$TS = T\circ S, \text{ ya'ni } (TS)(x) = T\circ S(x) = T(S(x)).$$

Bu yerda operatorlar tengligini, ya’ni $T = S$ ni X ning ixtiyoriy x elementi uchun bajariladi deb qaralishi kerak: $Tx = Sx \quad \forall x\in X$.

Ravshanki, $T(SH)=(TS)H$; $T(S+H)=TS+TH$; $(S+H)T=ST+HT$ munosabatlar o‘rinli.

Demak, $L(X)$ algebra ekan. Bu algebrani *chiziqli operatorlar algebrasi* deyiladi.

$L(X)$ algebrada ko‘paytmaga nisbatan birlik element mavjud. Bu element *I birlik operatordir*. Birlik operator, ixtiyoriy x element uchun $Ix=x$ munosabat orqali aniqlanadi.

Har bir T operator uchun $TI=IT=T$ tengliklar bevosita kelib chiqadi.

Misollar. 8) $L(\mathbb{R}^2)$ – ikki o‘lchamli fazodagi chiziqli operatorlar algebrasi bo‘lsin. Yuqoridagi ikkinchi misolda aytilganidek bu algebra 2×2 –o‘lchamli matritsalar algebrasidan iborat. Algebra kursidan ma’lumki, umuman T va S

matritsalar uchun TS matritsa ST matritsaga teng emas. Masalan, agar $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalarni qarasak,

$$TS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; ST = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bo‘ladi. Demak, $TS \neq ST$.

9) $L(C[a,b])$ – operatorlar algebrasida $Tx = \int_a^b tsx(s)ds$, $Sx = tx(t)$ deb olsak, $TSx = T(Sx) = \int_a^b ts(sx(s))ds = t\int_a^b s^2 x(s)ds$,

$$STx = S(Tx) = t \cdot \int_a^b tsx(s)ds = t^2 \int_a^b sx(s)ds,$$

ya’ni, bu holda ham $TS \neq ST$ ekan.

Tekshirish savollari

1. Chiziqli funksionalga ta’rif bering.
2. Uzluksiz funksionalga ta’rif bering.
3. Chiziqli funksionalning uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
4. Chiziqli funksionalning normasi qanday aniqlanadi?
5. Chiziqli funksionallar to‘plamining chiziqli fazo ekanligi qanday ko‘rsatiladi?
6. Berilgan fazoga qo‘shma fazo qanday aniqlanadi?
7. Qanday ketma-ketlik sust yaqinlashuvchi deyiladi?
8. Sust yaqinlashuvchi ketma-ketlikning qanday xossalari mavjud?
9. Qanday operatorga chiziqli operator deyiladi?
10. Chiziqli operatorning uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
11. Chiziqli operatorning normasi qanday aniqlanadi?
12. Chiziqli operatorlar fazosi qanday aniqlanadi?

Mashqlar

1. $\mathbb{R}_2^n$, ℓ_2, C [a,b] fazolarda aniqlangan funksionallarga misollar keltiring.

2. $y=ax+b$ chiziqli sonli funksiya additiv funksional bo‘ladimi?

3. $\mathbb{R}_2^2$ tekislikda aniqlangan $z=ax+by$ funksional additiv bo‘ladimi?

4. C [0,1] da aniqlangan ushbu funksionallar additiv bo‘ladimi?

a) $F(f)=\left|f(\frac{1}{2})\right|$ b) $F(f)=\left|f(1)\right|$

c) $F(f)=\max\limits_{0\le x\le 1} f(x)$ d) $F(f)=f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{4})$

5. Ixtiyoriy additiv funksional uchun $\forall x\in E$ da $F(\theta)=0,\ F(-x)=-F(x)$ ekanligini isbotlang.

6. Ixtiyoriy additiv funksional, $\forall x\in E$ va ixtiyoriy λ ratsional son uchun $F(\lambda x)=\lambda F(x)$ ekanligini isbotlang.

7. Aytaylik, F funksional $\mathbb{R}^n$ normalangan fazoda aniqlangan bo‘lsin. U holda

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\ ,$$

formula, bu yerda $x_i\ \ (i=1,2,...,n)$ $-x$ vektorning biror bazisga nisbatan koordinatalari, $\alpha_i\ \ (i=1,2,...,n)$ ixtiyoriy haqiqiy sonlar, $\mathbb{R}^n$ da additiv bir jinsli funksionallarning umumiy ko‘rinishini aniqlashini isbotlang.

8. Additiv, ammo uzluksiz bo‘lmagan funksionalga misol keltiring.

9. Ixtiyoriy additiv va uzluksiz funksional bir jinsli ekanligini isbotlang.

10. Agar F additiv funksional E fazoning θ elementida uzluksiz bo‘lsa, u holda u E da uzluksiz ekanligini, ya’ni chiziqli ekanligini isbotlang.

11. Aytaylik, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k\ \ (x_k\in E,\ \alpha_k\in\mathbb{R})$ yaqinlashuvchi bo‘lsin. E da chiziqli funksional F uchun quyidagi munosabat o‘rinli ekanligini (sanoqli distributivlik xossasi) isbotlang:

$$F(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k x_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k F(x_k).$$

12. Additiv va bir jinsli bo‘lgan F funksional chiziqli funksional bo‘lishi uchun E normalangan fazodan olingan barcha x lar uchun $K>0$ son topilib,

$$|F(x)|\le K\|x\| \qquad (*)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va etarli ekanligini isbotlang.

13. (*) shartni qanoatlantiruvchi barcha K lar ichida eng kichigi mavjudligini isbotlang.

14. $C[a,b]$ fazoda $\delta(f)=f(x_0)$, bu yerda $x_0\in[a,b]$, funksional berilgan. Uning chiziqli funksional ekanligini ko‘rsating va normasini toping.

15. $C[a,b]$ fazoda $F(f)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$, bu yerda x_1, x_2, …, x_n nuqtalar $[a,b]$ kesmaning tayinlangan nuqtalari, funksional aniqlangan. Bu funksionalning chiziqli ekanligini ko‘rsating va normasini toping.

16. Aytaylik, x_1, x_2, …, x_n nuqtalar $[a,b]$ kesmaning tayinlangan nuqtalari, λ_1, λ_2, ..., λ_n ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo‘lsin. U holda $F(f)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$ funksional $C[a,b]$ fazoda chiziqli va uning normasi $\|F\|=\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|$ ekanligini ko‘rsating.

17. $F(y)=\int_a^b y(x)dx$ funksional $C[a,b]$ fazoda chiziqli ekanligini ko‘rsating. Bu funksionalning normasi nimaga teng?

18. $F(y)=\int_0^1 (1-x^2)y(x)dx$ funksional $C[0,1]$ fazoda chiziqli ekanligini ko‘rsating. Bu funksionalning normasi nimaga teng?

19. $C[-1,1]$ fazoning 0 nuqtada differentsiallanuvchi bo‘lgan funksiyalaridan iborat bo‘lgan C' qism fazosida

$$F(y)=y'(0)$$

funksilnalni qaraylik. Bu funksional chiziqlimi?

Yechish. Funksionalning additivligi o‘z-o‘zidan ravshan. Bu funksional uzluksizmi? Bu savolga javob berish maqsadida grafigi 4-rasmda berilgan $y_n(x)$ funksiyani qaraymiz, bu erda α_n burchak uchun $\mathrm{tg}\alpha_n=n$ $(n\in\mathbb{N})$ tenglik bajariladi. Bu funksiya uchun

$F(y_n)=y_n'(0)=\mathrm{tg}\alpha_n=n$.

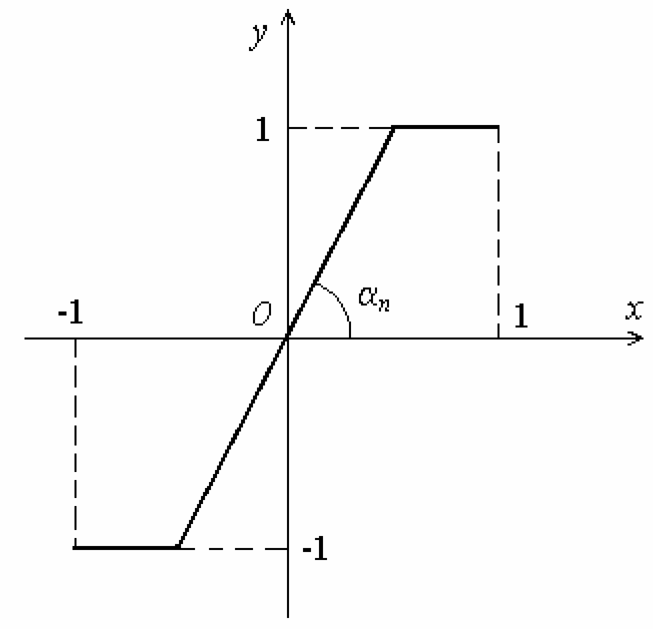
$\|y_n(x)\|=1$ bo‘lganligi sababli yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozib olish mumkin:

$$|F(y_n)|=n\|y_n\|.$$

Bundan har qanday $K>0$ son olmaylik, shunday $y_n(x)$, $n>K$ funksiya topilib,

$$|F(y_n)|=n\|y_n\|>K\|y_n\|$$

o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Boshqacha aytganda barcha y lar uchun



4- rasm

$$|F(y)|<K\|y\|$$

shartni qanoatlantiruvchi K sonini topib bo‘lmaydi. Bu esa funksional uzluksiz emasligini, demak chiziqli emasligini bildiradi.

20. Aytaylik, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}_2^n$ bo‘lsin. Ushbu formula

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \quad (1)$$

bu erda, α_1, α_2, ..., α_n –ixtiyoriy haqiqiy sonlar, $\mathbb{R}_2^n$ fazodagi chiziqli funksionalning umumiy ko‘rinishini aniqlashini va uning normasi uchun quyidagi formula

$$\|F\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$$

o‘rinli ekanligini isbotlang.

