MATEMATIKA 10

ALGEBRA HÁM ANALIZ TIYKARLARÍ
GEOMETRIYA
I BÓLIM

Orta bilimlendiriw makemesinin 10 - klassları ham orta arnawlı,
kasip - óner bilimlendiriw makemesinin
oqıwshıları ushın sabaqlıq

1 - basılımı

Ozbekistan Respublikası Xalıq bilimlendiriw ministrligi tastıyqlagan

TASHKENT
2017

UWK: 51(075.3)
KVK: 22.1
M 54

Algebra hám analiz tiykarları bóliminiń avtorları:

Mirzaaxmedov M. A., Ismailov Sh.N., Amanov A.Q.

Geometriya bóliminiń avtorı:

Haydarov B.Q.

Pikir bildiriwshiler:

Beshimov R.B. – Mirza Ulugbek atındagı Ózbekistan Milliy Universiteti "Geometriya hám topologiya" kafedrasınıń baslıgı, fizika – matematika ilimleriniń doktorı.

Pardaeva M.D. – Ózbekistan Respublika bilimlendiriw orayı direktorı orınbasarı.

Davletov D.E. – Nizamiy atındagı TMPU "Matematikanı oqıtıw metodikası" kafedrası baslıgı, fizika - matematika ilimleriniń kandidatı.

Rahimov Ǵ.M. – TIAXMII qasındagı akademiyalıq licey oqıtıwshısı, fizika-matematika ilimleriniń kandidatı, docent.

Akmalov A.A. – Tashkent qalası XBKQTQAI prorektorı, pedagogika ilimleriniń kandidatı, docent.

Sabaqlıqta qollanılgan shártli belgiler:

– máseleni sheshiw (dáliyllew) diń baslanıwı

– máseleni sheshiw (dáliyllew) diń tamamlanıwı

– baqlaw jumısları hám test (sınaq) shınıgıwları

– soraw hám tapsırmalar

– tiykargı maglıwmatlar

– quramalıraq shınıgıwlar

Respublika máqsetli kitap qorı qarjıları esabınan baspadan shıgarıldı.

ISBN 789943485952

I BÓLIM

KÓPLIKLER. LOGIKA

1-4 KÓPLIKLER TÚSINIGI, KÓPLIKLER ÚSTINDE ÁMELLER. TOLIQTÍRÍWSHÍ KÓPLIK

Kóplikler matematikanıń dáslepki túsiniklerinen biri bolıp, onı ózinen ápiwayıraq túsinikler arqalı anıqlap bolmaydı. Turmısta belgili obektler jıynaǵın bir pútin zat dep qarawǵa tuwrı keledi. Máselen, biolog málim (belgili)bir aymaqtaǵı ósimlikler hám haywanat dúnyasın úyrener eken, ol jániwarlardı túrleri boyınsha, túrlerin bolsa tuqımları boyınsha klasarǵa ajıratıp shıǵadı. Hár bir túr bir pútin dep qaralatuǵın jániwarlar jıynaǵı (kompleksi) bolıp esaplanadı.

Kóplik qálegen tabiyatlı obektlerden ibarat bolıwı múmkin. Máselen, Evroaziya materigindegi barlıq dáryalar yamasa sózliktegi barlıq sózler kóplik bola aladı.

Obektler jıynaǵın matematikalıq jaqtan túsindiriw beriw ushın kóplik túsinigin ataqlı nemis matematigi **G.Kantor** (1845 – 1918) tómendegishe kirgizgen:

«Kóplik oyımızda bir pútin dep qaralıwshı jıynaq bolıp esaplanadı».

Kóplikti dúziwshi obektler onıń elementleri delinedi.

Kóplik, ádette, qolaylıq ushın, latın álipbesiniń bas háripleri, máselen, $A, B, C,$ ... , onıń elementleri bolsa kishi háripleri, máselen, $a, b, c, ...$ menen belgilenedi.

Elementleri $a, b, c, ...$ bolǵan A kóplik qawsırmalar (skobkalar) járdeminde $A = \{a, b, c, ...\}$ kórinisinde jazıladı.

$\{6, 11\}$, $\{11, 6\}$, $\{11, 6, 6, 11\}$ jazıwlar bir kóplikti ańlatadı.

Máselen, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – onlıq sanaq sistemasındaǵı cifralar kópligi, $V = \{a, e, i, o, u\}$ – inglis tilindegi dawıslı hárıpler kópligi. 10 “A” klastaǵı oqıwshılar kópligin $\{a_1, a_2, ..., a_{30}\}$ benen belgilesek, a_1 – jurnaldaǵı birinshi nomerli oqıwshı, ..., a_{30} – jurnaldaǵı otızınshı nomerli oqıwshını bildiredi.

x A kópliktiń elementi ekenligi $x \in A$ kórinisinde, elementi emesligi bolsa $x \notin A$ kórinisinde jazıladı hám birinshi jaǵdayda "*x element A-ǵa tiyisli*", ekinshi jaǵjayda "*x element A-ǵa tiyisli emes*" dep oqıladı.

Máselen, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ushın $4 \in A$, biraq $9 \notin A$.

Eger kóplikti quraytuǵın elementler shekli sanda bolsa, bunday kóplik **shekli kóplik,** keri jaǵdayda bolsa **sheksiz kóplik** delinedi.

Máselen, $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ kóplik shekli, $\mathbb{N}=\{1, 2, ..., n, ...\}$ – barlıq natural sanlar kópligi bolsa sheksiz kóplik esaplanadı.

$n(A)$ dep shekli A kópliktiń barlıq elementleri sanın belgilesek, $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ kópliktiń barlıq elementleri sanı 6 ǵa teń bolǵanı ushın, $n(A) = 6$ boladı.

Sheksiz kóplikke jáne bir mısal retinde 13 ten kishi bolmaǵan barlıq natural sanlar kópligin keltiriwge boladı.

Birde bir elementke iye bolmaǵan kóplik bos kóplik delinedi hám $\emptyset$ kórinisinde belgilenedi.

$\emptyset$ kóplik te shekli esaplanadı hám onıń ushın $n(\emptyset)= 0$.

Sheksiz A kóplik ushın $n(A)= \infty$ belgilew qabıl etilgen.

Eger A kópliktiń hámme elementleri B kóplikke tiyisli bolsa, A kóplik B kópliktiń úles kópligi delinedi hám $A \subseteq B$ kibi jazıladı.

Bunday jaǵdayda "*A kóplik B da jatadı*" yamasa "*A kóplik B nıń bólegi*" dep te ataladı.

$\{a\}$ kóplik $\emptyset$ hám $\{a\}$, yaǵnıy eki úles kópliklerge iye.

$\{a, b\}$ kóplik bolsa tórt dana: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ hám $\{a, b\}$ úles kópliklerge iye.

Máselen, $\{2, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sebebi, birinshi kópliktiń hámme elementleri ekinshi kópliktiń de elementleri boladı.

A kópliktiń B kóplikke tiyisli bolmaǵan elementleri bar bolsa, A kóplik B nıń úles kópligi bola almaydı hám bul jaǵday $A \not\subset B$ kórinisinde jazıladı.

Máselen, $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$ bolsın. $1 \notin B$ bolǵanı ushın $A \not\subset B$.

$\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$ qatnaslar orınlı ekenligi málim.

$A \subseteq B$, hám $B \subseteq A$ bolsa, bul kóplikler birdey elementlerden ibárat bolıp, olar teń (ústpe-úst túsiwshi) kóplikler delinedi hámde bul $A = B$ kórinisinde jazıladı.

Máselen, durıs úshmúyeshlikler kópligi barlıq múyeshleri óz – ara teń bolǵan úshmúyeshlikler kópligi menen ústpe-úst túsedi. Bunıń sebebi qálegen úshmúyeshliktiń barlıq múyeshleri teń hám kerisinshe, eger úshmúyeshlikte barlıq múyeshler teń bolsa, ol durıs boladı.

Tiykarǵı sanlı kópliklerdi esletip ótemiz:

$\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ – natural sanlar kópligi; $\mathbb{Z}=\{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$ – pútin sanlar kópligi; $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m \in \square,\ n \in \square\ \}$ – racional sanlar kópligi;

$\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$ – haqıyqıy sanlar kópligi.

Kópliklerdiń birlespesi hám kesilispesi

1) A, B kópliklerdiń **birlespesi** dep bul kópliklerden keminde birewiniń elementi bolǵan elementlerden quralǵan kóplikke ataladı.

A, B kópliklerdiń birlespesi $A \cup B$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen, $P=\{1, 3, 4\}$ hám $Q=\{2, 3, 5\}$ ushın $P \cup Q=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) A, B kópliklerdiń **kesilispesi** dep bul kópliklerdiń ulıwma elementlerinen quralǵan kóplikke ataladı.

A, B kópliklerdiń kesilispesi $A \cap B$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen, $P=\{1, 3, 4\}$ hám $Q=\{2, 3, 5\}$ ushın $P \cap Q=\{3\}$.

Ulıwma elementlerge iye bolmaǵan eki kóplik **óz-ara kesilispeytuǵın** kóplikler delinedi.

1-mısal. $M = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ hám $N = \{3, 4, 6, 9, 10\}$ kóplikler ushın tómendegilerdi anıqlań:

a) ras yaki jalǵan ekenin: **I** $4 \in M$; **II** $6 \notin M$;

b) kópliklerdi tabıń: **I** $M \cap N$; **II** $M \cup N$;

c) shın yamasa ótirik ekenligin: **I** $M \subseteq N$; **II** $\{9, 6, 3\} \subseteq N$.

a) 4 sanı M kópliktiń elementi bolmaǵanı ushın $4 \in M$ qatnas jalǵan (ótirik). 6 sanı M kópliktiń elementi bolmaǵanı ushın $6 \notin M$ qatnas ras (shın).

b) $M \cap N = \{3, 9\}$, sebebi tek ǵana 3 hám 9 sanları ǵana eki kópliktiń de elementleri. $M \cup N$ kóplikti tabıw ushın yaki M ge yaki N ge tiyisli bolǵan elementlerdi jazamız: $M \cup N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $M \subseteq N$ qatnas jalǵan (orınlı emes), sebebi M kóplikte N ge tiyisli emes (bolmaǵan) elementler bar. $\{9, 6, 3\} \subseteq N$ qatnas shın, sebebi N de $\{9, 6, 3\}$ kóplik elementleri bar.

Shınıǵıwlar

1. $\in$, $\notin$, $\subseteq$ belgilerden paydalanıp, jazıń:

a) 5 sanı D kópliktiń elementi;

b) 6 sanı D kópliktiń elementi emes;

c) $\{2, 5\}$ kóplik $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kópliktiń úles kópligi;

d) $\{3, 8, 6\}$ kóplik $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kópliktiń úles kópligi emes;

2. a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$, $B = \{5, 8, 10, 13, 9\}$;
b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$;
c) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kóplikler ushın $A \cup B$ hám $A \cap B$ lardı tabıń.

3. Kópliklerdiń elementleri sanın tabıń:
a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$; b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
c) $A \cap B$; d) $A \cup B$.

4. Kópliklerdiń shekli yamasa shekli emesligin anıqlań:
a) 10 nan úlken biraq 20 dan kishi natural sanlar kópligi;
b) 5 ten úlken bolǵan natural sanlar kópligi.

5. Kópliklerden qaysıları óz – ara kesilispeydi:
a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$;
b) $P = \{3, 5, 6, 7, 8, 10\}$; $Q = \{4, 9, 10\}$?

Ayırım jaǵdaylarda kóplikti beriw ushın onıń elementleri ushın orınlı, basqa elementler ushın orınlı bolmaǵanan *xarakteristikalıq qásiyet* kórsetiledi. Eger x element *P qásiyetke* iye degen pikir qısqasha $P(x)$ dep jazılǵan bolsa, P qásiyetke iye bolǵan barlıq elementler kópligi $\{x|P(x)\}$ kóriniste belgilenedi.

Máselen, $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{Z}\}$ jazıw tómendegishe oqıladı: "−2 den úlken yamasa teń hámde 4 ten kishi yamasa teń bolǵan barlıq pútin sanlar kópligi".

Bul kóplik sanlar kósherinde tómendegishe súwretlenedi:

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ekenligi kórinip turıptı hám ol shekli, bunda $n(A) = 7$.

Tap usınday $B = \{x \mid -2 \leqslant x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ jazıw tómendegishe oqıladı: "−2 den úlken yamasa teń hámde 4 ten kishi bolǵan barlıq haqıyqıy sanlar kópligi".

Bul kóplik sanlar kósherinde tómendegishe súwretlenedi:

$B = [-2, 4)$ ekenligi kórinip turıptı hám ol sheksiz, bunda $n(B) = \infty$.

2-mısal. $A = \{x \mid 3 < x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsın.
a) Bul jazıw qalay oqıladı?
b) Bul kópliktiń elementlerin atpa – at jazıp shıǵıń;
c) $n(A)$ nı tabıń.

a) "3 ten úlken hámde 10 nan kishi yamasa teń bolǵan barlıq pútin sanlar kópligi";

b) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $n(A) = 7$.

Shınıǵıwlar

6. Kópliklerden qaysıları shekli, qaysıları sheksiz:

a) $\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$;

c) $\{x \mid x \geqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$?

7. Jazıwlardı oqıń:

a) $A = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A = \{x \mid -2 < x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$;

c) $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{R}\}$; d) $A = \{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 6, x \in \mathbb{Q}\}$.

Eger múmkin bolsa, usı kóplikler elementlerin atpa – at jazıp shıǵıń.

8. Tómendegi kópliklardi jazıń:

a) "–100 den úlken hámde 100 den kishi bolǵan barlıq pútin sanlar kópligi";

b) "1000 nan úlken bolǵan barlıq haqıyqıy sanlar kópligi";

c) "2 den úlken yamasa teń hámde 3 ten kishi yamasa teń bolǵan barlıq racional sanlar kópligi".

9. Sorawlarǵa juwap beriń:

a) $\{a, b, c\}$ hám $\{a, b, c, d\}$ kópliklerdiń barlıq úles kóplikleriń jazıń. Olar qansha?

b) Eger B kóplik n elementke iye bolsa, ol jaǵdayda B kóplik neshe úles kópliklerge iye?

10. Qaysı jaǵdaylarda $A \subseteq B$ boladı?

a) $A = \varnothing$ hám $B = \{2, 5, 7, 9\}$; b) $A = \{2, 5, 8, 9\}$ hám $B = \{8, 9\}$;

c) $A = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3, x \in \mathbb{R}\}$ hám $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$;

d) $A = \{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Q}\}$ hám $B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{R}\}$;

e) $A = \{x \mid -10 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$ hám $B = \{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 5, z \in \mathbb{Z}\}$;

f) $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbb{Q}\}$ hám $B = \{y \mid 0 < y \leqslant 2, y \in \mathbb{Q}\}$.

Meyli, bizdi 1 den úlken yamasa teń hámde 8 den kishi yamasa teń bolǵan barlıq natural sanlar kópligi qızıqtırsın hám biz onıń úles kóplikleriń qarap shıqpaqshımız.

Ádette bul jaǵdayda $U = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{N}\}$ kóplik kirgiziledi hám ol **universal kóplik** dep ataladı.

A kóplikning *A'* **tolıqtırıwshısı** dep *U* universal kópliktiń *A* ǵa tiyisli bolmaǵan barlıq elementleri kópligine ataladı.

Máselen, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ universal kóplik bolsa, $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ kópliktiń **tolıqtırıwshısı** $A' = \{2, 4, 6\}$ kóplik boladı.

Bunnan
- $A \cap A' = \emptyset$
- $A \cup A' = U$
- $n(A) + n(A') = n(U)$, ekenligi málim,

yaǵnıy *A* hám *A'* kóplikler ulıwma elementlerge iye emes hámde olardı quraytuǵın barlıq elementler *U* dı payda etedi.

3-mısal. Universal kóplik $U = \{$*Barlıq natural sanlar*$\}$ bolsa, C' tı tabıń.

a) $C = \{$*Barlıq jup sanlar*$\}$;
b) $C = \{ x \mid x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}\}$, $U = \mathbb{Z}$.

△ a) $C' = \{$*Barlıq taq natural sanlar*$\}$;
b) $C' = \{ x \mid x \leqslant 1, x \in \mathbb{Z}\}$. ▲

4-mısal. $U = \{ x \mid -5 \leqslant x \leqslant 5, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid -3 \leqslant x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, tómendegi kóplik elementlerin jazıń:

a) A; b) B; c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A' \cap B$; h) $A' \cup B'$.

△ a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
c) $A' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 5\}$; d) $B' = \{-5, -4, 2, 3, 4, 5\}$
e) $A \cap B = \{1\}$; f) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
g) $A' \cap B = \{-3, -2, -1, 0\}$; h) $A' \cup B' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, , 2, 3, 4, 5\}$. ▲

Shınıǵıwlar

11. C' tı tabıń.

a) $U = \{$*inglis tili háripleri*$\}$, $C = \{$*únli hárıpler*$\}$;
b) $U = \{$*pútin sanlar*$\}$, $C = \{$*teris pútin sanlar*$\}$;
c) $U = \mathbb{Z}$, $C = \{ x \mid x \leqslant -5, x \in \mathbb{Z}\}$;
d) $U = \mathbb{Q}$, $C = \{ x \mid x \leqslant 2$ *yamasa*, $x \geqslant 8, x \in \mathbb{Q}\}$.

12. $U = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{ x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{ x \mid 5 \leqslant x \leqslant 8, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, tómendegilerdi tabıń:

a) A; b) A'; c) B; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $A \cap B'$.

13. $n(U) = 15$, $n(P) = 6$, $n(Q') = 4$ bolsa, tómendegilerdi tabıń:

a) $n(P')$; b) $n(Q)$.

14. $U = \{x \mid 0 < x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, tómendegilerdi tabıń:

a) B'; b) C'; c) A'; d) $A \cap B$;
e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$; g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$;

5-mısal. $U = \mathbb{N}$, $P = \{4$ *sanınıń* 50 *den kishi bolǵan eselileri*$\}$ hám $Q = \{6$ *sanınıń* 50 *den kishi bolǵan eselileri*$\}$ bolsın.

a) P, Q kóplikler elementlerin jazıń;
b) $P \cap Q$ dı tabıń;
c) $P \cup Q$ dı tabıń;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ teńlik orınlı ekenligin tekseriń.

a) $P = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$,
$Q = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$;
b) $P \cap Q = \{12, 24, 36, 48\}$;
c) $P \cup Q = \{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 48\}$;
d) $n(P \cup Q) = 16$ hám $n(P) + n(Q) - n(P \cap Q) = 12 + 8 - 4 = 16$.

Demek, $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ teńlik orınlı eken.

Shınıǵıwlar

15. $U = \mathbb{N}$, $P = \{25$ *ten kishi bolǵan ápiwayı sanlar*$\}$ hám $Q = \{2, 4, 5, 11, 12, 15\}$ bolsın.

a) P kóplik elementlerin jazıń;
b) $P \cap Q$ dı tabıń;
c) $P \cup Q$ dı tabıń;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ teńlik orınlı ekenligin tekseriń.

16. $U = \mathbb{N}$, $P = \{30$ *dıń bóliwshileri*$\}$ hám $Q = \{40$ *tıń bóliwshileri*$\}$ bolsın.

a) P, Q kóplikler elementlerin jazıń;
b) $P \cap Q$ dı tabıń;
c) $P \cup Q$ dı tabıń;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ teńlik orınlı ekenligin tekseriń.

17. $U = \mathbb{N}$, $P = \{4$ *sanınıń* 30 *hám* 60 *sanlar arasındaǵı eselileri*$\}$ hám $Q = \{6$ *sanınıń* 30 *hám* 60 *sanlar arasındaǵı eselileri*$\}$ bolsın.

a) P, Q kóplikler elementlerin jazıń;
b) $P \cap Q$ dı tabıń;
c) $P \cup Q$ dı tabıń;
d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ teńlik orınlı ekenligin tekseriń.

18. $U = \{x \mid 0 \leqslant x < 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x \mid 2 < x < 7, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid 3 \leqslant x < 9; x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid 5 < x \leqslant 11, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, tómendegilerdi tabıń:

a) B'; b) C'; c) A';
d) $A \cap B$; e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$;
g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$.

19. $U = \mathbb{Z}$, $C = \{y \mid -4 \leqslant y \leqslant -1, y \in \mathbb{Z}\}$ hám $D = \{y \mid -7 \leqslant y < 0, y \in \mathbb{Z}\}$ bo'lsin.

a) C, D kóplikler elementlerin jazıń;
b) $C \cap D$ nı tabıń;
c) $C \cup D$ nı tabıń;
d) $n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$ teńlik orınlı ekenligin tekserin.

20. $U = \mathbb{N}$, $P = \{12$ *niń bóliwshileri*$\}$, $Q = \{18$ *diń bóliwshileri*$\}$ hám $R = \{27$ *niń bóliwshileri*$\}$ bolsın.

a) P, Q, R kóplikler elementlerin jazıń;
b) **I** $P \cap Q$; **II** $P \cap R$;
III $Q \cap R$; **IV** $P \cup Q$;
V $P \cup R$; **VI** $Q \cup R$;
c) **I** $P \cap Q \cap R$; **II** $P \cup Q \cup$ R,
lardı tabıń;

21. $U = \mathbb{N}$, $A = \{4$ *sanınıń* 40 *tan kishi bolǵan eselileri*$\}$, $B = \{6$ *sanınıń* 40 *tan kishi bolǵan eselileri*$\}$ hám $C = \{12$ *sanınıń* 40 *tan kishi bolǵan eselileri*$\}$ bolsın.

a) A, B, C kóplikler elementlerin jazıń;
b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
c) $A \cup B \cup C$ nı tabıń;
d) $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+$ $+n(A \cap B \cap C)$ teńlik orınlı ekenligin tekseriń.

22. $U = \mathbb{N}$, $A = \{6$ *sanınıń* 31 *den kishi bolǵan eselileri*$\}$, $B = \{30$ *sanınıń bóliwshileri*$\}$ hám $C = \{30$ *sanınan kishi bolǵan ápiwayı sanlar*$\}$ bolsın.

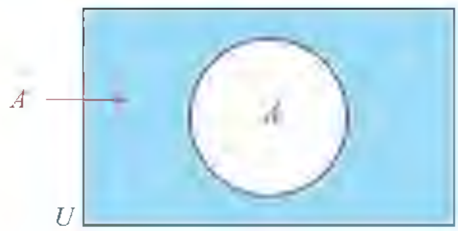
Kóplikler elementlerin jazıń:
a) A, B, C;
b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
c) $A \cup B \cup C$ nı tabıń;

d) $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+$ $+n(A \cap B \cap C)$ teńlik orınlı ekenligin tekseriń.

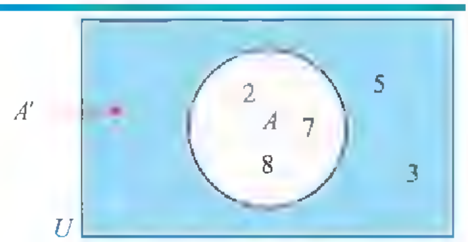
Venn diagrammaları

Kópliklerdi Venn diagrammaları járdeminde súwretlew maqsetke muwapıq. Venn diagrammasında U universal kóplik – tuwrı tórtmúeshlik, kóplik bolsa usı tórtmúyeshlik ishinde jatırǵan dóńgelek kórinisinde súyretlenedi.

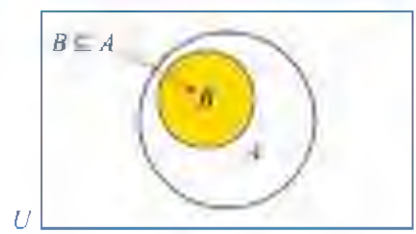
Máselen, súwrette U universal kóplik ishinde A kóplik súwretlengen. Universal kópliktiń sheńberden tısqarıdaǵı boyalǵan bólegi A kóplikning A' tolıqtırıwshısın bildiredi:



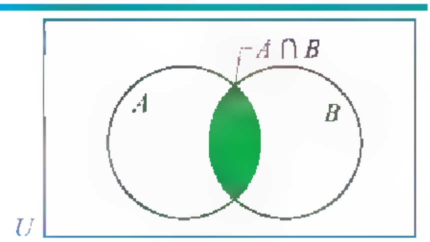
Eger $U = \{2,3,5,7,8\}$, $A = \{2,7,8\}$ hám $A' = \{3,5\}$ bolsa, usı kóplikler Venn diagrammasında usılayınsha (tómendegishe) súwretlenedi:



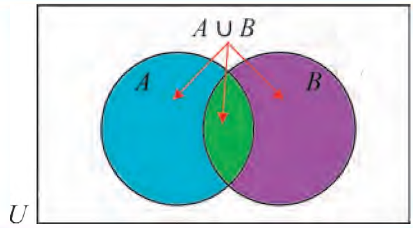
Eger $B \subseteq A$ bolsa, ol jaǵdayda B kópliktiń qálegen elementi A kóplikke tiyisli. Demek, buǵan sáykes Venn diagrammasında B kóplikti ańlatıwshı dóńgelek A kóplikti ańlatıwshı dóńgelek ishinde jatadı:



$A \cap B$ kesilispe elementleri hám A ǵa, hám B ǵa tiyisli boladı. Demek, buǵan sáykes Venn diagrammasında $A \cap B$ kóplikti ańlatıwshı boyalǵan bólegi usılay súwretlenedi:



$A \cup B$ birlespe elementleri yaki A ǵa, yaki B ǵa, yaki ekewine de tiyisli boladı. Demek, buǵan sáykes Venn diagrammasında $A \cup B$ kóplikti ańlatıwshı bólegi usılay (tómendegishe) súwretlenedi:



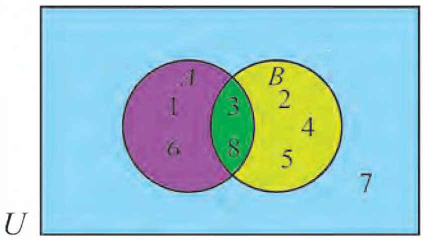
6-mısal.

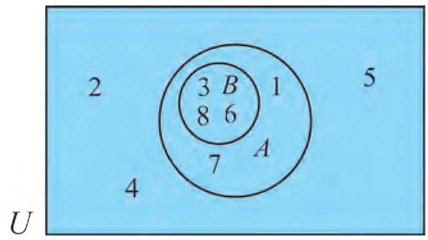
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bolsa, tómendegi kópliklerdi Venn diagrammasında súwretleń:

a) $A = \{1, 3, 6, 8\}$ hám $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$;

b) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ hám $B = \{3, 6, 8\}$.

△ a) $A \cap B = \{3, 8\}$ b) $A \cap B = \{3, 6, 8\}$, $B \subseteq A$





▲

Shınıǵıwlar

23. A, B kópliklerdi Venn diagrammasında súwretleń:

a) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ hám $B = \{5, 7\}$;

b) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ hám $B = \{3, 5, 7\}$;

c) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5, 6\}$ hám $B = \{1, 4, 6, 7\}$;

d) $U = \{3, 4, 5, 7\}$, $A = \{3, 4, 5, 7\}$ hám $B = \{3, 5\}$.

24. $U = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{10$ *nan kishi bolǵan taq sanlar*$\}$ hám $B = \{10$ *nan kishi bolǵan ápiwayı sanlar*$\}$ bolsın.

a) A, B kópliklerdiń elementlerin jazıń;

b) A, B kópliklerdi Venn diagrammasında súwretleń;

c) $A \cap B$ hám $A \cup B$ kópliklerdi tabıń.

25. $U = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{6$ *nıń eselileri*$\}$ hám $B = \{9$ *dıń eselileri*$\}$ bolsın.

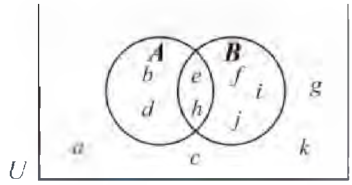
a) A, B kópliklerdiń elementlerin jazıń;

b) $A \cap B$ hám $A \cup B$ kópliklerdi tabıń;

c) A, B kópliklerdi Venn diagrammasında súwretleń.

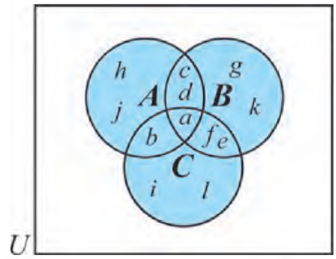
26. *A, B* kópliklerdi Venn diagrammasında súwretleń.

Tómendegi kóplikler elementlerin jazıń:



I A; **II** B; **III** A'; **IV** B';
V $A \cap B$; **VI** $A \cup B$; **VII** $(A \cup B)'$; **VIII** $A' \cup B'$.

27.



A, B, C kóplikler Venn diagrammasında súwretlengen.

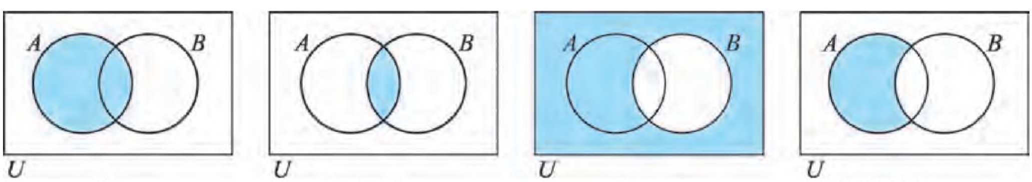
a) Kóplikler elementlerin jazıń:

I A; **II** B;
III C; **IV** $A \cap B$;
V $A \cup B$; **VI** $B \cap C$;
VII $A \cap B \cap C$; **VIII** $A \cup B \cup C$.

b) Tómendegilerdi tabıń:

I $n(A \cup B \cup C)$;
II $n(A) + n(B) + n(C) -$
$- n(A \cap B) - n(A \cap C) -$
$- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Venn diagrammasında kópliklerdi boyap súwretlew múmkin.
Máselen, súwrette, sáykes túrde, A, $A \cap B$, B', $A \cap B'$ kóplikler boyalǵan:

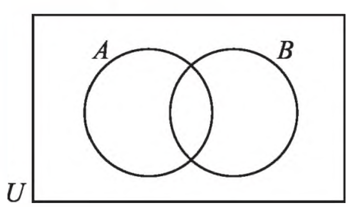


A $A \cap B$ B' $A \cap B'$

Shınıǵıwlar

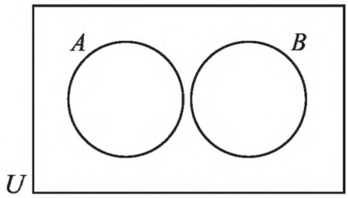
Diagrammalardı dápterińizge kóshiriń hám kórsetilgen kópliklerdi boyań:

28.



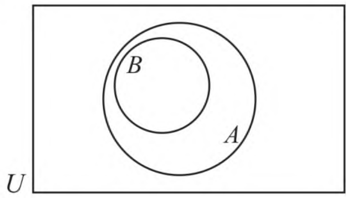
a) $A \cap B$; b) $A \cap B'$;
c) $A' \cup B$; d) $A \cup B'$;
e) $(A \cap B)'$; f) $(A \cup B)'$.

29.



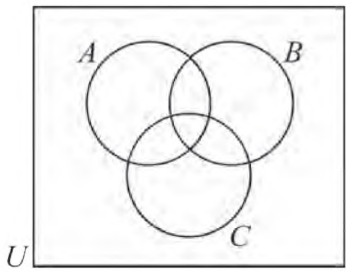
a) A; b) B;
c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$; h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)'$.

30.



a) A; b) B;
c) A'; d) B';
e) $A \cap B$; f) $A \cup B$;
g) $A' \cap B$; h) $A \cup B'$;
i) $(A \cap B)'$.

31.



a) A; b) B';
c) $B \cap C$; d) $A \cup B$;
e) $A \cap B \cap C$; f) $A \cup B \cup C$;
g) $(A \cap B \cap C)'$; h) $(A \cup B) \cup C$;
i) $(B \cap C) \cap A$.

5-7 AYTİMLAR. BIYKARLAW, KONYUNKCIYA HÁM DIZYUNKCIYA

Shın (ras) yamasa jalǵan (ótirik) bolǵan xabar gáp *aytım* delinedi.

Soraw kórinisindegi gápler, predmetke qatnas ın bildiriwshi xabar gápler, máselen, "Jasıl reń jaǵımlı", aytım bola almaydı.

Ayırım aytımlardıń shın – jalǵanlıǵın bir mánisli anıqlanbaydı.

Máselen, "Bul jazıwshı Nókiste tuwılǵan" aytımı belgili bir jazıwshıǵa qaraǵanda shın da, jalǵan da bolıwı múmkin.

1-mısal. Tómendegilerden qaysı biri aytım boladı?
Eger ol aytım bolsa, onıń shın – jalǵanlıǵı bir mánisli anıqlana ma?

a) 20:4=80; b) 25·8=200;
c) Meniń qálemim qaerde?
d) Sening kózleriń jasıl reńde.

△ a) Bul aytım hám ol jalǵan, sebebi 20:4=5 boladı;
b) Bul aytım hám ol shın;
c) Bul soraw gáp bolǵanı ushın, ol aytım bolmaydı;
d) Bul aytım. Onıń shın – jalǵanlıǵı bir mánisli anıqlanbaydı, sebebi

ayırım insanlarǵa qarata ol jalǵan, ayırımlarına qarata bolsa shın.

Biz aytımlardı $p, q, r, \ldots$ háripler menen belgileymiz.

Máselen, p: Shiyshembi kúni jamǵır jawdı;
q: 20:4=5;
r: x – jup san.

Quramalıraq aytımlardı dúziw ushın $\wedge$ (konyunkciya, "hám", "biraq"), $\vee$ (dizyunkciya, "yaki"), $\neg$ (biykarlanıw, "....emes", "....nadurıs") ***logikalıq baylanıstırıwshılar*** dep atalıwshı arnawlı belgilerden paydalanıladı. Olardı qarap shıǵayıq.

Biykarlanıwlanıw

p aytım ushın "p emes" yaki "*p ekeni nadurıs*" kórinisindegi aytım p nıń biykarlanıwı delinedi hám $\neg p$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen, p: Shiyshembi kúni jamǵır jawdı aytımnıń biykarlanıw
$\neg p$: Shiyshembe kúni jamǵır jawmadı;

p: Madinanıń kózi jasıl aytımnıń biykarlanıw
$\neg p$: Madinaning kózi jasıl emes boladı.

p shın bolsa, $\neg p$ jalǵan, p jalǵan bolsa $\neg p$ shın aytım boladı. Bul maǵlıwmat ***shınlıq kestesi*** járdeminde túsindiriledi. Bunday keste p ǵa qarap jańa $\neg p$ aytımnıń shınlıq mánisi shın T[1] yaki shın emes F[1] ligin anıqlaydı:

p	$\neg p$
T	F
F	T

Shınıǵıw

32. Tómendegilerden qaysı biri aytım boladı? Eger ol aytim bolsa, onıń shın – jalǵanlıǵı bir mánisli anıqlana ma?

a) 11−5=7; b) 12 – jup san; c) $2 \in Q$; d) $2 \notin Q$.
e) Parallelogramm 4 tárepke iye;
f) 37 – ápiwayı san;
g) Seniń boyıń neshe santimetr?
h) Barlıq kvadratlar tórtmúyeshlik;
i) Qar jawıp atır ma?
j) Tórtmúyeshlik parallelogramm emes;
k) Seniń úkeń (iniń) 13 jasta;

[1] T hám F háripleri, sáykes túrde, inglis tilinde "true" (shın), "false" (jalǵan) sózleriniń bas háriplerinen alınǵan.

l) Saǵan tarıyxıy kitaplar jaǵa ma?
m) Madina jaqsı qosıq aytadı;
n) Sen Shımbayda tuwılǵansań;
o) Qarama – qarsı múyeshler óz – ara teń;
p) Parallel tuwrı sızıqlar kesilisedi.