21. $\mathbb{R}_2^2$ fazoda aniqlangan chiziqli funksional (1,1) va (1,0) nuqtalarda mos ravishda 2 va 5 qiymatlarni qabul qiladi. Bu funksionalning (3,4) nuqtadagi qiymatini toping. Bu funksionalning normasi nimaga teng?

22. $\mathbb{R}_2^2$ fazoda aniqlangan chiziqli funksionalning normasi $\sqrt{13}$ ga , uning (1,1) nuqtadagi qiymati -1 ga teng. Bu funksionalning (0,1) nuqtadagi qiymatini toping.

23. (1) formula $\mathbb{R}_1^n$ fazodagi chiziqli funksionalning umumiy ko‘rinishini ifodalashini va uning normasi

$$\| F \| = \max_{1 \le i \le n} \{ |\alpha_i| \}$$

formula bilan hisoblanishini isbotlang.

24. $\mathbb{R}_1^2$ fazodagi chiziqli funksionalning normasi 6 ga teng, uning (1,2) nuqtadagi qiymati 2 ga teng. funksionalning (-1,2) nuqtadagi qiymatini toping.

25. (1) formula $\mathbb{R}_\infty^n$ fazodagi chiziqli funksionalning umumiy ko‘rinishini ifodalashini va uning normasi

$$\| F \| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

formula bilan hisoblanishini ko‘rsating.

26. $\mathbb{R}_\infty^2$ fazodagi chiziqli funksionalning normasi 4 ga teng, uning (2,1) nuqtadagi qiymati 5 ga teng. funksionalning (1,1) nuqtadagi qiymatini toping.

27. Ixtiyoriy E fazo uchun uning E^* qo‘shma fazosi to‘la ekanligini isbotlang.

28. $\mathbb{R}_2^2$ fazoni $\mathbb{R}_2^2$ fazoga akslantiruvchi F: $(x,y) \to (u,v)$ operator ushbu formula bilan aniqlangan:

$$\begin{cases} u = ax + ay, \\ v = -bx - by \end{cases}$$

Bu operatorning chiziqli operator ekanligini ko‘rsating, normasini toping.

29. $\mathbb{R}_2^3$ fazoni $\mathbb{R}_2^2$ fazoga akslantiruvchi F: $(x,y,z) \to (u,v)$ operator ushbu formula bilan aniqlangan:

$$\begin{cases} u = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ v = a_2 x + b_2 y + c_2 z \end{cases}$$

Bu operator chiziqli operator bo‘ladimi?

30. $C[a,b]$ ($a>0$) fazoni o‘ziga akslantiruvchi

$$F(y)=xy(x)$$

operator berilgan. Uning chiziqli operator ekanligini isbotlang, normasini toping.

31. $C[1,2]$ fazoni o‘ziga akslantiruvchi

$F(y)=x^2y(1)$

operator berilgan. Uning chiziqli operator ekanligini isbotlang, normasini toping.

32. $C[0,1]$ fazoni o‘ziga akslantiruvchi

$$F(y)=\int_0^1 ty(t)dt$$

operator berilgan. Uning chiziqli operator ekanligini isbotlang, normasini toping.

33. l_2 fazoning $x=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ nuqtasini shu fazoning $x'=(x_2, x_3, \ldots)$ nuqtasiga akslantiruvchi operatorning chiziqli ekanligini isbotlang. Uning normasini toping.

IV BOB. FUNKSIONAL ANALIZNING VARIATSION HISOBDAGI TATBIQI

Variatsion hisobning metodlari birinchi bo'lib I.Bernulli tomonidan 1696 yilda quyidagi masalani yechishda shakllantirilgan edi:

"Aytaylik M moddiy nuqta tekislikka tegishli va bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan A va B nuqtalarni tutashtiruvchi, egri chiziq bo'ylab og'irlik kuchi ta'sirida harakatlanayotgan bo'lsin. Egri chiziq qanday bo'lganda moddiy nuqta bir nuqtadan ikkinchi nuqtagacha bo'lgan yo'lni eng kam vaqtda bosib o'tadi?"

Izlanayotgan egri chiziqni I.Bernulli braxistoxron deb nomlagan. Kirish qismida bu masala haqida gapirgan edik. Ushbu bobda shu masala va unga o'xshash boshqa maslalarni qanday yechish mumkinligini ko'rsatamiz.

Braxistoxron haqidagi masala tekislikdagi A va B nuqtalarni tutashtiruvchi uzluksiz egri chiziqlar to'plamida aniqlangan funksionalning minimumini topish masalasidan iborat.

Variatsion hisob funksionallarning ekstremumlarini topishning umumiy metodlarini o'rganadi. So'ngi paytlarda variatsion hisob cheksiz o'lchamli fazolarda differensial hisob deb ham yuritilmoqda. Biz bu bobda funksional analizning variatsion hisobdagi tatbiqini o'rganishda tez-tez uchrab turadigan funksionalning ekstremumini topish bilan bog'liq bo'lgan masalalarni qaraymiz.

1-§. Differensial, funksionalning variatsiyasi

Faraz qilaylik, E chiziqli normalangan fazoda F funksional aniqlangan va $x_0 \in E$ bo'lsin.

Agar x_0 nuqtaning $O_\delta(x_0)=\{x\in E,\ \|x - x_0\| < \delta\}$ atrofi mavjud bo'lib, bu atrofdan olingan ixtiyoriy x uchun

$$F(x_0) > F(x) \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda F funksional x_0 nuqtada *maksimumga ega* deyiladi.

Shunga o‘xshash, agar x_0 nuqtaning $O_\delta(x_0)$ atrofi mavjud bo‘lib, bu atrofdan olingan ixtiyoriy x uchun

$$F(x_0) < F(x) \qquad (2)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda F funksional x_0 nuqtada *minimumga ega* deyiladi.

Matematik analizdagi kabi, funksional maksimumga yoki minimumga ega nuqtalar *ekstremum nuqtalar* deb ataymiz.

(1) va (2) tengsizliklardan funksional ekstremumini topishda funksionalning x_0 nuqtadagi orttirmasi muhim ahamiyatga ega:

$$\Delta F = F(x_0) - F(x).$$

Ravshanki, agar x_0 nuqtaning shunday $O_\delta(x_0)$ atrofi mavjud bo‘lib, bu atrofda funksional orttirmasi o‘z ishorasini saqlasa, u holda x_0 funksionalning ekstremum nuqtasi bo‘ladi.

Matematik analizdagi kabi orttirmaning bosh qismini ajratib olish masalasini qarash mumkin. Ma’lumki, orttirmaning bosh qismi orttirmaning ishorasini aniqlar edi.

Ta’rif. Agar F funksionalning x_0 nuqta $O_\delta(x_0)$ atrofidagi

$$\Delta F(x) = F(x) - F(x_0) = F(x_0 + h) - F(x_0)$$

orttirmasini

$$\Delta F(x) = L(x_0, h) + r(x_0, h)$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa, u holda F funksional x_0 nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi.

Bu yerda $L(x_0,h)$ funksional h ga bog‘liq chiziqli funksional, $r(x_0,h)$ esa h ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik: $|r(x_0,h)| = o(\|h\|)$.

Uning bosh chiziqli qismi bo‘lgan $L(x_0,h)$ funksional esa, F funksionalning x_0 nuqtadagi *differensiali*, ko‘p hollarda funksionalning x_0 nuqtadagi *variatsiyasi* deyiladi va $\delta F(x_0, h)$ kabi belgilanadi.

Differensiallanuvchi funksionalga misol sifatida $C[a,b]$ fazoda aniqlangan $F(x)=\int_a^b f(t,x(t))dt$ funksionalni qarash mumkin, bu yerda $f(t,x)$ uzluksiz xususiy hosilaga ega bo‘lgan uzluksiz funksiya. Uning orttirmasi quyidagiga teng:

$$\Delta F = F(x+h)-F(x)=\int_a^b (f(t,x(t)+h(t))-f(t,x(t)))dt=\int_a^b \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}h(t)dt+\int_a^b r(t,x,h)dt$$

Orttirmaning bosh qismi, *F(x)* funksionalning variatsiyasi

$$\delta U(x,h)=\int_a^b \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}h(t)dt$$

Orttirma ifodasidagi ikkinchi qo‘shiluvchining moduli $\frac{\partial f}{\partial x}$ ning uzluksiz bo‘lganligi sababli, $\|h\|$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik bo‘ladi.

2-§. Differensiallanuvchi funksionalning ekstremumi

F(x) funksionalning x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishining zaruriy shartini aniqlash maqsadida bu funksionalni $f(t)=F(x_0+th)$ ixtiyoriy tayin *h* da *t* o'zgaruvchining funksiyasi sifatida qarash qulay bo'ladi. Ma'lumki, *f*(*t*) funksiyaning *t*=0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishining zaruriy sharti $f'(t)$ hosila mavjud bo'lganda *f*(0)=0 dan iborat edi. Buni e'tiborga olib, quyidagi teoremani isbotlaymiz.

1-teorema. *Agar differensiallanuvchi F(x) funksionalning* x_0 *nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda uning* $\delta F(x_0,h)$ *variatsiyasi* x_0 *nuqtada normasi yetarlicha kichik bo'lgan barcha h larda nolga teng bo'ladi*.

Isboti. Aytaylik *F(x)* funksionalning x_0 nuqtada differensiallanuvchi va shu nuqtada ektremumga ega bo'lsin. Bu $f(t)=F(x_0+ht)$ funksiya *t*=0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning ixtiyoriy *h* da ekstremumga ega bo'lishiga teng kuchli. *t*=0 da $f'(t)$ ning mavjud ekanligini isbotlaymiz.

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t}=\frac{\delta F(x_0+th)+r(x_0,th)}{t}=$$
$$=\frac{t\delta F(x_0,h)}{t}+\frac{r(x_0,th)}{t}=\delta F(x_0h)+\frac{r(x_0,th)}{t}$$

bu yerda $F(x_0,th)=tF(x_0,h)$ chiziqli funksionalning bir jinsli ekanligidan foydalandik. $t\to 0$ intilganda $\frac{r(x_0,th)}{t}$ nolga intiladi, chunki $|r(x_0,th)|=o\|th\|$.

Demak, $t\to 0$ va ixtiyoriy *h* da $\frac{|r(x_0,th)|}{\|th\|}\to 0$.

Shunday qilib, funksionalning ekstremumga ega bo'lishining zaruriy sharti ixtiyoriy *h* da $f'(0)=\delta F(x_0h)=0$ (*h* norma jihatdan yetarlicha kichik) bo'ladi.

Yuqoridagi shart bajariladigan nuqtalar, matematik analizdagi kabi, statsionar nuqtalar deb ataladi. Bu nuqtalarda ekstremum mavjud bo'lishi mumkin. Ammo bu topgan shart faqat zaruriy shart bo'lganligi sababli, statsionar nuqtalarda funksional ekstremumga ega bo'lmasligi mumkin va funksional orttirmasi bunday statsionar nuqtaning istalgan atrofida turli ishoralarni qabul qiladi.

3-§. Eyler tenglamasi

Funksional analizning turli tatbiqlarda ushbu

$$F(y)=\int_a^b f(x,y,y')dx$$

ko‘rinishdagi funksional tez-tez uchrab turadi. Bu yerda f funksiya xOy tekislikning biror G sohasida ixtiyoriy y' uchun, hosilalari bilan uzluksiz bo‘lgan uch o‘zgaruvchili funksiya.

F(y) funksional chiziqli normalangan differensiallanuvchi funksiyalar fazosi S ning biror M qism to‘plamida aniqlangan.

Bu funksionalning differensiallanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun funksionalning y nuqtadagi orttirmasini qaraymiz:

$$\Delta F(y)=\int_a^b (f(x,y(x)+h(x),y'(x)+h'(x))-f(x,y,y'))dx=$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}h(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}h'(x)\right)dx+\int_a^b r(x,y,y',h,h')dx$$

bu yerda birinchi qo‘shiluvchi $h(x)$ ga nisbatan chiziqli, so‘nggi integral esa xususiy hosilalarning uzluksizligi evaziga $\max\{|h(x)),h'(x)|\}$ ga nisbatan yuqori tartibli chiksiz kichik.

Funksional variatsiyasi quyidagiga teng:

$$\delta F(y,h)=\int_a^b(\frac{\partial f}{\partial y}h(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}h'(x))dx$$

M to‘plam $[a,b]$ kesmaning uchlarida teng qiymatlar qabul qiladigan $y(x)$ funksiyalardan iborat bo‘lgan holni qaraymiz, ya’ni geometrik nuqtai nazardan funksionalni $A(a,y(a))$ va $B(b,y(b))$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqlar to‘plamida qaraymiz.

Funksional variatsiyasini nolga tenglashtiramiz:

$$\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}h(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}h'(x)\right)dx=0 \qquad (1)$$

va ikkinchi qo‘shiluvchini bo‘laklab, integrallaymiz:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} h'(x)dx = \frac{\partial f}{\partial y'} h(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})h(x)dx .$$

$\frac{\partial f}{\partial y'} h(x)\Big|_a^b = 0$, chunki $h(b) = h(a) = 0$.

Demak,

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} h'(x)dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})h'(x)dx \qquad (2)$$

(1) va (2) dan funksional variatsiyasi uchun quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz:

$$\delta F(x,h) = \int_a^b (\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'})h(x)dx .$$

Teorema. Agar $\delta F(x,h) = 0$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad (3)$$

bo‘ladi.

Isboti. Haqiqatdan ham, agar biror $[a_1,b_1]\subset[a,b]$ kesmada $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} > 0\ (< 0)$ bo‘lsa, u holda $[a_1,b_1]$ da musbat, bu segment tashqarisida nolga teng bo‘lgan uzluksiz $h(x)$ funksiyani olamiz.

Bu holda $\delta F(x,h) > 0\ (< 0)$ bo‘lgan bo‘lar edi. Bu ziddiyat (3) tenglikning o‘rinli ekanligini isbotlaydi.

(3) tenglik *Eyler tenglamasi* deyiladi. Shunday qilib, berilgan funksionalning statsionar nuqtasini, Eyler tenglamasini qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiyani amalda topish usulini bilamiz.

Eyler tenglamasining umumiy yechimi ikkita ixtiyoriy o‘zgarmasni o‘z ichiga oladi, bu o‘zgarmaslarni kesma uchlarida teng qiymatlar qabul qilish shartidan topish mumkin. Ammo topilgan statsionar nuqta (ular bir nechta bo‘lishi ham mumkin), ya’ni topilgan egri chiziq, ekstremum bo‘lishi aniq emas. Shuningdek, agar ekstremum bo‘lsa, uning minimum yoki maksimum ekanligi aniq emas.

Funksional analiz universitet kurslarida [1, 2] bu masalani yechish uchun analitik munosabatlar keltiriladi.

Ekstremum bo‘ladigan egri chiziqlar ekstremal deb ham yuritiladi.

Yuqoridagi muammo amalda masalaning mazmunidan va ekstremalga yaqin bo‘lgan egri chiziq xossalaridan kelib chiqib hal qilinishi mumkin. Buni kelgusi paragraflarda ko‘ramiz.

4-§. Braxistoxron haqidagi masalaning yechimi

Braxistoxon haqidagi masala kirish qismida aytilgan edi. Shu masalaning yechimini qaraymiz. Koordinatalar boshini *A* nuqtaga ko‘chiramiz (5-rasm). Fizika kursidan ma’lumki moddiy nuqta *A* nuqtadan boshlang‘ich tezliksiz harakatlanganda

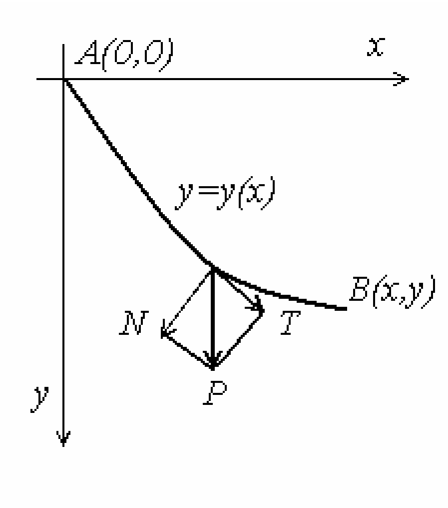
$$v=\sqrt{2gy} \qquad (1)$$

tezlikka ega bo‘ladi, bu yerda *g* erkin tushish tezlanishi. Aytaylik $y=y(x)$ moddiy nuqta harakatlanayotgan egri chiziq bo‘lsin.

U holda $v=\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{dt}dx$,

Bu yerda *ds* egri chiziq yoyining differensialli.

Bundan $dt=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}dx}{v}$, yoki (1) ni e’tiborga olsak $dt=\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{2gy}}dx$ bo‘ladi. So‘ngi tenglikni integrallab, moddiy nuqtaning



5-rasm

A nuqtadan *B* nuqtaga $y=y(x)$ egri chiziq bo‘ylab, harakat vaqtini topamiz:

$$T(y)=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{2gy(x)}}dx\,.$$

Shunday qilib, braxistoxron haqidagi masala *T(y)* funksionalning ekstremumini topishga keltirildi. *T(y)* funksionalni $C(0,x_1)$ fazoning 1- va 2-tartibli hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo‘lgan $y=y(x)$ funksiyalar to‘plamida aniqlangan deb qaraymiz.

$f(x,y,y')=\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{2gy}}$ funksiya uchun Eyler tenglamasini tuzib olamiz. qaralayotgan holda *f* funksiyada *x* o‘zgaruvchi qatnashmaydi, shu sababli Eyler tenglamasini batafsil qarab, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} = f'_y - f''_{xy'} - f''_{yy'} \cdot y' - f''_{y'y'} \cdot y'' = 0$ bunda $f''_{xy'} \equiv 0$, shu sababli qaralayotgan f funksiya uchun Eyler tenglamasi umumiy holda quyidagi ko‘rinishda yoziladi.

$$f'_y - f''_{yy'} \cdot y' - f''_{y'y'} \cdot y'' = 0 \qquad (2)$$

Bu funksiya uchun birinchi integral quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$f - y'f'_{y'} = C$$

Haqiqatdan ham,

$$\frac{d}{dx}(f - y'f'_{y'}) = f'_y \cdot y' + f'_{y'} \cdot y'' - f'_{y'} \cdot y'' - f''_{y'y} \cdot y'^2 -$$
$$- f''_{y'y'} \cdot y'y'' = y'(f'_y - f''_{y'y} \cdot y' - f''_{y'y'} \cdot y'')$$

Qavs ichidagi ifoda (2) tenglamaning chap tomoniga va (2) ga ko‘ra nolga teng.

Demak, $\frac{d}{dx}(f - y'f'_{y'}) = 0$.

Bundan foydalanib, birinchi integralni yozib olamiz:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - y'\frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = C = \frac{1}{\sqrt{2yC_1}}.$$

Ikkala tomonini $\sqrt{2g}$ ko‘paytirib, umumiy maxrajga keltiramiz, natijada

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}}$$

bo‘ladi.

Bundan $C_1 = y(1+y'^2)$, yoki

$$y'^2 = \frac{C_1 - y}{y} \qquad (3)$$

differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Hosil bo‘lgan tenglama Lagranj tenglamasi bo‘lib, uni parametr kiritish yordamida integrallaymiz. Yozuvni qisqartirish maqsadida izlanayotgan funksiyani quyidagicha $y = \frac{C_1}{2}(1-\cos\theta)$, parametrik ko‘rinishda ifodalab olamiz. U holda $y' = \frac{C_1}{2}\sin\theta\frac{d\theta}{dx}$ bo‘ladi. Olingan natijalarni (y va y' uchun) (3) ga qo‘yamiz. Soddalashtirishlardan so‘ng

$$\frac{C_1}{2}(1-\cos\theta)d\theta = \pm dx,$$

bundan

$$x = \pm\frac{C_1}{2}(\theta\sin\theta) + C_2,$$

$$y = \frac{C_1}{2}(1-\cos\theta)$$

yechimga ega bo‘lamiz.