33. Aytımlardıń biykarlanıwın jazıń. Bul aytım hám onıń biykarlanıwın shın – jalǵanlıǵın anıqlań.

a) *p:* barlıq tórtmúyeshlikler parallelogramm boladı;
b) *q:* $\sqrt{5}$ – irracional san; c) *r:* 7 – racional san;
d) *s:* 23–14=12; e) *t:* 52:4=13;
f) *u:* qálegen eki jup sanlar ayırması taq boladı;
g) *p:* izbe – iz kelgen natural sanlar kóbeymesi hár dayım jup boladı;
h) *q:* barlıq doǵal múyeshler óz – ara teń;
i) *r:* barlıq trapeciyalar parallelogramm boladı;
j) *s:* eger úshmúyeshlikte eki múyeshi óz – ara teń bolsa, ol teń qaptallı boladı;

34. $x, y \in \mathbb{R}$ bolsın. Aytımlardıń biykarlanıwın jazın:

a) $x > 5$; b) $x \geqslant 3$;
c) $y < 8$; d) $y \leqslant 10$.

35. Berilgen *r, s* aytımlar ushın *s* aytım *r* aytımnıń biykarlanıwı bola ma? Eger *s* aytım *r* aytımnıń biykarlanıwın bolmasa, *r* aytımnıń durıs biykarlanıwın tabıń.

a) *r:* Madinanıń boyı 140 sm den uzın; *s:* Madinanıń boyı 140 sm den pás;
b) *r:* Aybek futbol menen shuǵıllanadı; *s:* Aybek muzıka menen shuǵıllanadı;
c) *r:* Men búgin qara shay ishtim; *s:* Men búgin kók shay ishtim;
d) *r:* Men Samarqandda bolǵanman; *s:* Men hesh qashan Samarqandda bolmaǵanman.

2-mısal.

Aytımnıń biykarlanıwın dúziń:

a) x – qawın, $x \in$ {*qawınlar, ǵarbızlar*}; b) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{N}$; c) $x \geqslant 2, x \in \mathbb{Z}$;

△ a) x – ǵarbız; b) $x = 1$; c) $x < 2$ hám $x \in \mathbb{Z}$. ▲

Shınıǵıw

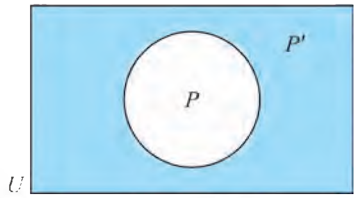
36. Aytımnıń biykarlanıwın dúziń.

a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$; b) $x \in \{atlar,\ qoylar\}$;

c) $x \geqslant 0, x \geqslant \mathbb{Z}$; d) x – oqıwshı bala, $x \in \{oqivchilar\}$;

e) x – oqıwshı qız, $x \in \{qizlar\}$.

Aytımnıń biykarlanıwın Venn diagrammasınan paydalanıp ta dúziw múmkin.

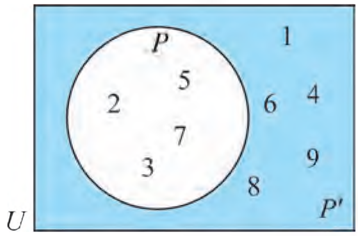


Diagrammada U – barlıq sanlar kópligi, P kóplik p aytımnıń **shınlıq kópligi,** yaǵnıy ol shın aytım bolatuǵın x lardıń kópligi, P' kóplik dep $\neg p$ biykarlanıwnıń shınlıq kópligi súwretlengen.

3-mısal. $U = \{\, x \mid 0 < x < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$ da p: x – **ápiwayı san** aytımdı qarayıq. p hám $\neg p$ nıń shınlıq kópligin tabıń.

△ P kóplik p aytımnın **shınlıq kópligi**, P' kóplik $\neg p$ biykarlanıwnıń shınlıq kópligi bolsın. Ol jaǵdayda $P = \{2, 3, 5, 7\}$, $P' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$.

Bul kóplikler Venn diagrammasında tómendegishe súwretlenedi:



▲

Shınıǵıwlar

37. Aytımlardıń biykarlanıwın dúziń, Venn diagrammasında súwretleń:

a) $U = \{\, x \mid 20 < x < 30\}$ da p: x – ápiwayı san;

b) $U = \{\, x \mid 1 < x < 10\}$ da p: x – jup san.

38. $U = \{10$ – *klass oqıwshıları*$\}$, $M = \{$*muzıka dógereginde shuǵıllanatuǵın oqıwshılar*$\}$, $O = \{$*orkestrda nama shertetuǵın oqıwshılar*$\}$ bolsa, tómendegi aytımlardı Venn diagrammasında súwretleń.

a) Muzıka dógereginde shuǵıllanatuǵın barlıq oqıwshılar orkestrda nama shertedi;

b) Orkestrda nama shertetuǵın oqıwshılardan hesh biri muzıka dógereginde shuǵıllanbaydı;

c) Orkestrda nama shertetuǵın oqıwshılardıń hámmesi muzıka dógereginde shuǵıllanbaydı.

39. $U = \{ x \mid 5 < x < 15, x \in \mathbb{N}\}$ da p: $x < 9$ aytımdı Venn diagrammasında súwretleń hám $\neg p$ biykardıń shınlıq kópligi elementlerin jazıń.

40. $U = \{ x \mid x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ da p: x – jup san aytımdı Venn diagrammasında súwretleń hám biykarlanıwın shınlıq kópligi elementlerin jazıń.

Konyunkciya

Eger eki aytım **"hám"** sózi menen baylanıssa, payda bolǵan jańa aytım berilgen aytımlar *konyunkciyası* delinedi.

p, q aytımlardıń konyunkciyası $p \wedge q$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen,

p: Erkin túslikte palaw jedi;

q: Erkin túslikte somsa jedi;

Aytımlardıń konyunkciyası tómendegishe boladı:

p∧q: Erkin túslikte palaw hám somsa jedi.

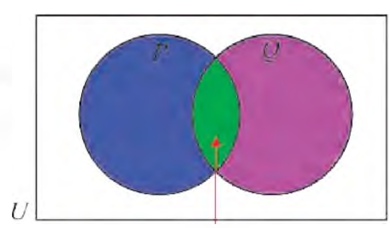
Kórinip turıptı, $p \wedge q$ aytım Erkin túslikte hám palaw, hám somsa jegende, yaǵnıy *p, q* aytımlardıń ekewi de shın bolǵanda ǵana shın boladı. Eger *p, q* aytımlardıń birewi jalǵan bolsa, ol jaǵdayda $p \wedge q$ aytım shın bolmaydı.

p, q aytımlardıń konyunkciyası tómendegi shınlıq kestesine iye:

p	q	$p \wedge q$	
T	T	T	*p, q* aytımlardıń ekewi de shın bolǵanda $p \wedge q$ shın boladı.
T	F	F	*p, q* aytımlardıń keminde birewi jalǵan bolǵanda $p \wedge q$ aytım jalǵan boladı.
F	T	F	
F	F	F	

Birinshi hám ekinshi ústinler *p, q* aytımlardıń múmkin bolǵan shınlıq mánislerinen quralǵan.

Diagrammada P kóplik p aytımnıń, Q kóplik bolsa q aytımnıń shınlıq kóplikleri bolsa, $p \wedge q$ aytımnıń shınlıq kópligi eki aytım shın bolǵan $P \cap Q$ kóplik boladı:



$P \cap Q$

Shınıǵıwlar

41. Tómendegi aytımlardıń konyunkciyasın jazıń:

a) p: Madina – terapevt; q: Munisa – stomatolog;

b) p: x san 15 ten úlken; q: x 30 dan kishi;

c) p: hawa bulıtlı; q: : jamǵır jawıp atır;

d) p: Alımnıń shashları qara q: Alımnıń kózleri jasıl.

42. $p \wedge q$ aytımnıń shın – jalǵan ekenligin anıqlań:

a) p: 5 – taq san q: 5 – ápiwayı san;

b) p: kvadrat tórt tárepke iye; q: úshmúyeshlik bes tárepke iye;

c) p: $39 < 27$; q: $16 > 23$;

d) p: 12 sanı 3 ke bólinedi; q: 12 sanı 4 ke bólinedi;

e) p: $5+8 = 12$; q: $6+9 = 15$.

43. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12,\ x \in \mathbb{Z}\}$ ushın, p: x –jup san, q: x sanı 7 den kishi aytımlar berilgen.

a) Venn diagrammasında p, q aytımlardıń shınlıq kópliklerin;

b) $p \wedge q$ aytımnıń shınlıq kópligin súwretleń.

Dizyunkciya

Eger eki aytım "yaki" sózi menen baylanıssa, payda bolǵan jańa aytım berilgen aytımlar *dizyunkciyası* delinedi.

p, q aytımlardıń dizyunkciyası $p \vee q$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen,

p: Erkin búgin kitapxanaǵa bardı; *q: Erkin búgin teatrǵa bardı.*

Aytımlardıń dizyunkciyası tómendegishe ańlatıladı:

$p \vee q$: Erkin búgin yaki kitapxanaǵa yaki teatrǵa bardı.

Kórinip turıptı, $p \vee q$ aytım Erkin búgin kitapxana yaki teatrdan birine yaki ekewine de barǵanda shın boladı.

Eger p, q aytımlardıń ekewi de jalǵan bolsa, ol jaǵdayda $p \vee q$ aytım shın bolmaydı.

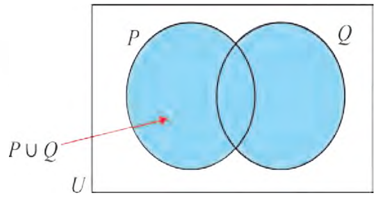
p, q aytımlardıń dizyunkciyası tómendegishe shınlıq kestesine iye:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p, q aytımlardıń birewi shın bolǵanda $p \vee q$ shın boladı.

p, q aytımlardıń ekewi jalǵan bolǵanda $p \vee q$ aytım jalǵan boladı.

Diagrammada P kóplik p aytımnıń, Q kóplik bolsa q aytımnıń shınlıq kóplikleri bolsa, $p \vee q$ aytımnıń shınlıq kópligi eki aytım shın bolǵan $P \cup Q$ kóplik boladı:



Shınıǵıwlar

44. $p \vee q$ aytımnıń shın – jalǵan ekenligin anıqlań:

a) p: 24 sanı 4 ke bólinedi, q: 24 sanı 6 ǵa bólinedi;

b) p: $-8 > -5$, q: $5 < 0$.

45. $p \vee q$ aytımnıń shın – jalǵan ekenligin anıqlań:

a) p: 5 hám 9 sanlardıń arifmetikalıq ortashası 7 ge teń, q: 8 hám 14 sanlardıń arifmetikalıq ortashası 10 ǵa teń;

b) p: $5+8 = 12$, q: $6+9 = 15$.

46. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 20, x \in \mathbb{Z}\}$ ushın:

p: x san 3 ke eseli, q: x – ápiwayı san aytımlardı qarayıq.

a) Venn diagrammasında p, q aytımlardıń shınlıq kópliklerin súwretleń;

b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$

aytımnıń shınlıq kópliklerin súwretleń.

47. $U = \{ x \mid 1 \leqslant x \leqslant 12, x \in \mathbb{Z}\}$ ushın:

p: x – ápiwayı san, q: x san 12 niń bóliwshisi aytımlardı qarayıq.

a) Berilgen Venn diagrammasında p, q aytımlardıń shınlıq kópliklerin súwretleń;

b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$

aytımlarnıń shınlıq kópliklerin súwretleń.

48. x: Sarvar erteń júziwge baradı; y: Sarvar erteń futbolǵa baradi

Tómendegi x, y hám $\neg$, $\vee$, $\wedge$ logikalıq baylanıstırıwshılar járdeminde ańlatıń:

a) Sarvar erteń júziwge barmaydı;

b) Sarvar erteń júziwge hám futbolǵa baradı;

c) Sarvar erteń yaki júziwge yaki futbolǵa baradı;

d) Sarvar erteń júziwgede, futbolǵa da barmaydı;

e) Sarvar erteń júziwge baradı, biraq futbolǵa barmaydı;

49. Gáplerdi $\neg$, $\vee$, $\wedge$ logikalıq baylanıstırıwshılar járdeminde ańlatıń:

a) Sarvarǵa muzqaymaq hám salqın ishimlikler jaǵadı;

b) Sarvarǵa muzqaymaq jaǵadı, biraq salqın ishimlikler jaqpaydı;

c) x sanı 10 nan úlken bolǵan ápiwayı san;
d) kompyuter islemeydi.

50. Aytımlar Sarvardıń kún tártibin shamalap belgileydi:
p: Sarvar erte turdı;
q: Sarvar azanǵı awqatqa qaymaq jedi;
r: Sarvar túslikte sorpa ishti;
s: Sarvar keshki awqatqa palaw jedi;
u: Sarvar sport penen shuǵıllandı;
v: Sarvar kitap oqıdı.
Tómendegilerdi tabiyiy tilde ańlatıń (aytıń):
a) q; b) s; c) $q \wedge u$; d) $r \wedge s$; e) $r \vee s$; f) $u \vee v$

8-9 LOGIKALIQ TEŃ KÚSHLILIK. LOGIKALIQ NIZAMLAR

Mánisine qarap tábiyiy tildegi ápiwayı aytımlardı háripler menen belgilep biykarlanıw, konyunkciya hám dizyunkciya kórinisinde logikalıq baylanıstırıwshılar járdeminde quramalıraq aytımlardıń shın – jalǵanlıǵına itibar bermesten simvolikalıq kórinislerin dúzeyik.

Tábiyiy tildegi aytım	Simvolikalıq kórinisi
Biykarlanıwlanıw:	
1. Sálim úyde **emes.**	$\neg S$
2. Qarjı ańsatlıq penen tabılmaydı.	$\neg M$
3. Rashittiń kitap oqıp atırǵanlıǵı **nadurıs.**	$\neg R$
4. Maryam Buxaradan ekenligi **jalǵan.**	$\neg B$
Konyunkciya:	
5. Akmal hám Samir ekewi oqıwshı.	$A \wedge S$
6. Babur **hám de** Aybek sport penen shuǵıllanadı.	$B \wedge A$
7. Babur kúshli, **biraq** Aybek onnan kúshlirek.	$B \wedge A$
8. Barlıq media (xabar) quralları qarsı bolsa **da,** "Barselona" futbol klubı eń jaqsı klub dep tabıldı.	$M \wedge B$
Dizyunkciya:	
9. Rano yaki metroda yaki avtobusta keledi	$M \vee A$
10. Babur yaki Aybek sporttıń usı túrin tańladı.	$B \vee A$

Biykarlanıw, konyunkciya hám dizyunkciya ushın shınlıq kestelerin ulıwmalastırıp quramalıraq aytımlar ushın shınlıq kestesin dúziw múmkin:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

1-mısal. $p \vee \neg q$ aytımnıń shınlıq kestesin dúziń.

△ ***1-qádem***

Birinshi hám ekinshi baǵanada p, q lardıń múmkin bolǵan shınlıq mánislerinen payda bolǵan kesteni jazamız:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

2-qádem

Úshinshi baǵanada q dıń shınlıq mánislerine qarab $\neg q$ *dıń shınlıq mánislerin jazamız:*

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	
T	F	T	
F	T	F	
F	F	T	

3-qádem

Tórtinshi baǵana p hám $\neg q$ dıń shınlıq mánislerine qarap $p \vee \neg q$ dıń shınlıq mánislerin Újazamız: ▲

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

Hár dayım shın bolǵan aytım ***logikalıq nızam yamasa tavtologiya*** delinedi. Aytım logikalıq nızam ekenliginiń shınlıq kestesi járdeminde dáliyllew múmkin.

2-mısal. $p \vee \neg p$ aytım tavtologiya ekenligin dáliylleń.

△ Shınlıq kestesin dúzemiz:

$p \vee \neg p$ aytım bárqulla shın mánislerdi (úshinshi baǵanaǵa qarań) qab qıl qılǵanı ushın ol tavtologiya boladı. ▲

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Eki aytımlardıń shınlıq kestelerinde sáykes baǵanalar birdey bolsa, bul aytımlar logikalıq teń kúshli delinedi.

3-mısal. $\neg(p \wedge q)$ hám $\neg p \vee \neg q$ aytımlar logikalıq teń kúshli ekenligin dáliylleń.

△ $\neg(p \wedge q)$ va $\neg p \vee \neg q$ aytımlar ushın shınlıq kestelerin dúzemiz:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T	T

$\neg(p \wedge q)$ hám $\neg p \vee \neg q$ aytımlardıń shınlıq kestelerindegi sáykes baǵanalar birdey, demek, bul aytımlar logikalıq teń kúshli.

Bul qatnastı $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ kórinisinde jazamız ▲

Shınıǵıwlar

51. Aytımlar ushın shınlıq kestelerin dúziń:

a) $\neg p \wedge q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p \vee \neg q$; d) $p \vee p$.

52. Aytımlar tavtologiya boladı ma?

a) $\neg p \wedge \neg q$; b) $(p \vee q) \vee \neg p$; c) $p \wedge \neg q$?

53. Logikalıq teń kúshlilikti dáliylleń:

a) $\neg(\neg p) = p$; b) $p \wedge q = p$; c) $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$;

d) $\neg(q \wedge \neg p) = \neg q \wedge (p \vee q)$.

54. Meyli aytımlar berilgen bolsın:

p: Sarvar almalardı jaqsı kóredi;

q: Sarvar júzimdi jaqsı kóredi.

Tómendegi aytımlardı tábiyiy tilde añlatıń:

a) $p \vee q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p$; d) $\neg p \wedge \neg q$.

55. Shınlıq kestesin dúzip, $\neg(p \vee q)$ hám $\neg p \wedge \neg q$ aytımlar logikalıq teń kúshli ekenligin dáliylleń.

10-11 IMPLIKACIYA, KONVERSIYA, INVERSIYA HÁM KONTROPOZICIYA.

Implikaciya

Eki aytım "eger .... bolsa, ol jaǵdayda ..." kórinisinde baylanısqanda aytımlar ***implikasiyasına*** iye bolamız.

"Eger p bolsa, ol jaǵdayda q" implikativlik aytım $p \Rightarrow q$ kórinisinde belgilenedi hám "p dan q kelip shıǵadı", "p aytım q ushın jeterli", "q aytım p ushın zárúr" mánislerdi de añlatadı.

Bunda p aytım q ushın ***jeterli shárt,*** q aytım p ushın ***zárúrli shárt*** dep júrgizledi.

Máselen, *p: Sarvardıń televizorı bar;* *q: Sarvar kinonı kóredi* aytımlar ushın

$p \Rightarrow q$: *Sarvardıń televizorı bolsa, ol kinonı kóredi* aytımın ańlatadı. Tap usınday $p \Rightarrow q$: *Sarvar kinonı kóriwi ushın onda televizor bolıwı jeterli* aytımdı hasıl qılamız.

$p \Rightarrow q$ aytım tek ǵana p shın bolı p, q jalǵan bolsa p aytım shın bolǵanı ushın tómendegi shınlıq kestesin hasıl qılamız:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Ápiwayı aytımlar hám de logikalıq bayla(nıstırı)wshılar járdeminde shın – jalǵanlıqqa itibar bermesten quramalıraq aytımlardı dúziw múmkin.

1-mısal. *p: "Ayzada kinofilmlerdi kóp kóredi"; q: "Barno kinofilmlerdi kóp kóredi"; r: "Barno imtixannan óte almaydı"; s: "tań qalarıq waqıya júz beredi"* aytımlar berilgen bolsın.

Ol jaǵdayda tómendegilerge iye bolamız:

1. $p \wedge \neg q$: *"Ayzada kinofilmlerdi kóp kóredi, Barno bolsa yaq".*
2. $p \Rightarrow \neg q$: *"Ayzada kinofilmlerdi kóp kórse, Barno kinofilmlerdi kóp kórmeydi".*
3. $p \Rightarrow (r \vee s)$: *"Barno kinofilmlerdi kóp kórse, ol yaki imtixannan óte almaydı yaki tań qalarıq waqıya júz beredi".*
4. $(p \wedge \neg s) \Rightarrow r$: *"Barno kinofilmlerdi kóp kórse hám tań qalarıq waqıya júz bermese, ol jaǵdayda Barno imtixannan óte almaydı".*
5. $(q \wedge s) \vee r$: *"Yaki Barno kinofilmlerdi kóp kóredi hám tań qalarıq waqıya júz beredi, yaki Barno imtixannan óte almaydı".*

Ekvivalenciya

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ kórinisindegi aytım p hám q aytımlardıń ekvivalenciyası delinedi hám $p \Leftrightarrow q$ kórinisinde belgilenedi.

$p \Leftrightarrow q$ jazıw "p aytım q ushın zárúr hám jeterli" yaki "p aytım q bolǵanda ǵana orınlı boladı", dep oqıladı.

2-mısal. *p: x* – san jup, *q: x* sannıń aqırǵı cifrası jup aytımlar ushın $p \Leftrightarrow q$ aytım qalay oqıladı?

$p \Leftrightarrow q$: *x san jup bolsa onıń aqırǵı cifrası jup boladı;*

$q \Leftrightarrow p$: *x sannıń aqırǵı cifrası jup bolsa, ol jup boladı.*

aytımlardı qarasaq, $p \Leftrightarrow q$ jazıw "x san jup bolıwı ushın onıń aqırǵı cifrası jup bolıwı zárúr hám jeterli" yaki "x san onıń aqırǵı cifrası jup bolǵanda ǵana jup boladı" dep oqıladı.

Endi qálegen p hám q aytımlar berilgen bolsa
$(p\Rightarrow q) \wedge (q\Rightarrow p)$ aytım ushın shınlıq kestesin dúzemiz:

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q) \wedge (q\Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Demek, $p\Leftrightarrow q$ aytılardıń shınlıq kestesin tómendegishe boladı. $p\Leftrightarrow q$ aytım p hám q aytımlardıń shınlıq mánisleri birdey (yaǵnıy yaki ekewi de shın yaki ekewi de jalǵan) bolǵanda ǵana shın bolıwı kórinip turıptı.

p	q	$p\Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Shınıǵıwlar

56. Tómendegi implikativ aytımlarda zárúrli hám jeterli shártlerdi anıqlań hám bul aytımlardı "zárúr", "jeterli" sózlerin qollanıp basqasha ańlatıń:
a) eger men azanǵı avtobusqa úlgermesem, mektepke kesh qalaman;
b) eger temperatura jeterli she páseyse, salmadaǵı suw muzlap qaladı;
c) agar $x > 20$ bolsa, $x > 10$ boladı;
d) eger men gol ursam, bizin toparımız jeniske erisiwi múmkin.

57. $p\Rightarrow q$ aytımdı tábiyiy tilde ańlatıń:
a) p: quyash jarqıraydı, q: men shomılıwǵa baraman;
b) p: x san 6 ǵa bólinedi, q: x – san jup;
c) p: muzlatqıshta máyekler bar, q: Madina tort pisiredi.

58. a) $p\Rightarrow \neg q$; b) $\neg q\Rightarrow \neg p$;
c) $(p\vee q)\Rightarrow p$; d) $q\wedge(p\Rightarrow q)$;
e) $p\Leftrightarrow \neg q$; f) $(p\Leftrightarrow q)\wedge \neg p$;
g) $p\Rightarrow(p\wedge\neg q)$; h) $(p\Rightarrow q) \Rightarrow\neg p$
aytımlardıń shınlıq kestelerin dúziń.

59. Aytımlardı simvolikalıq kóriniste ańlatıń:
p: jamǵır jawdı, q: kólmekler payda boldı;
a) jamǵır jawsa, kólmekler payda boladı;
b) kólmekler payda boldı, demek jamǵır jawdı;
c) kólmekler joq;
d) jamǵır jawmadı;
e) eger jamǵır jawmasa, kólmekler payda bolmaydı;
f) eger kólmekler payda bolmasa, jamǵır jawmaǵan;

g) eger kólmekler payda bolmasa, jamǵır jawadı;

h) kólmekler payda bolıwı ushın jamǵır jawıwı zárúr hám jeterli.

60. Shınlıq kestelerin dúzip

$\neg p \Rightarrow q = p \vee q$;

$p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ ekenligin dáliylleń.

61. $q \Rightarrow p$ aytımlar logikalıq teń kúshli aytımlardı tabıń:

a) $p \Rightarrow q$; b) $\neg q \Rightarrow p$;

c) $q \Rightarrow \neg p$; d) $\neg(\neg p \Rightarrow \neg q)$.

62. Aytımlardıń qaysılari hár dayım shın, hár dayım jalǵan boladı?

a) $p \Rightarrow (\neg p \wedge q)$; b) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$;

c) $(p \Rightarrow \neg q) \vee (\neg p \Rightarrow q)$.

Konversiya

$p \Rightarrow q$ aytımnıń ***konversiyası*** dep $q \Rightarrow p$ aytımǵa ataladı. Konversiya tómendegishe shınlıq kestesine iye:

p	q	$q \Rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

3-mısal.

p: úshmúyeshlik teń qaptallı,

q: úshmúyeshliktiń eki múyeshi teń aytımlardı qarayıq.

$p \Rightarrow q$ aytımdı hám onıń konversiyasın tabiyiy tilde ańlatıń.

△ $p \Rightarrow q$: Eger úshmúyeshlik teń qaptallı bolsa, ol jaǵdayda onıń eki múyeshi teń.

$q \Rightarrow p$: Eger úshmúyeshliktiń eki múyeshi teń bolsa, ol jaǵdayda bunday úshmúyeshlik teń qaptallı boladı. ▲

Inversiya

$p \Rightarrow q$ aytımnıń ***inversiyası*** dep $\neg p \Rightarrow \neg q$ aytımǵa ataladı.

Inversiya tómendegi shınlıq kestesine iye:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Bul keste $q \Rightarrow p$ aytımnıń shınlıq kestesi menen ústpe - úst túsedi, demek konversiya hám inversiya logikalıq teń kúshli eken.

Kontrapoziciya

$p \Rightarrow q$ aytımnıń kontrapoziciyasi dep $\neg q \Rightarrow \neg p$ aytımǵa ataladı.
Kontrapoziciya tómendegi shınlıq kestesine iye. Bul keste $p \Rightarrow q$ aytımnın shınlıq kestesi menen ústpe – úst túsedi, demek implikaciya hám kontrapoziciya logikalıq teń kúshli eken.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

4-mısal. "Hámme oqıtıwshılar mektep aynalasında jasaydı" aytımnıń kontrapoziciyasın dúziń.

Usı aytım tómendegishe ańlatılıwı múmkin: "Eger bul adam oqıtıwshı bolsa, ol mektep aynalasında jasaydı".
Bul xabar gáp $p \Rightarrow q$ kóriniske iye, bul jerde:
p: Bul adam – oqıtıwshı, q: Bul adam mektep aynalasında jasaydı.
$\neg q \Rightarrow \neg p$ kontrapoziciya tómendegishe ańlatıladı:
"Eger bul adam mektep aynalasında jasamasa, ol jaǵdayda ol oqıtıwshı emes ".

5-mısal.
p: Samandar kitapxanada,
q: Samandar kitap oqıp atır
aytımların qarayıq. Ol ushın imlikaciya, konversiya, inversiya hám kontrapoziciyanı dúziń.

Implikasiya $p \Rightarrow q$ — Samandar kitapxanada bolsa, ol kitap oqıydı.

Konversiya $q \Rightarrow p$ — Samandar kitap oqısa, ol kitapxanada boladı.

Inversiya $\neg p \Rightarrow \neg q$ — Samandar kitapxanada bolmasa, ol kitap oqımaydı.

Kontrapoziciya $\neg q \Rightarrow \neg p$ — Samandar kitap oqımaytuǵın bolsa, ol kitapxanada bolmaydı.

Implikasiya hám konversiya logikalıq teń kúshli bolmaydı, sebebi, máselen, Samandar kitaptı klassta oqıwı da múmkin ekenligin aytıwımız dárkar.

Shınıǵıwlar

63. Konversiya hám inversiyani dúziń:
a) eger Dilbar sviter kiyse, ol ısınadı;
b) eger eki úshmúyeshlik uqsas bolsa, olardıń sáykes múyeshleri teń boladı;

c) eger $2x^2 = 12$ bolsa, ol jaǵdayda $x = \pm\sqrt{6}$ boladı;

d) eger Alım oyın oynasa, ol quwanadı;

e) eger úshmúyeshlik durıs (teń tarepli) bolsa, ol jaǵdayda onıń tarepleri teń boladı.

64. Tómendegi aytımlardıń kontrapoliciyaların dúziń:

a) barlıq átir gúller tikenli;

b) barlıq sudyalar hár dayım durıs qarar shıǵaradı;

c) hámme jaqsı futbolchilar toptı anıq móljelge tebedi;

d) suyıqlıq ıdıshǵa quyılǵanda ıdıstıń formasın qabıl etedi;

e) eger insan hadal hám oqımıslı bolsa, ol jetiliskenliklerge erisedi.

65. a) "barlıq 10-klass oqıwshıları matematikanı úyrenedi" aytımnıń kontrapoziciyasın dúziń

b) "barlıq 10-klass oqıwshıları matematikanı úyrenedi" aytımı shın bolsa, tómendegiler haqqında qanday tastıyıqlawǵa kelesiz:

"Sháwkat- 10-klass oqıwshısı";

"Mirislam matematikanı úyrenbeydi";

"Dániyar ham matematikanı, hám angichan tilin úyrenbekte"?

66. Aytımlarnıń kontrapoziciyaların dúziń:

a) x sanı 3 ke bólinedi $\Rightarrow x^2$ sanı 9 ǵa bólinedi;

b) x sanınıń aqırǵı cifrası 2 bolsa: $\Rightarrow x$ – jup san;

c) $ABCD$ –tórtmúyeshlik $\Rightarrow AB \| CD$ hám $AD \| BC$;

d) ABC – durıs úshmúyeshlik $\Rightarrow \angle ABC = 60°$.

67. *p:* Úy eń kóbi menen 3 aynalı boladı,

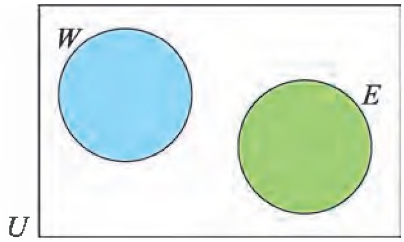
q: Úy sırtqa tútin shıǵaratuǵın morıǵa iye aytımlardı qarayıq.

Ol jaǵdayda $p \Rightarrow q$: Eger úy eń kóbi menen 3 aynalı (derezeli) bolsa, ol sırtqa tútin shıǵaratuǵın morıǵa iye;

a) konversiya, inversiya hám kontrapozisiyanı dúziń;

b) tómendegi jaǵdaylarda implikaciya, konversiya, inversiya hám kontrapoziciya ushın shın – jalǵanlıqtı anıqlań:

68. Diagrammada W – jaqsı ózlestirmeytuǵın oqıwshılar, E bolsa 10 – klass oqıwshıları kópligin súwretleydi.
Tómendegi aytımlardı tolıqtırıń:



a) .... gan jaqsı ózlestire almaytuǵın oqıwshılar joq;
b) .... gan 10 – klass oqıwshıları joq;
c) eger $x \in W$ bo'lsa, ol jaǵdayda ......;
d) eger $x \in E$ bolsa, ol jaǵdayda ......;
e) c hám d qatarlar arasında qanday baylanıs bar?

12-13 PREDIKATLAR HÁM KVANTORLAR

Predikatlar hám kvantorlar

Ayırım aytımlarda ózgeriwshiler qatnasıp, usı ózgeriwshiler ornına konkret mánislerdi qoysaq, aytım payda boladı. Bunday aytım ***predikat*** delinedi..

1-mısal. $P(x)$: "$x^2 > x$" predikat bolsa,
$P(2)$, $P(\frac{1}{2})$, $P(-\frac{1}{2})$ aytımlardıń shın – jalǵanlıǵın anıqlań.

$P(2)$: $2^2>2$ – shın. $P(\frac{1}{2})$: $(\frac{1}{2})^2>\frac{1}{2}$ – jalǵan. $P(-\frac{1}{2})$: $(-\frac{1}{2})^2>-\frac{1}{2}$ – shın.

Ayırım predikatlarda ózgeriwshini onıń mánisine qarap anıqlaw múmkin.

Máselen, "Bul shayır Shımbayda tuwılǵan" hám "Ol Shımbayda tuwılǵan" xabar gáplerde ózgeriwshi "Bul shayır" sóz birikpesi yaki "ol" almasıǵı boladı. Olardıń ornına "Ibrayım Yusupov" mánisin qoysaq, "Ibrayım Yusupov Shımbayda tuwılǵan" shın aytımdı, "Muxammad Yusup" mánisin qoysaq, "Muxammad Yusup Shımbayda tuwılǵan" jalǵan aytımdı hasıl qılamız.

x arqalı ózgeriwshini belgilesek, joqarıdaǵı xabar gáplerdi "x Toshkentte tuwılǵan" kórinisinde jazıw múmkin.

Predikatta bir yaki bir neshe ózgeriwshi qatnasıwı múmkin, qatnasqan ózgeriwshilerge qarap predikat $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x,y,z)$, ... kórinisinde belgilenedi.

Predikatlar benen birge $\forall$ (ulıwmalıq kvantorı, "barlıq .... lar ushın") hám $\exists$ (bar bolıw kvantorı, "usınday .... bar bolıp") arnawlı belgilerden paydalanıp, jańa aytımlar hasıl qılınadı. Máselen, $\forall x P(x)$ kórinistegi jańa aytım x tıń barlıq mánisleri ushın $P(x)$ ekenligi, $\exists x P(x)$ kórinistegi jańa aytım bolsa x tıń $P(x)$ bolatuǵın mánisi bar ekenligin bildiredi.

Máselen, $P(x)$: "x Xojelide tuwılǵan" predikattı qaraymız.
Ol jaǵdayda $\forall x P(x)$ kórinisindegi jańa aytım "hámme Xojelide tuwılǵan" kibi, $\exists x P(x)$ kórinisindegi jańa aytım bolsa "sonday adamlar bar, olar Xojelide tuwılǵan" kibi oqıladı.

$\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$ kórinistegi aytımlardıń shın – jalǵanlıǵın anıqlaw ushın mısallar keltiremiz.

2-mısal.

$D = \{1,2,3,4,5\}$ bolsa, $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$ aytım shın ekenligin dáliylleń.

$\triangle$ $1^2 \geqslant 1,\quad 2^2 \geqslant 2,\quad 3^2 \geqslant 3,\quad 4^2 \geqslant 4,\quad 5^2 \geqslant 5$ ekenligi málim.
Demek, $\forall x \in D,\ x^2 \geqslant x$ aytım shın eken. $\blacktriangle$

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$ aytım jalǵan bolıwın dáliyllew ushın x tıń ol jalǵan bolatuǵın bir mánisin tabıw jeterli.