Shunday qilib, *T(y)* funksionalning ekstremallari tsikloidalardan iborat ekan. Masala shartlaridan foydalanib, C_1 va C_2 o‘zgarmaslarni topamiz. Egri chiziqning koordinatalar boshidan o‘tishini hisobga olsak $C_2 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Egri chiziqning $\theta = \theta_1$ da $B(x_1, y_1)$ nuqtadan o‘tishi lozimligini e’tiborga olib C_1 ni topamiz.

Buning uchun $C_1 = \frac{2x_1}{\theta_1 - \sin\theta_1}$ deb olish yetarli, bu yerda θ_1 qiymat $\frac{\theta_1 - \sin\theta_1}{1-\cos\theta_1} = \frac{x_1}{y_1}$ shartni qanoatlantiradi.

So‘ngi shartning istalgan x_1 va y_1 da bajarilishini tekshirib ko‘rishni o‘quvchilarga qoldiramiz.

Fizik mulohazalardan ravshanki, biz topgan shart minimumni aniqlaydi. Chunki harakat eng ko‘p vaqt sodir bo‘ladigan egri chiziq umuman olganda mavjud emas.

Endi quyidagi savolga javob beramiz.

Matematik analizdan ma’lumki, ekstremum lokal xarakterga ega. Funksiya bir nechta ekstremumga ega bo‘lishi va bunda ulardan hech biri funksiyaning minimum qiymati ham maksimum qiymati ham bo‘lmasligi mumkin. Bu yerda shu masala qanday yechiladi? Berilgan masalani $y=y(x)$, bu yerda y, y' va y'' uzluksiz funksiyalar, to‘plamida qarab, boshqa statsionar nuqta topganimiz yo‘q. Demak, bu holda masala bir qiymatli yechiladi.

Bu masalani boshqa (funksiyalar) egri chiziqlar to‘plamida, qarash mumkin edi (masalan, siniq chiziqlar sinfida). Ammo bu holda yangi masala hosil bo‘ladi. Bu masalani bu yerda qaramaymiz.

Braxistoxron masalasini yechish usuli jihatdan quyidagi fizik masalani yechish usuliga o‘xshash.

Masala. Optik zichligi uzluksiz o‘zgaruvchi shaffof muhitda *A* va *B* nuqtalar berilgan. *A* nuqtadan *B* nuqtaga harakatlanuvchi nur traektoriyasini toping.

Fizikadagi Ferma prinsipiga ko‘ra bu masala

$$T(y) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\,dx$$

funksionalning ekstremumini topishga keltiriladi. Xususiy holda, ya’ni v faqat *u* ning uzluksiz funksiyasi va $\sqrt{y}$ ga proportsional bo‘lganda braxistoxron masalasidagi funksionalga ega bo‘lamiz.

5-§. Eng kichik yuzli aylanma sirt haqidagi masala

Aytaylik, xOy tekislikda $A(x_0,y_0)$ va $B(x_1,y_1)$ ikki nuqta berilgan bo‘lsin. Bu nuqtalarni tutashtiruvchi barcha egri chiziqlar to‘plamining quyidagi qism to‘plamini qaraymiz:

bu qism to‘plam $y=y(x)$, bu yerda y', y'' uzluksiz, egri chiziqlardan iborat. Shu to‘plamda shunday egri chiziqni topish kerakki, uni Ox atrofida aylantirish natijasida eng kichik yuzli sirt hosil bo‘lsin.

Matematik analiz kursidan ma’lumki, aylanma sirt yuzi

$$S(y) = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

funksional bilan ifodalanadi. Yuqoridagi paragrafdagi o‘xshash

$$Fy = \int_a^b f(x, yy')dx$$

ko‘rinishdagi funksional ekstremumini topish masalasiga keldik, bu yerda integral ostidagi funksiyada x bevosita qatnashmaydi.

Demak, Eyler tenglamasi (2) ko‘rinishida bo‘lib, uning birinchi integrali

$$f - y'f'_y = C,$$

yoki bunga F ning ifodasini qo‘yib

$$y\sqrt{1+y'^2} - y' \cdot y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

ega bo‘lamiz. Buni soddalashtirib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$y = C\sqrt{1+y'^2}\ .$$

Hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida $y' = sh\varphi$ belgilash kiritamiz.

U holda $\quad y = C\sqrt{1+sh^2\varphi} = Cch\varphi,$

$y' = Csh\varphi \cdot \dfrac{d\varphi}{dx}$, yoki $y' = sh\varphi$ ekanligini e’tiborga olsak

$$1 = C\frac{d\varphi}{dx},$$

bundan $x = C\varphi + C_1$ va $\varphi = \dfrac{x - C}{C}$. Shunday qilib, $y = Cch\varphi = Cch\dfrac{x - C_1}{C}$ zanjir chiziq tenglamasini hosil qilamiz.

Demak, berilgan ikki nuqtadan (Oz o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan tekisliklarda yotgan va markazi shu o‘qda bo‘lgan ikkita aylanadan o‘tuvchi) aylanma sirt zanjir chiziqni aylantirishdan hosil bo‘ladi.

Bunday sirt katenoid deb ataladi.

Masala shartidan ko‘rinadiki, bu holda ham biz (braxistoxron masalasidagi kabi) funksionalning minimumiga egamiz.

Ammo nuqtalarning turlicha joylashishiga qarab ekstremallar ikkita, bitta bo‘lishi yoki bitta ham bo‘lmasligi mumkin.

6-§. Funksional analizning variatsion hisobdagi boshqa tatbiqlari haqida

Yuqoridagi misollar bilan cheklangan holda bob so‘ngida variatsion hisobning funksional analiz metodlari bilan yechiladigan asosiy masalalarini sanab o‘tamiz:

a) Sirtda geodezik chiziqlarni topish haqidagi masala (berilgan ikki nuqtani tutashtiruvchi eng kichik uzunlikka ega bo‘lgan chiziqlar)

Xususan, sfera uchun bunday geodezik chiziqlar katta doiraning aylanalaridan iborat bo‘ladi.

Bu esa aviatsiya va suvda suzishda katta ahamiyatga ega.

b) boshlang‘ich tezlikni moddiy nuqtaning ikkinchi qo‘zg‘almas nuqta bilan o‘zaro ta’sirida paydo bo‘ladigan tortishish kuchi ta’sirida harakati masalasi. Bu masalaning yechimi sayyoralar, sun’iy yo‘ldoshlar va kosmik kemalarning orbitalarini aniqlashda ishlatiladi.

c) ikkita nuqta orasiga tortilgan og‘ir ipning muvozanati haqidagi masala (ustunlarga tortilgan elektr simlari, osma ko‘pirik arqonlari va boshqalar) bu holda masalaga mos funksionalning ekstremali zanjir chiziqdan iborat bo‘lar ekan.

Bundan tashqari mexanika va matematik fizikaning ko‘pgina tenglamalari Ostragradskiy-Gamilton prinsipiga asosan biror funksionalning ekstremumini topish yordamida keltirib chiqariladi. Masalan, shu metod bilan tor tebranishi, membrana, elastik sterjen, lonjeronga biriktirilgan samolyot qanoti tebranishi tenglamalarini va boshqa tenglamalarni keltirib chiqarish mumkin.

Shuni ta’kidlash kerakki, variatsion hisobning bevosita metodlari ham mavjud. Ularning mohiyati funksional ekstremumini topish funksional ekstremumini aniqlaydigan differensial tenglamaga keltirilmaydi. Bunda izlanayotgan funksiyaga ketma-ket yaqinlashish metodidan foydalaniladi. Bunday ketma-ketlikni tuzish qaralayotgan funksional ko‘rinishiga bog‘liq bo‘ladi.

Mashqlar

1. Quyidagi funksionallarni differensiallanuvchanlikka tekshiring.

a) $F(y) = y(a)$ $C[a,b]$ fazoda;

b) $F(y) = y^2(a)$ $C[a,b]$ fazoda;

c) $F(y) = |y(a)|$ $C[a,b]$ fazoda.

2. Agar *F(y)* differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $F^2(y)$ ham differensiallanuvchi bo‘lishini isbotlang. $F^2(y)$ variatsiyasini toping.

3. Aynan noldan farqli bo‘lgan chiziqli funksional ekstremumga ega emasligini isbotlang.

4. Quyidagi funksionallar uchun ekstremallarni toping va ekstremal masalasi yechimi mavjudligi shartini tekshiring:

a) $\int_{-1}^{1} \sqrt{y(1+y^2)}dx, \quad y(-1) = y(1) = b > 0$

b) $\int_{a}^{b} \frac{1+y^2}{y^2}dx, \quad y(a) = A, \ \ y(b) = B$.

5. Quyidagi funksionallar uchun ekstremal masalalarni tahlil qiling:

a) $\int_{0}^{1} y'dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$;

b) $\int_{0}^{1} yy'dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$;

c) $\int_{0}^{1} xyy'dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$.

V-BOB. ZAMONAVIY ALGEBRALAR HAQIDA MA'LUMOTLAR

1– §. Banax algebralari

Aytaylik X haqiqiy chiziqli fazo bo'lsin.

1-*ta'rif.* Agar X chiziqli fazoda yana bir amal, elementlarni ko'paytirish amali kiritilgan bo'lib, u quyidagi

1. $(xy)z = x(yz)$;

2. $x(y+z) = xy+xz$;

3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,

aksiomalarni qanoatlantirsa, X fazo *algebra* deyiladi. Bu yerda $x, y, z \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Agar ixtiyoriy $x, y \in X$ uchun $xy=yx$ tenglik bajarilsa, X *kommutativ* algebra deyiladi.