Shınnan da, $x = \frac{1}{2}$ bolǵanda $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ boladı.

x tıń $\forall x P(x)$ aytımnıń jalǵan ekenligin kórsetiwshi bir mánisi *kontrmısal* delinedi.

3-mısal

$\exists m \in \mathbb{Z},\ m^2 \geqslant m$ aytım shın ekenligin dáliylleń.

$\triangle$ $1^2 = 1$ bolǵanı ushın, $\exists m \in \mathbb{Z},\ m^2 \geqslant m$ aytım shın eken.
Eger, $E = \{5,6,7,8\}$ bolsa, $\exists m \in E,\ m^2 \geqslant m$ aytım jalǵan, sebebi
$5^2 = 25 \neq 5; \qquad 6^2 = 36 \neq 6; \qquad 7^2 = 49 \neq 7; \qquad 8^2 = 64 \neq 8.$ $\blacktriangle$

Biykarlanıwlanıw ámeli menen baylanıslı eki kerekli logikalıq nızamlardı keltiremiz:

$$\neg(\exists x P(x)) = \forall x(\neg P(x)), \qquad \neg(\forall x P(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

Usı nızamlardıń mánisin túsiniw ushın mısal keltireyik.

$P(x)$: "x klasslasım tek ǵana ayrıqsha bahalarǵa oqıydı" predikattı qarayıq.

$\neg(\exists x P(x))$ jazıw "klasslaslarım arasında tek ǵana ayrıqsha bahalarǵa oqıytuǵınları joq" aytımdı, $\forall x(\neg P(x))$ jazıw bolsa oǵan teń kúshli aytım bolǵan "Hámme klasslaslarım tek ǵana ayrıqsha bahalarǵa oqımaydı" aytımdı bildiredi.

Tap usınday $\neg(\forall x P(x))$ formula "Hámme klasslaslarım tek ǵana ayrıqsha bahalarǵa oqıytuǵınlıǵı durıs emes" aytımdı, $\exists x(\neg P(x))$ formula bolsa oǵan teń kúshli aytım bolǵan "Ayırım klasslaslarım tek ǵana ayrıqsha bahalarǵa oqımaydı" aytımdı bildiredi.

$P(x,y)$ predikattan kvantorlar járdeminde

$$\forall x P(x,y), \quad \forall y P(x,y), \quad \exists x P(x,y), \quad \exists y P(x,y)$$

kórinistegi bir ózgeriwshili predikatlardı, olardan bolsa óz náwbetinde

$$\forall x \exists y P(x,y), \quad \exists y \forall x P(x,y), \quad \exists x \forall y P(x,y), \quad \forall y \exists x P(x,y),$$
$$\forall x \forall y P(x,y), \quad \forall y \forall x P(x,y), \quad \exists x \exists y P(x,y), \quad \exists y \exists x P(x,y)$$

kórinistegi aytımlardı qurıw múmkin.

$\forall x \forall y P(x,y)$, $\forall y \forall x P(x,y)$ hám de $\exists x \exists y P(x,y)$, $\exists y \exists x P(x,y)$ aytımlardıń mánisleri birdey bolsa da, $\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists y \forall x P(x,y)$ aytımlar teń kúshli emes eken.

Máselen, $P(x,y)$*: y insan x klasslaslarımnıń ákesi* predikattı qaraymız.

Bul jaǵday $\forall x \exists y P(x,y)$ = "*qálegen klasslasımnıń ákesi bar*"; $\exists y \forall x P(x,y)$ "*sonday insan bar, ol barlıq klasslaslarımnıń ákesi boladı*" aytımlardı bildiredi.

Tap sonday, $\exists x \forall y P(x,y)$, $\forall y \exists x P(x,y)$ aytımlar teń kúshli emesligin kórsetiw múmkin (óz betińizshe mısallar dúziń).

Predikatlar hám kvantorlar járdeminde logikalıq nızamların hasıl qılıw múm-kin.

Máselen, «Eger barlıq ǵarǵalar qara bolsa, qara bolmaǵan quslardıń hesh biri ǵarǵa emes", aytım

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x (\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x))$$

logikalıq nizamǵa misal bola aladi.

Shınıǵıwlar

69. Aytımlardı predikatlar hám kvantorlar járdeminde ańlatıń:

a) ayırım quslar usha olmaydi;
b) ayırım jazıwshılar shayır emes;
c) ayırım peshsheler shaqpaydı;
d) hámme planetalar shar ko'rinisinde;
e) barlıq áskerler kúshli insanlar;
f) barlıq xirurglar – shıpakerler;
g) hámme ayıwlar pal menen azıqlanadı;
h) hár qanday dóńgelek-tegis figura;
i) ayırım qoyanlar kapustanı jaqsı kóredi;
j) ayırım kitaplar qızıqlı;
k) hámme analar balaların erkeletedi.

Usı aytımlardıń biykarın dúzip kóriń:

70. Aytımlardı, múmkin bolsa, dawam ettiriń:

a) hesh qanday sút emiziwshi jabralardan dem ala almaydı. Sazan jabralardan dem aladı. Demek, . . . ;

b) barlıq insanlardıń kemshilikleri bar. Barlıq patshalar – insanlar. Demek, . . . ;

c) qızıl reńdegi gúllerdiń iysi joq. Bul gúldiń iysi joq. Demek...;

d) qasqırlar qozılardı jeydi. Bul haywan qozını jeydi. Demek...;

e) barlıq planetalar – aspan deneleri. Ay – planeta emes. Demek...;

f) barlıq metallar elektr togın jaqsıótkizedi. Altın – metall.
Demek . . . . ;

g) barlıq quslar máyek qoyadı (tuwadı). Barlıq quslar omırtqalı. Demek....;

h) eger insanning temperaturasi joqarı bolsa, ol kesellengen boladı. Bul insannıń temperaturası biyik. Demek...;

i) eger insannıń temperaturası joqarı bolsa, ol kesellengen boladı. Bul insan kesel emes. Demek....

71. $P(x,y)$: y insan x tıń perzenti, predikatlar berilgen bolsın. Aytımlardı tabiyiy tilde ańlatıń.

a) $\exists z P(x,z) \wedge P(z,y)$; b) $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$; c) $\forall x\ \exists y\ P(y,x)$.

72. $F(x,y)$: x insan y ti óz dostı dep esaplaydı, predikat berilgen bolsın. Aytımlardı tabiyiy tilde ańlatıń:

a) $\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow F(x,y)$;
b) $\forall x \exists y F(x,y)$;
c) $\exists y \forall x F(x,y)$;
d) $\forall x \exists y F(y,x)$;
e) $\exists y \forall x F(y,x)$;
f) $\forall y \exists x F(x,y)$;
g) $\exists x \forall y F(y,x)$.

73. $D(m,n)$: n pútin san m pútin sanǵa qaldıqsız bólinedi, predikat berilgen bolsın. Aytımlardan qaysı biri shın?

a) $\forall m \forall n D(m,n)$;
b) $\forall n \exists m D(m,n)$;
c) $\exists m \forall n D(n,m)$;
d) $\exists n \forall m D(n,m)$;
e) $\forall n \exists m D(n,m)$;
f) $\exists m \forall n D(n,m)$,

74. Aytımlardan qaysıları durıs? Tiyisli mısallar keltiriń.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y$;

b) barlıq basqa sanlardan kishi bolǵan san bar;

c) eger $\forall x \exists y P(x,y)$ bolsa, ol jaǵdayda $\exists y \forall x P(x,y)$ boladı.

14-15 DURÍS PIKIR JÚRGIZIW (ARGUMENTACIYA) NÍZAMLARÍ. SOFIZMLER HÁM PARADOKSLAR

Pikirdi tuwrı hám izbe-iz bayanlaw ushın logika nızamlarınan paydalanıw zárúr. Anıqlıq, durıslıq, izbe-izlik hám tiykarlanǵanlıq oy-pikirlewdiń zárúr sıpatlarınan bolıp tabıladı. Logika nızamları oy-pikirler hám tastıyıqlawlar arasındaǵı zárúr baylanıslardı ornatadı.

Tastıyıqlaw – bul oy-pikirdiń forması bolıp, onıń járdeminde tiykarlar dep atalıwshı bir yamasa bir neshe pikirlerden juwmaq dep atalıwshı belgili bir pikir alınadı. Máselen, «Temir - metall» degen tastıyıqlawda predmet (temir) penen onıń qásyeti (metall ekenligi) ortasındaǵı qatnas kórsetilgen. «Tárbiya huqıqtan ilgeri payda bolǵan» degen tastıyıqlawda bolsa eki predmet (tárbiya hám huqıq) ortasındaǵı qatnas kórsetilgen. Mazmun jaǵınan túrlishe bolǵan bul tastıyıqlawda dúzilisine kóre birdey bolıp: olarda predmet haqqındaǵı túshinikler kompleksi (S) menen predmet belgisi haqqındaǵı túsinik (R) ortasındaǵı qatnas kórsetilgen, yaǵnıy R diń S ke sáykesligi tasdıyqlanǵan.

Ulıwma jaǵdayda tastıyıqlaw $S \Rightarrow R$ logikalıq kóriniste ańlatıladı.

Biz S aytımlar kompleksin **tiykar**, R aytımdı bolsa **juwmaq** dep ataymız. Tastıyıqlawda tiykar hám juwmaq "Demek" bayla(nıstırı)wshı sóz benen baylanısadı.

Ádette $S \Rightarrow R$ tastıyıqlawda tiykar hám juwmaq gorizontal sızıq penen bunday ajıratıladı: $\frac{S}{P}$. Ápiwayı bir mısal keltireyik.

Eger Sabır sport penen shuǵıllansa, ol den-sawlıǵı bekkem boladı.

Sabır sport penen shuǵıllanıp atır. Demek, Sabır den-sawlıǵı bekkem boladı. Bul tastıyıqlawdıń logikalıq kórinisin tabayıq.

p: Sabır sport penen shuǵıllanbaqta.

q: Sabır den-sawlıǵı bekkem aytımların qarasaq, tastıyıqlaw tómendegi kóriniske iye boladı:

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \end{array}\right\} \textit{tiykar} \\ \hline q \quad \} \textit{juwmaq} \end{array}$$

$p \Rightarrow q$ hám aytımlardan q aytım kelip shıqqanı ushın, tastıyıqlaw $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ logikalıq kóriniske iye.

Tastıyıqlawdıń shınlıq kestesin dúzemiz:

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge p$	$(p\Rightarrow q)\wedge p\Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Nátiyjede tavtologiyanı payda qıldıq. Bul jaǵday tastıyıqlawdıń **durıslıǵın** kórsetpekte, yaǵnıy berilgen tiykarlardan durıs juwmaq shıǵarǵanlıǵın bildirmekte.

1-mısal. Tómendegi tastıyıqlaw qáteligin dáliyllen:
Eger úshmúyeshlik úsh tárepke iye bolsa, ol jaǵdayda 2+4=7.
Demek, úshmúyeshlik úsh tárepke iye.

△ Bul tastıyıqlawdıń logikalıq kórinisin tabayıq.
p: úshmúyeshlik úsh tárepke iye.
q: 2+4=7

aytımlardı qarasaq, tastıyıqlaw tómendegi kóriniske iye boladı:

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ p \end{array}\right\} \textit{tiykar} \\ \hline \left. q \quad \right\} \textit{juwmaq} \end{array}$$

▲

$p\Rightarrow q$ hám q aytımlardan p aytım kelip shıqqanı ushın, tastıyıqlawdıń $(p\Rightarrow q)\wedge q\Rightarrow p$ logikalıq kóriniske iye.

Shınlıq kestesin dúzemiz:

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge q$	$(p\Rightarrow q)\wedge q\Rightarrow p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

Nátiyjede tavtologiya payda bolmadı. Bul jaǵday tastıyıqlawdıń **qáteligin** kórsetpekte, yaǵnıy berilgen tiykarlardan durıs juwmaq shıǵarılmaǵanlıǵın bildirmekte.

Tómende biz durıs tastıyıqlawlardı (**argumentaciya** nızamların) keltiremiz:

T	Tastıyıqlaw	Ma'nisi	Misal
1°.	$\begin{array}{c} p\Rightarrow q \\ \underline{p} \\ q \end{array}$	*P* durıs bolǵanda *q* durıs bolsın. Bunda *p* durıs. Demek, *q* da durıs.	Eger sabaqlıqtı oqısam ayrıqsha baha alaman. Sabaqlıqtı oqıdım. Demek, ayrıqsha baha alaman.

2°.	$\dfrac{\begin{array}{c}p\Rightarrow q\\ \neg p\end{array}}{\neg q}$	*p* durıs bolǵanda, *q* durıs bolsın. Biraq *q* qáte. Demek, *p* da qáte.	Eger kitap oqısam, ayrıqsha baha alaman. Ayrıqsha baha almadım. Demek, kitap oqımadım..
3°.	$\dfrac{\begin{array}{c}p\lor q\\ \neg p\end{array}}{q}$	*p* yamasa *q* durıs hám *p* nadurıs bolsın. Demek, *q* nadurıs.	Men yaki kitap oqıyman, yaki kino kóremen. Men kitap oqımadım. Demek, men kino kórdim.
4°.	$\dfrac{\begin{array}{c}p\Rightarrow q\\ q\Rightarrow r\end{array}}{p\Rightarrow r}$	*P* dan *q* hám de *q* dan r kelip shıqsın. Ol jaǵdayda *p* dan *r* kelip shıǵadı.	Eger hawa ashıq bolsa, men sport maydanshaǵa baraman. Eger men sport maydanshaǵa barsam, futbol oynayman. Demek, hawa ashıq bolsa, men futbol oynayman.

Biz tastıyıqlawdıń durıslıǵın dáliyllewdi shınıǵıw retinde oqıwshıǵa usınıs etemiz.

Shınıǵıwlar

75. Tómendegi tastıyıqlawdı qarayıq:

Ádil shamallaǵanda ǵana, onıń dene temperaturası joqarı boladı.
Ádildiń denesiniń temperaturası joqarı emes.

Demek, Ádil shamallamaǵan.

a) tastıyıqlawdıń logikalıq kórinisin jazıń;
b) tastıyıqlawdıń durıs ekenligin dáliylleń.

76. tastıyıqlawdıń logikalıq kórinisin jazıń:

a) **I** $\dfrac{\begin{array}{c}p\Rightarrow q\\ \neg q\end{array}}{\neg p}$ **II** $\dfrac{\begin{array}{c}p\lor q\\ \neg p\end{array}}{q}$ **III** $\dfrac{p\lor q}{p}$ **IV** $\dfrac{\begin{array}{c}p\Rightarrow q\\ \neg p\end{array}}{\neg q}$ **V** $\dfrac{\begin{array}{c}p\Rightarrow q\\ q\Rightarrow p\end{array}}{p}$

b) hár bir tastıyıqlaw ushın shınlıq kestesin jazıp, olardan qaysıları durıs ekenligin tabıń.
c) tábiyiy tilde ańlatılıwına mısallar keltiriń.

77. Aytımlardı tastıyıqlaw kórinisinde jazıń:

a) $(p\land q)\Rightarrow p$; c) $(p\Rightarrow q)\land(q\Rightarrow p)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$;
b) $(p\Rightarrow q)\land\neg q\Rightarrow p$; d) $(p\land\neg q)\Rightarrow(\neg p\lor p)$.

Payda bolǵan tastıyıqlawlardıń qaysıları durıs?

78. *p: x* – ápiwayı san hám *q: x* – taq san aytımların qarayıq:

Tómendegi tastıyıqlawlardan qaysıları durıs?

a) Eger *x* – ápiwayı san bolsa, ol taq boladı. *x* – taq yaki ápiwayı san. Demek, *x* – taq san;

b) x – taq yamasa ápiwayı, biraq bir waqıtta emes. x – taq san. Demek, x – ápiwayı san.

79. Tastıyıqlaw berilgen: Dáwran jarısta qatnasıwı ushın ol yaki Singapurǵa yaki Gongkongqa baradı. Dáwran Singapurǵa barıwı belgili. Demek, Dáwran Gongkongqa barmaydı.

a) shınlıq kestesi járdeminde bul tastıyıqlaw nadurıs ekenligin dáliylleń;

b) nege bul tastıyıqlaw nadurıs ekenligin túsintiriń.

80. Tómendegi tastıyıqlawlardan qaysıları durıs, qaysıları nadurıs:

a) Turdıbay saat 10.00 da yaki kinoǵa yaki teatrǵa baradı. Turdıbay saat 10.00 da kinoǵa barmadı. Demek, Turdıbay saat 10.00 da teatrǵa bardı;

b) x sanı 4 ke eseli bolsa, ol jup san boladı. x - jup san, Demek, ol 4 ke eseli;

c) x sanı yaki 30 dıń yaki 50 diń bóliwshisi. Demek, x sanı 50 diń bóliwshisi;

d) eger izbe - izlik arifmetikalıq progressiya bolmasa, ol geometriyalıq progressiya boladı. Demek, izbe - izlik yaki arifmetikalıq yaki geometriyalıq progressiya boladı;

e) barlıq klasslaslarım jaqsı oqıydı. Máqset jaqsı oqıydı. Demek, Máqset meniń klasslasım.

81. Aytımlardı dawam ettirip, durıs tastıyıqlawlardı hasıl qılıń:

a) Ekewimizden birimiz házir stomatolog qabılına kiriwimiz kerek. Men kirmeymen. Demek ....;

b) Men yaki mektepke baraman yaki anam meni qattı urısadı. Búgin men mektepke anıq barmayman. Demek ....;

c) Eger men máseleni durıs shıǵarsam, onıń juwabı kitaptaǵı juwap penen birdey boladı. Meniń nátiyjem kitaptaǵı juwaptan parıqlı. Demek ....;

d) Eger Genri úylengen bolsa, onıń múlkine ómirlik joldası iye boladı. Eger úylenbegen bolsa, onıń múlkine inisi iye boladı.
Demek, onıń múlkine ....;

e) Yaki poezd kesh qalıp atır, yaki onı biykar qılǵan. Eger onı biykar qılǵan bolsa, men búgin hesh qayerge ketpeymen. Eger ol kesh qalıp atırǵan bolsa, men jumısqa óz waqtında bara almayman.
Demek men ....;

f) Eger 2 – ápiwayı san bolsa, ol eń kishi ápiwayı san boladı.
2 - ápiwayı san. Demek ....

Sofizmler hám paradokslar

Sofizm[2] – jalǵandı ras, al rastı jalǵan etip kórsetiw ushın arnalǵan, sanalı túrdegi qáteliklerdi bildiredi.

Sofizmge uqsas (tiyisli) máselelerdi dáslep, eradan aldıńǵı V ásirde Áyemgi Greciyada jasaǵan matematik Zenon dúzgen.

Zenon, ataqlı shapqır Axillestiń aldında súyretilip kiyatırǵan tasbaqanı hesh qashan quwıp jete almaslıǵın matematik olıq aytımlar járdeminde tómendegishe "dáliyllegen". Axilles tasbaqaǵa qaraǵanda 10 márte tezirek júre aladı. Dáslep, tasbaqa 100 metr aldında bolsın. Axilles bul 100 metrdi júrip ótkenshe, tashbaqa 10 metr ilgerileydi. Axilles bul 10 metrdi júrip ótkenshe tasbaqa jáne 1 metr jılısadı hám t.b. Olar arasındaǵı aralıq hár dayım qısqarıp baradı, biraq hesh qashan nolge aylanbaydı.

Zenon máseleleri sheksizlik, háreket, kosmos túshinikleri menen baylanıslı bolıp, olar matematika hám fizika pánleriniń rawajlanıwında úlken áhmiyetke iye boldı.

Ayırım sofizmler ullı babalarımız Farobiy shıǵarmalarında, Beruniy menen Ibn Sinonıń jazılmalarında talqılanǵan.

Biz tómende eń ápiwayı sofizmlerge mısallar keltirip olardı túsinriwge háreket qılmaqshımız.

2-mısal. *1000 sum qayerge ketti?.* 3 dos asxanada awqatlanıp bolǵannan keyin xizmetshi olarǵa 25000 sumlıq esaptı berdi. 3 dostıń hár biri 10000 sumnan pul berip, 30000 sumdı xızmetshige berdi. Xızmetshi olarǵa 5000 sum qaytım berdi. Doslar 1000 sumnan bólisip aldı hám 2000 sumdı taksi ushın berdi. Qaytıp kiyatırǵanda doslardan biri esaplay bashladi, "Hár birimiz 9000 sumnan hárejet qıldıq, bul 27000 sum boladı, 2000 sum taksige berdik, bunı qossaq 29000 sum boladı. 1000 sum qaerge ketdi?"

△ Bul jerdegi tiykarǵı "qátelik" esaplawdıń nadurıs qılınǵanlıǵında. 3 dos 9000 sumnan 27000 sum pul tóledi. Bunnan 25000 sumın awqatqa tólep, 2000 sumın taksi ushın dostına berdi, demek ulıwma esap 27000 sum boladı. Joqarıdaǵı esaplawda 2000 sum 27000 sumnıń ishinde jatır. ▲

3-mısal. *"2·2=5" sofizmi:* 20−16−4=25−20−5 durıs teńlikti ápiwayılastıramız:

$$2(10-8-2)=25-20-5$$
$$2\cdot2\cdot(5-4-1)=5\cdot(5-4-1)$$

Aqırǵı teńliktiń oń hám shep tápeplerin ulıwma (5−4−1) kóbeytiwshige qısqartırıp, 2·2=5 teńlikti hasıl qılamız.

△ Bul jerdegi qılınıp atırǵan tiykarǵı "qátelik" 2·2·(5−4−1)=5·(5−4−1) teńliktiń eki jaǵın nolge teń bolǵan (5−4−1) kóbeytiwshige qısqartırıwda. ▲

Paradoks[2]– kópshilik tárepinen qabıl etilgen ádettegi pikirge óz mazmunı yaki kórinisi menen keskin qarama – qarsı bolǵan, kútilmegen aytım. Hár qanday paradoks "gúmansız durıs" (tiykarlı ma, tiykarsız ba – bunnan qátti názer) esaplanǵan ol yaki bul pikirdi biykar etiwdey kórinedi. "Paradoks" termininiń ózi de dáslep antik filosofiyada hár qanday basqasha, original pikirdi ańlatıw ushın isletilgen.

Paradokslar, ádette, logikalıq tiykarları tolıq anıqlanbaǵan teoriyalarda ushıraydı.

4-mısal. *Jalǵanshı paradoksi* "Men tastıyqlap atırǵan barlıq nárse jalǵan" aytımdı qarayıq.

△ Eger bul aytım shın bolsa, bul aytımnıń mánisine tiykarlap aytılǵan aytımnıń jalǵan ekenligi haqıyqat. Eger bul aytım jalǵan bolsa, aytımdaǵı pikir - jalǵan. Demek, bul aytım jalǵan degen aytım jalǵan, sonday eken, bul aytım haqıyqat. Qarama-qarsılıq. ▲

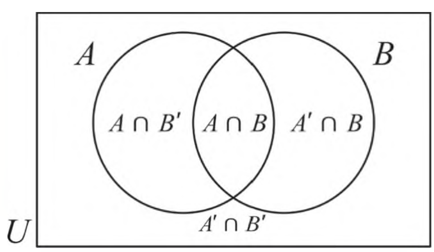
5-mısal. *Refleksivlik paradoksi.* Qaraqalpaq tilindegi sózdiń mánisi ózinde ańlatılsa, onı refleksiv dep atayıq.

Máselen, "qaraqalpaqsha" sózi refleksiv, "inglizshe" sózi bolsa refleksiv emes. Tap sonday, "on eki háripli" sózi ondaǵı háripler sanı shınnan da, 12 ge teń bolǵanı ushın refleksiv, "altı háripli" sózi bolsa refleksiv emes. Barlıq refleksiv sózler kópligin qarayıq. "Refleksiv emes" sóziniń ózi refleksiv bola ma?

△ Eger bul sóz refleksiv bolsa, onda mánisine kóre, ol refleksiv emes. Eger bul sóz refleksiv emes bolsa, onda onıń mánisi ózinde ańlatılǵanı ushın, ol refleksiv boladı. Qarama-qarsılıq. ▲

16-18 MÁSELELER SHESHIW

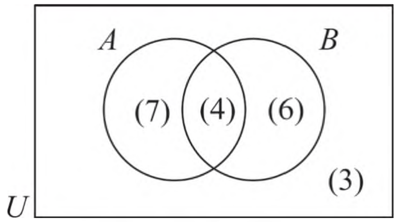
1-másele. Kesilisetuǵın eki A, B kóplikler universal kóplikti tórt bólekke ajıratadı:



2 Ayemgi grekshe παραδοξοζ – kútilmegen, basqasha (ǵalati)

Demek, universal kóplik elementleri sanı usı úles kóplik elementleri sanı qosındısına teń eken.

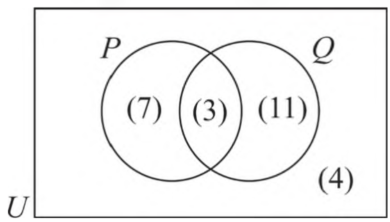
Tómendegi diagrammada universal kóplik sáykes bólekleriniń elementleri sanı qawsırmaǵa alınıp jazılǵan:



Bul jerde, máselen, A, B kópliklerdiń ekewine 4 element, 3 element bolsa birewine de tiyisli emes.

U kópliktiń qálegen elementi 4 bólektiń keminde birewine tiyisli bolǵanı ushın U kóplik elementleriniń sanı $7 + 4 + 6 + 3 = 20$ ǵa teń.

2-másele. Súwretke qarap, tómendegi kópliklardiń elementleri sanın tabıń:



a) P; b) Q'; c) $P \cup Q$;

d) P ǵa tiyisli, biraq Q ǵa tiyisli bolmaǵan elementler kópligi;

e) Q ǵa tiyisli, biraq P ǵa tiyisli bolmaǵan elementler kópligi;

f) P ǵa da, Q ǵa da tiyisli bolmaǵan elementler kópligi.

a) $n(P)=7+3=10$; b) $n(Q')=7+4=11$;

c) $n(P \cup Q)=7+3+11=21$; d) $n(P$, biraq Q emes$)=7$;

e) $n(Q$, biraq P emes$)=11$.

3-másele. Eger $n(U)=30$, $n(A)=14$, $n(B)=17$ hám $n(A \cap B)=6$ bolsa,

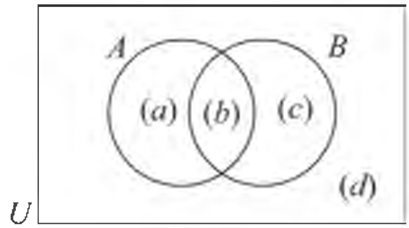
a) $n(A \cup B)$ nı tabıń.

b) A ǵa tiyisli, biraq B ǵa tiyisli bolmaǵan elementler kópligi neshe elementten turadı?

Venn diagrammasın dúzemiz:

$n(A \cap B)$ dan $b=6$; $n(A)$ dan $a+b=14$; $n(B)$ dan $b+c=17$; $n(U)$ dan $a+b+c+d=30$ teńlik kelip shıǵadı.

Demek, $b=6$, $a=8$, $c=11$, $d=5$.



Diagrammadan tómendegilerge iye bolamız:

a) $n(A \cup B)=a+b+c=25$;

b) A ǵa tiyisli, biraq B ǵa tiyisli bolmaǵan elementler sanı $a = 8$ ge teń.

Shınıǵıwlar

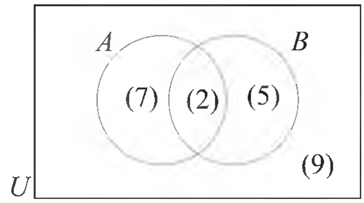
Diagrammadan paydalanıp, tómendegi kóplikler elementleri sanın tabıń:

82. a) B; b) A'; c) $A \cup B$;

d) A ǵa tiyisli, biraq B ǵa tiyisli bolmaǵan elementler kópligi;

e) B ǵa tiyisli, biraq A ǵa tiyisli bolmaǵan elementler kópligi;

f) A ǵa da, B ǵa da tiyisli bolmaǵan elementler kópligi.

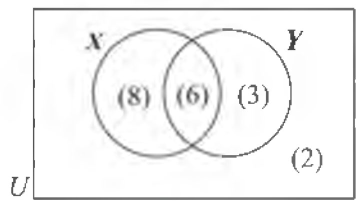


83. a) X'; b) $X \cap Y$; c) $X \cup Y$;

d) X ke tiyisli, biraq Y ke tiyisli bolmaǵan elementler kópligi;

e) Y ke tiyisli, biraq X ke tiyisli bolmaǵan elementler kópligi;

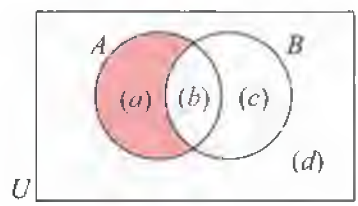
f) X ke de, Y ke de tiyisli bolmaǵan elementler kópligi.



84. a) $n(B)$; b) $n(A')$;

c) $n(A \cap B)$; d) $n(A \cup B)$;

e) $n((A \cap B)')$; f) $n((A \cup B)')$.



85. $n(U)=26$, $n(A)=11$, $n(B)=12$ hám $n(A \cap B)=8$ bolsa

a) $n(A \cup B)$ nı tabıń;

b) B ǵa tiyisli, biraq A ǵa tiyisli bolmaǵan elementler kópligi neshe elementten turadı?

86. $n(U)=32$, $n(M)=13$, $n(M \cup N)=26$ hám $n(M \cap N)=5$ bolsa

a) $n(N)$; b) $n((M \cup N)')$ tı tabıń.

87. $n(U)$=50, $n(S)$=30, $n(R)$=25 va $n(R \cup S)$=48 bolsa

a) $n(R \cap S)$;

b) S ke tiyisli, biraq R ge tiyisli bolmaǵan elementler kópligi neshe elementten turadı?

4-másele. Sport dógeregine qatnasqan 27 oqıwshıdan 19ı qara shashlı, 14i qara kózli hám 11i ham qara shashlı hám qara kózli.

a) Bul maǵlıwmattı Venn diagrammasında súwretleń hám túsintiriń.

b) **I** Ya qara shashlı, ya qara kózli;

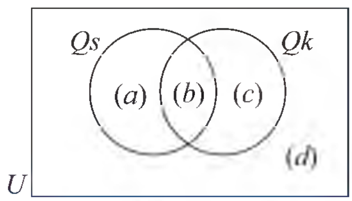
II qara shashlı, biraq qara kózli emes;

oqıwshılar qansha?

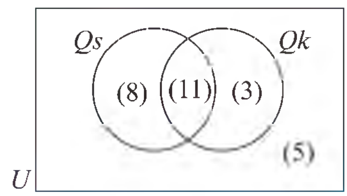
△ a) Qs – qara shashlı, Qk bolsa qara kózli oqıwshılar kópligi bolsın. Tómendegi diagrammaǵa iye bolamız:

Bunda

$a+b+c+d=27$; $a+b=19$; $b+c=14$;
$b=11$; $a=8$; $c=3$; $d=5$.



Yaǵnıy



b) Diagrammaǵa qarap, tómendegilerdi anıqlaymız:

I Ya qara shashlı ya qara kózli oqıwshılar sanı

$n(Qs \cap Qk)$=8+11+3=22;

II qara shashlı, biraq qara kózli emes oqıwshılar sanı

$n(Qs \cap Qk')$=8 . ▲

Shınıǵıwlar

88. Badminton klubında 41 qatnasıwshıdan 31i jalǵız ózi hám 16sı juplıqlarda oynaydı. Neshe qatnasshı hám jalǵız ózi hám juplıqlarda oynaydı?

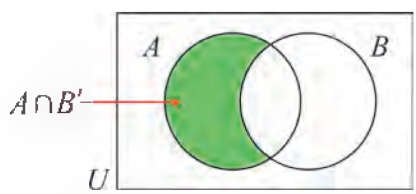
89. Kárxanada 56 isshi islemekte. 1 hápte ishinde solardan 47si kúndizgi hám 29ı keshki smenalarda isledi. Neshe isshi hám kúndizgi hám keshki smenada isledi?

90. Tómendegi Venn diagrammasına qarap

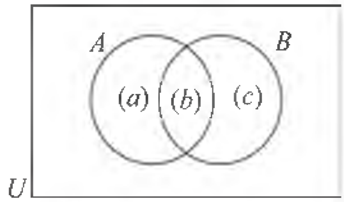
$n(A \cap B')= n(A)-n(A \cap B)$,

$n(A' \cap B)= n(B)-n(A \cap B)$

teńlikler orınlı ekenligin kórsetiń.



91. Venn diagramasınan paydalanıp
$n(A \cup B) = n(A)+n(B)-n(A \cap B)$
formulanı keltirip shıǵarıń.



92. 50 oqıwshıdan 40ı inglis tilin, 25i bolsa nemis tilin úyrenbekte. Eki tildi de úyrenip atırǵan oqıwshılar qansha?

5-másele. Futbol jarısında qaladan úsh A, B hám C komandalar qatnaspaqta. Qala turǵınlarınıń 20 procenti A komandanı, 24 procenti B komandanı hám 28 procenti C komandanı qollap quwatlaydı. Qala turǵınlarınıń 4 procenti hám A, hám B komandaǵa, 5 procenti hám A, hám C komandalarǵa, 6 procenti bolsa hám B, hám C komandalardı qollap quwatlaydı. Bunnan basqa, qala turǵınlarınıń 1 procenti barlıq komandalardı qollap quwatlaǵanlıǵı málim (belgili).

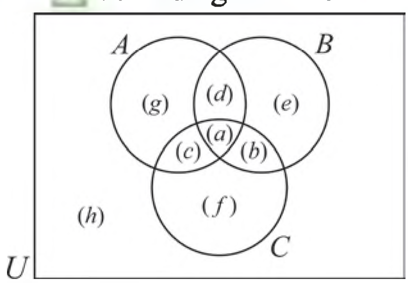
Qala turǵınlarınıń neshe procenti:

a) tek ǵana A komandanı qollap quwatlaydı;

b) hám A, hám B komandalardı qollap quwatlap, C komandanı qollap quwatlamaydı;

c) hesh qanday komandanı qollap quwatlamaydı?

Venn diagrammasın maǵlıwmatlar menen toltıramız.



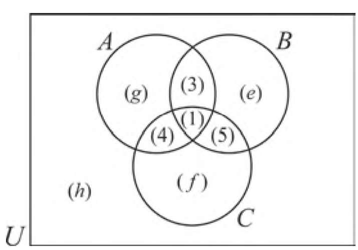
$a=1$, sebebi qala turǵınlarınıń 1 procenti barlıq komandalardı qollap quwatlaydı.

$a+d=4$, sebebi qala turǵınlarınıń 4 procenti hám A, hám B komandalardı qollap quwatlaydı.

$a+b=6$, sebebi qala turǵınlarınıń 6 procenti hám B, hám C komandalardı qollap quwatlaydı.

$a+c=5$, sebebi qala turǵınlarınıń 5 procenti hám A, hám C komandalardı qollap quwatlaydı. Demek, $d=3$, $b=5$, $c=4$.

Nátiyjede tómendegi diagramma hasıl boladı:



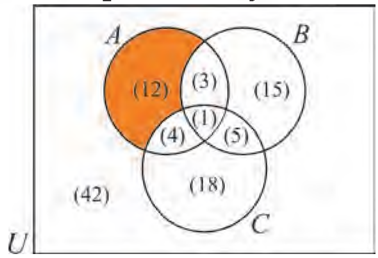
Bunnan tısqarı, qala turǵınlarınıń 20 procenti A komandanı qollap quwatlaǵanlıǵı ushın $g+1+4+3=20$, yaǵnıy $g=12$.

Tap usınday, qala turǵınlarınıń 24 procenti B komandanı qollap quwatlaǵanı ushın $e+1+5+3=24$, yaǵnıy $e=15$.

Hámde qala turǵınlarınıń 28 procenti *C* komandanı qollap quwatlaytuǵınlıǵı ushın f+1+5+4=28, yaǵniy f=18.

Qala turǵınları 100 procent bolǵanı ushın, hesh qaysı komandanı qollap quwatlamaǵanlar procenti h=42 ge teń.

a) Tek ǵana *A* komandanı qollap quwatlaytuǵınlardıń procenti sáykes bólekti boyap tabamız: g=20–4–3–1=12.



b) hám *A*, hám *B* komandalardı qollap quwatlap, *C* komandanı qollap quwatlamaytuǵınlar procenti 12+3+15=30 ǵa teń.

c) hesh qanday komandanı qollap quwatlamaytuǵınlardıń procenti h=42 ge teng.

Shınıǵıwlar

93. Xalıq aralıq konferenciyada 58 qatnasıwshılar túrli tillerde, yaǵnıy 28i arab, 27si qıtay, 39ı anglichan tillerinde sóylese aladı.

a) tek ǵana qıtay tilinde sóylesip biletuǵınlar;

b) usı tillerden birewinde de sóylesip bilmeytuǵınlar;

c) arab tilinde de, qıtay tilinde de sóylesip bilmeytuǵınlar neshew?

94. Tómendegi aytımlardıń biykarın dúziń:

a) quyash jarqırap tur hám hawa ıssı;

b) eger aspan bulıtsız bolsa men dáryaǵa baraman;

c) jawın jawmay atır;

d) men ya baqlaw (jazba) jumısına tayarlanaman, yamasa baqlaw (jazba) jumıstı jaqsı jaza almayman.

e) ayırım oqıwshılar intalı; f) barlıq oqıwshılar intalı;

g) intalı oqıwshılar joq;

h) ayırım oqıwshılardıń kózleri jasıl reńde.

Aytımlardı logikalıq bayla(nıstırı)wshılar járdeminde ańlatıń (**95–104**):

95. Eger oqıwshı matematikanı ózlestirse, onıń sanası keńeedi.

96. Eger men matematikanı hám shet tilin ózlestirsem, men dem alıwǵa yaki úyge, yaki tawǵa ketemen.

97. Dem alıs kúnleri baslanǵanı jalǵan.

98. Eger insan jaslıǵınan ózin basqara alsa, ol jaǵdayda onıń átirapındaǵıları onnan o'kpelemeydi hám onı húrmet qıladı.

99. Eger metalldan elektr toki ótse, onıń temperaturası kóteriledi.

100. Ol úyge ya takside, ya poezdda ketedi.

101. Bul zat ushın qara yaki rengli metall isletilgen.

102. Dem alıs kúnleri baslanıwı ushın oqıw sheregi tamam bolıwı jeterli.

103. Dem alıs kúnleri baslanıwı ushın oqıw sheregi tamam bolıwı zárúr.

104. Dem alıs kúnleri baslanıwı ushın oqıw sheregi tamam bolıwı zárúr hám jeterli.

Aytımlardı logikalıq bayla(nıstırı)wshılar járdeminde ańlatıń hám shın – jalǵanlıǵın anıqlań (**105–117**):

105. Eger insan ruxıy kesel bolsa,ol jaqınların tanımaydı. Bul insan ruxıy kesel. Demek, ol jaqınların tanımaydı.

106. Eger men saǵan isensem, sen meni aldaysań. Demek, men saǵan isenbesem sen meni alday almaysań.

107. Erteń biz teatrǵa yaki muzeyge baramız. Eger teatrǵa barsaq, úyge kesh qaytamız. Eger muzeyge barsaq, úyge erterek jetip kelemiz. Biraq biz úyge kesh qaytpaymız. Demek, biz teatrǵa emes, muzeyge baramiz.

108. Eger ol Alisherdiń ákesi bolsa, ol Murattıń ákesi bola almaydı. Ol Alisherdiń hám Jámshittiń ákesi ekenligi nadurıs eken. Ol ya Jámshittiń ya Murattıń ákesi ekenligi anıqlandı. Demek, ol Alisherdiń ákesi emes.

109. Eger házir qıs bolsa, hawanıń temperaturası pás boladı. Házir gúz bolmasa, qıs boladı. Házir gúz. Demek, hawa temperaturası pás emes.

110. Eger Polat qızıǵıwshań bolmasa, ol jurnalist bolmaydı. Eger Polat jurnalist bolsa, ol oqıtıwshı bolmaydı. Polat júdá qızıǵıwshań, biraq ol oqıtıwshı emes. Demek, Polat – jurnalist.

111. Eger jamǵır jawsa, aspan bulıtlı boladı. Eger aspan bulıtlı bolmasa, quyash boladı. Jamǵır jawıp atır, biraq quyash bar. Demek, quyash bolsa, aspan bulıtlı bolmaydı.

112. Eger Murat jáne tezlikti asırsa, onıń hújjetleri alıp qoyıladı. Eger Murat más halda rulge otırsa, ol tezlikti asırmaydı. Búgin Murat más bolmaydı hám tezlikti asırmaydı. Demek, onıń hújjetleri búgin alıp qoyılmaydı.

113. Kóbeytiw kestesin bilmeytuǵınlar sawatsız esaplanadı. Álipbeni bilmeytuǵınlar da sawatsız espalanadı. Ol ya kóbetiw kestesin ya álipbeni bilmeydi. Demek, ol sawatsız.

114. Eger ol haq bolsa, men onnan keshirim sorawım kerek. Eger men haq bolsam, ol mennen keshirim sorawı kerek. Ekewimizden birimiz álbette keshirim sorawımız kerek. Juwmaq: birimiz haq.

115. Men ya mektepke baraman, ya maǵan anam baqıradı. Men mektepke barmayman. Demek, maǵan anam álbette baqıradı.

116. Eger men máseleni qátesiz shıǵarsam, alınǵan nátiyje sabaqlıqtaǵı juwap penen birdey boladı. Meniń nátiyjem menen sabaqlıqtaǵı juwap parıqlanbaqta. Demek, men máseleni sheshiwde qátege jol qoyǵanman.

117. Pán quramalı emes yaki ol jaqsı oqıtılmaqta. Eger pán quramalı bolmasa, onı ózlestiremen. Eger pán jaqsı oqıtılsa, onı ózlestiremen.
Demek, barlıq hallarda pándi ózlestiremen.

118. Shınlıq kesteleri járdeminde tómendegi aytımlardıń túrin anıqlań hám tábiyiy tildegi sáykes xabar gápke mısal keltiriń.

a) $p \vee q \Rightarrow p \vee q$;
b) $p \Rightarrow \neg q \vee (p \Rightarrow q)$;
c) $\neg(q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg q$;
d) $p \vee q \Rightarrow \neg q \wedge p$;
e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \vee q)$;
f) $\neg(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge q)$.

Tómendegi aytımlardı logikalıq bayla(nıstırı)wshılar járdeminde ańlatıń hám shın – jalǵanlıǵın anıqlań(119-130):

119. Barlıq delfinler – sút emiziwshiler. Bir de balıq sút emiziwshi emes. Demek, bir de balıq delfin emes.

120. Barlıq sıyırlar - sút emiziwshiler. Barlıq sıyırlar pishendi jeydi. Demek, ayırım sút emiziwshiler pishendi jeydi.

121. Ayırım studentler isleydi hám ayırım studentler jaqsı oqıydı. Demek, ayırım jaqsı oqıytuǵın studentler ishinde isleytuǵınları bar.

122. Barlıq metallar qattı halda. Sinap – metall. Demek, sınap qattı halda.

123. Hesh qanday metall gaz emes. Ayırım zatlar metallar. Demek, ayırım zatlar – gaz emes.

124. Barlıq metallar ıssılıqtı jaqsı ótkizedi. Barlıq metallar elektr togın ótkizedi. Demek, ayırım elektr ótkiziwshiler ıssılıqtı jaqsı ótkizedi.

125. Ayırım er adamlar – matematikler. Ayırım matematikler – fisosoflar. Demek, ayırım filosoflar – er adamlar.

126. Barlıq alpinistler qorıqpaslar. Ayırım alpinistler erkekler. Demek, ayırım erkekler qorıqpas boladı.

127. Barlıq ilimpazlar aqıllı. Ayırım aqıllı insanlardıń tili ótkir. Demek, ayırım tili ótkirler – ilimpaz.

128. Barlıq shet tili oqıtıwshıları shet tilin jaqsı biledi. Shet tilin jaqsı biletuǵınlardıń ayırımları matematikanı jaqsı kórmeydi. Demek, matematikanı jaqsı kóretuǵınlardıń ayırımları shet tili oqıtıwshıları emes.

129. Barlıq kromanyonlar – agressiv. Bir de bir neandertal kromanyon emes. Demek, hesh qanday neandertal agressiv emes.

130. Ayırım sút emiziwshiler – kitler. Barlıq kitler - iri haywanlar. Demek, Ayırım iri haywanlar sút emiziwshiler.

Tekstlerdi oqıń hám jaǵdaydi aytip beriń (**131–138**):

131. Krit filosofı Epimenid barlıq kritlikler ótirikshi (jalǵanshı) ekenligin tasdıyıqladı. Epimenid shın sóyledi me?

132. Aflatun: Házir Sakrat aytqan barlıq nárse jalǵan (ótirik).
Sakrat: Házir Aflatun aytqan gáp jalǵan. Kim shın sóyledi?

133. Qaǵazdıń bir tárepine: "Qaǵazdıń basqa tárepine jazılǵan gáp jalǵan", Usı qaǵazdıń ekinshi tárepine: "Qaǵazdıń basqa tárepine jazılǵan gáp jalǵan" dep jazılǵan. Qaǵazdıń qaysı tárepine shın gáp jazılǵan?

134. Ataqlı (belgili) filosof Protagor Evatldı esheyin huqıqqa úyretiw ushın shákirtlikke aldı. Bunda eger Evatl óziniń birinshi sud májlisinde (jıynalısında) jeńip shıqsa, maǵan bir muǵdardaǵı pul tóleydi mánisindegi shártnama (kelisim) dúzildi.

Oqıwdan soń Evatl jumısqa hesh shıqpadı. Nátiyjede onıń birinshi sud májlisinde qatnasıw - qatnaspawlıǵı belgisiz bolıp qaldı. Protagor óziniń shákirti ústinen sudqa arız (shikayat) qıldı. Sud processinen (járayanınan) úzindi:

Protagor. Hár qanday jaǵdayda da bul jigit maǵan tólewi kerek. Haqıyqattan da, eger ol bul sudta jeńip shıqsa, shártnamaǵa kóre ol maǵan toleydi. Eger utpasa, sud qararına kóre maǵan tóleydi.

Evatl. Men Protagorga hesh nárse bermeymen! Eger men sudta jeńip shıqsam, jeńip shıqqan adam retınde hesh nárse bermeymen. Biraq men utqızıwǵa da tayarman. Bul jaǵdayda shártnamaǵa kóre men hesh nárse tólemeymen.

135. Bul qızıqarlı gápte sózler sanı jetige teń.

136. Bul gápti oqıw qadaǵalanǵan (múmkin emes).

137. Bir insan totıqustı satıp atırǵanda totıqus qálegen tilde esitken hár bir sózdi tákirarlaydı, dep isentirdi. Biraq satıp alınǵan totıqus hesh nárse sóylemedi. Eger satıwshı aldamaǵanlıǵı málim (belgili) bolsa, jaǵdaydı túsintiriń.

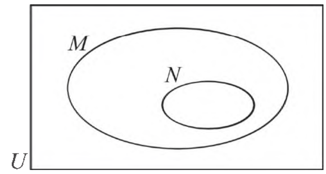
138. Dániyardaǵı kitaplar sanı 1000 nan kóp.
Yaq, ondaǵı kitaplar 1000 nan kem.
Onda keminde bir kitap bar.
Usı úsh aytımnan keminde birewi shın. Dániyarda neshe kitap bar?

Baqlaw jumısı topsırmaları

I variant

1. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$,
$A = \{0$ *hám* 9 *arasındaǵı barlıq jup sanlar*$\}$, $B = \{18$ *sanınıń natural bóliwshileri*$\}$ bolsa, $A \cap B$ kóplik elementlerin jazıń.

2. Diagrammanı dápterińizge kóshiriń hám $M \cap N$ kóplikti belgileń..



3. p: x – jup san, q: x san 3 ke bólinedi aytımdı qarayıq.
Aytımlardı sózler járdeminde ańlatıń.
Olar qaysı x larda shın? Jalǵan?
a) $\neg p$; b) $p \Rightarrow q$ c) $p \Rightarrow \neg q$.

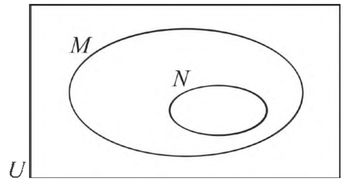
4. Tómendegilerden qaysıları logikalıq teń kúshli?
a) $p \Rightarrow q$ hám $p \Leftrightarrow \neg p$; b) $p \Leftrightarrow q$ hám $(p \wedge q) \wedge \neg p$.

5. Tastıyıqlawlardıń logikalıq kórinisin jazıń. Bul tastıyıqlawlardıń durıs – qáteligin tekseriń.
Eger aspan bulıtlı bolsa, men bas kiyimimdi kiyemen. Aspan bulıtlı. Demek, men bas kiyimimdi kiyemen.

II variant

1. $U = \{ x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{0$ *hám* 9 *arasındaǵı barlıq jup sanlar*$\}$, $B = \{18$ *sanınıń natural bóliwshileri*$\}$ bolsa, $(A \cap B)'$ kóplik elementlerin jazıń.

2. Diagrammanı dápterińizge kóshiriń hám $M \cap N'$ kóplikti belgileń.



3. p: x – jup san, q: x san 3 ke bólinedi aytımdı qarayıq.
Aytımlardı sózler járdeminde ańlatıń.
Olar qaysı x larda shın? Jalǵan?
a) $p \vee q$; b) $\neg p \wedge q$ c) $\neg p \Rightarrow \neg q$.

4. Tómendegilerden qaysıları logikalıq teń kúshli?
a) $\neg(p \wedge q)$ hám $\neg p \vee \neg q$; b) $\neg p \Rightarrow \neg q$ hám $q \Rightarrow p$.

5. Tastıyıqlawlardıń logikalıq kórinisin jazıń. Bul tastıyıqlawlardıń durıs – qáteligin tekseriń. Barlıq oqıtıwshılar ilimge tırısqaq. Muazzam Alimova oqıtıwshı emes. Demek, Muazzam Alimova ilimge tırısqaq emes.

II BAP

FINANSLÍQ MATEMATIKA ELEMENTLERI

19-21 ÁPIWAYÍ PROCENTLER, QURAMALÍ PROCENTLER

Belgili mugdardagı pul qarızǵa berilgende qarız alıwshı belgilengen mútdette qarız beriwshige *(kreditorǵa)* alınǵan summanı (qarızdı) qaytarıwı haqqında kelisiledi.

Bunnan basqa (tısqarı) hár bir qarız alıwshı kreditorǵa qosımsha pullardı tólewdi óz juwapkershiligine aladı.

Qarızdar tárepinen tólenetuǵın pul qarız muǵdarına, tólew múddetine hám kreditor tárepinen dáramat alıw máqsetinde belgilengen procent stavkasına baylanıslı.

Kreditordın qarızdarǵa málim (belgili) mugdardaǵı puldı belgilengen múddette qarızǵa bergenligi aqıbetinde alatuǵın dáramatın esaplaw ushın ádette eki usıl: **ápiwayı procentler hám quramalı procentler** usılları qollanıladı.

Ápiwayı procentler

> *Ápiwayı procentler* – kreditordın qarızdarǵa málim (belgili) muǵdardaǵı puldı belgilengen múddette qarızǵa bergenligi nátiyjesinde alatuǵın dáramattı esaplaw usılı.

Máselen, 2 000 000 sum 3 jılǵa qarızǵa alınbaqta. Bunda kreditor tárepinen hár jıl 17% procent stavkası belgilendi.

Bul halda 1 jıldan soń $\frac{17}{100}\cdot 2\,000\,000$ sum, 3 jıldan soń bolsa qosımsha pul $\frac{17}{100}\cdot 2\,000\,000\cdot 3 = 1\,020\,000$ sum tólewi lazım.

Bul mısaldan tómendegi **ápiwayı procentler formulası** dep atalıwshı qatnas kelip shıǵadı:

$$I = \frac{Crn}{100},$$

bul jerde C – dáslep alınǵan qarız muǵdarı, I – C muǵdardaǵı puldı paydalanǵanı ushın qarızdardıń kreditorǵa tóleytuǵın procent tólemi. Usı parametr *procent* tólemi yaki, ápiwayıraq, procent dep te ataladı, r – hár jılǵa belgilengen procent stavkası, n – jıllar sanı.

1-mısal. 8 000 000 sum jılına 7 procent stavkasında 18 ayǵa alınǵan bolsa, procent tólemin esaplań.

$$C = 8000000, \quad r=7\%, \quad n=\frac{18}{12} = 1{,}5 \text{ jıl.}$$

Demek, $I = \frac{Crn}{100} = \frac{8000000 \cdot 7 \cdot 1{,}5}{100} = 840\ 000$ sum.

2-mısal. Kreditor tárepinen procent stavkası hár jılǵa 8% dep belgilengen. Tádbirkar (is bilermen) 4 jıl ishinde alınǵan qarızdı hám *procent* tólemin qosımsha 1600 AQSh dollardı tóledi hám qarızdan qutıldı. Tádbirkar (is bilermen) qansha muǵdarda qarız alǵan edi?

Ápiwayı procentler formulasına boyınsha

$$I = \frac{Crn}{100}, \text{ bul jerde } I=1600;\ r=8;\ n=4.$$

Demek, $1600 = \frac{C \cdot 8 \cdot 4}{100}$.

Bunnan, $C=5000$ (AQSh dollari).

3-mısal. Bank dáslep 4000 AQSh dolları muǵdarında qarız berip 18 ayda 900 AQSh dolları dáramat aldı. Eger tólem hár jılı ámelge asırılatuǵın bolsa, jıllıq procent stavkası neshege teń?

Ápiwayı procentler formulasına boyınsha

$I = \frac{Crn}{100}$, bul jerde $I=900$; $n=18$ ay $=1{,}5$ jıl, $C=4000$.

Demek, $900 = \frac{4000 \cdot r \cdot 1{,}5}{100}$.

Bunnan, $r = 15\%$.

4-mısal. Kreditor dáslep 2000 AQSh dolları muǵdarında qarız berip, bir neshe jıllar dawamında hár jılı tólengennen soń barlıǵı bolıp 3000 AQSh dollardı aldı. Eger procent stavkası hár jılǵa 12,5% dep belgilengen bolsa, tólemler neshe jılda ámelge asırılǵan?

Kreditor 3000–2000=1000 (AQSh dolları) muǵdarında dáramat alǵan. Ápiwayı procent formulasına kóre

$I=\frac{Crn}{100}$, bul jerde I=1000; C=2000; r=12,5%.

Demek, $1000=\frac{2000\cdot 12,5\cdot n}{100}$

Juwap: 4 jıl.

Quramalı procentler

Quramalı procent usılınıń mazmunın túsintiriw ushın tómendegi máselege itibar beremiz.

5-mısal.

Eger 6000 AQSh dolları muǵdarında qarız jıllıq quramalı procent stavkası 8% penen 3 jılda tólew shárti menen alınǵan bolsa, kreditor tárepinen alınatuǵın dáramat qansha boladı?

Jıllıq quramalı procent stavkasın itibarǵa alıp, hár jılǵı procent tólem muǵdarın esaplaymız:

Jıl	**Qarız** (1)	**Procent tólemi** $=\frac{Crn}{100}$ (2)	**Balans** (1) + (2)
1	\$6000,00	\$6000,00× $\frac{8}{100}$ ×1=\$480,00	\$6480,00
2	\$6480,00	\$6480,00× $\frac{8}{100}$ ×1=\$518,40	\$6998,00
3	\$6998,00	\$6998,00× $\frac{8}{100}$ ×1=\$559,87	\$7558,27

Demek, 6000 AQSh dolları muǵdardaǵı qarızdan qutılıw ushın 3 jıl dawamında 7558,27 AQSh dolları muǵdarındaǵı tólemlerdi ámelge asırıwı zárúr.

Bunda kreditor \$7558.27 - \$6000 = \$1558.27 muǵdarda dáramat aladı. Bul dáramat ulıwma *quramalı procent tólemi (ústeme procent)* dep júritiledi.

Kreditor dáramatı aqırǵı jılda hasıl bolǵan balans hám dáslepki qarız muǵdarı ayırmasına teń ekenligi kórinip turıptı.

Quramalı procentler usılı jıldı yarım jıllıqlarǵa, shereklerge, aylarǵa, kúnlerge bólip qollanılıwı da múmkin.

6-mısal.

Eger 10000 AQSh dolları muǵdarında qarız jıllıq quramalı procent stavkası 6% penen 1 jılda shereklerge bólip tólew shárti menen alınǵan bolsa, kreditor tárepinen alınatuǵın dáramat qansha boladı?

Sherek	**Qarız** (1)	**Procent tólemi** $= \frac{Crn}{100}$ (2)	**Balans** (1) + (2)
1	\$10000,00	$\$10000{,}00 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$150{,}00$	\$10150,00
2	\$10150,00	$\$10000{,}00 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$152{,}25$	\$10302,25
3	\$10302,25	$\$10302{,}25 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$154{,}53$	\$10456,78
4	\$10456,78	$\$10456{,}78 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$156{,}85$	\$10613,63

Demek, 10000 AQSh dolları muǵdardaǵı qarızdan qutılıwı ushın 1 jıl dawamında 10613,63 AQSh dolları muǵdarındaǵı tólemlerdi ámelge asırıw zárúr. Bunda kreditor 613,63 AQSh dolları muǵdarda dáramat aladı.

Eger qarız bir neshe jılǵa berilgen bolsa, juwmaqlawshı (aqırǵı) balans tómendegishe esaplanadı:

$$A = C\left(1+\frac{r}{100}\right)^n,$$

Bul jerde A — juwmaqlawshı balans, C — dáslep alınǵan qarız muǵdarı, r — hár jılǵa belgilengen procent stavkası, n — jıllar sanı.

Eger qarız n jılǵa berilgen bolsa, tólemler bolsa hár jıldı k bólekke (yarım jıllıqlar, sherekler, aylar hám t.b.) bólip ámelge asırılsa, tólenetuǵın ulıwma muǵdar $A = C\left(1+\frac{r}{100k}\right)^{kn}$ formula boyınsha esaplanadı.

Eki usılda da ulıwma quramalı procent tólemi (ústeme procent) $I = A - C$ formula boyınsha esaplanadı.

6-mısaldı usı formulaǵa súenip shıǵaramız.

$C=10000$, $r=6$, $n=1$, $k=4$.

$A=C\times\left(1+\frac{r}{100k}\right)^{kn}$; $A=10000\times\left(1+\frac{6}{100}\right)^4$; $A=10613{,}64$.

Demek, 10000 AQSh dolları muǵdarındaǵı qarızdan qutılıwı ushın 1 jıl dawamında 10613,64 AQSh dolları muǵdarındaǵı tólemlerdi ámelge asırıw zárúr. Bunda kreditor 613,64 AQSh dolları muǵdarda dáramat aladı.

Eger bankke ápiwayı procent boyınsha qoyılǵan dáslepki pul muǵdarı C sum bolsa, n jıldan soń bank kliyentke $a_n=C(1+\frac{nr}{100})$ sum muǵdarda pul tóleydi, bunda r banktiń jıllıq procent stavkası.

Eger usı pul muǵdarı quramalı procent boyınsha bankke qoyılsa, n jıldan soń bank kliyentke $b_n=C(1+\frac{r}{100})^n$ sum muǵdarında pul tóleydi.

a_n – izbe – izlik arifmetikalıq progressiyanı,

b_n – izbe – izlik geometriyalıq progressiyanı hasıl qılıwı kórinip tur.

Shınıǵıwlar

1. a) 3 000 funt sterling jıllı procent stavkası 7% boyınsha 3 jılǵa qarızǵa alınsa;
b) 6100 AQSh dolları jıllıq procent stavkası 5,9% boyınsha 15 ayǵa qarızǵa alınsa;
c) 800 000 Yaponiya enası jıllıq procent stavkası 6,5% boyınsha 4 jıl 7 ayǵa qarızǵa alınsa;
d) 250 000 evro jıllıq procent stavkası 4,8% boyınsha 134 kúnge qarızǵa alınsa;
kreditorǵa tólenetuǵın procent tólemin tabıń.

2. 130000 AQSh dolları qarızǵa berilgen bolsa, kreditor qaysı hallarda kóbirek dáramat aladı: jıllıq procent stavkası 7% boyınsha 5 jılǵa,
yaki jıllıq procent stavkası 7,7% boyınsha 5,5 *jılǵa belgilengende me?*

3. Kreditor tárepinen procent stavkası hár jılǵa 7% dep belgilengen. Tádbirkar (is bilermen) 5 jıl ishinde alınǵan qarızdı hám procent tólemine qosımsha 910 AQSh dolların tóledi hám qarızdan qutıldı. Tádbirkar (is bilermen) qansha muǵdarda qarız alǵan?

4. Jıllı procent stavkası 8% dep belgilengen. 3 jıl ishinde procent tólemine qosımsha 3456 funt sterling tólengen bolsa, qansha muǵdarda qarız alınǵan?

5. Investor 21 ayda 2300 evro dáramat almaqshı. Hár jılǵı procent stavkası 6,5% dep belgilengen bolsa, investor qansha muǵdarda investiciya kirgiziwi lazım?

6. a) Kreditor 4500 AQSh dolları muǵdarında qarız berip, 3 jılda 900 AQSh dollarına teń dáramat aldı. Jıllıq procent stavkası neshege teń?
b) Kreditor 170000 Yaponiya enası muǵdarında qarız berip, 2 jılda 170000 Yaponiya enasına teń dáramat aldı. Jıllıq procent stavkası neshege teń?

7. 8 ay dawamında 9000 AQSh dolları muǵdarında qarız alınıp, qarızdan basqa (tısqarı) qosımsha 700 AQSh dolları tólendi. Jıllıq procent stavkası neshege teń?

8. Puqara 26 million sum bankke qoyıp, onıń esabında 18 ayda 32 million sum bolǵanın anıqladı. Jıllıq procent stavkası neshege teń?

9. a) Kreditor 20000 AQSh dolları qarız berip, 5000 AQSh dollarına teń dáramat aldı. Jıllıq procent stavkası 7% bolsa, qarız neshe jılǵa alınǵan?

b) Kreditor 1200 evro muǵdarında qarız berip 487 evro dáramat aldı. Jıllıq procent stavkası 6,75% bolsa, qarız neshe jılǵa alınǵan?

10. Kliyent bankke 9400 funt sterlingdi jıllıq procent stavkası 6,75% penen qoydı. 1800 funt sterling dáramat alıw ushın qansha waqıt kerek?

11. Eger:

a) 4500 evro qarız jıllıq quramalı procent stavkası 7% penen 3 jılda tólew shárti menen;

b) 6000 AQSh dolları qarız jıllıq quramalı procent stavkası 5% penen 4 jılda tólew shárti menen;

c) 7400 funt sterling muǵdarında qarız jıllıq quramalı procent stavkası 6,5% penen 3 jılda tólew shárti menen alınǵan bolsa, juwmaqlawshı (aqırǵı) balanstı esaplań.

22-24 MÁSELELER SHESHIW

1-másele.

Meyli, is bilermen 23000 AQSh dolları muǵdarında qarızdan qutılıwı ushın tólemlerdi hár jılı emes, máselen, ayma-ay teń bóleklerde ámelge asırıwǵa qarar qıldı. Eger tólew dáwiri 6 jıl, jıllıq procent stavkası 8% bolsa, ol hár ayda qanday muǵdardaǵı tólemlerdi ámelge asırıwı kerek?

1-qádem

Procent tólem muǵdarın esaplaymız.

C=23 000, r=8%, n=6 bolǵanı ushın

$$I=\frac{Crn}{100}=\frac{23000\cdot 8\cdot 6}{100}=\$11040.$$

2-qádem

Artqan kapital pul muǵdarın, yaǵnıy ulıwma tólenetuǵın summanı esaplaymız:

$$C+I=\$23000+\$11040=\$34040.$$

3-qádem

Neshe ay dawamında tóleniwi kerekligin esaplaymız:

$$6\times12=72 \text{ oy.}$$

4-qádem

Demek, hár ayda tólenetuǵın pul muǵdarı

$$\frac{\$34040}{72}\approx\$472{,}78 \text{ ge teń.}$$ ▲

2-másele.

Eger 8800 evro qarız jıllıq quramalı procent stavkası 4,5% penen hár jılı tólew shárti menen alınǵan bolsa, kreditor tárepinen 3,5 jılda alınǵan dáramat qansha boladı?

△ $C=8800,\ r=4{,}5\%,\quad n=3{,}5,\quad k=12\times3\frac{1}{2}=42$

Demek, $A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn};\qquad A=8800\times(1+\frac{4.5}{1200})^{42},$

$A=10298{,}08,$ yaǵniy $I=A-C=10298{,}08-8800=1498{,}08$

3,5 jılda alınǵan dáramat €1498,08 ge teń. ▲

3-másele.

Eger bankten 50000 AQSh dolları muǵdarında alınǵan kredit jıllıq quramalı procent stavkası 5,2% penen hár sherekte tólew shárti menen alınǵan bolsa, bankke 3 jılda qansha AQSh dolları tólenedi?

△ $A=50000,\quad r=5{,}2\%,\quad n=3,\quad k{\cdot}n=4\times3=12$

Demek, $A=C\times(1+\frac{r}{100k})^{kn}\qquad 50000=C\times(1+\frac{5,2}{400})^{12}$

$C=42820{,}99.$ Bankke 3 jılda \$42821 tólenedi. ▲

Jaylar, imáratlar, texnikalıq qurallar, ásbap-úskineler, inventarlar, kompyuterler hám t.b. lar paydalı xızmet múddeti dawamında eskiredi. Eskiriw olardan paydalanıw waqtında usı qurallardıń texnikalıq óndiris qásiyetlerin áste-sekin joǵaltıw processin jobalaydı.

Amortizaciya paydalanılǵan qurallar bahaların olardıń eskiriwine muwapıq túrde zattıń ózine túser bahasına, dáwir qárejetlerine ótkiziw, paydalanılǵan qurallardıń ornın qaplaw máqsetinde pul fondın (xorın) jámlew processin jobalaydı.

Amortizaciya mánisin esaplaw ushın tómendegi formuladan poydanalıladı:

$$A=C\times(1-\frac{r}{100})^{n},$$

Bul jerde A – n dáwir bóleginen keyin bolǵan amortizaciya mánisi, C – dáslepki baha, r – hár jılǵa belgilengen amortizaciya normasi, n – dáwir bólekleri sanı (máselen, jıllar).

4–másele.

Qurılıs úskenesi 2400 funt sterling bahada satıp alınǵan. Eger amortizaciya normasi 15% dep belgilengen bolsa, onıń 6 jıldan keyingi mánisin tabıń..

△ $A=C\times(1-\frac{r}{100})^n$, bul jerde $C=2400$, $r=15$, $n=6$.

Demek,

$A=2400\times(1-0{,}15)^6$,

$A=2400\times(0{,}85)^6$.

Amortizaciya mánisi shama menen 905.16 funt sterling ekenligin tabamız. Demek, úskinenıń 6 jıldan keyingi mánisı

£2400 – £905,16 = £1494,84 ke teń. ▲

Paydalanılǵan tovar (máselen mebel, elektron – kúndelikli texnika, kompyuter, avtomashina hám t.b.) lardı yaki úy – jaydı (ipoteka) satıp alıw ushın túrli kreditlerdi rásmiylestiredi. Ádette, bunday kreditler qısqa múddetlerge beriledi hám turaqlı yaki ózgeriwsheń ústeme procent belgilenedi.

Tómende biz fomulalardan paydalanbastan tez esap – kitaplar ushın kredit tólemi kestesin keltiremiz (1000 pul birligine muwapıq):

Aylar	Jıllıq ústeme procent						
	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%
12	86,0664	86,5267	86,9884	87,4515	87,9159	88,3817	88,8488
18	58,2317	58,6850	59,1403	59,5977	60,0571	60,5185	60,9820
24	44,3206	44,7726	45,2273	45,6847	46,1449	46,6078	47,0735
30	35,9789	36,4319	36,8883	37,3482	37,8114	38,2781	38,7481
36	30,4219	30,8771	31,3364	31,7997	32,2672	32,7387	33,2143
42	26,4562	26,9142	27,3770	27,8445	28,3168	28,7939	29,2756
48	23,4850	23,9462	24,4129	24,8850	25,3626	25,8455	26,3338
54	21,1769	21,6416	22,1124	22,5894	23,0724	23,5615	24,0566
60	19,3328	19,8012	20,2764	20,7584	20,2470	21,7424	22,2444

5-másele.

Puqara 9200 evro kredit aldı. Oǵan 12% jıllıq procent tólemi hám 3,5 jıllıq tólew múddeti belgilengen. Bir ayǵa qansha tóleniwi kerek? Barlıǵı bolıp qansha tóleniwi kerek?

Tólew múddeti 42 ay bolǵanı ushın kestelerden hár bir 1000 evroǵa €29,2756 evro tóleniwi kerekligin anıqlaymız.

Demek, 9200 evro ushın hár ayda €9200 = €29,2756×9,2

= €269,33552 ≈ €269,340 tólewi kerek.

Barlıǵı bolıp = €269,40×42 = €11314,80 tólewi kerek.

Shınıǵıwlar

12. 10000 AQSh dolları muǵdarında qarız 10 jılǵa jıllıq procent stavkası 5,75% boyınsha alındı. Qarız tólemlerin teń bóleklerde hár yarım jılda qanday muǵdarda ámelge asırıwı kerek?

13. 15000 evro muǵdarındaǵı qarız 36 ayǵa jıllıq procent stavkası 4,5% boyınsha alındı. Qarız tólemlerin teń bóleklerde hár sherekte qanday muǵdarda beriw kerek?

14. Bir kisi bankten 8000 funt sterlingdi 3,5 jılǵa hár ayda 230 funt sterling tólew shárti menen kreditke aldı. Oǵan qanday jıllıq procent stavkası belgilengen edi?

15. 6800 AQSh dolları muǵdarındaǵı qarız 2,5 jılǵa jıllıq procent stavkası 8% boyınsha alındı. Qarız tólemlerin teń bóleklerde ayma-ay tólew ushın hár ayda qanday muǵdarda beriw kerak?