Agar X algebraning shunday e elementi mavjud bo'lsaki, $ex=xe=x$ tenglik ixtiyoriy $x \in X$ uchun o'rinli bo'lsa, e element *birlik element,* qaralayotgan X esa *birli algebra* deyiladi.

Ko'rsatish mumkinki, agar algebrada birlik element mavjud bo'lsa, u yagonadir.

Haqiqatdan ham, agar e dan boshqa e' birlik element bor desak, u holda ta'rifga ko'ra: $e'=ee'=e$ bo'lishi ravshan.

2-ta'rif. Agar X birli algebrada norma kiritilib, bu normaga nisbatan X Banax fazosi bo'lsa va ushbu

4. $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$, $x,y \in X$;

5. $\|e\| = 1$,

munosabatlar bajarilsa , u holda X *Banax algebrasi* deyiladi.

Umuman, har qanday Banax algebrasini birlik elementi bor algebra deb qaralishi mumkin.

Agar algebraning birlik elementi mavjud bo'lmasa, uni quyidagi usul bilan birli algebragacha kengaytirish mumkin.

Haqiqatan, faraz qilaylik X algebra birlik elementga ega bo‘lmasin. Yangi X_1 algebra sifatida (x,α), $x\in X$ va $\alpha\in\mathbb{R}$ juftliklarni olamiz va X_1 to‘plamda algebraik amallar va normani quyidagicha kiritamiz:

$$(x,\alpha)+(y,\beta)=(x+y,\alpha+\beta),\ \gamma(x,\alpha)=(\gamma x,\gamma\alpha),$$

$$(x,\alpha)\cdot(y,\beta)=(xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta),$$

$$\|(x,\alpha)\|=\|x\|+|\alpha|.$$

Endi X_1 algebra va e=(0,1) element undagi birlik element ekanini tekshirish qiyin emas.

$\|e\|=1$ bo‘lishi o‘z-o‘zidan ravshan.

Normaning 4- xosasini tekshiramiz:

$$\|(x,\alpha)\cdot(y,\beta)\| = \|(xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta)\| = \|xy+\alpha y+\beta x\|+|\alpha\beta|\leq$$

$$\leq \|xy\|+\|\alpha y\|+\|\beta x\|+|\alpha\beta| \leq \|x\|\cdot\|y\|+|\alpha|\cdot\|y\|+|\beta|\cdot\|x\|+|\alpha|\cdot|\beta| =$$

$$=(\|x\|+|\alpha|)\cdot(\|y\|+|\beta|) = \|(x,\alpha)\|\cdot\|(y,\beta)\|.$$

X_1 algebraning to‘laligi X ning va haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ ning to‘laligidan kelib chiqadi. Demak, X_1 algebra Banax algebrasi ekan. Ko‘rinib turibdiki, X ni X_1 ning $(x,0)$ ko‘rinishdagi elementlardan iborat qismi sifatida qarash mumkin.

Aytaylik, X va Y algebralar berilgan bo‘lsin. $F: X\to Y$ biror chiziqli akslantirishni qaraylik.

3-ta’rif. Agar ixtiyoriy $x,y\in X$ uchun $F(xy) = F(x)F(y)$ munosabat bajarilsa, *F gomomorfizm* deyiladi.

O‘zaro bir qiymatli gomomorfizm *izomorfizm* deyiladi.

Agar F izomorfizm, har bir $x\in X$ uchun $\|F(x)\|=\|x\|$ tenglikni qanoatlantirsa, u *izometrik izomorfizm* deyiladi.

1-tasdiq. *Banax algebrasida ko‘paytirish amali uzluksizdir*.

Isboti. Aytaylik $x_n\to x$ va $y_n\to y$ bo‘lsin. U holda Banax algebrasining 4-aksiomasiga ko‘ra $n\to\infty$ da

$$\|x_n y_n - xy\| = \|(x_n - x)y_n + x(y_n - y)\| \le$$
$$\le \|y_n\| \cdot \|x_n - x\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0$$

ga ega bo‘lamiz. Bu esa $x_n y_n \to xy$ ekanini bildiradi.

Xususan, ko‘paytirish amali o‘ngdan va chapdan uzluksiz, ya’ni $x_n \to x$, $y_n \to y$ uchun $xy_n \to xy$, $x_n y \to xy$ bo‘ladi.

1-**teorema**. *Aytaylik X Banax fazosi va shu bilan birga birli algebra bo‘lib, undagi ko‘paytirish amali o‘ngdan va chapdan uzluksiz bo‘lsin. U holda X dagi normaga ekvivalent bo‘lgan shunday norma mavjudki, bu normada X Banax algebrasi bo‘ladi.*

Isboti. X ning har bir x elementiga ushbu $M_x(z) = xz \quad (x \in X)$ tenglik yordamida M_x operatorini mos qo‘yamiz. X^ to‘plam X fazoda shu ko‘rinishdagi operatorlar to‘plami bo‘lsin.

X dagi ko‘paytirish amali o‘ngdan uzluksiz bo‘lgani uchun $X^\wedge \subset L(X)$. Ravshanki, $x \to M_x$ moslik chiziqli va ta’rifga asosan $M_{xy} = M_x M_y$. Agar $x \neq y$ bo‘lsa , u holda $M_x e = xe = x \neq y = ye = M_y e$, ya’ni $M_x \neq M_y$ bo‘ladi. Demak, $x \to M_x$ moslik X ni X^ ga aks ettiruvchi izomorfizm ekan.

Endi, X^ qism fazo L(X) da yopiqligini va, demak, X^ ning to‘la ekanligini ko‘rsatamiz.

Operatorlar ketma – ketligi $\{T_n\} \subset X^\wedge$ berilgan va $T_n \to T \in L(X)$ bo‘lsin deb faraz qilaylik. Bu yerda aniqlanishga ko‘ra

$$T_n y = x_n y \ , \ x_n \in X \, , \, n=1,2,...$$

Bundan $T_n y = x_n y = (x_n e)y = T_n(e)y, \ y \in X$ kelib chiqadi.

X dagi ko‘paytirish amalining chapdan uzluksizligidan foydalansak, yuqoridagi tenglikdan $n \to \infty$ da $T(y) = T(e)y$ tenglik hosil bo‘ladi. Endi $x=T(e)$ belgilash kiritamiz. U holda $Ty = xy$, ya’ni $T \in X$^ bo‘ladi. Shunday qilib X^ - Banax fazosi ekan.

Ushbu $\|x\| = \|xe\| = \|M_x e\| \leq \|M_x\| \cdot \|e\|$ tengsizlikka asosan $M_x \to x$ teskari moslik ham uzluksiz bo‘ladi.

Teskari operator haqidagi teoremaga asosan $x \to M_x$ moslik ham uzluksiz.

Demak, shunday S > 0 son mavjudki, $\|M_x\| \leq C\|x\|$, ya’ni $\frac{1}{\|e\|}\|x\| \leq \|M_x\| \leq C\|x\|$ bo‘ladi.

Agar X da normani $\|x\|_1 = \|M_x\|$ tenglik bilan aniqlasak, yuqoridagiga asosan bu norma X dagi asl normaga ekvivalent. Bu normada esa X Banax algebrasidir, chunki operator normasining xossalariga asosan

$$\|xy\|_1 = \|M_{xy}\| = \|M_x M_y\| \leq \|M_x\| \cdot \|M_y\| = \|x\|_1 \|y\|_1 \ ,$$

$$\|e\|_1 = \|M_e\| = \|I\| = 1.$$

Endi X kommutativ Banax algebrasiga ta’luqli ba’zi bir xossalarni ko‘rib chiqamiz.

4- ta’rif. Aytaylik J to‘plam X ning chiziqli qism fazosi bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x \in X$ va $y \in J$ uchun $xy \in J$ bo‘lsa, J to‘plam *ideal* deyiladi.

Ravshanki, faqat nol elementdan iborat {θ} to‘plam, hamda barcha X fazoning o‘zidan iborat to‘plam ideallarga eng sodda misollardir. Bunday ideallar *trivial ideallar* deyiladi.

Agar biror J_o ideal X ning o‘zidan boshqa idealning xos qismi bo‘lmasa, u holda J_o *maksimal ideal* deyiladi.

2-teorema. *a) idealning hech bir elementi teskari elementga ega emas.*

b) idealning yopilmasi ham trivial bo‘lmagan idealdir.

Isboti. a) agar biror $a \in J$ uchun a^{-1} mavjud bo‘lsa, u holda $e=aa^{-1} \in J$, demak, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $x=xe \in J$, ya’ni $X=J$ bo‘lib qoladi. Bu esa J ning trivial emasligiga zid.

b) J ideal bo‘lsa, ma’lumki, uning yopilmasi $J^\wedge$ qism fazo bo‘ladi. Endi ixtiyoriy $x \in X$ va $y \in J^\wedge$ elementlarni olamiz. Agar $\{y_n\} \subset J$ va $y_n \to y$ bo‘lsa, u holda X da ko‘paytirish amali uzluksiz bo‘lganligi sababli $xy\in J$^ bo‘ladi. Demak, J^ ideal ekan.

J^ ning X ga teng emasligi teskari elementga ega bo‘lgan elementlar to‘plami ochiq to‘plam bo‘lishidan kelib chiqadi.

3-teorema. *a) Banax algebrasining har qanday ideali biror maksimal idealning qismidir;*

b) ixtiyoriy maksimal ideal yopiqdir.

Isboti. a) J_o biror ideal bo‘lsin. Uni o‘z ichiga oluvchi ideallar to‘plamini Q bilan belgilaymiz. Bu Q sistema "$\subset$" munosabat yordamida qisman tartiblangan. Agar $P\subset Q$ biror chiziqli tartiblangan qismi bo‘lsa, ravshanki, $M=\bigcup\limits_{J\in P} J$ ideal bo‘ladi. Ixtiyoriy $J\in P$ uchun $e\notin J$ bo‘lgani sababli $e\notin$ M, ya’ni M ideal X dan farqli. Demak, har qanday chiziqli tartiblangan sistema yuqori chegaraga ega. Tsorn lemmasiga asosan Q da J^ maksimal element mavjud. Demak, J^ maksimal ideal va $J_o \subset J$^.

b) Agar J maksimal ideal bo‘lsa, u holda 2-teoremadagi b) ga asosan J ning yopig‘i J^ ham ideal bo‘ladi va $J\subset J$^ # X. Bu esa J ning maksimalligiga zid. Demak, $J=J$^.