16. Eger

a) 950 evro muǵdardaǵı qarız jıllıq quramalı procent stavkası 5,7% penen 2 – jıldıń aqırında;

b) 4180 funt sterling muǵdarındaǵı qarız jıllıq quramalı procent stavkası 5,75% penen 3 – jıldıń aqırında;

c) 237000 Yaponiya yenası muǵdarındaǵı qarız jıllıq quramalı procent stavkası 7,3% penen 4 – jıldıń aqırında esaplansa, ulıwma quramalı procent tólemin tabıń.

17. Maks 8500 AQSh dolları muǵdarındaǵı bank depozitine pul qoydı. Jıllıq quramalı procent stavkasın 6% belgilep, bank Maks hár sherekte esabına pul ótkizbekte. 1 jıldan soń Makstiń esabında qansha pul boladı?

18. Mariya 24000 funt sterlingdi jıllıq quramalı procent stavkası 5% boyınsha bankke qoydı. Hár ayda bank onıń esabına pul ótkizbekte. 3 aydan soń Mariyanıń esabında qansha pul boladı?

19. Kreditor 45000 AQSh dolları muǵdarında jıllıq quramalı procent stavkası 8,5% boyınsha qarız berdi. Eger tólemler

a) ápiwayı procentler;

b) hár yarım jılǵa quramalı procentler;
c) hár sherekte quramalı procentler boyınsha ámelge asırılsa, 3 jıldan soń alınǵan dáramtlardı salıstırıń.

20. Ofis ushın mebel 2500 evroǵa satıp alındı. Bunday zatlardıń amortizaciya normasi 15% ke teń ekenligi málim. Tómendegi kesteni dápterińizge kóshiriń hám toltırıń.

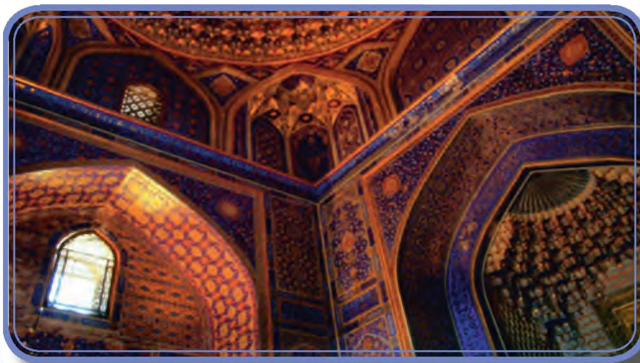
Jıllar	Amortizaciya	Bahası
0		€2500
1	15%·€2500 = €375	
2		
3		

21. Puqara mebel satıp alıw ushın 1200 AQSh dolları muǵdarında kredit aldı. Jıllıq procent stavkası 8%, tólew múddeti 5 jıl bolsa, ol hár ayda qancha tólewi kerek? Barlıǵı bolıp qansha pul muǵdarı tólenedi? Kredit tólemi kestesinen paydalanıń.

22. Puqara úy-jaydı ońlaw ushın 14000 AQSh dolları muǵdarında kredit aldı. Jıllıq procent stavkası 11%, tólew múddeti 4 jıl bolsa, ol hár ayda qansha tólewi kerek? Barlıǵı bolıp qancha pul muǵdarı tólenedi? Kredit tólewi kestesinen paydalanıń.

Baqlaw jumısı tapsırmaları

1. Bank tárepinen hár jılǵa procent stavkası 14% dep belgilengen. Tádbirkar (is bilermen) banktan alǵan qarızın hám procent tólemine qosımsha 16000000 sumdı 5 jıl ishinde tóledi hám qarızdan qutıldı. Tádbirkar (is bilermen) qancha muǵdarda qarız alǵan?
2. Puqara dáslep bankke 20000000 sum amanat qoyıp 15 ayda 900000 sum dáramat aldı. Eger tólem hár jılı ámelge asırıǵan bolsa, jıllıq procent stavkası neshege teń?
3. Eger 20000000 sum qarız jıllıq quramalı procent stavkası 6% penen 1 jılda shereklerge bólip tólew shárti menen alınǵan bolsa, kreditor alatuǵın dáramadı qansha boladı?
4. Djon úy-jay satıp alıw ushın 5 jılǵa 25000 AQSh dolları muǵdarında kredit alǵan. Jıllıq quramalı procent stavkası 8% bolsa hám tólemler hár ayda ámelge asırılatuǵın bolsa ol hár ayda qancha pul tólewi kerek? Kreditor qansha dáramat aladı?
5. Úskene 45000 AQSh dollarına satıp alındı hám 2 jıl 3 aydan soń eskiriw nátiyjesinde onıń bahası 28500 AQSh dollarına teń. Úskeneniń jıllıq amortizaciya normasın tabıń.



III BAP

ELEMENTAR FUNKCIYALAR HÁM TEŃLEMELER

25-28 APIWAYI RACIOLNAL TENLEMELER HÁM OLARDÍŃ SISTEMALARÍ

Eger bir teńlemeniń barlıq sheshimleri ekinshi teńlemeniń de sheshimleri bolsa, onda ekinshi teńleme birinshisiniń *nátiyjesi* delinedi.

Ekinshi teńlemeniń sheshimleri kóplikleri ústpe – úst tússe, bunday teńlemeler *teń kúshli* delinedi.

1-mısal. Teńlemeler teń kúshli me?

1) $x+2=3$ hám $x+5=6$; 2) $\dfrac{x^2+x}{x-1}=0$ hám $\dfrac{x+1}{x-1}=0$.

△ 1) Eki teńleme birdey korenge iye: $x = 1$. Basqa korenler joq bolǵanı ushın bul teńlemeler teń kúshli.

2) Birinshi teńleme 0 korenge iye, ekinshisi bolsa bunday korenge iye emes. Demek, berilgen teńlemeler teń kúshli emes. ▲

x ózgeriwshili eki $P(x)$ hám $Q(x)$ kóp aǵzalı berilgen bolsın.

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ kórinisindegi ańlatpa *racional ańlatpa* delinedi.

Eger $A(x)$ hám $B(x)$ – racional ańlatpa bolsa,

$$A(x)=B(x)$$

kórinisindegi teńleme *racional teńleme* delinedi.

Dáslep eń ápiwayı kórinistegi

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \qquad (1)$$

racional teńlemeni qarayıq.

$\frac{m}{n}$ bólshek nolge teń bolıwı ushın onıń alımı nolge teń bolıwı, bólimi bolsa nolge teń bolmaslığı (0 ge bóliw múmkin emes!) zárúr hám jeterli ekenligi málim.

Demek, (1) teńlemeni shığarıw ushın $Q(x)\neq 0$ hám $P(x)=0$ shártlerdi bir waqıtta qanaatlantıratuğın x belgisizdiń barlıq mánislerin tabıw zárúr hám jeterli. Bul jağday qısqa kóriniste tómendegishe jazıladı:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

2-mısal. Teńlemelerdi sheshiń (shığarıń):

1) $\frac{x^2-2x+1}{x-7}=0$; 2) $\frac{x^2-2x+3}{x-7}=0$;

3) $\frac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}=0$; 4) $\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-1}=0$.

△ 1) $x^2-2x+1=0$ teńleme jalğız $x=1$ korenge iye. $x=1$ bolğanda bólimi nolden parıqlı. Demek, berilgen teńleme jalğız (tek ğana bir) $x=1$ sheshimge iye.

2) $x^2-2x+3=0$ kvadrat teńleme sheshimge (haqıyqıy sheshimge) iye emes, sebebi $D=1-3=-2<0$. Demek, berilgen teńleme korenlerge iye emes.

3) $2x^2-5x+3=0$ kvadrat teńleme ushın. $D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1>0$, demek bul teńleme eki korenge iye: $x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{4}$; $x_1=\frac{5-1}{4}=1$; $x_2=\frac{5+1}{4}=1,5$.

Biraq 1,5 sanı $\frac{2x^2-5x+3}{9x-13,5}$ ańlatpanıń bólimin nolge aylantıradı, 1 sanı bolsa – yaq. Demek, berilgen teńleme jalğız $x=1$ korenge iye.

4) $(x-1)^2(x+2)=0$ teńleme 1 hám –2 eki korenge iye. Biraq 1 sanı $(x-1)$ bólimdi nolge aylantıradı, –2 sanı bolsa – yaq. Demek, berilgen teńleme jalğız $x=-2$ korenge iye. ▲

Eger $A(x)$ yaki $B(x)$ ańlatpanıń keminde birewi bir neshe racional ańlatpalar qosındısı kórinisinde bolsa, $A(x)=B(x)$ racional teńlemeni sheshiw qağıydası sonday bolıwı múmkin:

1-qádem. Teńlemege kirgen bólshektiń ulıwma bólimi tabıladı;
2-qádem. Teńlemeniń eki bóleginin ulıwma bólimge kóbeytiriledi;
3-qádem. Hasıl bolğan teńleme korenleri tabıladı;
4-qádem. Tabılğan korenlerden ulıwma bólimin nolge aylantıratuğınları alıp taslanadı.

3-mısal. $\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{x(2-x)}$ Teńlemeni sheshiń.

△ Teńlemeniń eki tárepin $2x(2-x)$ ulıwma bólimge kóbeytemiz.

Hasıl bolǵan $4x+x(2-x)=8$ teńlemede ápiwayılastırıwlardı orınlap, usı kvadrat teńlemege kelemiz: $x^2-6x+8=0$;

$$D=9-8=1>0,$$

Demek, bul teńleme eki korenge iye: $x_1=2$; $x_2=4$.

Tekseriw.

Eger $x=2$ bolsa, bólim $x(2-x)=2(2-2)=0$. Yaǵnıy $x=2$ berilgen teńlemeniń koreni emes.

Eger $x=4$ bolsa, bólim $x(2-x)=4(2-4)\neq 0$. Yaǵnıy $x=4$ berilgen teńlemeniń koreni. *Juwap:* 4 ▲

Eger $A(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$; $B(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ kórinisinde bolsa, $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ kórinistegi racional teńlemeni sheshiw ushın $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ proporciyanıń tiykarǵı qásiytinen paydalanıw máqsetke muwapıq:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc.$$

Bunda tómendegi algoritm boyınsha is tutıladı:

1-qádem. $f(x)q(x)=p(x)g(x)$ teńleme korenleri tabıladı;

2-qádem. Tabılǵan korenlerden $q(x), g(x)$ bólimlerin nolge aylantıratuǵınların alıp taslanadı.

4-mısal. $\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x+3}{x-4}$ teńlemeni sheshiń.

△ $(x-2)(x-4)=(x+2)(x+3)$; $x^2-4x-2x+8=x^2+3x+2x+6$;

$-6x+8-5x-6=0$; $-11x=-2$; $x=\dfrac{2}{11}$.

Eger $x=\dfrac{2}{11}$ bolsa, $x+2=\dfrac{2}{11}+2\neq 0$; $x-4=\dfrac{2}{11}-4\neq 0$.

Juwap: $\dfrac{2}{11}$. ▲

Ayırım hallarda berilgen teńlemede qolay almastırıw orınlaw, ápiwayılıraq teńlemege keliw múmkin.

5-mısal. Teńlemeni sheshiń:

1) $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^4+5\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2-36=0$; 2) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+2}+\frac{x}{x^2-2x+2}=1.$

△ 1) $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2=t$ almastırıw orınlaymız. Bul halda $t\geq 0$ hám teńleme $t^2+5t-36=0$ kórinisti aladı. Aqırǵı teńleme $t=-9$ hám $t=4$ korenlerge iye, solardan ekinshisi oń.

Demek, $\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2=4$, yaǵnıy $\frac{2x}{x+1}=2$ yamasa $\frac{2x}{x+1}=-2$.

$\frac{2x}{x+1}=2$ teńleme sheshimge iye emes, $\frac{2x}{x+1}=-2$ teńleme bolsa jalǵız $x=-0,5$ sheshimge iye.

Juwap: $x=-0,5$. ▲

2) $x=0$ sanı teńlemeni qanaatlantırıwı kórinip turıptı. Meyli, $x\neq 0$ bolsın. Teńlemeniń alımın hám bólimin x ke bólsek:

$\frac{x+3+\frac{2}{x}}{x-1+\frac{2}{x}}+\frac{1}{x-2+\frac{2}{x}}=1$ teńlemeni hasıl qılamız

$z=x+\frac{2}{x}-2$ almastırıwdı orınlasaq, berilgen teńleme

$\frac{z+5}{z+1}+\frac{1}{z}=1$ kórinisti aladı.

Aqırǵı teńlemeni shıǵaramız:

$$\frac{z+5}{z+1}+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow \frac{(z+5)z}{(z+1)z}+\frac{z+1}{z(z+1)}-\frac{z(z+1)}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2+5z+z+1-z^2-z}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{5z+1}{z(z+1)}=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{5}$$

Endi x ti tabamız.

$$x+\frac{2}{x}-2=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow x+\frac{2}{x}-\frac{9}{5}=0 \Leftrightarrow 5x^2-3x+10=0.$$

$5x^2-9x+10=0$ kvadrat teńlemeniń diskriminantı teris bolǵanlıǵı ushın, ol haqıyqıy sheshimge iye emes.

Juwap: $x=0$. ▲

Racional teńlemeler sistemaları

Racional teńlemelerden quralǵan sistemalardı sheshiw (shıǵarıw) bizge málim bolǵan qosıw, ornına qoyıw hám t.b. usıllarǵa súyenedi. Bunda qatnasqan racional ańlatpalardıń bólimleri nolge teń bolmaslıǵın aytıp ótemiz.

6-mısal. Sistemanı sheshiń:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2xy - 3\dfrac{x}{y} = 15, \\ xy + \dfrac{x}{y} = 15. \end{cases}$

△ 1) Birinshi teńlemede $\dfrac{x}{y} = t$ almastırıw orınlasaq, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{t}$ $(t \neq 0)$ boladı.

$$t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 6t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2}, \\ t = -\dfrac{2}{3} \end{array} \right. \text{ yaǵniy } \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{x}{y} = -\dfrac{2}{3}. \end{array} \right.$$

Bunnan yaki $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y, \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ yaki $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}y, \\ x^2 - y^2 = -5. \end{cases}$ sistemalardı hasıl qılamız.

Bul sistemalardı sheshemiz:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{9}{4}y^2 - y^2 = 5 \end{cases} \text{ yaki } \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{4}{9}y^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

Birinshi sistema (3, 2), (–3, –2) sheshimlerge iye, ekinshi sistema bolsa sheshimge iye emes.

Juwap: (3; 2), (–3; –2).

2) $a = xy$, $b = \dfrac{x}{y}$ belgilew kirgizeyik.

$$\begin{cases} 2a - 3b = 15, \\ a + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12, \\ b = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 12, \\ \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y \cdot 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 4. \end{cases}$$

Juwap: (6; 2), (–6; –2).▲

Soraw hám tapsırmalar

1. Racional teńlemege anıqlama beriń.
2. Teń kúshli teńlemelerge anıqlama beriń.
3. Teń kúshli teńlemeler sistemasına mısal keltiriń.

Shınıǵıwlar

1. Teńlemelerdi sheshiń (1–2):

a) $\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$; b) $\frac{2y-5}{y+5}=\frac{3y+21}{2y-1}$; c) $\frac{5x-7}{x-3}=\frac{4x-3}{x}$;

d) $\frac{2x}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x}{x^2-1}$; e) $\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$; f) $\frac{1}{x}-\frac{2x}{x+1}=0$;

g) $\frac{7}{2x+9}-6=5x$; h) $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{2}$; i) $\frac{15}{x-2}=\frac{14}{x}+1$.

2. a) $\frac{1}{x^2-12x+36}+\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x+6}$; b) $\frac{8c-3}{4c^2-2c+1}+\frac{6}{8c^3+1}=\frac{2}{2c+1}$;

c) $\frac{3x-2}{x-1}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$; d) $\frac{2-3x}{x+1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{2-3x}=\frac{4}{3}$;

e) $\frac{x-49}{x+6}+\frac{2x+50}{x+5}=2$; f) $\frac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$.

3. Teń kúshli teńlemelerdi kórsetiń:

a) $\frac{(5x-4)}{x+1}=0$; b) $5x-4=0$; c) $(5x-4)(x+1)=0$;

d) $10x=8$; e) $\left(x-\frac{4}{5}\right)(x+1)=0$; f) $6x-4=x$;

g) $x^2+2x+18=0$; h) $2x^2+2x+11=0$.

4. Teńlemeler sitemasın sheshiń (4–7):

a) $\begin{cases}\frac{x}{2y+3}=3,\\ \frac{y}{2y+3}=-\frac{1}{9};\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{5}{y}=2,\\ \frac{5}{x}+\frac{3}{y}=2;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{12}{x}+\frac{25}{y}=7,\\ \frac{6}{x}+\frac{5}{y}=2.\end{cases}$

5. a) $\begin{cases}\frac{5x}{8y}=\frac{8y}{5x},\\ 5x-8y=20;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+\frac{7}{y}=11,\\ 7x+\frac{2}{y}=16;\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{(x-9)(x-6)}{y+8}=0,\\ \frac{(y+8)(y-8)}{x-6}=0.\end{cases}$

6. a) $\begin{cases} 4x = \dfrac{25}{y} + 15, \\ 4y = \dfrac{25}{x} + 15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4x-7} = -\dfrac{y}{4x-7}, \\ 4x^2 - 11y + 7 = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{5x-4y} = \dfrac{y}{5y-4x}, \\ xy = -16. \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} (x+1)(x-8) = 0, \\ \dfrac{y-3}{x+y-2} = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4}{y^2}, \\ xy = -8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^5} = 5\dfrac{x^2}{y^4}, \\ x - 5y = 15. \end{cases}$

8. Klubtıń zalında 320 dana orınliq bolıp, qatarlar boyınsha birdey bo'listirilgen(taqsımlanǵan). Hár bir qatardaǵı orınliqlar sanı 4 ke arttırılıp, jáne bir qatar qoyılǵannan soń zalda 420 orın boldı. Zaldaǵı qatarlar sanı qansha boldı?

9. 108 imtixan tapsırıwshı shıǵarma jazdı. Olarǵa 480 bet qaǵaz tarqatıldı, sonıń menen birge hár bir qız hár bir ul balaǵa qaraǵanda bir bet artıq qaǵaz aldı. Hámme qızlar bolsa ul balalar neshe bet qaǵaz alǵan bolsa, sonsha bet qaǵaz aldı. Neshe qız hám ul balalar bolǵan?

29-32 ÁPIWAYÍ IRRACIONAL TEŃLEMELER HÁM OLARDÍŃ SISTEMALARÍ

Ózgeriwshisi koren astında qatnasqan teńleme *irracional teńleme* delinedi.

Irracional teńlemelerdiń bazı bir túrlerin sheshiw usılların keltireyik.

I $$\sqrt{f(x)} = g(x) \qquad (1)$$

Kórinistegi ápiwayı irracional teńlemeni qarayıq.

$f(x)$, $g(x)$ ańlatpalar teris emes bolǵanda bul teńlemeniń eki bólegin kvadratqa kótersek, teń kúshli teńlemege kelemiz.

$f(x)=g^2(x)\geqslant 0$ bolǵanı ushın $f(x)$ ańlatpa teris emes boladı.

Demek, teńlemeni sheshiw $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

qaǵıyda boyınsha ámelge asırıladı.

Tap sonday $\sqrt[2n]{f(x)} = h(x)$ kórinistegi teńleme $\begin{cases} f(x) = h^{2n}(x) \\ h(x) \ge 0 \end{cases}$ sistemaǵa teń kúshli.

1-mısal. $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$ teńlemeni sheshiń.

△ Teńlemeni hár eki jaǵın (bólegin) kvadratqa kóteremiz hám nátiyjede $2x-x^2=x^2-4x$ yaki $2x(x-3)=0$ teńlemege iye bolamız. Bunnan $x_1=0$, $x_2=3$ korenlerdi hasil qilamiz. $x>2$ bo'lgani uchun $x=3$ berilgen teńlemeniń sheshimi. ▲

II $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ *kórinistegi teńleme.*

Eki ańlatpanıń kóbeymesi nolge teń bolıwı ushın, olardan keminde birewi nolge teń bolıwı kerek.

Demek, $f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0$ bolıwı ushın yaki $g(x)=0$ teńlik yaki $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$ sistema orınlı bolıwı kerek.

Bul jaǵday qısqasha $\left[\begin{array}{l} g(x)=0, \\ \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$ kibi jazıladı.

2-mısal. $(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0$ teńlemeni sheshiń.

△ $(x^2+3x-10)\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+3x-10=0, \\ x+4\ge 0, \end{cases} \\ x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x+4\ge 0, \end{cases} \\ x=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-4. \end{array}\right.$

Juwap: -4 hám 2. ▲

3-mısal. $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$ teńlemeni sheshiń.

△Berilgen teńleme $(x-3)(\sqrt{x^2-5x+4}-2)=0$ kóriniske keltiriledi.

$\begin{cases} x=3, \\ x^2-5x+4\ge 0 \end{cases}$ sistema sheshimge iye bolmaǵanlıǵı ushın $\sqrt{x^2-5x+4}=2$ teńlemeni qaraw jeterli. Bul teńlemeniń eki tárepin kvadratqa kótersek, oǵan teń kúshli bolǵan $x^2-5x+4=4$ teńlemeni hasıl qılamız.

Juwap: 0 hám 5. ▲

III $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$ *kórinistegi teńleme.*

Bunday teńlemelerdi sheshiwde koren dárejesi n sanınıń – jup–taqlıǵına qaraladı hám berilgen teńlemeni teń kúshli teńlemege alıp kelinedi.

Eger *n - taq bolsa:* $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Máselen, $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)}$ teńleme $f(x)=g(x)$ teńlemege teń kúshli.

4-mısal. $\sqrt{x\ \ +8x-8}=\sqrt{2x-1}$ teńlemeni sheshiń.

△ $\sqrt{x^2+8x-8}=\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^2+8x-8=2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-7. \end{array}\right.$

Juwap: 1 hám -7. ▲

Eger *n jup,* yaǵnıy $n=2k$ bolsa, berilgen teńleme usı sistemalardıń hár birine teń kúshli boladı:

$$\sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \quad \text{yamasa} \quad \sqrt[2k]{f(x)}=\sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$$

Ámelde solardan ańsatıraǵı bolǵanları tańlanadı.

5-mısal. $\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}$ teńlemeni sheshiń.

$$\triangle \ \sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2=x, \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Juwap: $x=2$. ▲

IV *O'zgeriwshilerdi almastırıw*

6-mısal. $\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}=4$ teńlemeni sheshiń.

△ $u=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$ almastırıw kirgizemiz. Ol jaǵdayda

$$\begin{cases} u+\dfrac{3}{u}=4, \\ u\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=1, \\ u=3, \end{array}\right. \\ u\geq 0. \end{cases}$$

Endi berilgen teńlemeniń korenlerin tabamız.

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=1, \\ \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1,2. \end{array}\right.$$

Juwap: $x=2$ hám $x=1,2$. ▲

7-mısal. $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$ teńlemeni sheshiń.

△ $z=\sqrt{x^2+3x}$ almastırıw kirgizemiz.

$$\begin{cases} z^2+z=6, \\ z\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} z=-3, \\ z=2, \end{array}\right. \\ z\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z=2.$$

Endi berilgen teńlemeniń korenlerin tabamız.

$$\sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Juwap: $x=-4$ hám $x=1$. ▲

Irracional teńlemeler sisteması

Irracional teńlemelerden quralǵan sistemalardı sheshiw bizge málim bolǵan qosıw, ornına qoyıw hám t.b. usıllarǵa súyenedi (tayanadı). Álbette bunda qatnasqan irracional ańlatpalar bar tarawlarǵın inábatqa alıw kerekligin aytıp ótemiz

8-mısal. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

△ $$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2\sqrt{xy}=25, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13, \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x(13-x)=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=13-x, \\ x^2-13x+36=0. \end{cases}$$

Bul sistemadan (4; 9) hám (9; 4) sheshimlerdi tabamız. ▲

9-mısal. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.

△ $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$ dep belgileymiz, hám de qısqa kóbeytiw formulasınan paydalansaq

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^3+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ u^2-uv+v^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ (u+v)^2-3uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3, \\ uv=2. \end{cases}$$

sistemaǵa iye bolamız. Bul sistemanıń sheshimi $u_1=1$, $v_1=2$, $u_2=2$, $v_2=1$ boladı. Bunnan (1; 8) hám (8; 1) sheshimlerin tabamız. ▲

10-másele

Tegislikte $A(3;\ 4)$ hám $B(-2;\ 5)$ noqatlardan teń uzaqlıqta jaylasqan $C(x;\ 0)$ noqattı tabıń.

△ $AC=BC$ ekenliginen eki noqat arasındaǵı aralıq formulasına kóre: $\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(0-5)^2}$ irracional teńlemeni payda etemiz.

Bul teńlemeni teń kúshli teńleme qásiyetlerinen hám qısqa kóbeytiw formulalarınan paydalanıp shıǵarsaq, $(x-3)^2+16=(x+2)^2+25$ yaki $-10x=4$ teńlemeni payda etemiz. Aqırǵı teńlemeniń koreni $x=-0{,}4$ boladı. Demek, izlengen noqat $C(-0{,}4;\ 0)$ eken. ▲

11-másele

Tegislikte $A(-1;\ 2)$ hám $B(3;\ -4)$ noqatlardan teń uzaqlıqta jaylasqan hám $y=3x$ tuwrı sızıqta jatıwshı noqattı tabıń.

△ Shártke kóre izlengen noqattıń ordinatası $y=3x$ boladı. Demek, izlenip atırǵan noqat $C(x;3x)$ koordinatalı noqat eken. $AC=BC$ ekenliginen eki noqat arasındaǵı aralıq formulasına kóre, $\sqrt{(x+1)^2+(3x-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(3x+4)^2}$ irracional teńlemeni payda etemiz. Bul teńlemeni shıǵarsaq, $(x+1)^2+(3x-2)^2=(x-3)^2+(3x+4)^2$, yaki $-28x=20$ teńlemege kelemiz. Aqırǵı teńlemeniń koreni $x=-\frac{5}{7}$ boladı. Demek, izlengen noqat $C(-5/7;\ -15/7)$ eken.

Juwap: $C(-5/7;\ -15/7)$. ▲

Soraw hám tapsirmalar

1. Irracional teńlemege anıqlama beriń hám mısal keltiriń.
2. Teń kúshli irracional teńlemege aniqlama beriń.
3. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=a,\\ \sqrt{xy}=b\end{cases}$ kórinistegi teńlemeler sisteması qalay shıǵarıladı?
4. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=a,\\ x+y=b\end{cases}$ kórinistegi teńlemeler sisteması qalay shıǵarıladı?

Shınıǵıwlar

Teńlemeni sheshiń (**10–19**):

10. a) $\sqrt{3x+5}=-8$; b) $\sqrt{4x-6}=9$; c) $\sqrt{5x+9}=17$; d) $\sqrt{13x+5}=-17$.

11. a) $\sqrt{12x-11}=15$; b) $\sqrt{23x+5}=-7$; c) $\sqrt{23x-7}=27$; d) $\sqrt{6x+13}=-2$.

12. a) $\sqrt{x^2-3x+1}=x+2$; b) $\sqrt{x^2+5x+2}=x+4$.

13. a) $\sqrt{x^2+7x+1}=x-1$; b) $\sqrt{x^2-6x+2}=x+5$.

14. a) $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{-2x-1}$; b) $\sqrt{-2x^2-3x-2}=\sqrt{x+1}$.

15. a) $\sqrt{x^2+8x-7}=\sqrt{-x-1}$; b) $\sqrt{-x^2+3x+5}=\sqrt{x+10}$.

16. a) $x^2+3x-1+\sqrt{x^2+3x-9}=0$; b) $x^2-x-7+\sqrt{x^2-x-9}=0$.

17. a) $x^2+2x-11+\sqrt{x^2+2x-1}=0$; b) $x^2-8x+3+\sqrt{x^2-8x-7}=0$.

18. a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=3$; b) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$.

19. a) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+11}=5$; b) $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=3$.

Teńlemeler sistemasın shıǵarıń (**20–23**):

20. a) $\begin{cases}2\sqrt{x}=3y,\\ y^2+2\sqrt{x}=4;\end{cases}$ b) $\begin{cases}5\sqrt{x}=4y,\\ y^2+5\sqrt{x}=5.\end{cases}$

21. a) $\begin{cases}x-4\sqrt{y}=1,\\ x+2y=17;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+2\sqrt{y}=-2,\\ x+2y=2.\end{cases}$

22. a) $\begin{cases}(\sqrt{x}-5)(\sqrt{y}-3)=0,\\ 3x+5y=60;\end{cases}$ b) $\begin{cases}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-3)=0,\\ 3x+2y=15.\end{cases}$

23. a) $\begin{cases}5x-3\sqrt{y}=-34,\\ 5x+3\sqrt{y}=-16;\end{cases}$ b) $\begin{cases}6x-5\sqrt{y}=-37,\\ 6x+5\sqrt{y}=13.\end{cases}$

24. Tegislikte $A(5;\,7)$ hám $B(-3;\,4)$ noqatlardan teń uzaqlıqta jaylasqan $C(x;\,0)$ noqattı tabıń.

25. Tegislikte $A(5;\,9)$ hám $B(-6;\,7)$ noqatlardan teń uzaqlıqta jaylasqan $C(x;\,0)$ noqattı tabıń.

33–36 ÁPIWAYÍ KÓRSETKISHLI TEŃLEMELER HÁM OLARDÍŃ SISTEMALARÍ

Kórsetkishli teńlemeler

Ózgeriwshisi dárejede qatnasqan teńleme *kórsetkishli teńleme* delinedi.

Kórsetkishli teńlemelerdi sheshiwde tómendegi birdeyliklerden paydalanıladı: $(a>0,\quad a\neq 1,\quad b>0)$

1. $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$;
2. $a^x a^y=a^{x+y}$;
3. $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;
4. $a^x b^x=(ab)^x$;
5. $(a^x)^y=a^{xy}$;
6. $a^0=1$.

Kórsetkishli teńlemelerdiń gey bir túrlerin sheshiw usılların keltireyik.

I Birdey tiykarǵa keltiriw

Bul usılda teńleme $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ kórinistegi teńlemege alıp kelinedi. Bunnan $f(x)=g(x)$ boladı.

1-mısal. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ teńlemeni sheshiń.

△ $\frac{3}{7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$ ekenin inábatqa alıp, berilgen teńlemeni.

$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}$ kóriniste jazamız. 1-birdeylikke kóre $3x-7=-7x+3,\quad x=1.$

Juwap: 1. ▲

2-mısal. $0{,}125\cdot4^{2x-8}=\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$ teńlemeni sheshiń.

△ Teńlemeni tómendegi kóriniste jazamız

$$\frac{1}{8}\cdot2^{2(2x-8)}=\left(\frac{1}{4}\cdot2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}\qquad\qquad 2^{-3}\cdot2^{2(2x-8)}=\left(2^{-2}\cdot2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

2-birdeylikke kóre $2^{-3+2(2x-8)}=\left(2^{-2-0,5}\right)^{-x}$ yaki $2^{4x-19}=2^{2,5x}$.

Aqırǵı teńleme $4x-19=2,5x$

teńlemege teń kúshli. Bunnan $x=\frac{38}{3}$.

Juwap: $x=\frac{38}{3}$. ▲

II Yańa o'zgeriwshini kirgiziw.

3-mısal. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$ teńlemeni sheshiń.

△ 2-birdeylikti qollap, teńlemeni $5^{2x}\cdot5^{-1}+5^{x}\cdot5-250=0$ kórinisinde jazıp alamız.

$5^x=t>0$ dep, jańa ózgeriwshi kirgizemiz. Ol jaǵdayda $\frac{1}{5}t^2+5t-250=0$ teńlemege kelemiz.

Ol $t_1=-50$, $t_2=25$ korenge iye. Biraq $t_1=-50$ koren $t>0$ shártti qanaatlantırmaydı. Demek, $5^x=25$ hám $x=2$.

Juwap: $x=2$. ▲

4-mısal. $9^x+6^x=2\cdot4^x$ teńlemeni sheshiń.

△ Teńlemeniń eki jaǵın (bólegin) $4^x\neq0$ ge bólemiz:

$\left(\frac{9}{4}\right)^x+\left(\frac{3}{2}\right)^x=2$ yaki $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x-2=0$.

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$ dep, aqırǵı teńlemeni $t^2 + t - 2 = 0$ kóriniske keltiremiz. Bul teńlemeniń sheshimlerin tabamız: $t_1=-2$, $t_2=1$.

t_1 diń mánisi ushın $t>0$ shárt orınlanbaydı. Demek,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \quad \Rightarrow x = 0.$$

Juwap: $x=0$. ▲

5-mısal. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$ teńlemeni sheshiń.

△ $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = 1$ bolǵanı ushın $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Teńlemeni $\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ kóriniste jazamız.

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t > 0$ dep belgilesek, bunnan $\frac{1}{t} + t = 4$, yaǵnıy $t^2 - 4t + 1 = 0$.

Aqırǵı teńleme $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ korenge iye.

1-hal. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}, \quad \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3}, \quad \frac{x}{2} = 1, \quad x = 2.$

2-hal. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3}, \quad \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}x} = 2-\sqrt{3},$

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}x} = 2-\sqrt{3}, \quad -\frac{x}{2} = 1, \quad x = -2.$

Juwap: $x=-2$ hám $x=2$. ▲

III *Ulıwma kóbeytiwshini qawsırma (dan tısqarıǵa) sırtına*

6-mısal. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ teńlemeni sheshiń.

△ shep tárepte 6^x ti, oń tárepte bolsa 2^x ti qawsırma sırtına shıǵaramız. Nátiyjede $6^x(1+6) = 2^x(1+2+4)$ yaki $6^x=2^x$ teńlemege kelemiz. Bul teńlemeniń eki tárepin $2^x \neq 0$ ge bólsek, $3^x=1$, yaǵnıy $x=0$ di payda qılamız.

Juwap: $x=0$. ▲

Eń ápiwayı kórsetkishli teńlemeler sisteması

7-mısal. Teńlemeler sistemasın sheshiń: $\begin{cases} 3^{x+y}=27, \\ 2^{5x-y}=8. \end{cases}$

Dárejeniń qásiyetlerine kóre teńlemeler sisteması tómendegi teńlemeler sistemasına teń kúshli: $\begin{cases} 3^{x+y}=3^3, \\ 2^{5x-y}=2^3. \end{cases}$ Bunnan $\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-y=3 \end{cases}$ sistemaǵa kelemiz.

Onıń sheshimleri x=1, y=2 ekeni kórinip tur

Juwap: x=1, y=2.

8-mısal. Teńlemeler sitemasın sheshiń: $\begin{cases} 3^{5x+6y}=9, \\ 2^{7x+3y}=8. \end{cases}$

Dárejeniń qásiyetlerine kóre teńlemeler sisteması tómendegi kórinisti aladı:

$$\begin{cases} 3^{5x+6y}=3^2, \\ 2^{7x+3y}=2^3. \end{cases}$$

Aqırǵı teńlemeler sisteması bolsa: $\begin{cases} 5x+6y=2, \\ 7x+3y=3. \end{cases}$ sızıqlı sistemaǵa teń kúshli.

Sızıqlı teńlemeler sistemasınıń 2-teńlemesin (–2) ge kóbeytirip 1-teńlemege qoysaq, $-9x=-4$ teńlemeni payda qılamız. Bunnan $x=\frac{4}{9}$ ekeni tabıladı. Onı 2-teńlemege qoysaq, $\frac{28}{9}+3y=3$ yaki $3y=3-\frac{28}{9}$, yaki $3y=-\frac{1}{9}$, yaki $y=-\frac{1}{27}$ ni tabamız. *Juwap:* $x=\frac{4}{9}$, $y=-\frac{1}{27}$.

9-mısal. Teńlemeler sistemasın sheshiń: $\begin{cases} 4^x+5^y=9, \\ 4^x-5^y=-1. \end{cases}$

$4^x=u$, $5^x=v$ belgilew kiritsek, berilgen teńlemeler sisteması usı kórinisti aladı: $\begin{cases} u+v=9, \\ u-v=-1. \end{cases}$ Bul teńlemeler sistemasınıń sheshimi u=4, v=5. Ol jaǵdayda $4^x=4$ hám $5^y=5$ teńlemeni hasıl qılamız. Bul jerden x=1, y=1 sheshimlerdi tabamız.

Juwap: x=1, y=1.

Shınıǵıwlar

Teńlemeni sheshiń (**26–35**):

26. a) $4^{3x+5}=4^{3-5x}$; b) $7^{4x+5}=7^{9-5x}$; c) $6^{x+5}=6^{3x}$;
d) $8^{x+5}=8^{2-5x}$; e) $11^{x}=11^{2+5x}$; f) $2^{x-5}=2^{25x}$.

27. a) $2\cdot 2^{x+2}-3\cdot 2^{x+1}-5\cdot 2^{x}=-6$; b) $3\cdot 5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot 5^{x+1}=68$;
c) $2\cdot 4^{x+2}+4^{x+1}-5\cdot 4^{x}=31$; d) $2\cdot 7^{x+2}-2\cdot 7^{x+1}-14\cdot 7^{x}=10$.

28. a) $11^{3x^2+46}=11^{x^2+25x}$; b) $3^{x^2-4x}=3^{2(x^2-15)}$;
c) $7^{2x^2-4}=7^{3(x^2-x)}$; d) $5^{5x^2+x}=5^{3(x^2-2x)}$.

29. a) $9^{x}+3^{x}-6=84$; b) $25^{x}+5^{x}-30=0$;
c) $5\cdot 4^{x}+2^{x}-6=0$; d) $9^{x}+3^{x}-12=0$.

30. a) $9\cdot 25^{x}-7\cdot 15^{x}-16\cdot 9^{x}=0$; b) $7\cdot 16^{x}+9\cdot 12^{x}-16\cdot 9^{x}=0$.

31. a) $4^{x}+7\cdot 6^{x}-8\cdot 9^{x}=0$; b) $9\cdot 16^{x}+7\cdot 12^{x}-16\cdot 9^{x}=0$.

32. a) $\dfrac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$; b) $\dfrac{4}{5}\cdot(0,8)^{x-1}=(1,25)^{x+3}$.

33. a) $32^{x^2+x}=\dfrac{4}{16^{x}}$; b) $4^{x}-10\cdot 2^{x-1}=24$.

34. a) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; b) $5\cdot 2^{3(x-1)}-3\cdot 2^{5-3x}+7=0$.

35. a) $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0$; b) $8^{x}+18^{x}=2\cdot 27^{x}$.

36. Kliyent 100 000 000 sumdı banke jıllıq 22% procent stavkası menen belgili (málim) bir múddetke qoydı. Múddet aqırında ol 221 533 456 sum aldı. Pul neshe jılǵa qoyılǵan ekenin tabıń.

37. Tádbirkar (is bilermen) 10 000 000 sumdı bankke jıllıq 21% procent stavkası menen belgili (málim) múddetke qoydı. Múddet aqırında ol 17 715 610 sum aldı. Pul neshe jılǵa qoyılǵan ekenin tabıń.

38. Xalıqtıń sanı jılına 4% artsa, neshe jıldan soń xalıqtıń sanı 3 ese artadı?

39. Xalıqtıń sanı jılına 2% kemeyse, neshe jıldan soń ol 10% kemeyedi?

Teńlemeler sistemasın sheshiń (**40–43**):

40. a) $\begin{cases}3^{5x-6y}=27,\\ 2^{7x+3y}=32;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+16y}=81,\\ 2^{3x-5y}=4;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3^{x+2y}=81,\\ 9^{3x}\cdot 3^{y}=27.\end{cases}$

41. a) $\begin{cases}3^{5x-y}=243,\\ 2^{7x+11y}=16;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{x+8y}=9,\\ 2^{x-12y}=64;\end{cases}$ c) $\begin{cases}2^{x}+2^{y}=6,\\ 2^{x}-2^{y}=2.\end{cases}$

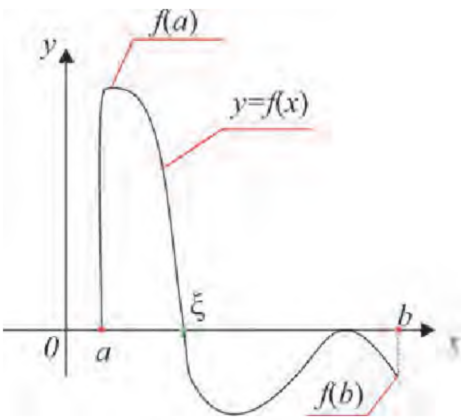
42. a) $\begin{cases} 5^{3x-y}=25, \\ 2^{x^2+xy+y^2}=8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^{x+2y}=125, \\ 2^{x^2+3xy-y^2}=8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 11^x+7^y=18, \\ 11^x-7^y=4. \end{cases}$

43. a) $\begin{cases} 5^{x+y}=25, \\ 2^{x^2-3xy+2y^2}=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^{3x-y}=25, \\ 2^{x^2+xy+y^2}=8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6^x+3^y=39, \\ 6^x\cdot 3^y=108. \end{cases}$

37-38 TEŃ LEMELERDI SHAMALAP SHIGARIW

Eger $f(x)$ kópagzalı $[a, b]$ kesindi ushlarında túrli belgili mánislerdi qabıl etse, yagnıy $f(a)\cdot f(b)<0$ bolsa, bul kesindi ishinde $f(x)=0$ teńlemeniń keminde bir sheshimi bar (boladı). Yagnıy, sonday $\xi\in[a, b]$ ("ksi" dep oqıladı) tabıladı, bunda $f(\xi)=0$ boladı.

Bul tastıyq tómendegi sızılmada súwretlengen.



Teńlemeniń tek gana bir sheshimin óz ishine algan $[a, b]$ kesindini qarayıq.

Kesindini teń ekige bóliw usılı $[a, b]$ kesindi hasıl bolatugın kesindi uzınlıgı berilgen ε anıqlıqtan kishi bolganga shekem teń ekige bóliwden ibárat

Bunıń ushın:

1) $x=a$ da $f(x)$ ańlatpanıń $f_a=f(a)$ mánisi esaplanadı.

2) kesindi teń ekige bólinedi, yagnıy $x=(a+b)/2$ esaplanadı;

3) $f(x)$ ańlatpanıń $x=(a+b)/2$ degi f_x mánisi esaplanadı.

4) $f_a\cdot f_x>0$ shárt tekseriledi;

5) eger bul shárt orınlansa, jańa kesindiniń shep shegarası retinde (sıpatında) aldıngı kesindiniń ortası alınadı, yagnıy $a=x$, $f_a=f_x$ dep alınadı (kesindiniń shep shegarası ortaga ótedi);

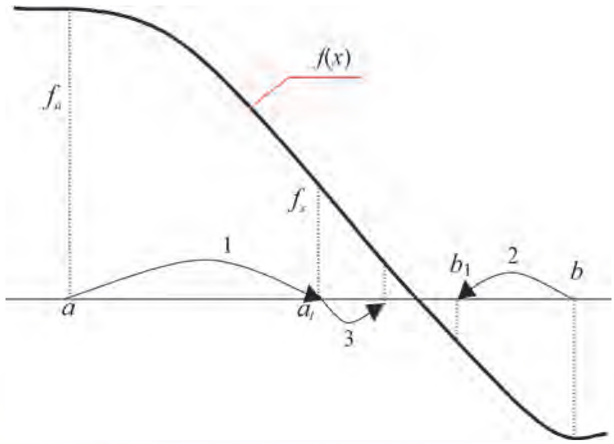
6) eger bul shárt orınlanbasa, jańa kesindiniń oń shegarası ortaga ótedi, yagnıy $b=x$ dep alınadı;

7) kesindini náwbettegi bóliniwden soń $b-a<\varepsilon$ shárt orınlanıwı tekseriledi.

8) eger bul shárt orınlansa, esaplawlar tawsıladı. Bunda shama menengi sheshim (sıpatında) x tıń aqırgı esaplangan mánisi alınadı. Eger bul shárt orınlanbasa,

usı algoritmniń 2 – qádemine ótilip (qaytıp), esaplawlar dawam ettiriledi.

Kesindiniń teń ekige bóliw usılınıń mánisi usı sızılmada súwretlengen:



Haqıyqıy koren jatırǵan aralıqtı tabıw

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ teńleme koreni jatırǵan aralıqtı tabıw ushın $A=max\{a,b,c\}$ hám $B=max\{\frac{1}{c};\ \frac{a}{c};\ \frac{b}{c}\}$ esaplanadı.

Berilgen teńlemeniń koreni ushın $\frac{1}{1+B}<|x|<1+A$ teńsizlik orınlı boladı. Demek, berilgen teńlemeniń keminde 1 koreni $(-1-A;\ 1+A)$ oralıqta jaylasqan eken. Bul korendi shama menen tabıw ushın $-1-A<d_1<d_2<1+A$ hám $f(d_1)\cdot f(d_2)=(d_1^3+ad_1^2+bd_1+c)(d_2^3+ad_2^2+bd_2+c)<0$ teńsizliklerdi qanaatlantırıwshı d_1 hám d_2 pútin sanlar tabıladı.

1-mısal. $2x^3+3x^2+5x+1=0$ teńleme koreni jatırǵan aralıqtı tabıń.

△ Teńlemeniń hár eki bólegin 2 ge bólsek, $x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$ teńleme payda boladı. $a=\frac{3}{2}$; $b=\frac{5}{2}$; $c=\frac{1}{2}$ Bolǵanı ushın, $A=max\{\frac{3}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{1}{2}\}=2,5$.

Demek, $x\in(-2,5;2,5)$ aralıqta teńlemeniń keminde bir dana koreni bar. Teńleme $(0;2,5)$ aralıqta korenge iye emes, sebebi $x_0\in(0;\ 2,5)$ bolsa, $2x_0^3+3x_0^2+5x_0+1>0$ boladı. Demek, teńleme $(-2,5;\ 0)$ aralıqta korenge iye eken. Bul aralıqtı kishireytiriw ushın pútin sanlardi alamız, yaǵnıy $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$.

Endi $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$ sanlardı teńlemege qoyıp hám tómendegi shártti tekserip

$$d_1^3+\frac{3}{2}d_1^2+\frac{5}{2}d_1+\frac{1}{2}=-8+6-5+0{,}5=-6{,}5<0;$$

$$d_2^3+\frac{3}{2}d_2^2+\frac{5}{2}d_2+\frac{1}{2}=-1+1{,}5-2{,}5+0{,}5=-1{,}5<0;$$

$d_3^3+\frac{3}{2}d_3^2+\frac{5}{2}d_3+\frac{1}{2}=0{,}5>0$ teńlemeniń koreni $(-1;0)$ aralıqta ekenin tabamız. ▲

Teńlemeniń korenin berilgen ε anıqlıqta aralıqtı teń 2 ge bólip tabıw usılı

Eger $(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$ bolsa, teńlemeniń koreni $(\alpha;\beta)$ aralıqta bolıwı joqarıdan belgili. $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$ bolsın. Eger $|\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c|<\varepsilon$ bolsa, $x=\gamma$ san – teńlemeniń ε anıqlıqtaǵı koreni. Eger $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)<0$ bolsa, koren $(\gamma;\beta)$ aralıqtan izlenedi; eger $(\gamma^3+a\gamma^2+b\gamma+c)(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)<0$ bolsa, koren $(\alpha;\gamma)$ aralıqtan izlenedi. Bul jaǵday koren kerekli anıqlıqta tabılǵanǵa shekem dawam ettiriledi.

2-mısal.

$x^3+1{,}5x^2+2{,}5x+0{,}5=0$ teńleme korenin $\varepsilon=0{,}1$ anıqlıqta tabıń.

△ Koreni $(-1;0)$ aralıqta jatıwı aldıńǵı mısaldan belgili. $\gamma=\frac{-1+0}{2}=-0{,}5$ hám $(-0{,}5)^3+1{,}5(-0{,}5)^2+2{,}5(-0{,}5)+0{,}5=-0{,}5<0$ ekenliginen teńlemeniń koreni $(-0{,}5;\ 0)$ aralıqta eken.

$\gamma=\frac{-0{,}5+0}{2}=-0{,}25$ hám $|(-0{,}25)^3+1{,}5(-0{,}25)^2+2{,}5(-0{,}25)+0{,}5|=|-0{,}046|<0{,}1$ bolǵanı ushın teńlemeniń 0,1 anıqlıqtaǵı sheshimi $x=-0{,}25$ boladı. ▲

Soraw hám tapsırmalar

1. $x^3+ax^2+bx+c=0$ teńleme koreni jatırǵan aralıq qalay tabıladı?
2. Teńlemeniń korenin berilgen ε anıqlıqta aralıqtı teń 2 ge bólip tabıw usılın túsintiriń.

Shınıǵıwlar

Teńleme koreni jatırǵan aralıqtı tabıń (**44–47**):

44. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

45. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

46. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

47. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; | 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

Teńleme korenin $\varepsilon=0,1$ anıqlıqta tabıń (**48–51**):

48. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; | 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

49. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; | 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

50. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; | 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

51. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; | 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

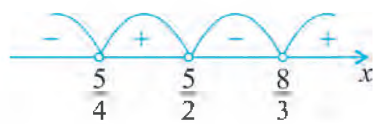
39–41 ÁPIWAYÍ RACIONAL TEŃSIZLIKLER HÁM OLARDÍŃ SISTEMALARÍ

Bir ózgeriwshili racional teńsizlikler hám olardı shıǵarıw usılları

$A(x)$ hám $B(x)$ racionalańlatpalar ushın $A(x)>B(x)$, $A(x)<B(x)$, $A(x)\geqslant B(x)$, $A(x)\leqslant B(x)$ qatnaslarǵa x ózgeriwshili teńsizlikler delinedi. x tiń teńsizlikti durıs sanlı teńsizlikke aylantırıwshı hár qanday mánisi teńsizliktiń sheshimi delinedi.

1-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $2(2x-5)(3x-8)(5-4x)<0$.

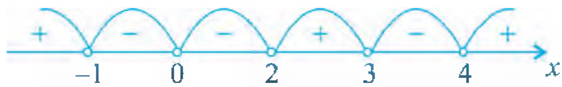
△ Teńsizlikti aralıqlar usılı járdeminde sheshemiz. Bul usıl menen 9-klassta tanısqansız. Qawsırmalar ishindegi ańlatpalardı nolge teńlestirip, $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=\frac{8}{3}$ sanlardı tabamız. Olar sanlar kósherin $(-\infty;\ \frac{5}{4})$, $(\frac{5}{4};\ \frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2};\ \frac{8}{3})$, $(\frac{8}{3};\ +\infty)$ aralıqlarǵa ajıratadı. Teńsizlikke $(\frac{8}{3};\ +\infty)$ aralıqqa tiyisli, máselen, $x=10$ sanın qoysaq, teńsizlik durıs teńsizlikke aylanadı. Demek, teńsizlik $(\frac{5}{4};\ \frac{5}{2})\cup(\frac{8}{3};\ +\infty)$ aralıqlarda orınlı. ▲



2-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\dfrac{x^2(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}>0$.

△ $x=2$, $x=4$ sanlar teńsizliktiń sheshimi emes. $x\neq2$, $x\neq4$ bolǵanda $(x-2)^2\cdot(x-4)^2>0$ boladı. Sol sebepli teńsizliktiń hár eki bólegin $(x-2)^2\cdot(x-4)^2$ ge koʻbeytiw nátiyjesinde berilgen teńsizlikke teń kúshli tómendegi teńsizlik payda boladi:
$(x+1)x^2(x-3)(x-2)(x-4)>0$.

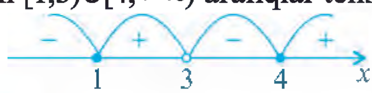
Qawsırmalardı nolge teńlestirip, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=2$, $x_5=3$, $x_6=4$ sanlardı tabamız. Nátiyjede sanlar kósheri tómendegi aralılarǵa ajıraladı: $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;2)$, $(2;3)$, $(3;4)$, $(4;+\infty)$. Bul jerde nol sanı 2 márte ushıraydı. Sonıń ushın teńsizlik nol sanınıń eki janındaǵı aralıqta birdey belgige iye. Aqırǵı aralıqtan shegarada jatpaǵan x=10 sanın alıp teńsizlikke qoysaq, durıs sanlı teńsizlik hasıl boladı. Demek, teńsizliktiń sheshimi tómendegi aralıqlar: $(-\infty;-1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$. ▲



3-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\dfrac{x^2-5x+4}{x-3}\geq 0$.

△ $x\neq3$ bolǵanda $x^2-5x+4=0$, alımın nolge teńlestirip, $x_1=1$, $x_2=4$ sanların hasıl qılamız. $x_1=1$ hám $x_2=4$ sanlar teńsizlikti qanaatlantıradı. Demek, sanlar kósheri tómendegi aralıqlarǵa ajıraladı: $(-\infty;\ 1]$, $[1;\ 3)$, $(3;\ 4]$, $[4;\ +\infty)$.

Aqırǵı aralıqtan shegarada bolmaǵan x=5 sanın alsaq, durıs sanlı teńsizlik hasıl boladı. Sonıń ushın $[1;3)\cup[4;+\infty)$ aralıqlar teńsizliktiń sheshimi.



Ápiwayı racional teńsizlikler sisteması ▲

4-mısal. Teńsizlikler sistemasın sheshiń: $\begin{cases}3x-8\leq1,\\4x+3>5.\end{cases}$

△ Sistemanıń hár bir teńsizligin ápiwayılastırsaq, $\begin{cases}3x\leq1+8,\\4x>5-3\end{cases}$ $\begin{cases}3x\leq9,\\4x>2;\end{cases}$ yaǵnıy, $\begin{cases}x\leq3,\\x>0,5.\end{cases}$ teńsizliklerdi hasıl qılamız. Demek, sistemanıń sheshimi $(-\infty;3]$ hám $(0,5;\ +\infty)$ aralıqlardıń ulıwma bólegi, yaǵnıy $(0,5;\ 3]$ aralıqtan ibárat eken. ▲

5-mısal. Teńsizlikler sistemasın sheshiń: $\begin{cases}(3-x)(4+x)\geq0,\\(2+x)(5-x)<0.\end{cases}$

△ Sistemadaǵı hár bir teńsizlikti sheship, 1-teńsizliktiń sheshimi $[-4;\ 3]$ aralıq, 2-teńsizliktiń sheshimi bolsa $(-\infty;\ 2)\cup(5;\ +\infty)$ aralıqlar ekenin tabamız. Demek, teńsizlikler sistemasınıń sheshimi bul sheshimlerdiń ulıwma bólegi, yaǵnıy $[-4;\ 2)$ aralıqtan ibárat boladı. ▲

Soraw hám tapsırmalar

?

1. Teńsizliktiń sheshimin mısallarda túsintiriń.
2. Teń kúshli teńsizliklerge mısallar keltiriń.
3. Eń ápiwayı racional teńsizlikler sistemasın shıǵarıwdı bir mısalda túsintiriń.

Shınıǵıwlar

Teńsizlikti sheshiń (**52–53**):

52. 1) $(x-6)(3-17x)(2x+8)\leq 0$; 2) $(x^2+5x-6)(7x-11)>0$;

3) $(3+5x)(2x^2-6x+4)<0$; 4) $\frac{2x-5}{2x+1}\geq 0$;

5) $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\geq 0$; 6) $\frac{3x+11}{2-x}<0$;

7) $\frac{x-1}{4x-1}<1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x}\geq 1$; 9) $\frac{x^2-5x+11}{x^2-7}\leq 0$; 10) $\frac{x^3-1}{2x^2-3x+1}>1$.

53. 1) $(x-5)(3-7x)(2x+8)\leq 0$; 2) $(x^2-5x-6)(7x+11)>0$;

3) $(3-5x)(2x^2-4x+4)<0$; 4) $\frac{x-5}{2x+1}\geq 0$;

5) $(x^2-6x-7)(x^2+x+1)\geq 0$; 6) $\frac{3x+1}{2-x}<0$;

7) $\frac{x+1}{4x-1}<1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x}\geq 3$; 9) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-7}\leq 0$; 10) $\frac{x^3+1}{2x^2-3x+1}>1$.

Teńsizlikler sistemasın sheshiń (**54–55**):

54. 1) $\begin{cases}3x-5\leq 7x,\\ 2x+1>-2x+3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}<1,\\ -\frac{5x+1}{2}-\frac{7}{3}>\frac{x}{5};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}3x+5\leq 7x,\\ 2x-1>-3x+3.\end{cases}$

55. 1) $\begin{cases}2(x-5)\leq 4(x+3),\\ 2x-1>-5x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\frac{5x}{3}-\frac{2x}{4}\geq 3\frac{1}{3},\\ 2-\frac{5-4x}{2}<\frac{6x}{5};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}6x+5\leq 7x,\\ 6x-4>3x+3.\end{cases}$

42–43 ÁPIWAYÍ IRRACIONAL TEŃSIZLIKLER

Irracional tengsizlik delingende belgisiz koren belgisi astında bolǵan teńsizlik túsiniledi.

Teńsizliklerdiń sheshimleri kópligi, ádette, sanlardıń sheksiz kópliklerinen ibárat boladı, sol sebepli bul sanlardı dáslepki teńsizlikke qoyıw jolı menen sheshimler kópligin tekseriw, ulıwma aytqanda múmkin emes. Juwaptıń durıslıǵın támiynleytuǵın bir ǵana jol – dáslepki teńsizlikti hár qanday almastırıwda bul teńsizlikke teń kúshli teńsizlik hasıl bolıwın baqlap barıwımız kerek.

Irracional teńsizliklerdi shıǵarıp atırǵanda teńsizliktiń eki tárepin taq dárejege kóteriwde hár dayım dáslepki teńsizlikke teń kúshli teńsizlik payda bolıwın yadta tutıwımız kerek. Eger teńsizliktiń eki tárepin jup dárejege kóterilip atırǵan bolsa, ol jaǵdayda dáslepki teńsizlikke teń kúshli hám usınday teńsizlik belgisine iye bolǵan teńsizlik tek ǵana dáslepki teńsizliktiń eki bólegin teris emes bolǵan jaǵdayda ǵana payda boladı.

Irracional teńsizliktiń sheshimler kópligin tabıw ushın ádette teńsizliktiń eki bólegin natural dárejege kóteriwge tuwrı keledi. Irracional teńsizlikti shıǵarıwdıń tiykarǵı usıllarınan biri bul teń kúshli racional teńsizliklerge keltiriw usılı esaplanadı.

Eń ápiwayı irracional teńsizlikler tómendegi kóriniske iye:

1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ yaki $\sqrt{A(x)} \le B(x)$;

2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ yaki $\sqrt{A(x)} \ge B(x)$;

3) $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ yaki $\sqrt{A(x)} \ge \sqrt{B(x)}$.

$\sqrt{A(x)} < B(x)$ yaki $\sqrt{A(x)} \le B(x)$ irracional teńsizlik tómendegi teńsizlikler sistemasına teń kúshli

$$\begin{cases} A(x) < B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \text{yaki} \begin{cases} A(x) \le B^2(x), \\ A(x) \ge 0, \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) sistemadaǵı birinshi teńsizlik berilgen teńsizlikti kvadratqa kóteriw nátiyjesinde payda bolǵan teńsizlik, ekinshi teńsizlik sheshiminin bar ekenligi shártin bildiredi, úshinshi teńsizlik bolsa kvadratqa kóteriw múmkinligin bildiredi.

$\sqrt{A(x)} > B(x)$ irracional teńsizlik tómendegi teńsizlikti sheshiw ushın usı sistemanı qaraw zárúr:

$$\begin{cases} A(x) > B^2(x), \\ B(x) \ge 0 \end{cases} \text{yoki} \begin{cases} A(x) \ge 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

$\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ irracional teńsizlik tómendegi teńsizlikler sistemasına teń kúshli:

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \ge 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Berilgen teńsizliktiń eki jaǵı barlıq múmkin bolǵan x lar ushın teris emes bolǵanlıǵı sebepli onı kvadratqa kóteriw múmkin (3) sistemadaǵı birinshi teńsizlik berilgen teńsizlikti kvadratqa kóteriw nátiyjesinde payda bolǵan teńsizlik. Ekinshi teńsizlik sheshim (koren)niń bar ekenlik shártin bildiredi $A(x) \geqslant 0$ shárt álbette orınlanadı.

(1)–(3) qaǵıydalar irracional teńsizlikti sheshiwdiń tiykarǵı usılı esaplanadı. Onıń mánisin bir neshe mısallarda kórsetemiz.

1-mısal.

Teńsizlikti sheshiń: $\sqrt{10x+5}<-3$.

△ Bul teńsizliktiń oń tárepi teris, sol menen birge shep tárepi múmkin bolǵan x lar ushın teris emes. Sonıń ushın teńsizlik sheshimge iye emes.

Juwap: Sheshimge iye emes. ▲

2-mısal.

Teńsizlikti sheshiń: $\sqrt{3x-9}>-5$.

△ Teńsizliktiń oń tárepi teris, sol menen birge shep tárepi múmkin bolǵan x lar ushın teris emes. Demek, usı teńsizlik $x \geqslant 3$ shártti qanaatlandıratuǵın barlıq x lar ushın orıńlanadı.

Juwap: $x \in [3;+\infty)$. ▲

3-mısal.

Teńsizlikti sheshiń: $\sqrt{2x-3}<1$.

△ (1) qaǵıydaǵa kóre $\begin{cases} 2x-3<1^2, \\ 2x-3 \geq 0. \end{cases}$

$B(x)=1 \geq 0$ shárt barlıq x lar ushın orınlanǵanlıǵı ushın, onı bólek jazıw shárt emes.

Juwap: $\left[\dfrac{3}{2};2\right)$. ▲

4-mısal.

Teńsizlikti sheshiń: $\sqrt{4x-3}>1$.

△ Bul teńsizlik (2) qaǵıyda boyınsha sheshiledi. Bul jaǵdayda $B(x)=1 \geq 0$ shárt barlıq x lar ushın orınlanǵanlıǵı ushın usı teńsizlikke teń kúshli teńsizlikti jazıwımız múmkin: $4x-3>1^2$.

Juwap: $x>1$. ▲

5-mısal.

Teńsizlikti sheshiń: $\sqrt{x+18}<2-x$

△ Bul teńsizlik (1) qaǵıyda boyınsha sheshiledi:

$$\begin{cases} x+18 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x+18<(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -18 \\ x \leq 2 \\ x^2-5x-14>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -18 \leq x<-2.$$

Juwap: $x \in [-18;-2)$. ▲

6-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\sqrt{x^2+x-2}>x$.

Bul teńsizlik (2) qaǵıyda boyınsha sheshiledi:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\x^2+x-2\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 0,\\x^2+x-2>x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}x\leq -2,\\x\geq 1,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 0,\\x>2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -2,\\x>2.\end{array}\right.$$

Juwap: $x\in(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$.

7-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\sqrt{2x+1}>\sqrt{2-3x}$.

Bul teńsizlik (3) qaǵıyda boyınsha sheshiledi:

$$\begin{cases}2x+1>2-3x\\2-3x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{5}\\x\leq\dfrac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5}<x\leq\frac{2}{3}.$$

Juwap: $\dfrac{1}{5}<x\leq\dfrac{2}{3}$.

8-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x+6}<1$

Belgisiz x tiń teńsizlik mániske iye bolatuǵın kópligin tabamız:

$$\begin{cases}x^2-25\geq 0,\\x+6\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leq -5,\\x\geq 5,\end{array}\right.\\x\neq 6\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-6,\\-6<x\leq -5.\\x\geq 5.\end{array}\right.$$

Eger $x+6>0$ bolsa, usı teńsizlikti kvadratqa kóteriw múmkin:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\leq -5,\\x\geq 5,\end{array}\right.\\ \sqrt{x^2-25}<x+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\leq -5,\\x\geq 5,\end{array}\right.\\ x^2-25<x^2+12x+36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-6<x\leq -5,\\x\geq 5,\end{array}\right.\\ x>-\dfrac{61}{12}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{61}{12}<x\leq -5,\\x\geq 5.\end{array}\right.$$

$x<-6$ bolsa, berilgen teńsizlik álbette orınlanadı.

Juwap: $x\in(-\infty;-6)\cup\left(-\dfrac{61}{12};-5\right]\cup[5;+\infty)$.

Jańa ózgeriwshini kirgiziw usılı

Irracional teńlemelerdi sheshiwde qollanılǵan jańa ózgeriwshini kirgiziw usılın, irracional teńsizliklerge de qollaw múmkin.

9-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $-9\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+18\geq 0$.

△ Teńsizlikti tómendegishe jazıp alamız: $-9\sqrt[4]{x}+\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+18\geq 0$.

Jańa ózgeriwshini kirgizemiz: $t=\sqrt[4]{x}$, $t\geq 0$. Bul jaǵdayda

$$\begin{cases}-9t+t^2+18\geq 0,\\ t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\geq 6,\\ t\leq 3,\end{array}\right.\\ t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\geq 6,\\ 0\leq t\leq 3.\end{array}\right.$$

Solay etip:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x}\geq 6,\\ 0\leq\sqrt[4]{x}\leq 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 6^4,\\ 0\leq x\leq 3^4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 1296,\\ 0\leq x\leq 81.\end{array}\right.$$

Juwap: $x\in[0;81]\cup[1296;+\infty)$. ▲

10-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

△ Jańa ózgeriwshini kirgizemiz: $\sqrt{15-x}=t$, $t>0$.

Bul jaǵdayda $x=15-t^2$ hám t ózgeriwshige baylanıslı bolǵan jańa racional teńsizlikti hasıl qılamız:

$$\begin{cases}\dfrac{3-(15-t^2)}{t}<1,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t^2-t-12}{t}<0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(t-4)(t+3)}{t}<0\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<4.$$

Bunnan x tı tabamız

$$0<\sqrt{15-x}<4\Leftrightarrow 0<15-x<16\Leftrightarrow -1<x<15.$$

Juwap: $x\in(-1;15)$. ▲

Soraw hám tapsırmalar

1. Irracional teńsizlik dep nege ataladı?
2. Irracional teńsizlikti sheshiwde teń kúshli almastırıwǵa say bolǵan mısal keltiriń.
3. Sheshimi bolmaǵan irracional teńsizlikke mısal keltiriń.

Shınıǵıwlar

Belgisizlerdiń qaysı mánislerinde teńsizlikler mániske iye? **(56–59)**

56. 1) $\sqrt{x}+\sqrt{2x-6}>10$; 2) $\sqrt[4]{18-2x}<3$.

57. 1) $\sqrt{10-\sqrt{x-5}}<27$; 2) $\sqrt{(x+3)(x-8)}>x+2$.

58. 1) $\sqrt[3]{x^2-x} > -x\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x} > \sqrt{8x-5}$.

59. 1) $\sqrt{x^2+3x+1} < x+1$; 2) $\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}} \geq 2$.

Teńsizliklerdi sheshiń (**60-66**):

60. 1) $\sqrt{2x-1} < x+2$; 2) $\sqrt{x^2-1} > x-2$.

61. 1) $\sqrt[4]{2x^2-1} \leq x$; 2) $\sqrt{x^2-x-2} \geq 2x+3$.

62. 1) $x-3 < \sqrt{x^2+4x-5}$; 2) $\sqrt{x^2-55x+250} < x-14$.

63. 1) $\sqrt[3]{x^2+6x} > x$; 2) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x} \geq 2$.

64. 1) $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3-x}$; 2) $x > \sqrt{x(1+\sqrt{x(x-3)})}$.

65. 1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} \geq 4+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$; 2) $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1} \geq 1$.

66. 1) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1} > 8$; 2) $\sqrt[3]{x+1} \leq \sqrt[3]{5x}$.

67. Tegislikte $A(9; 4)$, $B(-4; 5)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC>BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıń.

68. Tegislikte $A(2; 4)$, $B(-3; 5)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC>BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıń.

69. Tegislikte $A(4; 4)$, $B(-5; 7)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC>BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıń.

70. Tegislikte $A(2; 4)$, $B(+3; -5)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC>BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıń.

71. Tegislikte $A(5; 4)$, $B(-6; 5)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC>BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıń.

72. Tegislikte $A(8; 4)$, $B(-7; 5)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC>BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıń.

Baqlaw test tapsırmaları

Sınaw shınıǵıwlarınıń hár birine 4 danadan «juwap» berilgen. 4 dana «juwap» tıń tek ǵana birewi durıs, qalǵanları bolsa qáte. Oqıwshılardan sınaw shınıǵıwların orınlap, yaki bashqa aytımlar járdeminde tap sol durıs juwaptı tabıw (onı belgilew) talap qılınadı.

1. Teń kúshli teńlemelerdi kórsetiń:
1) $10x=8$; 2) $6x-4=x$; 3) $x^2+2x+18=0$.
A) 1 hám 3; B) 2 hám 3; C) 1 hám 2; D) hámmesi.

2. Teńlemeniń úlken korenin tabıń: $(x-5)(x+4)(x-11)=0$.
A) -4; B) 5; C) 16; D) 11.

3. Bikvadrat teńlemeniń korenleri qosındısın tabıń: $3x^4+8x^2-11=0$.
A) 1; B) -1; C) 0; D) 11/3.

4. Teńlemeler sistemasınıń neshe sheshimi bar? $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

5. Teńlemeni sheshiń: $\sqrt{5x+9}=7$.
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8.

6. Teńlemeler sistemasınıń neshe sheshimi bar? $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=11, \\ \sqrt{xy}=30. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

7. Tegislikte $A(3; 1)$ hám $B(7; 3)$ noqatlardan teń uzaqlıqta jaylasqan $C(5; x)$ noqattı tabıń.
A) (5;2); B) (5;3); C) (4;2); D) (4;3).

8. Teńlemeni sheshiń: $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}=68$.
A) 1; B) 2; C) -1; D) 0.

9. Teńlemeniń pútin korenlerin tabıń: $11^{3x^2+23}=11^{x^2+25x}$.
A) 1; B) -1; C) 2; D) 1 va -1.

10. Qaysıdir mámleket xalqınıń sanı jılına 3% kemeyse neshe jıldan soń xalıq sanı 20% kemeyedi?
A) 6; B) 2; C) 8; D) 4.

11 Teńsizlikti sheshiń: $(x^2+6x-7)(x^2+x+1)\leqslant0$.
A) $[-7; 1]$; B) $[-7; -1]$; C) $[7; -1]$; D) $[7; 1]$.

12. $|x-2|\leqslant5$ teńsizliktiń neshe pútin sheshimi bar?
A) 10; B) 11; C) 8; D) 9.