Natija. *Banax algebrasida teskari elementga ega bo‘lmagan har bir element biror maksimal idealda joylashgan bo‘ladi. Xususan, agar X maydon bo‘lmasa, maksimal ideallar to‘plami bo‘sh emas*.

Isboti. Agar biror h element uchun, uning teskarisi mavjud bo‘lmasa, u holda $J = hX$ to‘plam ideal bo‘ladi. $h\neq\theta$ bo‘lgani uchun $J\neq\{\theta\}$. Endi e birlik element J ga tegishli bo‘lmagani sababli $J \neq X$.

Misollar. 1) $\mathbb{C}$ – kompleks sonlar maydoni Banax algebrasiga eng sodda misol bo‘ladi, bunda $\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(z = x+iy)$.

2) $\mathbb{R}^n$- fazoda algebraik amallarni koordinatalar bo‘yicha, normani esa $\|x\| = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$, $x=(x_1, x_2,..., x_n)$, ko‘rinishda olsak, ravshanki, $\mathbb{R}^n$ Banax algebrasi bo‘ladi.

Bu misolda birlik element sifatida $e = (1, 1, \ldots, 1)$ olinadi.

3) Xausdorf kompakt to‘plam K da aniqlangan uzluksiz funksiyalar to‘plami $C(K)$ da algebraik amallarni nuqtadagi qiymatlar yig‘indisi va songa ko‘paytmasi kabi kiritib, normani esa $\|f\| = \max\limits_{t\in K}|f(t)|$, $f\in C(K)$ ko‘rinishda olamiz.

Bu $C(K)$ ning Banax algebrasi ekanligini ko‘rsatish qiyin emas. Bu algebrada birlik element K da aynan birga teng funksiya bo‘ladi.

4) ℓ_1 ***algebra***. Bu algebraning elementlari absolyut jamlanuvchi ikki tomonga cheksiz davom etgan

$$x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

ko‘rinishdagi ketma–ketliklar bo‘lib, element normasi $\|x\| = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|x_k|$ (*) kabi olinadi.

Elementlarning yig‘indisi va songa ko‘paytirish amallari har bir koordinata bo‘yicha aniqlanadi. Ixtiyoriy x va y elementlarning $z=x\cdot y$ ko‘paytmasining koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:

$$z_n = (x\cdot y)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{n-k}y_k\ .$$

Agar ℓ_1 algebraning har bir elementiga ushbu $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt}$, $0 \le t \le 2\pi$ trigonometrik qatorni mos qo‘ysak, u holda yuqoridagi tenglik bilan aniqlangan z_n ketma - ketlik $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalarning ko‘paytmasiga mos keladi.

Absolyut yaqinlashuvchi va Furye qatoriga yoyiluvchi funksiyalar algebrasini W bilan belgilab, bu algebrada normani (*) formula yordamida kiritamiz.

Hosil qilingan ℓ_1 va W fazolarning Banax algebralari bo‘lishi osonlikcha tekshiriladi.

Masalan, 4 aksiomani tekshiramiz:

$$\|x*y\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|z_n| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{n-k}y_k\right| \le \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|x_{n-k}|\cdot|y_k| \le$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|x_{n-k}|)\cdot|y_k| = \|x\|\cdot\|y\| \ .$$

Kiritilgan W va ℓ_1 Banax algebralari o‘zaro izometrik izomorf algebralardir.

W algebrada birlik element sifatida $e(t)\equiv 1$ funksiya olinadi.

Shuningdek, ℓ_1 algebrada $e=\{e_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ element birlik element vazifasini bajaradi, bu yerda $e_k = \begin{cases} 0, \ k \neq 0, \\ 1, \ k = 0 \end{cases}$.

Keltirilgan 1–4 misollardagi algebralar kommutativ algebralarga misollardir.

2-§. Involyutiv algebralar

Aytaylik X biror kompleks algebra bo‘lsin.

1-ta’rif. X ning har bir x elementiga biror $x^*\in X$ elementni mos qo‘yuvchi aks ettirish quyidagi

1. $(x+y)^* = x^* + y^*$,
2. $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$,
3. $(xy)^* = y^*x^*$,
4. $x^{**} = x$

to‘rt shartni qanoatlantirsa, u *involyutsiya* deyiladi. Bu yerda $x,y\in X$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

Involyutsiya bilan ta’minlangan algebra *involyutiv algebra* deyiladi.

Masalan, $C(K)$ algebrada $f\to f^*$ aks ettirish involyutsiyadir (f^* funksiya f ga kompleks qo‘shma funksiya).

Involyutsiyaga eng muhim misollardan biri bu Gilbert fazosidagi chiziqli chegaralangan operatordan unga qo‘shma operatorga o‘tish amalidir.

Agar x element uchun $x^*=x$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, *x o‘z-o‘ziga qo‘shma element* deyiladi.

1-teorema. *Aytaylik X Banax algebrasi bo‘lsin.U holda ixtiyoriy x element uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli:*

a) $x + x^*$, $i(x-x^*)$, xx^* *elementlar o‘z – o‘ziga qo‘shma elementlardir;*

b) har bir x element yagona ravishda $x=u+iv$ ko‘rinishda tasvirlanadi, bu yerda u,v – o‘z-o‘ziga qo‘shma elementlar;

c) e - o‘z –o‘ziga qo‘shma element;

d) x ga teskari element mavjud bo‘lishi uchun x^* ga teskari element mavjud bo‘lishi zarur va yetarli. Bu holda $(x^*)^{-1}=(x^{-1})^*$ *munosabat o‘rinli.*

Isboti. a) $(x + x^*)^* = x^* + x^{**} = x^* + x = x + x^*$.

Xuddi shuningdek, $[i(x-x^*)]^*=i(x-x^*)$ va $(xx^*)^*=xx^*$ bo‘lishi ko‘rsatiladi.

b) ravshanki, u va v elementlar sifatida mos ravishda $(x + x^*)/2$ va $(x - x^*)/2i$ elementlarni olish mumkin.

Endi, bunday yoyilmaning yagonaligini ko‘rsatamiz: aytaylik x yana bir, boshqa usul bilan yuqoridagidek yoyilgan bo‘lsin, ya’ni $x = u' + iv'$.

Agar $h=v' - v$ elementni olsak, ravshanki, $h^*=h$ bo‘ladi. Shuningdek, $ih=(x - u')-(x - u)=u - u'$ bo‘lgani uchun $(ih)^*=(u - u')^*=u - u'=ih$ ga ega bo‘lamiz. Ikkinchi tomondan $(ih)^* = -ih^* = -ih$. Demak, $ih=-ih$. Bu tenglikdan $h = 0$, ya’ni $v = v'$, $u = u'$ kelib chiqadi.

v) $e^* = ee^*$ bo‘lgani uchun a) ga asosan $(ee^*)^*=(e^*)^*=e$, ya’ni $e=e^*$. Demak, e o‘z –o‘ziga qo‘shma element

g) agar x ga teskari element mavjud bo‘lsa, u holda $x^*(x^{-1})^*=(x^{-1}x)^*=e^*=e$, ya’ni $(x^{-1})^*=(x^*)^{-1}$ bo‘ladi. Aksincha, $(x^*)^{-1}$ mavjud bo‘lsa, u holda $x[(x^*)^{-1}]^*=[(x^*)^{-1}x^*]^*=e^*=e$, ya’ni x ga teskari element mavjud;

2-teorema. *Agar X yarim sodda Banax algebrasi bo‘lsa, u holda X dagi har qanday involyutsiya uzluksizdir*.

Endi involyutiv va Banax algebralari ichida eng muhimlaridan biri S* - algebralarga to‘htalamiz.

2-ta’rif. Agar X involyutiv Banax algebrasida ixtiyoriy x element uchun $||xx^*||=||x||^2$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda X algebra C^* - *algebra* deyiladi.

C^* - algebrada $||x^*||=||x||$ bo‘ladi.

Haqiqatan, $||x||^2=||xx^*||\leq||x||\cdot||x^*||$ tengsizlikdan ravshanki, $||x||\leq||x^*||$ kelib chiqadi. Shu bilan birga $||x^*||\leq||x^{**}||=||x||$ bo‘ladi. Demak, $||x^*||=||x||$.

3-ta’rif. Agar haqiqiy X Banax algebrasida

i) $ab = ba;$

ii) $a^2(ba) = (a^2b)a;$

iii) $||a^2|| = ||a||^2;$

iv) $||a^2|| \leq || a^2+ b^2||$

shartlar bajarilsa, u holda X *Yordan banax algebrasi* yoki qisqacha *JB – algebra* deyiladi.

3-§. Spektr va rezolventa

Aytaylik X Banax algebrasi bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar biror $x \in X$ uchun $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ tenglikni qanoatlantiruvchi x^{-1} element mavjud bo‘lsa, x^{-1} element x ga *teskari element*, x esa *teskarilanuvchi element* deyiladi.

Agar λ kompleks son uchun $\lambda e - x$ element teskari elementga ega bo‘lsa, λ son x element uchun *regulyar nuqta* deyiladi.

Regulyar bo‘lmagan nuqtalar to‘plami x elementning *spektri* deyiladi va $\sigma(x)$ bilan belgilanadi. Demak, $\sigma(x)$ shunday λ sonlar to‘plamiki, $\lambda e - x$ element teskari elementga ega emas.

Regulyar nuqtalarda $R_\lambda x = x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$ tenglik bilan aniqlangan $R_\lambda : \mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to X$ akslantirish x elementning *rezolventasi* deyiladi.

Biror x elementning *spektral radiusi* deb $r(x) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$ songa aytiladi.