13. Teńsizlikti sheshiń: $|4x-1|\leqslant-2$.
A) $[-7;1]$; B) $[-7;-1]$; C) $[7;-1]$; D) sheshimi joq.

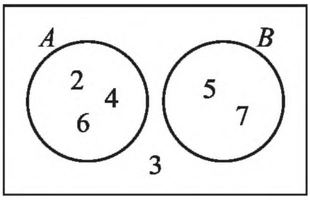
14. $\sqrt{x^2-13x+12}\leq5-x$ teńsizliktitiń neshe pútin sheshimi bar?
A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

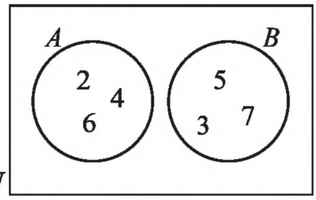
Juwaplar

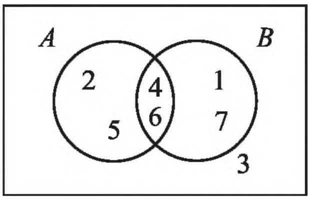
I BAP.

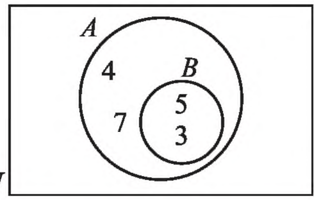
1. a) $5 \in D$; b) $6 \notin G$; c) $\{2, 5\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$; d) $\{3, 8, 6\} \subsetneq \{1,2,3,4,5,6\}$; **2.** a) i) {9} ii) {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}. b) i) ∅ ii) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. c) i) {1, 3, 5, 7} ii) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. **3.** a) 5; b) 6; c) 2; d) 9. **4.** a) shekli; b) sheksiz. 5. a) kesilispeydi; b) kesilisedi. 6. a) shekli; b) sheksiz; c) sheksiz; d) sheksiz. 7. a) i) *A* kóplik -1 den úlken yamasa teń hám 7 den kishi yamasa teń bolǵan pútin sanlar kópligi; ii) {–1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} iii) 9. b) i) *A* kóplik -2 den úlken hám 8 den kishi bolǵan natural sanlar kópligi; ii) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} iii) 8. c) i) *A* kóplik 0 den úlken yamasa teń hám 1 den kishi yamasa teń bolǵan haqıyqıy sanlar kópligi; ii) múmkin emes; iii) sheksiz. d) i) *A* kóplik 5 ten úlken yamasa teń hám 6 dan kishi yamasa teń bolǵan haqıyqıy sanlar kópligi; ii) múmkin emes; iii) sheksiz. **8.** a) $A=\{x|\ -100 < x < 100, x\in\mathbb{Z}\}$; b) $A=\{x|\ x > 1000, x\in\mathbb{R}\}$; c) $A=\{x|\ 2 \leqslant x \leqslant 3, x\in\mathbb{Q}\}$. **9.** a) i) 8 ta: ∅, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$; ii) 16 dana: ∅, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$; b) 2^n. **10.** a) Awa; b) Yaq; b) Awa; d) Awa; e) Yaq; f) Yaq **11.** b) $C'=\mathbb{N}$; c) $C'=\{x|\ x \geqslant -4, x\in\mathbb{Z}\}$; d) $C'=\{x|\ 2 < x < 8, x\in\mathbb{Q}\}$. **12.** a) {2, 3, 4, 5, 6, 7}; b) {0, 1, 8}; c) {5, 6, 7, 8}; d) {0, 1, 2, 3, 4}; e) {5, 6, 7}; f) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}; g) {2, 3, 4}. **13.** a) 9; b) 11. **14.** a) {1, 2, 10, 11, 12}; b) {1, 2, 3, 4, 12}; c) {1, 8, 9, 10, 11, 12}; d) {3, 4, 5, 6, 7}; e) {1, 2, 8, 9, 10, 11, 12}; f) {8, 9, 10, 11}; g) {1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}; h) {2, 10, 11}; **15.** a) *P*={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}; b) {2, 5, 11}; c) {2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 23}; d) 12=9+6–3 ✓. **16.** a) *P*={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, *Q*={1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 30}; b) {2, 5, 10}; c) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 40}; d) 12=8+8–4 ✓. **17.** a) *P*={32, 36, 40, 44, 48, 52, 56}, *Q*={36, 42, 48, 54}; b) {36, 48}; c) {32, 36, 40, 42, 44, 48, 52, 54, 56}; d) 9=7+4–2 ✓. **18.** a) *B'*={0, 1, 2, 9, 10, 11}; b) *C'*={0, 1, 2, 3, 4, 5}; c) *A'*={0, 1, 2, 7, 8, 9, 10, 11}; d) $A \cap B$={3, 4, 5, 6}. **19.** a) *C*={–4, –3, –2, –1}, *D*={–7, –6, –5, –4, –3, –2, –1}; b) {–4, –3, –2, –1}; c) {–7, –6, –5, –4, –3, –2, –1}; d) 7=4+7–4 ✓. **20.** a) *P*={1, 2, 3, 4, 6, 12}, *Q*={1, 2, 3, 5, 9, 18}, *R*={1, 3, 9, 27}. b) i) {1, 2, 3, 6}; ii) {1, 3}; iii) {1, 3, 9}; iv) {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18}; v) {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 27}; vi) {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27}. c) i) {1, 3}; ii) {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27}. **21.** a) *A*={4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36}, *B*={6, 12, 18, 24, 30, 36}, *C*={12, 24, 36}. b) i) {12, 24, 36}; ii) {12, 24, 36}; iii) {12, 24, 36}; iv) {12, 24, 36}. c) {4, 6, 8, 12, 16, 18, 20 ,24, 28, 30, 32, 36}. d) 12=9+6+3–3–3–3+3 ✓. **22.** a) *A*={6, 12, 18, 24, 30}, *B*={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, *C*={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}. b) i) {6, 30}; ii) {2, 3, 5}; iii) ∅; iv) ∅. c) {1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 23, 24, 29, 30}. d) 18=5+8+10–2–3–0+0 ✓.

23.

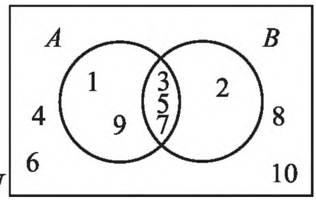
a) U


b) U


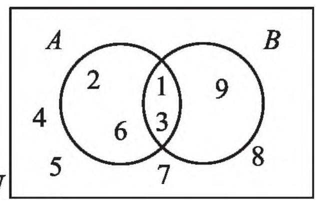
c) U


d) U


24.
a) $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B=\{2, 3, 5, 7\}$;
b) $A \cap B=\{3, 5, 7\}$
$A \cup B=\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$;

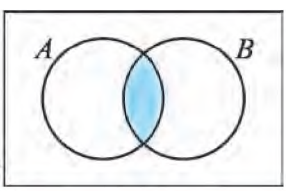
U


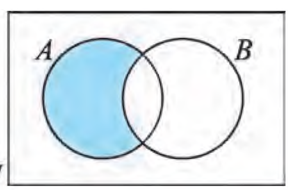
25. a) $A=\{1, 2, 3, 6\}$
$B=\{1, 3, 9\}$;
b) $A \cap B=\{1, 3\}$
$A \cup B=\{1, 2, 3, 6, 9\}$;

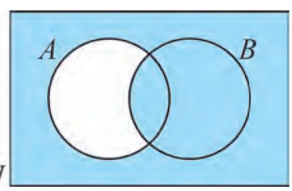
U


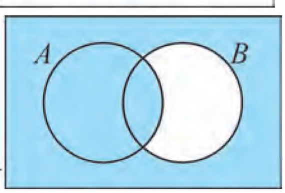
26. a) $\{b, d, e, h\}$; b) $\{e, f, h, i, j\}$; c) $\{a, c, f, g, i, j, k\}$; d) $\{a, b, c, d, g, k\}$; e) $\{e, h\}$; f) $\{b, d, e, f, h, i, j\}$; g) $\{a, c, g, k\}$; h) $\{a, b, c, d, f, g, i, j, k\}$. **27.** a) **i)** $\{a, b, c, d, h, j\}$; **ii)** $\{a, c, d, e, f, g, k\}$; **iii)** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **iv)** $\{a, c, d\}$; **v)** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **vi)** $\{a, e, f\}$; **vii)** $\{a\}$; **viii)** $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

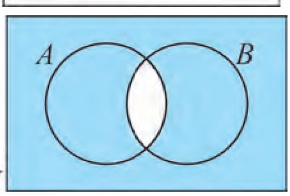
28.

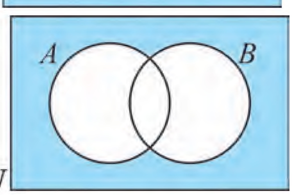
a) U


b) U


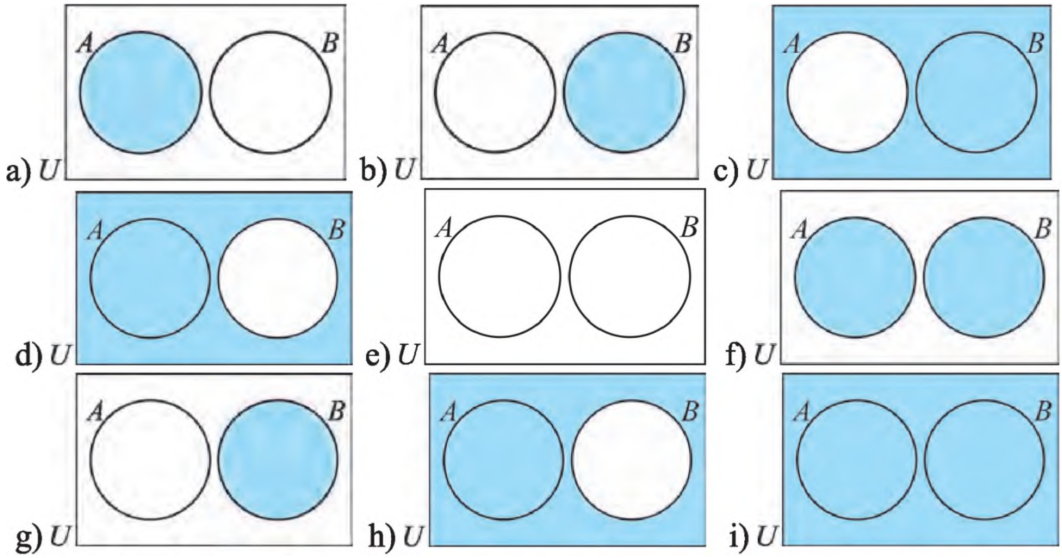
c) U


d) U


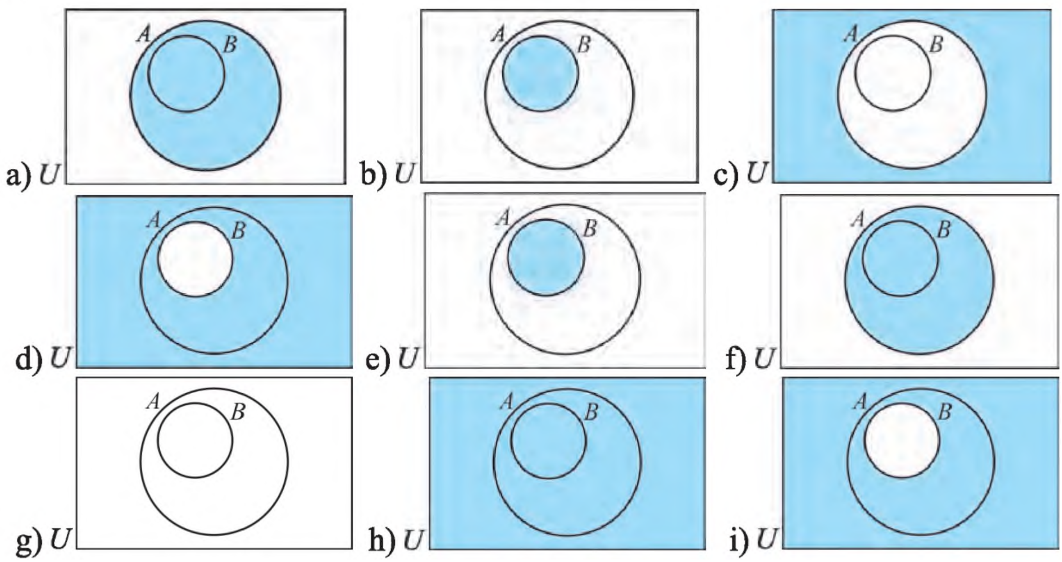
e) U


f) U


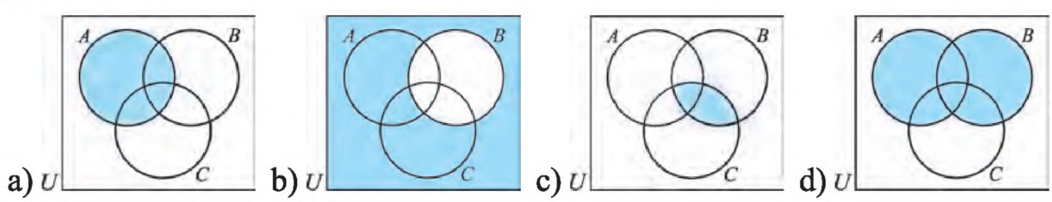
29.

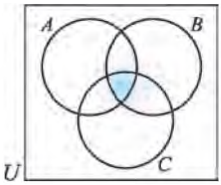

a) U
A
B
b) U
c) U
d) U
e) U
f) U
g) U
h) U
i) U

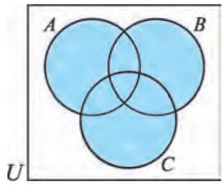
30.

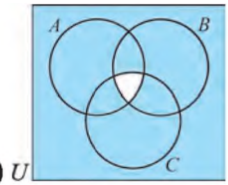

a) U
A
B
b) U
c) U
d) U
e) U
f) U
g) U
h) U
i) U

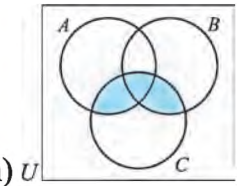
31.


a) U
A
B
C
b) U
c) U
d) U

e) 

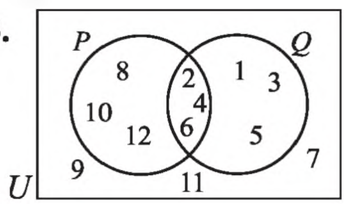
f) 

g) 

h) 

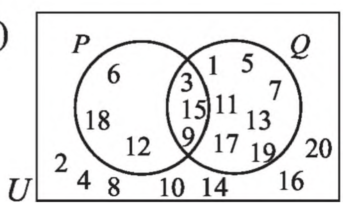
32. a) Awa, jalǵan; b) Awa, shın; c) Awa, shın; d) Awa, shın; e) Awa, shın; f) Awa, shın; g) Yaq; h) Awa, shın; i) Yaq; j) Awa, anıq emes; k) Awa, anıq emes; l) Yaq; m) Awa, anıq emes; n) Awa, anıq emes; o) Awa, anıq emes; p) Awa, jalǵan. **33.** k) $\neg p$: Ayırım tórtmúyeshlikler parallelogramm emes; m) $\neg r$: 7 – racional san emes; n) $\neg s$: $23-14\neq 12$; o) $\neg t$: $52:4\neq 13$; p) $\neg u$: Ayırım eki jup sanlar ayırması jup boladı q) $\neg p$: Izbe – iz natural sanlar kóbeymesi hár dayım jup bolmaydı r) $\neg q$: Ayırım doǵal múyeshler óz-ara teń emes; s) $\neg r$: Ayırım trapeciyalar parallelogramm emes;
t) $\neg s$: Úshmúyeshlikte eki múyeshi óz-ara teń, biraq ol teń qaptallı emes.
34. a) $x\geqslant 5$; b) $x<3$; c) $y\geqslant 8$; d) $y>10$; **35.** e) Yaq, Madinanıń boyı 140 sm bolıwıda múmkin; f) Yaq; g) Awa. **36.** f) $x\geqslant 5$, $x\in\mathbb{N}$; g) x – sıyır, $x\in\{atlar,\ qoylar,\ sıyırlar\}$; h) $x<0$, $x\in\mathbb{Z}$; i) x – qız bala oqıwshı, $x\in\{oqıwshılar\}$; j) x – oqıwshı emes qız bala, $x\in\{qız\ balalar\}$. **41.** e) $p\wedge q$: Madina – terapevt, Munisa bolsa stomatolog; f) $p\wedge q$: 15 ten úlken hám 30 dan kishi; g) hawa bulıtlı hám jawın jawmaqta; h) Alımnıń shashları qara hám kózleri jasıl. 42. f) shın; g) jalǵan; h) jalǵan; i) shın; j) jalǵan.

43.



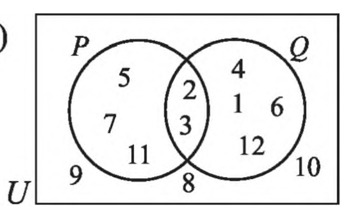
44. a) shın; b) jalǵan; .
45. c) shın; d) shın.

46. a)



b) i) {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20};
ii) {1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19};
iii) {3, 9, 15};
iv) {1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19}.

47. a)



b) i) {2, 3};
ii) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12};
iii) {1, 4, 5, 6, 7, 11, 12}.

48. a) $\neg x$; b) $x \wedge y$; c) $x \vee y$; d) $\neg x \wedge \neg y$; e) $x \wedge \neg y$. **50.** a) Sarvar erte turdı; b) Sarvar keshki awqatqa palaw jedi; c) Sarvar azańgı awqatqa qaymaq jedi hám sport penen shuǵıllandı; d) Sarvar túslikke sorpa ishti hám keshki awqatqa palaw jedi; e) Sarvar ya túslikke ya keshki awqatqa sorpa ishti.

51. a)

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

c)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

d)

p	$p \vee q$
T	T
F	F

52. a) tavtologiya emes; b) tavtologiya; c) tavtologiya emes.

55.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

57. d) quyash sharaqlasa, men shomılıwǵa baraman; e) x san 6 ǵa bólinse, ol jup boladı; f) Muzlatqıshta (xolodilnikte) máekler bolsa, Madina tort pisiredi.

59. a) $p \Rightarrow q$; b) $q \Rightarrow p$; c) $\neg q$; d) $\neg p$; e) $\neg p \Rightarrow \neg q$; f) $p \Rightarrow \neg q$; g) $\neg q \Rightarrow p$; h) $p \Leftrightarrow q$; **63.** a) Konversiya: Eger Dilbar ısınsa, ol jemper kiyedi; Inversiya: Eger Dilbar jemper kiymese, ol ısına almaydı. b) Konversiya: Eger eki úshmúyeshliktiń sáykes múyeshleri teń bolsa, olar uqsas boladı; Inversiya: Eger eki úshmúyeshlik uqsas bolmasa, olardıń sáykes múyeshleri teń bolmaydı. c) Eger $2x^2=12$ bolsa, ol jaǵdayda $x=\pm\sqrt{6}$ boladı; Konversiya: Eger $x=\pm\sqrt{6}$ bolsa, ol jaǵdayda $2x^2=12$ boladı. Inversiya: Eger $2x^2\neq 12$ bolsa, ol halda $x\neq\pm\sqrt{6}$ boladı. d) Konversiya: Eger Alım quwansa, ol oyın oynaydı; Inversiya: Alım oyın oynamasa, ol quwanbaydı. e) Eger úshmúyeshlik durıs bolsa, ol halda onıń tárepleri teń boladı; Konversiya: Eger úshmúyeshliktiń tárepleri teń bolsa, ol durıs boladı; Inversiya: Eger úshmúyeshlik durıs bolmasa, ol halda onıń tárepleri teń bolmaydı. **64.** a) Eger gúl tikenli bolmasa ol átirgúl bolmaydı; b) Durıs qarar shıǵara almaǵan insan sudya emes; c) toptı anıq móljelge tebe almaǵan insan jaqsı futbolshı bola almaydı; d) Eger zat quyılǵan ıdıs kórinisin qabıl qılmasa ol suyıqlıq emes; e) Eger insan tabıslı bolmasa, ol hadal hám oqımıslı emes; **65.** a) matematikanı úyrenbeytuǵın insan 10 klass oqıwshısı emes; b) Sháwkat matematikanı úyrenedi; Mirislam 10 klass oqıwshısı emes; Anıq juwmaq shıǵara almaymız. **66.** a) x^2 sanı 9 ǵa bólinbese, sanı 3 ke bólinbeydi; b) x-jup bolmasa, onıń aqırǵı cifrası 2 emes; c) $AB||CD$ hám $AD||BC$ bolmasa, $ABCD$ – tuwrı tórtmúyeshlik emes; d) $\angle ACB\neq 60°$ bolsa, ACB – durıs úshmúyeshlik emes. **67.** i) Eger úy sırtına tútin shıǵaratuǵın trubaǵa iye bolsa, eń kóbi menen 3 aynalı boladı; ii) Eger úy 3-ewden artıq aynalı bolsa, ol sırtına tútin shıǵaratuǵın trubaǵa iye bolmaydı; iii) Eger úy sırtına tútin shıǵaratuǵın trubaǵa iye bolmasa, eń kóbi menen 3 aynalı bolmaydı **69.** a) $\exists x\, P(x)$; b) $\exists x\, P(x)$; c) $\forall x\, P(x)$; d) $\forall x\, P(x)$; e) $\forall x\, P(x)$; f) $\forall x\, P(x)$; g) $\forall x\, P(x)$; h) $\forall x\, P(x)$; i) $\exists x\, P(x)$; j) $\exists x\, P(x)$; k) $\forall x\, P(x)$; **70.** a) Sazan sút emiziwshi emes; b) Barlıq qurallarda kemshilikler bar; f) Altın tokti jaqsı ótkizedi; g) Ayırım omırtqalılar bala tuwadı; h) Bul insan kesellengen. **71.** a) y x tiń aqlıǵı; b) Hár qanday insanda perzent bar; c) Hár qanday insan kimnińdir perzenti. **72.** a) Barlıq insanlar ushın eger biri basqasın dos dep esaplasa, ol da onı dos dep esaplaydı; b) Qálegen insan ushıń ol dos dep esaplaytuǵın insan bar; c) Sonday insan bar, onı hámme dos dep esaplaydı; d) Hár qanday insan ushın onı dos dep esaplaytuǵın insanlar bar; e) Sonday insan bar, ol hámmeni dos dep esaplaydı; f) Sonday insan bar, olnı hámme dos dep esaplaydı. **73.** a) Qálegen pútin san ushın oǵan bólinetuǵın pútin san bar; b) Sonday pútin san bar, ol barlıq pútin sanlarǵa bólinedi; c) Qálegen pútin san ushın onıń bóliwshileri bar; d) Sonday pútin san bar, oǵan barlıq pútin sanlar bólinedi; e) Qálegen pútin san ushın onıń bóliwshileri bar; f) Sonday pútin san bar, ol barlıq pútin sanlarǵa bólinedi. **82.** a) 7; b) 14; c) 14; d) 7; e) 5; f) 9. **83.** a) 5; b) 6; c) 17; d) 8; e) 3; f) 2. **84.** a) $b+c$; b) $c+d$; c) b; d) $a+b+c$; e) $a+c+d$; f) d. **85.** a) 15; b) 4. **86.** a) 18; b) 6. **87.** a) 7; b) 23.

II BAP.

1. a) £630; b) £630; c) ¥238333; d) €4402,46. **3.** $2600. **4.** £14 400. **5.** €20219,78. **6.** a) $6\frac{2}{3}\%$; b) 9,41%. **7.** $11\frac{2}{3}\%$. **8.** 15,4%. **9.** a) 4; b)7; **11.** a) €5512,69; b) $7293,04; c) £18938,83. **12.** 787,50. **13.** €1418,75. **14.** £1660. **15.** $274,83. **16.** a) €111,39; b) £763,31; c) ¥77157. **17.** $9021,58. **18.** €301,26. **19.** a) $7650; b) $8151,65; c) $8243,81.

20.

Jıllar	Amortizaciya	Bahası
0		€2500
1	15% €2500 = €375	€2125
2	15% €2125 = €318,75	€1806,25
3	15% €1806,25 = €270,94	€1535,31

III BAP.

1. a) 5; b)–2;50; c)1;–9; d) ∅; e) –1; f)1;–0,5; g) –1; –4,7; i) –4;7;
2. a) 7; b) –0,25; c) koreni joq; ; e) –1;5; f) –1.
3. a) hám b); a) hám d); a) hám f); b) hám d); b) hám f); d) hám f); c) hám e); g) hám h).
4. a)(81/11;–3/11); b)(4;4); c)(9;8). **6.** b)(1;1). **7.** a) 8;–33/4.

9. 48 qız hám 60 jigit (óspirim). **11.** a) $19\frac{2}{3}$; b) ∅; c) 32; d) ∅; **13.** a) ∅; b) $-\frac{23}{16}$.

15. a) $\frac{-9-\sqrt{105}}{2}$. **17.** b) ∅; **19.** a) 5. **21.** a) (9;4). **23.** a) (–5;9). **25.** $\frac{21}{22}$.

26. a) –0,25; b) –4/9; c) –2,5. **28.** c) ∅. d) {0;–3,5}. **29.** c) 0; d) 1. **31.** a) 0; b) 0.

37. 3 yil. **39.** 8 yil. **41.** a) $\left(\frac{69}{62};\frac{35}{62}\right)$; b) $\left(\frac{18}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **43.** a) (1;1); b) (4/3; 2/3);

53. 1) $\left[-4;\frac{3}{7}\right]\cup[5;+\infty)$; 2) $\left(-\frac{11}{7};-1\right)\cup(6;+\infty)$; 3) $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right)$;

4) $(-\infty;-0,5)\cup[5;+\infty)$; 5) $(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$; 6) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$

7) (0,25;1); 8) $\left(-\infty;\frac{3}{7}\right)\cup\left[\frac{16}{23};+\infty\right)$; 9) $\left(-\sqrt{7};\frac{15-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\sqrt{7};\frac{15+\sqrt{21}}{2}\right)$;

10) $(0;0,5)\cup(1;+\infty)$. **55.** 1) $\left(\frac{1}{7};+\infty\right)$; 2) ∅. **57.** (–∞;–3]; **59.** 1) ∅. 2) ∅.

61. 1) $[0;1)$. **63.** 1) $(-\infty;-2)\cup(0;3)$. **65.** 1) $[81;+\infty)$. **66.** 2) [0,25;+ ∞).

68. $y>5x+7$. **70.** $y<(x-2)/9$. **72.** $y>15x-3$.

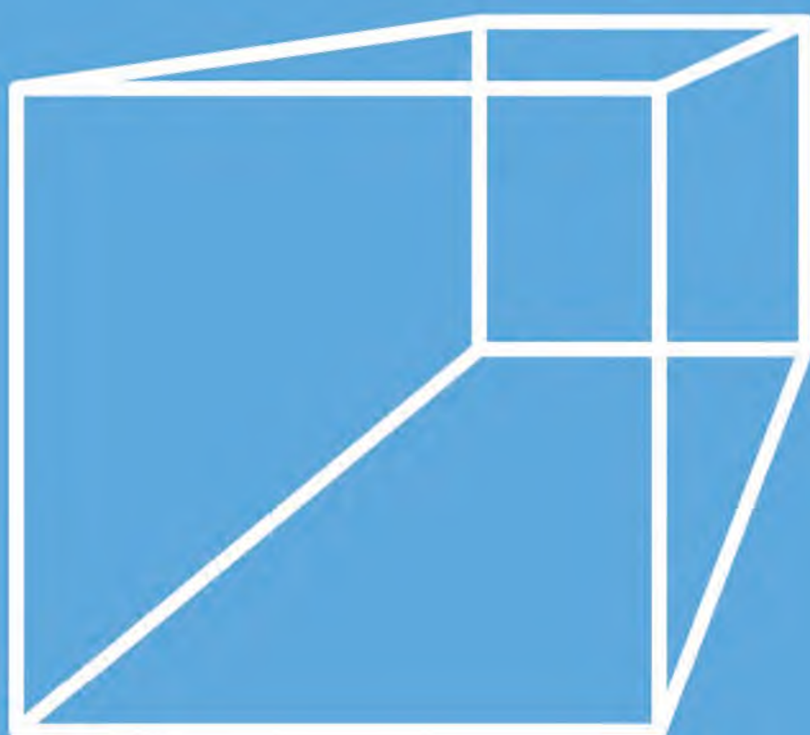
MAZMUNİ

Paydalanılǵan hám usınıs etiletuǵın ádebiyatlar

1. Alimov Sh.A., Xolmuhamedov O.R., Mirzaahmedov M.A. Algebra hám analiz tiykarları. 10-klass ushın sabaqlıq. Tashkent: "O'qituvchi", 2004.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studiyes SL 2 nd education. Haese and Harris publications. 2010.
3. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа. Часть 1, Ташкент: "O'qituvchi", 2016.
4. Abduhamidov A.U. hám basqalar. Algebra hám matematik analiz tiykarları, 1-bólim, Tashkent: "Óqituvchi", 2012.
5. Филичева Н.П. Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. "Рязань" 2009.
6. Исроилов М.И. Ҳисоблаш методлари. Тошкент: "Ўқитувчи" 1988.
7. Муравин Г.К. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. М., "Дрофа", 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я.Виленкина. М."Просвещение", 2004.
9. http://www.ams.org/mathweb/ - Internette matematika (ingliz tilinde).
10. "Математика в школе" jurnalı.
11. Fizika, matematika hám informatika. Ilmiy – metodikalıq jurnal (2001 – jıldan baslap shıǵa baslaǵan).
12. Mirzaahmedov M. A., Ismailov Sh.N. Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, "Turon-Iqbol", 2016.
13. Математикадан қўлланма, I ва II қисмлар. Ўқитувчилар учун қўлланма. Проф. Азларов Т.А. таҳрири остида. Тошкент, "Ўқитувчи", 1979.
14. Мирзааҳмедов М. А., Сотиболдиев Д. А. Ўқитувчиларни математик олимпиадаларга тайёрлаш. Тошкент, "Ўқитувчи", 1993.
15. http://www.uzedu.uz – Xalıq bilimlendiriw ministrliginiń xabar bilimlendiriw portali.
16. http://www.eduportal.uz – Multimediya orayi xabar bilimlendiriw portali.
17. http://www.problems.ru – Matematikadan máseleler izlew tizimi (rus tilinde).
18. http://matholymp.zn.uz – O'zbekistanda hám dunyada matematikaliq olimpiadalar.

MATEMATIKA

GEOMETRIYA



10- klass

10 – klasta geometriyanıń stereometriya bólimin – keńisliktegi geometriyalıq shaqil (dene)lerdiń qásietlerin dizimli úyreniwge kirisiledi. Sabaqlıqtan tiykargı keńisliktegi deneler: kópjaqlılar hám aylanba deneler hám olardıń tiykargı qásietleri, keńislikte parallel hám perpendikulyar tuwrı (sızıq)lar hám tegislikler hám de olardıń qásietlerine sáykes máseleler orın algan.

"Geometriya – 10" sabaqlıgında teoriyalıq materiallar ápiwayı hám túsinerli tilde ańlatılıwına háreket etilgen. Barlıq tema hám túsinikler túrli ómirlik mısallar arqalı ashıp berilgen. Hár bir temadan soń keltirilgen sorawlar, dálillewge, esaplawga hám sogıwga say kóplep másele hám mısallar oqıwshını tvorchestvolıq pikirlewge úndeydi, ózlestirilgen bilimlerdi tereńlestiriwge hám bekkemlep barıwga járdem beredi.

"Geometriya – 10" sabaqlıgı ulıwma orta bilimlendiriw mekteplerinin 10 – klas oqıwshılarına mólsherlengen, oninan geometriyanı óz betinshe úyrenbekshi hám tákirarlamaqshı bolgan kitap oqıwshılar da paydalanıwları múmkin.

M A Z M U N Í

Sabaqliqtin "Geometriya" bo'liminde islatilgen belgiler hám olarding talqini:

– teorema

– teorema dálilinin aqırı

– aksioma

– ámeliy qollanıw

– tema boyınsha sorawlar

– tarıyxıy úzindiler

– aktivlestiriwshi shinıgiwlar

– geometriyalıq basqatırmalar

I BÓLIM

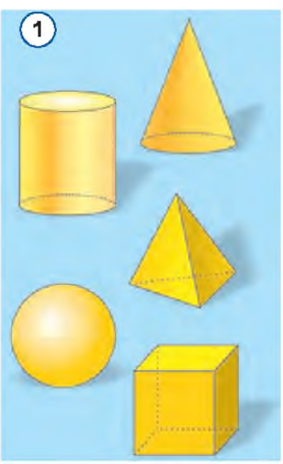
PLANIMETRIYANI SISTEMALI TÁKIRARLAW

1 PLANIMETRIYANÍN LOGIKALÍQ DÚZILISI

Geometriya real ómirdegi predmetlerdiń muǵdarlıq (sanlı) kórsetkishleri hám keńisliktegi shákillerdi úyrenetuǵın pán. Zatlardın basqa qásietlerin basqa pánler úyrenedi. Eger birar zat úyrenilip atırǵanda, onıń tek ǵana keńisliktegi ko'rinisi hám ólshemleri esapqa alınsa, onda *geometriyalıq ko'rinis* dep atalıwshı abstrakt ob'ektke ie bolamız.

Geometriya– grekshe sóz bolıp, "jer ólshew" degen mánini bildiredi. Mektepte úyreniletuǵın geometriya áyemgi grek ilimpazı Evklid atı menen *Evklid geometriyası* dep ataladı. Geometriya eki bólekten: planimetriya hám stereometriyadan ibárat. *Planimetriya* – tegisliktegi, *stereometriya* bolsa keńisliktegi geometriyalıq figurallerdiń qásietlerin úyrenedi (1 – súwret).

Geometriyalıq shákillerdi bir – birinen parıqlaw ushın olardıń qásietleri anıqlanadı, yaǵnıy olarǵa *anıqlama* beriledi. Biraq, hámme shákillerge de anıqlama berip bolmaydı. Olardıń daslepki bir neshewin anıqlamasız qabıl qılıwǵa májbúrmiz. Olardı anıqlanb(anıqlama berip bolm)aytuǵın, *dáslepki (tiykarǵı) geometriyalıq figuraler* dep alamız



Geometriyanıń logikalıq qurılısı tómendegi tártipte ámelge asırıladı:

1. Aldın tiykarǵı (dáslepki) geometriyalıq figuraler anıqlamasız qabıl qılınadı;

2. Dáslepki geometriyalıq figuralerdiń tiykarǵı qásietleri dálilsiz qabıl qılınadı;

3. Basqa geometriyalıq figuraler tiykarǵı shákiller hám olardıń qásietlerine súenip (tayanıp) anıqlama beriledi hámde olardıń qásietleri oǵan shekem belgili bolǵan qásietlerge súenip dálillenedi.

Pánniń bunday dúzilisi *aksiomatikalıq dúzilis* dep ataladı. *Aksioma* dep durıslıǵı dálilsiz qabıl qılınatuǵın qásietke aytıladı.