Misollar. 1) $X=\mathbb{C}$ – kompleks sonlar Banax algebrasida noldan farqli har bir element teskarisiga ega. Demak, har bir α kompleks son uchun $\sigma(\alpha) = \{\alpha\}$ bo‘ladi.

2) $X=C(K)$ Banax algebrasida (1-§ dagi 3-misol) $x \in X$ element teskari elementga ega bo‘lishi uchun *x(t)* funksiya hamma yerda noldan farqli bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bu esa, $\sigma(x)$ to‘plam *x(t)* funksiyaning qiymatlari to‘plami bilan ustma-ust tushishini bildiradi. Demak, *x(t)* funksiya uchun rezolventa va spektral radius quyidagicha bo‘ladi.

$$R_\lambda x = \frac{1}{\lambda - x(t)}, \qquad r(x) = \|x\| = \max_{t \in K} |x(t)| \, .$$

3) $X=L(E)$ operatorlar Banax algebrasida spektr, rezolventa va boshqa tushunchalar operatorlar uchun kiritilgan mos tushunchalar bilan ustma-ust tushadi.

Aniqroq aytadigan bo‘lsak, Banax algebralari uchun kiritilgan tushunchalar operatorlar algebralaridagi mos tushunchalarini abstrakt holda umumlashtirilishidir.

Bu izoh quyida keltiriladigan teoremalarga ham taaluqli.

1-teorema. *Banax algebrasidagi x elementning normasi birdan kichik, ya'ni,* $\|x\| \le 1$ *bo'lsa, u holda e-x element teskari elementga ega va u*

$$(e-x)^{-1} = e + x + \ldots + x^n + \ldots$$

formula bilan topiladi.

Isboti. Ushbu $s_n = e + x + \ldots + x_n + \ldots$ ko‘rinishdagi elementlarni olamiz. Ravshanki,

$$\|s_n - s_{n+k}\| = \|x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots + x^{n+k}\| \le \sum_{i=1}^{k} \|x\|^{n+1} =$$

$$= \frac{\|x\|^{n+1} - \|x\|^{n+k+1}}{1 - \|x\|} \le \frac{\|x\|^{n+1}}{1 - \|x\|} \to 0 \ , n \to \infty .$$

Demak, $\{s_n\}$ ketma-ketlik X fazoda fundamental. Banax algebrasi X to‘la bo‘lganligi sababli bu ketma-ketlik biror $s \in X$ elementga yaqinlashadi, va $s(e-x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(e-x) = \lim\limits_{n\to\infty}(e - x^{n+1}) = e$.

Xuddi shuningdek, $(e-x)s = e$.

Natija. *Agar* $x \to 0$ *bo'lsa, u holda* $(e-x)^{-1} \to e$ *bo'ladi.*

Haqiqatan,

$$\|(e-x)^{-1} - e\| = \|s - e\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|x\|^k = \frac{\|x\|}{1 - \|x\|} \to 0$$

munosabatlardan kerakli natija kelib chiqadi.

2-teorema. *X Banax algebrasidagi biror* x_0 *element uchun* x_0^{-1} *mavjud bo'lsa, u holda* $\|h\| \le \|x_0^{-1}\|^{-1}$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi h element uchun* $x_1 = x_0 + h$ *elementning teskarisi mavjud va u* $x_1^{-1} = (e + x_0^{-1}h)^{-1} x_0^{-1}$ *ga teng.*

Bu teoremadan bir nechta natijalar kelib chiqadi.

1-natija. *Banax algebrasining teskarilanuvchi elementlari to'plami ochiq to'plam bo'ladi.*

2-natija. *Element x ning* $R_\lambda x = x(\lambda)$ *rezolventasi* $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ *to'plamda uzluksiz funksiyadir.*

3-teorema. *X Banax algebrasidagi ixtiyoriy x elementning spektri bo'sh bo'lmagan kompakt to'plam va* $r(x) \le ||x||$ *munosabat o'rinli.*

Isboti. Faraz qilaylik $\sigma(x)$ bo'sh to'plam bo'lsin. U holda X^* ning ixtiyoriy f elementi uchun $F(\lambda) = f(x(\lambda))$ funksiya $\mathbb{C}\backslash\sigma(x) = \mathbb{C}$ to'plamda analitik va $\lim_{|\lambda|\to\infty} F(\lambda) = 0$ bo'ladi.

Liuvill teoremasiga asosan u aynan nolga teng funksiya bo'lib qoladi. Endi f chiziqli funksional bo'lgani sababli Xan–Banax teoremasiga ko'ra $x(\lambda)$ rezolventa ham aynan nol bo'lib qoladi. Bu esa $(\lambda e-x)x(\lambda)=e$ tenglikka zid. Demak, $\sigma(x)$ bo'sh to'plam emas.

4-teorema. *Agar Banax algebrasida ixtiyoriy noldan farqli element teskarilanuvchi bo'lsa, u holda bu algebra* $\mathbb{C}$*–kompleks sonlar maydoniga izometrik izomorf bo'ladi.*

Isboti. Ixtiyoriy x elementni olaylik. 3–teoremaga asosan $\sigma(x)$ spektr bo'sh emas, ya'ni shunday λ son topiladiki, $\lambda e-x$ element uchun teskari element mavjud emas. Shartga ko'ra $\lambda e - x=0$, ya'ni, $x=\lambda e$. Agar x elementga xuddi shu λ sonni mos qo'ysak, $x\to\lambda$ moslik izomorfizm bo'ladi. Endi, $||e||=1$ bo'lgani uchun $||x||=||\lambda e||=|\lambda|$, ya'ni, $x\to\lambda$ izometrik izomorfizmdir.

Natija. *Ixtiyoriy T chegaralangan chiziqli operatorning spektri bo'sh emas.*

5-teorema (spektral radius haqidagi teorema). *Banax algebrasida ixtiyoriy x elementning speatral radiusi uchun quyidagi formula o'rinli:*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|x^n\right\|}.$$

Isboti. X fazodagi ixtiyoriy f uzluksiz chiziqli funksional uchun $F(\lambda)=f(x(\lambda))$ funksiya $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ sohada, xususan $\{\lambda: |\lambda| > r(x)\}$ sohada analitik bo'ladi. Demak, 1-teoremaga asosan $|\lambda| > ||x||$ bo'lganda

$$x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{x}{\lambda} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

bo‘ladi. Bundan $F(\lambda) = f(x(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}}$ kelib chiqadi.

Analitik funksiyalarning yagonalik xossasiga asosan, bu yoyilma ixtiyoriy $|\lambda| > r(x)$ uchun ham o‘rinli, demak,

$$\lim_{n\to\infty} |f(\frac{x^n}{\lambda^{n+1}})| = 0, \text{ ya'ni } \left\{ \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \right\}$$

ketma – ketlik nolga sust yaqinlashadi, demak, u norma bo‘yicha chegaralangan, ya’ni, $\left\| \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \le C(\lambda)$, bu yerda $C(\lambda)$ – musbat son. Bundan

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\lambda|^{n+1} C(\lambda)} = |\lambda| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\lambda| C(\lambda)} = |\lambda|.$$

Bu tengsizlik ixtiyoriy λ ($|\lambda| > r(x)$) uchun o‘rinli bo‘lgani sababli $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \le r(x)$ bo‘ladi. Agar $\lambda \in \sigma(x)$ bo‘lsa, u holda $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ bo‘ladi.

Haqiqatan, agar $\left(\lambda^n e - x^n\right)^{-1}$ mavjud bo‘lganda edi, u holda

$$\left(\lambda e - x\right)^{-1} = \left(\lambda^n e - x^n\right)^{-1}\left(\lambda^{n-1} e + \lambda^{n-2} x + \cdots + x^{n-1}\right)$$

bo‘lar edi, bu esa $\lambda \in \sigma(x)$ munosabatga zid. Ixtiyoriy $\mu \in \sigma(x)$ uchun 3-teoremaga asosan $|\mu| \le \|x\|$.

Endi $\mu = \lambda^n$ deb olsak, $\lambda \in \sigma(x)$ munosabatdan $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, ya’ni, $|\lambda|^n \le \|x^n\|$ kelib chiqadi. Demak, $|\lambda| \le \sqrt[n]{\|x^n\|}$. Bundan n ixtiyoriy bo‘lganligi sababli

$$r(x) = \sup|\lambda| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Bu tengsizlikni yuqoridagi tengsizlik bilan solishtirsak, qaralayotgan limitning mavjudligi va bizga kerakli natija kelib chiqadi.

4-§. Gilbert fazosida aniqlangan operatorlar

Endi Gilbert fazosida aniqlangan operatorlarning maxsus sinflarini o‘rganamiz.

2-ta’rif. Berilgan H Gilbert fazosida aniqlangan P chiziqli operator $P^2=P$ va $P^*=P$ shartlarni qanoatlantirsa, u *ortogonal proeksiyalash operatori* deyiladi.

Qulaylik uchun ortogonal proeksiyalash operatori o‘rniga qisqacha *proektor* so‘zi ishlatiladi.

6-teorema. *Ixtiyoriy proektor chegaralangan operatordir va* $P\neq\theta$ *bo‘lsa, u holda* $||P||=1$ *bo‘ladi.*

Isboti. Ushbu $||P||^2=(Px, Px)=(P^*Px, x)=(P^2x, x)=(Px, x)$ munosabatdan, Koshi–Bunyakovskiy tengsizligiga ko‘ra $||Px||^2\leq||Px||\cdot||x||$. Demak, $||Px||\leq||x||$, ya’ni, P chegaralangan va $||P||\leq1$. Ikkinchi tomondan, $||P||=||P^2||\leq||P||^2$, ya’ni $P\neq0$ bo‘lsa $||P||\geq1$. Shunday qilib, $||P||=1$.

3-ta’rif. Berilgan H Gilbert fazosida biror L qism to‘plam olamiz.

$$L^{\perp}=\{y : \forall x\in L \text{ uchun } (x,y)=0\}$$

to‘plam L ning *ortogonal to‘ldiruvchisi* deyiladi.

Aytaylik L to‘plam H ning yopiq qismi fazosi, $L^{\perp}$ esa uning ortogonal to‘ldiruvchisi bo‘lsin. U holda $H=L\oplus L^{\perp}$ bo‘ladi. Demak, ixtiyoriy $x\in H$ elementni yagona usul bilan $x = y + z, y\in \mathrm{L}$, $z\in \mathrm{L}^{\perp}$ ko‘rinishda yozish mumkin.

P operatorni $Px = y$ tenglik orqali aniqlaymiz, ya’ni, P operator har bir x ga uning L dagi proeksiyasini mos qo‘yadi.

Kiritilgan operatorning proektor ekanligini ko‘rsatamiz.

a) P chiziqli operator. Haqiqatan, aytaylik $x', x''\in H$ va $x'=y'+z'$, $y'\in L$, $z'\in \mathrm{L}^{\perp}$, $x''=y''+z''$, $y''\in \mathrm{L}$, $z''\in \mathrm{L}^{\perp}$ bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\alpha, \beta\in \mathbb{C}$ uchun

$$\alpha x' +\beta x'' = (\alpha y' +\beta y'') + (\alpha z' +\beta z'')$$

bo‘ladi, bu yerda $\alpha y' +\beta y''\in L$, $\alpha z'+\beta z''\in L^{\perp}$. Agar yuqoridagi yoyilmada y va z yagona usul bilan aniqlanishini hisobga olsak, u holda

$$P(\alpha x' +\beta x'') =\alpha y'+\beta y'' = \alpha Px' +\beta Px''$$

bo‘ladi, ya’ni, P– chiziqli operator ekan.

b) Endi $P^* = P$ bo‘lishini tekshiramiz. Yuqoridagi tengliklarda y' va z'' hamda y'' va z' lar o‘zaro ortogonal bo‘lgani uchun

$$(Px',x'') = (y',y''+z'') = (y',y'') = (y'+z',y'') = (x',Px'')$$

bo‘ladi. Shunday qilib, ixtiyoriy $x', x''\in H$ uchun $(Px',x'')=(x',Px'')$, ya’ni, $P=P^*$.

c) Endi, $P^2=P$ bo‘lishini tekshiramiz. Agar $x\in L$ bo‘lsa, ortogonal yoyilmada $z = 0$. Shuning uchun $Px=x$. Ixtiyoriy $x'\in H$ uchun $Px'\in L$. Demak, $P^2x'=P(Px') = Px'$, ya’ni $P^2 =P$. Demak, P – proektor.

7-teorema. *Har qanday P proektor uchun H ning shunday yopiq L qism fazosi mavjudki, Px element x elementning L dagi proeksiyasiga teng.*

Isboti. $Px=x$ tenglamaning yechimlaridan iborat bo‘lgan to‘plamni L orqali belgilaylik. P chiziqli operator bo‘lgani uchun, L chiziqli qism fazoni tashkil qiladi. L ning yopiq ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, $\{x_n\}\subset L$ va $x_n\to x_0$ bo‘lsin. U holda $Px_n=x_n$, $n=1, 2,...$ bo‘ladi. Demak,

$$Px_0 - x_n = Px_0 - Px_n = P(x_0-x_n).$$

Agar $||P||\leq 1$ munosabatini hisobga olsak, $||Px_0-x_n||\leq||x_0-x_n||$ bo‘ladi. Ya’ni $n\to\infty$ da $||Px_0-x_0||=0$, $Px_0=x_0$ ni hosil qilamiz. Demak, L-yopiq qism fazo ekan.

Endi, $P^2=P$ shartga ko‘ra H ning ixtiyoriy x elementi uchun $P^2x=P(Px)=Px$ tenglik o‘rinli. Bundan Px elementning L ga tegishliligi kelib chiqadi.

Teoremaning isbotini yakunlash uchun $z=x–Px$ elementning L ga ortogonal ekanini ko‘rsatish yetarli. Haqiqatan, L ning ixtiyoriy y elementi uchun $y = Py$ bo‘ladi. Demak,

$$(x - Px, y) = (x - Px, Py) = (P^*(I - P)x, y) =$$
$$=(P(I - P)x, y) = ((P - P^2)x, y) = (0, y) = 0.$$

Shunday qilib, H ning ixtiyoriy x elementi uchun Rx element L ga tegishli va $x–Px$ element L ning ortogonal to‘ldiruvchisiga tegishli, ya’ni P operator L ga ortogonal proeksiyalash operatori ekan.

Endi proektorlar ustida amallarni ko‘ramiz. Umuman aytganda, proektorlar yig‘indisi, ayirmasi va ko‘paytmasi proektor bo‘lishi shart emas.

8-teorema. *Agar P proektor bo‘lsa, u holda I–P ham proektor bo‘ladi*.

Isboti. Haqiqatan,

$(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$ va $(I-P)^* = I^* - P^* = I - P$.

Demak, $I - P$ - proektor.

9-teorema. *Agar ikkita P va Q proektorlar berilgan bo‘lsa, u holda ularniing ko‘paytmasi ham proektor bo‘lishi uchun $PQ=QP$ (*) tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir*.

Agar P proektor H ni L' qism fazoga, Q proektor H ni L'' qism fazoga proeksiyalasa, u holda (*) shart bajarilganda $R = PQ$ (**) proektor H ni L' va L'' qism fazolarning kesishmasi $L = L'\cap L''$ ga proeksiyalaydi.

Isboti. Agar PQ proektor bo‘lsa, $Q = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$, ya’ni (*) o‘rinli. Endi (**) shartni tekshiramiz. Ushbu $\mathrm{R}x=\mathrm{P}(\mathrm{Q}x)\in \mathrm{L}'$, $\mathrm{R}x=\mathrm{Q}(\mathrm{P}x)\in \mathrm{L}''$ munosabatlardan $Rx\in \mathrm{L}'\cap \mathrm{L}''$ kelib chiqadi. Demak, L qism fazo L' va L'' larning kesishmasiga qism ekan.

Ikkinchi tomondan, agar $x\in L'\cap L''$, bo‘lsa, u holda $Rx=P(Qx)=x$, ya’ni, $L'\cap L''$ kesishma L ning qismi. Bu ikki xulosadan $L=L'\cap L''$ kelib chiqadi.

Endi aytalik (*) o‘rinli bo‘lsin. U holda

$(PQ)^2 = (PQ)(PQ) = P^2Q^2 = PQ$ va $(PQ)^* = Q^*P^* = QP = PQ$.

Shunday qilib, PQ proektor ekan. Yuqorida ko‘rganimizdek, bundan $PQ=R$ tenglik kelib chiqadi.

10- teorema. *Chekli sondagi $P, Q, \ldots, S$ proektorlarning yig‘indisi proektor bo‘lishi uchun, ularga mos $L', L'', \ldots, L'''$ qism fazolarning ixtiyoriy ikkitasi o‘zaro ortogonal bo‘lishi zarur va yetarlidir*.

Bu shart bajarilganda, $P + Q + \ldots + S = R$ bo‘lib, bu yerda R ga mos L qism fazo $L = L' + L'' + \ldots + L'''$ to‘g‘ri yig‘indiga teng.

Isboti. Aytaylik $L', L'', \ldots, L'''$ qism fazolarning ixtiyoriy ikkitasi o‘zaro ortogonal bo‘lsin. U holda yuqoridagi teoremaga asosan

$PQ = QP = PS = SP = \ldots = 0$.

Demak, $(P + Q + \ldots + S)^2 = P^2 + Q^2 + \ldots + S^2 = P + Q + \ldots + S$. Shuningdek, $(P + Q + \ldots + S)^* = P + Q + \ldots + S$. Shunday qilib, $P+Q + \ldots + S$ – proektor ekan.

Endi $P + Q + \ldots + S = R$ tenglik yuqoridagidek tekshiriladi.

11-teorema. *P va Q proektorlarning ayirmasi proektor bo'lishi uchun L' fazoning L'' fazoga qism bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu shart bajarilganda $Q - P = R$ bo'ladi.*

Bu yerda R ga mos qism fazo $L = L' - L''$ bo'ladi. Ravshanki, L qism fazo L' ning L'' gacha ortogonal to'ldiruvchisidan iborat.

Bu teoremaning isboti yuqoridagi teoremalarning isboti kabi bo'ladi.

Foydalanillgan adabiyotlar

1. Саримсоқов Т.А. Функционал анализ курси, Т.:Ўқитувчи,-1986. 400б.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.-624с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М. Наука, 1977. 622 с.
4. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М. ИЛ. 1962.
5. Саримсоқов Т.А., Аюпов Ш.А., Хожиев Ж.Х., Чилин В.И. Упорядоченные алгебры. Тошкент, Фан,1983.
6. Диксмье Ж. C* - алгебры и их представления. М. Наука. 1974.
7. Брателли У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М. Мир.1982.
8. Аюпов Ш.А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент. Фан. 1986.
9. Жевлаков К.А. и др. Кольца близкие к ассоциативным. М. Наука. 1978.
10. Саримсоқов Т.А. Полуполя и теория вероятностей. Ташкент. Фан. 1978.
11. Эмх Ж. Алгебраические матоды статистической механики и квантовой теории поля. М. Мир. 1976.
12. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. М., Просвещение, 1968.-308 с.
13. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Сборник задач по курсу функционального анализа. М.:Наука.1979.
14. Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А., Турғунбаев Р.М. Функциялар назарияси. Т.2004 й.-146 б.
15. Алимов А.А., Бердикулов М.А. Решение задач по функциональному анализу. Т. 2005.

16. Ғаймназаров Г., Ғаймназаров О.Г. Функционал анализ курсидан масалалар ечиш. Т.: “Фан ва технология”, 2006.-114б.
17. Садовничий В.А. Теория операторов. М.:Дрофа. 2004,-382с.
18. Городецкий В.В. и др. Методы решения задач по функциональному анализу. Киев. 1990.-479с.

MUNDARIJA