Usı waqıtqa shekem biz úyrengen planimetriyanıń tiykarǵı shákilleri bul noqat hám tuwrı sızıq edi. Olardı anıqlamasız qabıl qıldıq. Kesindi, nur, úshmúeshlik hám basqa geometriyalıq koorinisilerge bolsa anıqlama berdik. Sonday-aq, tómendegi qásietlerdi (tastıyqlardı) dálilsiz aksioma retinde (sıpatında) qabıl qıldıq:

I. Tiyislilik aksiomaları toparı (gruppası)

1.1. *Tegislikte qanday tuwrı (sızıq) alınbasın, onda bul tuwrıǵa tiyisli bolǵan noqatlar da, tiyisli bolmaǵan noqatlar da bar.*

1.2. *Hár qanday eki noqattan tek ǵana bir tuwrı sızıq ótedi.*

II. Tártip aksiomaları toparı (gruppası)

2.1. *Bir tuwrı sızıqta alınǵan qálegen úsh noqattıń tek ǵana birewi qalǵan ekewiniń arasında jatadı.*

2.2. *Hár bir tuwrı tegislikti eki bólekke: eki yarım tegislikke ajıratadı.*

III. Ólshew aksiomaları toparı (gruppası)

3.1.*Hár qanday kesindi nolden parıqlı belgili uzınlıqqa ie bolıp, ol oń san menen ańlatıladı. Kesindi uzınlıǵı onıń qálegen noqatı ajıratqan bólekleri uzınlıqları qosındısına teń.*

3.2. *Hár qanday múesh belgili gradus ólwewine ie bolıp, onıń mánisi oń san menen ańlatıladı. Jayıq múeshtiń gradus ólshemi* $180°$ *qa teń. Múeshtiń gradus ólshemi, múesh tárepleri arasınan ótiwshi qálegen nur ajıratqat múeshler gradus ólshemleriniń qosındısına teń.*

IV. Teń figurani qoyıw aksiomaları gruppası

4.1. *Qálegen nurǵa onıń ushınan baslap, berilgen kesindige teń jalǵız (tek ǵan bir) kesindini qoyıw múmkin.*

4.2. *Qálegen nurdan belgili yarımtegislikke berilgen, jayıq bolmaǵan múeshke teń jalǵız (tek ǵana bir) múeshti qoyıw múmkin.*

4.3. *Hár qanday úshmúeshlik ushın oǵan teń úshmúeshlik bar hám onı nurdan belgili yarımtegislikke jalǵız (tek ǵana bir) tárizde qoyıw múmkin.*

V. Parallellik aksioması

5.1. *Tegislikte tuwrı sızıqtan tısqarıda alınǵan noqattan bul tuwrı sızıqqa tek ǵana bir dana parallel tuwrı sızıq ótkiziw múmkin.*

Birar tasdıyqtıń durıslıǵın logikalıq aytımlar járdeminde keltirip shıǵarıwǵa *dálil* dep ataladı. Durıslıǵın dálillew jolı menen tiykarlanatuǵın tasdıyq bolsa *teorema* dep ataladı. Teorema ádette shárt hám juwmaq bóleklerden ibárat boladı. Teoremanıń birinshi – shárt bóleginde neler berilgeni bayan qılınadı. Ekinshi

– juwmaq bóleginde bolsa neni dálillew kerekligi (lazımlıǵı) ańlatıladı.

Teoremanı dálilew – onıń shártinen paydalanıp, buǵan shekem dálillengen hám qabı qılınǵan qásietlerge súenip (tayanıp), talqıllaw júrgizip, juwmaq bóleginde ańlatılǵan pikir gáptiń durıslıǵın keltirip shıǵarıw esaplanadı. Teoremanıń shárt hám juwmaq bóleklerin anıqlastırıp alıw - teoremanı aydınlastıradı, onı túsiniw hám dálillew procesin jeńillestiredi.


Evklid
(eramızdan aldıńǵı 356 – 300 – jıllar)

Grek ilimpazı Platon geometriyada ájayıp bir nızamlıqtı sezgen (payqaǵan): aldın úyrenilgen, durıslıǵı dálillengen qásietlerden logikalıq pikirlew, talqınlaw júrgiziw arqalı jańa qásietlerdi keltirip shıǵarsa bolar eken. Bunday ájayıp imkaniyattan paydalanıp, qalǵan qásietler teoremalar kórinisinde ańlatıladı hám aksiomalar hámde usı waqıtqa shekem durıslıǵı dálillengen qásietlerge tiykalanıp, logikalıq pikirler júrgiziw arqalı dálillenedi.

Pikir júrgiziw procesinde dálilenbegen qásietlerden (olardıń durıslıǵı ashıq – aydın kórinip turǵan bolsa da) paydalanıw qadaǵan etiledi.

Sonday qılıp, geometriyanı bir imárat (jay) dep qaraytuǵın bolsaq, dáslepki túsinikler hám aksiomalar onıń fundamentin quraydı. Bul fundament ústinde qurılǵan gerbishler jańa túsinikler hám teoremalar kórinisinde dálillengen qásietlerden ibárat boladı.

Geometriyanı óz betinshe pán retinde tiykarlawda áyemgi (qádimgi) grek ilimpazları úlken úles qosqan. Máselen, Gippokrat Xiosskiy geometriya tiykarları haqqındaǵı dáslepki tásewirlerin bayan etken. Bul taraw boyınsha tiykarǵı jumıslardı ullı grek ilimpazı Evklid (eramızǵa shekem 356 – 300 – jıllar) ámelge asırǵan. Onıń tiykarǵı shıǵarması “Negizler” planimetriya, stereometriya hám sanlar teoriyasınıń bazı máselelerin, sonday-aq, algebra, qatnaslar ulıwma teoriyası, maydan hám kólemlerdi esaplaw usılı hámde shekler teoriyası elementlerin óz ishine aladı. “Negizler”de Evklid áyemgi grek matematikasınıń barlıq jetiliskenliklerin jámledi hám onıń rawajı ushın tiykar jarattı.

"Negizler" 13 kitaptan ibárat bolıp, bul shıǵarma eramızdan aldıńǵı V – IV ásirler grek matematikleri shıǵarmaları qayta islenbesten ibárat. Shıǵarmada 23 anıqlama, 5 postulat hám 9 aksioma berilgen. Shıǵarmada tuwrı tórtmúeshlikke, kvadratqa, sheńberge durıs anıqlama berilgen. Noqat hám sızıqqa tómendegi anıqlamalar berilgen: “Noqat dep sonday zatqa aytqladı, ol bóleklerge ie emes”, “Sızıq dep eni joq uzınlıqqa aytıladı”.

"Negizler"de 9 aksioma – dálilsiz qabıl qılınatuǵın pikirler bayan qılınǵan.

Omar Hayyam (1048–1131)

Geometriyalıq – jasawlardı ámelge asırıw múmkinligin bayan etiwshi matematik postulatlardan tómendegi besewin bayan etilgen:

I. Hár qanday eki noqattan tek ǵana bir tuwrı (tuwrı sızıq) ótkiziw múmkin.

II. Tuwrı sızıq kesindisin sheksiz dawam ettiriw múmkin.

III. Hár qanday oraydan qálegen aralıta sheńber jasaw múmkin.

IV. Hámme tuwrı múeshler óz-ara teń.

V. Bir tegislikte jatırǵan eki tuwrı sızıqtı úshinshi tuwrı sızıq kesip, bir tárepli ishki múeshler payda etse hám múeshler qosındısı eki tuwrı múeshten kishi bolsa, usı tuwrı (tuwrı sızıq)lar dawam ettirilgende olar qosındısı eki tuwrı múeshten kishi múeshler tárepte kesilisedi

Usı shıǵarma úlken hám uzaq dańqqa ie boldı. Ásirese, V postulat úlken ilimiy talqınlarǵa sebep boldı. Eger V postulattaǵı ishki almasınıwshı múeshlerdi α hám β desek (1-súwret), tuwrı sızıqlar a hám b bolsa, ol halda postulat mazmunına kóre $\alpha+\beta<180°$ bolsa, a hám b tuwrı sızıqlar kesilisedi.

Postulattı dálillew jolında oǵan teń kúshli bir qatar pikirler payda boldı. Máselen, anglichan matematigi Yan Pleyfer (1748-1819)dıń *parallellik aksiomasi* solarǵa uxsas: tekislikte tuwrıdan tısqarıda alınǵan noqattan bul tuwrıǵa tek ǵana bir parallel tuwrı ótkiziw múmkin.

Metematik shayır astronom hám filosof Omar Ǵiyasiy Abul Fatx ibn Ibrayım Hayyam da bul másele menen shuǵıllanǵan. Hayyam “Evklid kitabınıń kirisiw bólegindegi qıyınshılıqlarǵa túsindirmeler (sharhlar)” atlı shıǵarmasında V haqqındaǵı postulatqa toqtaladı. Ol Evklidtiń postulatı teorema ekenligin dálillew ushın tómengi ultanındaǵı eki múeshi tuwrı bolǵan tuwrı tórtmúeshlikti qaraǵan (2 – súwret) hám eger onıń tómengi eki múeshi tuwrı bolsa, joqarıdaǵı eki múeshi de tuwrı bolıwı kerek degen juwmaqqa kelgen. Omar Hayyam “Bir tuwrıǵa perpendikulyar bolǵan eki tuwrı tuwrınıń eki tárepinde de kesilise almaydı – ǵo”, - deydi. Omar Hayyamnıń bul islerinen xabarsız italiyalıq matematik J.Sakkeri (1667 – 1733) de V postulat penen shuǵıllanıp, tuwrı tórtmúeshlikke múrájet qılǵan. Geometriya tiykarlarına bul tuwrı tórtmúeshlik “Hayyam – Sakkeri tórtmúeshi” atı menen kirgen. .

Bul mashqala(problema)nı ullı rus matematigi Nikolay Ivanovich Lobachevskiy (1792 – 1856) hal etti hám naevklid (evklid emes) geometriyasın jarattı. Lobachevskiy birinshi márte Evklidtiń besinshi postulatı geometriyanıń basqa aksiomalarına baylanıslı emesligin dáyliylledi. Bul geometriya Evklid geometriyasınan túkkeley parıq qılar edi. Biraq, ol logikalıq qarama – qarsılıqqa

N.I.Lobachevskiy
(1792–1856)

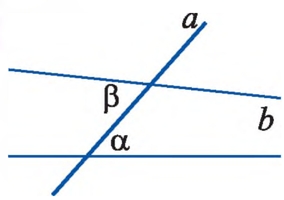
dus (tuwrı) keliwi lazım edi, sebebi – eki geometriyanıń bir waqıtta bar bolıwı múmkin emes edi. Soǵan qaramay, Lobachevskiy jańa nátiyjeler keltirp shıǵara berdi, olar logikalıq qarama – qarsılıqlarǵa ushramadı. Jańa geometriya hám Evklid geometriyasında birinshi tórt topar (gruppa) aksiomalar ústpe – úst túsedi. Bul aksiomalar topar (gruppa)ları hám olardıń nátiyjeleri absolyut geometriya dep atala basladı.

Biraq, naevklid (Lobachevskiy) geometriyası Evklid geometriyasınan anaǵurlım parıq qıladı. Máselen, Lobachevskiy geometriyasında úshmúeshlik ishki múeshleriniń qosındısı π (180°) dan kishi, onda uqsas yaki teń bolmaǵan úshmúeshlikler bar emes, berilgen tuwrı sızıqtan birdey uzaqlasqan noqatlar kópligi tuwrı sızıq emes, bálki iymek sızıq esaplanadı hám taǵı basqalar.

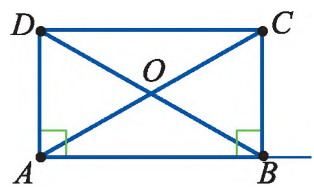
Naevklid geometriyanı jaratıwǵa venger matematigi Yanosh Bolyayi (1802-1860) hám nemis matematigi Karl Fridrix Gauss (1777 – 1855) lar úken úles qosqan. Sonday – aq italiyan matematigi Eujeno Beltrami (1835 – 1900) hám nemis matematigi Bernxard Riman (1826 – 1899) jańa geometriya boyınsha úlken jumıslar qılǵan.

Evklid baslap bergen aksiomatika belgili (málim) mánide nemis matematigi David Gilbert (1862 – 1943) hám rus matematigi Veniamin Fyodorovich Kagan (1859 – 1953) jumıslarında aqırına jetkizildi.

1



2



? *Temaǵa say sorawlar*

1. Geometriya aksiomaları sistemasın dawam etken Wvklid haqqında nelerdi bilesiz?
2. Evklidtiń "Negizler" shıǵarması haqqında aytıp beriń.
3. Anıqlama ne? Tegislikte qaysı shákiller tiykarǵı (dáslepki) shákiller retinde anıqlamasız qabıl qılınǵan?
4. Teorema hám aksioma bir – birinen nesi menen parıq qıladı?
5. Planimetriya aksiomaların sanań hám túsindiriń (sharqlań)
6. Geometriya páni qalay dúzilgen?
7. Evklidtiń 5-postulatı ne haqqında hám onı ne ushın dálillewge urınǵan?
8. Bul postulattı dálillewge urınǵan ilimpazlar hám olardıń jumısları haqqında aytıp beriń.
9. Lobachevskiy jańa geometriyanıń jaratılıwında qanday úles qosqan?

10. Naevklid geometriyasın jaratqan ilimpazlar hám olardıń jumısları haqqında aytıp beriń.

2 GEOMETRIYALIQ MÁSELELER HÁM OLARDI SHIĞARIW USILLARI

Joqarıda aytıp ótkenimizdey, geometriyanıń eń ájayıp qásieti bul aldın úyrenilgen, durıslığı dálillengen qásietlerden logikalıq pikirlew, talqınlaw júrgiziw arqalı jańa qásietlerdi keltirip shığarıw múmkin. Bunday ájayıp imkániyattan paydalanıp, qalǵan qásietler teoremalar yaki máseleler kórinisinde ańlatılǵan hám aksiomalar hámde usı waqıtqa shekem durıslığı dálillengen qásietlerge tiykarlanıp, logikalıq pikirler júrgiziw arqalı dáiyllengen. Sol gezleri matematikalıq yaki geometriyalıq máseleler júzege kelgen.

Matematikalıq máselede nelerdúr (shártler) berilgen boladı. Olardan paydalanıp, nenidir tabıw (esaplaw) yaki dálillew, yaki jasaw talap etiledi. Qoyılǵan talaptı orınlaw máseleni shığarıwdı bildiredi.

Geometriyalıq máseleler qoyılǵan talapqa kóre esaplawǵa, dálillewge, pikirlewge hám jasawǵa say máselelerge bólinedi.

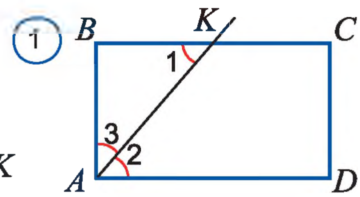
Matematik máseleni shığarıw ushın tek ǵana teoriyanı biliw jeterli emes. Másele shığarıw kónikpesine hám tájiriybesine de ie bolıw talap etiledi. Bunday kónikpege óz náwbetinde ápiwayı máselelerden baslap, barǵan sarı quramalıraq máselelerdi shığarıw arqalı erisiledi. Sonday – aq, máselelerdi shığarıwdıń túrli usılları da bar bolıp, olardı tek kóp máseleler shığarıw arqalı ózlestiriw múmkin. Hár bir usıl belgili bir túrkimge tiyisli máselelerdi shığarıw ushın qollanıladı. Qanshe kóp usıllar ózlestirilse, sonsha másele shığarıw kónikpeleri shákillenedi.

Tómende geometriyalıq máselelerdi shığarıwdın bazı áhmietli usılları ústinde taqtap ótemiz.

Másele shığarıw usılları dúzilisine kóre, sintetikalıq, analitikalıq, kerisinshe tásewir (paraz) qılıw hám tağı basqa túrlerge bóinedi. Matematikalıq apparattın qollanılıwına kóre bolsa, algebralıq, vektorlı, koordinatalı, maydanlar usılı, uxsaslıq usılı, geometriyalıq almastırıwlar kibi túrlerge bóinedi.

Sintetikalıq usıl mánisinen másele shártinde berilgenlerden paydalanıp, pikir júrgiziw arqalı logikalıq pikirler shınjırın payda qılınadı. Pikirler shınjırı eń aqırǵı bólegi másele talabı menen ústpe – úst túskenge shekem dawam ettiriledi.

1- mısal. Tuwrı tórtmúeshlik múeshiniń bissektrisası onıń tárepin 7 hám 9 uzınlıqtaǵı kesindilerge bóledi (1 – súwret). Tuwrı tórtmúweshlik perimetrin tabıń.



Sheshimi: Meyli $ABCD$ – tuwrı tórtmúeshlik, AK

bissektrisa, $K \in BC$, $BK = 7$ sm, $KC = 9$ sm bolsın.

1. $BC \parallel AD$ hám AK kesiwshi bolǵanı ushın : $\angle 1 = \angle 2$. (1)

boladı, sebebi bul múeshler ishki almasınıwshı múeshlerdir.

2. AK – bissektrisa: $\angle 2 = \angle 3$. (2)

3. Onda (1) hám (2) ge kóre $\angle 1 = \angle 3$.

4. Ol halda ABK teń qaptallı úshmúeshlik hám $AB = BK$.(3)

5. Bul nátiyjeden paydalanıp, esaplawlardı ámelge asıramız:

$AB = BK = 7$ sm. $P = 2(AB + BC) = 2\,(7+16) = 46\ (sm)$. ❑

Bul máseler tayanısh máseleler qatarına kiredi, sebebi kóp máseleler tap sonday ideya átirapında qurıladı. Parallelogramm hám trapeciya múeshiniń bissektrisası bul shákiller tegisliginen teń qaptallı úshmúeshlik kesip aladı. Bunday titykarǵı (tayanısh) faktlerdi hár dayım yadta tutıw kerek. Olar basqa máselelerdi sheship atırǵanda júdá qol keledi.

Analitikalıq usıl mánisi jaqtan teorema (másele)niń juwmaq bóleginde kelip shıǵıp, aldınnan málim (belgili) tastıyqlardan paydalanıp, pikir júrgiziw arqalı logikalıq pikirler shınjırın payda etedi. Pikirler shınjırınıń eń aqırǵı bólegi másele shártiniń nátiyjesi ekenligin anıqlaǵanǵa shekem dawam ettiriledi.

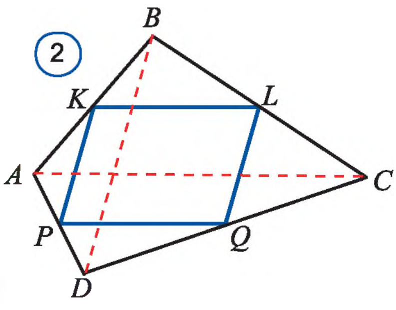
2- mısal. Qálegen tórtmúeshlik tárepleriniń ortaları parallelogrammnıń ushları bolıwın dálilleń.

Dáliyleniwi: Meyli $ABCD$ – tórtmúeshlik (2 – súwret), $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bolsın.

Tórtmúeshliktiń AC hám BD diagonalların ótkizemiz.

1. $\triangle ABC$ da KL orta sızıq: $KL \parallel AC$ (1);
2. $\triangle ADC$ da PQ orta sızıq: $AC \parallel PQ$ (2);
3. (1) hám (2) den: $KL \parallel PQ$ (3);
4. Joqarıdaǵıǵa uqsas: $KP \parallel LQ$ (4);
5. (3) va (4) ten: $KLQP$ – parallelogramm. ❑

2



Joqarıda kórilgen sintetikalıq hám analitikalıq usıllar *tuwrı usıllar* dep te ataladı. Máselen tuwrı usıllar menen sheship atırǵanda, aldın másele mazmunı analiz qılınadı. Analiz nátiyjesine kóre usılı tańlanadı. Sonnan soń, súwret kórinisinde máseleni sheshiw modeli (sızılması) dúziledi hám sızılma ústinde pikir júrgiziledi. Sol tárizde pikir júrgizip, máseleniń shártinen onıń juwmaq bólegine qarap barıla beredi.

Másele shıǵarıwdıń keri usılı da bar. Ol menen kóp márte dus kelgenbiz. Ol ***"Kerisinshe kóz aldıǵa keltirip dálillew usılı"*** dep ataladı. Bul usıldı qollaw algoritmin keltiremiz.

Kerisinshe kóz aldıǵa keltirip dálillew usılın qollaw algoritmi

Teorema (tuwrı tastıyq)	***Eger A orınlı bolsa, B orınlı boladı. (A hám B – qandayda pikirler)***
Dáliyl:	
Kerisin kóz aldıǵa keltiremiz:	Teoremada keltirilgen tastqıyqtıń kerisin kóz aldıǵa keltiremiz, yaǵnıy teoremanıń shárti orınlansın da, biraq juwmaq orınlı bolmasın: ***Eger A orınlı bolsa, B orınlı bolmaydı.***
Pikir júrgizemiz:	Tuwrılıǵı aldın dálillengen teorema yaki qabıl qılınǵan aksiomalarǵa súenip (tayanıp) logikalıq pikir júrgizemiz.
Qarama – qarsılıqqa kelemiz:	Tuwrılıǵı aldın dálillengen teorema yaki qabıl qılınǵan aksiomalardıń birine qarama – qarsı bolǵan tastıyqqa dus kelip qalamız.
Juwmaq shıǵaramız:	Demek, oylawımız nadurıs, yaǵnıy berilgen teorema durıs eken.
Teorema dálilendi	

3- mısal. Eger eki tuwrınıń hár biri úshinshi tuwrıǵa parallel bolsa, olar óz – ara parallel boladı.

Meyli, a hám b tuwrılar berilgen bolıp, olardıń hár biri c tuwrıǵa parallel bolsın. Teoremanıń kerisin tásewir qılıw usılı menen dálilleymiz.

Dáliylleniwi. Kerisinshesin kóz aldıǵa keltiremiz: a hám b tuwrınıń hár biri úshinshi c tuwrıǵa parallel bolsın da, olar óz – ara parallel bolmasın, yaǵnıy birar A noqat kesilisken (3 – súwretke qarań). Onda A noqattan c tuwrıǵa eki a hám b parallel tuwrı sızıqlar ótpekte. Bul parallellik aksiomasına qarama – qarsı. Qarama – qarsılıq oylawımızdiń nadurıs ekenligin kórsetedi. Yaǵnıy a hám b tuwrınıń hár biri úinshi c tuwrıǵa parallel bolsa, olar óz – ara parallel boladı. ❑

3

Usı usıl tómendegi logikalıq nızamǵa tiykarlanǵan: bir – birine qarama – qarsı eki tastıyqtıń tek ǵana birewi shın, ekinshisi bolsa jalǵan boladı, úshinshi jaǵdaydıń bolıwı múmkin emes.

Endi geometriyalıq máselelerdi shıǵarıwdıń basqa usıllarına toqtalamız.

Algebralıq usıl

Geometriyalıq máseleni algebralıq usıl menen shıǵarıp atırǵanda tómendegi algoritm tiykarında jumıs kóriw máqsetke muapıq boladı.

1) Máseleniń mazmunın analiz qılıw hám onıń sızılma modelin qurıw;
2) Belgisizdi háripler menen belgilew;
3) Másele shártin ańlatıwshı teńleme yaki teńlemeler sisteması dúziw;

4) Dúzilgen teńleme yaki teńlemeler sistemasın sheshiń;

5) Tabılǵan sheshimdi analiz qılıw;

6) Juwaptı jazıw.

4-mısal. Tuwrı múeshli úshmúeshliktiń perimetri 36 sm ge teń. Gipotenuzanıń katetke qatnası 5:3. Úshmúeshliktiń tareplerin tabıń.

Meyli, $\triangle ABC$ berilgen bolıp, onda $\angle C = 90°$, $P = 36$, $AB:AC = 5:3$ bolsın.

Sheshimi: Proporcionallıq koefficientih k menen belgileymiz.

Onda $AB = 5k$, $AC = 3k$.

Pifagor teoremasına kóre: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ yaki $25k^2 = 9k^2 + BC^2$.

Bunnan, $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$;

$P = AB + AC + BC$.

Shártke kóre: $P = 36$, $5k + 3k + 4k = 36$, $k = 3$;

$AB = 5k = 15$ sm, $AC = 3k = 9$ sm, $BC = 4k = 12$ sm.

Juwap: 15 sm, 9 sm, 12 sm. ❑

Maydanlar usılı

Gey (bazı) bir geometriyalıq máselelerdi shıǵarıwda maydanlardı esaplaw formulalarınan paydalanıw kútilgen nátiyjeni tezde beredi. Bul jaǵdayda talap etilgen belgisiz, máseledegi járdemshi shákillerdiń maydanların teńlestiriw nátiyjesinde payda qılınǵan teńlemeden tabıladı. Bunı tómendegi mısalda kórsetemiz.

5- mısal. Úshmúeshliktiń tárepleri 13 sm, 14 sm hám 15 sm. Uzınlıǵı 14 ke teń tárepke túsirilgen biyiklikti tabıń.

Meyli, $\triangle ABC$ berilgen bolıp, onda $a = 13$ sm, $b = 14$ sm, $c = 15$ sm bolsın.

Sheshimi. $a < b$ hám $b < c$, h_c – biyiklik bolsın.

Geron formulasına kóre: $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$ (sm²).

Basqa formula boyınsha:: $S_\triangle = \frac{1}{2} b \cdot h_b$; $\frac{1}{2} b \ h_b = 84$, $h_b = 12$ (sm).

Juwap: 12 sm. ❑

Vektorlar usılı

Geometriyalıq máseleni vektorlar usılı menen shıǵarıw ushın tómendegi algoritm tiykarında jumıs kóriw máqsetke muapıq boladı.

1) Máseleni vektorlar tiline ótkiziw, yaǵnıy máseledegi bazı ólshemlerdi vektor retinde qarap, olarǵa say vektorlı teńlemeler dúziw;

2) Vektorlardıń belgili qásietlerinen paydalanıp, vektorlı teńlemenilerdiń shákilin almastırıw hám belgisizdi tabıw;

3) Vektorlar tilinen geometriya tiline qaytıw;

4) Juwaptı jazıw.

Vektor usılı menen tómendegi geometriyalıq máselelerdi sheshiw máqsetke muwapıq boladı:

a) tuwrılardıń (kesindilerdiń) parallelligin anıqlaw:

b) kesinlerdi berilgen qatnasta bóliw;

c) ush noqattıń bir tuwrıda jatıwın kórsetiw;

d) tórtmúeshliktiń parallelogramm (romb, trapeciya, kvadrat, tuwrı tórtmúeshlik) ekenligin kórsetiw.

6- mısal. Dónes tórtmúeshliktiń tárepleri ortaların parallelogramm ushları bolıwın dálilleń.

Meyli, ABCD tórtmúeshlik berilgen bolıp, onda $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bolsın (4 – súwret).

Dáliylleniwi: 1. Berilgen kesindilerdi sáykes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{KL}$, $\overline{PQ}$, $\overline{BL}$, $\overline{KB}$ vektorlar menen almastırıp, máseleni vektor tilinde ótkizemiz;

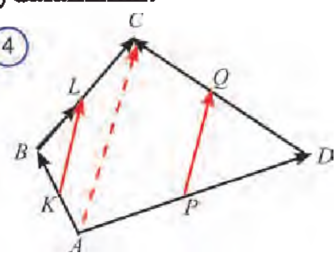
2. Vektorlardı qosıwdıń úshmúeshlik qaǵıydasınan paydalanamız:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \quad \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL};$$

$\overline{KB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ hám $\overline{BL} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ekenliginen paydalanıp, $\overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BL} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ekenligin tabamız.

Soǵan uqsas, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ boladı.

4



3. $\overline{KL} = \overline{PQ}$, yaǵnıy bul vektorlar birdey baǵıtlanǵan hám uzınlıqları teń. Bul $KLQP$ tórtmúeshlik parallelogramm ekenligin ańlatadı.

Koordinatalar usılı

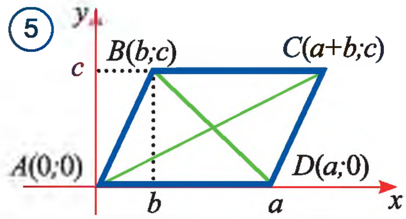
Geometriyalıq máseleni koordinatalar usılı menen sheship atırǵanda tómendegi algoritm tiykarında jumıs kóriw máqsetke muwapıq boladı:

1. Máseleniń mazmunın analiz qılıw hám onı koordinatalar tiline o'tkaziiw;
2. Ańlatpalardıń shákilin almastırıw hám mánisin esaplaw;
3. Nátiyjeni geometriya tilinde úyretiw;
4. Juwaptı jazıw.

Koordinatalar usılı menen tómendegi geometriyalıq máselelerdi shıǵarıw máqsetke muwapıq boladı: a) noqatlardıń geometriyalıq ornın tabıw; b) geometriyalıq figuralerdiń sızıqlı elementleri arasındaǵı baylanıslardı dálillew.

Koordinatalar usılı menen máseleni sheship atırǵanda, koordinatalar basın durıs tańlaw ahmietli. Berilgen figurani koordinatalar tegisligine solay jaylastırıw kerek, múmkinshiligi barınsha noqatlardıń koordinatları nolge teń bolsın.

7- mısal. Diagonalları teń parallelogrammnıń tuwrı tórtmúeshlik bolıwın dálilleń.



Dáliylleniwi. Koordinatalar sistemasın sonday tańlaymız, parallelogrammnıń ushları tómendegi koordinatalarǵa ie bolsın (5 – súwretke qarań):

$A(0;\ 0)$, $B(b;\ c)$, $C(a+b;\ c)$, $D(a;\ 0)$,

bul jerde $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$.

A, B, C, D noqatlar arasındaǵı aralıqlardı olardıń koordinataları arqalı ańlatamız:

$AC=\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2}$, $BD=\sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2}$,

onda, $\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2}=\sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2}$

yaki $(a+b-0)^2+(c-0)^2=(a-b)^2+(0-c)^2$. Bunnan, $4ab=0$.

Biraq, $a > 0$, onda $b = 0$. Bul bolsa óz náwbetinde $B(b;\ c)$ noqat Oy kósherinde jatıwın ańlatadı. Sonıń ushın BAD tuwrı múew boladı.

Bunnan $ABCD$ parallelogramm tuwrı tórtmúeshlik ekenligi kelip shıǵadı.❑

Geometriyalıq almastırıwlar usılı

Geometriyalıq almastırıwlar usılına burıw, simmetriyalıq sáwlelendiriw, parallel kóshiriw hám gomotetiya kibi almastırıwlarǵa tiykarlanǵan usıllar kiredi. Geometriyalıq almastırıwlar járdeminde máseleler sheshiw processinde berilgen geometriyalıq figuraler menen bir qatarda jańa, qollanılǵan geometriyalıq almastırıw járdeminde hasıl qılınǵan shákiller de qaraladı. Jańa shákillerdiń qásietleri anıqlanadı hám berilgen shákilge ótkiziledi. Sonnan soń máseleni sheshiw jolı tabıladı. Joqarıda keltirilgen barlıq usıllar bir ulıwma at penen geometriyalıq usıllar dep ataladı.

Áhmietli esletpe!

Bul bólimnen orın alǵan materiallar planimetriyanı tákirarlaw ushın berilgen. Tákirarlaw ushın máseleler kereginen artıq berilmekte. Olardıń barlıǵın klassta kóriwdiń imkánı bolmaslıǵı múmkin. Bunnan qattı názer, olardı óz – betinshe sheship shıǵıwdı usınıs etemiz. Bul sizge 10 – klasta geometriyanı úyreniwdi tabıslı dawam ettiriwimizge múmkinshilik jaratadı.

? ***Temaǵa say sorawlar***

1. Matematikalıq másele degende neni túsinesiz?
2. Geometriyalıq máseleniń qanday túrlerin bilesiz?
3. Másele shıǵarıwdıń qanday usılların bilesiz?
4. Geometriyalıq máseleni sheshiwdiń sintetikalıq, analitikalıq usılları haqqında aytıp beriń.
5. Másele shıǵarıwdıń tuwrı hám keri usılları haqqında neni bilesiz?
6. Kerisinshesin kóz aldıǵa keltirip dálillew usılınıń mánisi nede?
7. Geometriyalıq máseleni algebralıq usılda sheshiw algoritmin túsintirip beriń.

8. Geometriyalıq máseleni vektor usılında sheshiw algoritmin túsintirip beriń.
9. Vektor usıl menen ádette qanday máseleler sheshiledi?
10. Geometriyalıq máseleni koordinatalar usılı menen sheshiw algoritmin túsintirip beriń.
11. Koordinatalar usılı menen ádette qanday máseleler sheshiledi?
12. Geometriyalıq almastırıwlar usılın túsintirip beriń.

3 ÁMELIY SHÍNÍGÍW HÁM QOLLANÍWLAR

1.1. Eki tuwrılardıń kesilisiwinen tórt múesh payda boladı (1 – súwret). Tómende berilgen kestede hár bir shárt (A – E) ge odan kelip shıǵıwshı juwmaqtı (1 – 5 ti) sáykes qoyıń.

A) $\angle 1 = \angle 3$;
B) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$;
C) $\angle 1 = \angle 2 + 90°$;
D) $\angle 2 + \angle 4 = 260°$;
E) $\angle 3 = 90°$.

1) $\angle 3 = \angle 4 = 90°$;
2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90°$;
3) $\angle 1$ hám $\angle 4$ – qońsılas;
4) $\angle 1$ hám $\angle 3$ – súyir;
5) $\angle 2$ hám $\angle 4$ – vertikal.

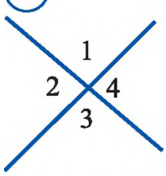
A	
B	
C	
D	
E	

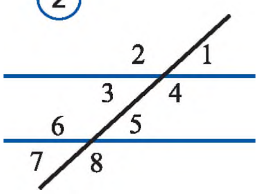
1.2. Tómendegi gey bir múeshlerdiń gradus ólshemleri (1 – 7) berilgen. Olardan qaysı jupları qońsılas bolıwı múmkinligin anıqlań.
1) 18°; 2) 72°; 3) 128°; 4) 62°; 5) 28°; 6) 108°; 7) 38°.
A) 1 hám 2; *B)* 2 hám 6; *C)* 3 hám 4; *D)* 1 hám 7; *E)* 2 hám 5;

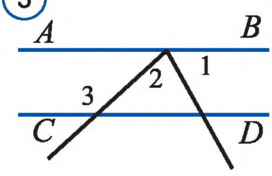
1.3. Eger 2 – súwrette $\angle 1 = \angle 7$ bolsa, durıs tastıyqtı tabıń.
A) $a \parallel b$; *B*) $a \perp b$; *C*) *a* hám *b* kesilispeydi;

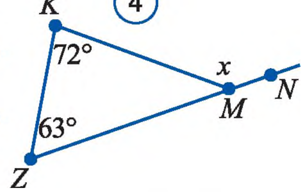
1.4. Eger 3 – súwrette $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ hám $\angle 2 = 72°$ bolsa, $\angle 3 = ?$
A) 72°; *B*) 144°; *C*) 108°; *D*) 36°; *E*) 124°.

1.5. Eger teń qaptallı úshmúeshlik múeshleri $3 : 4 : 3$ qatnasta bolsa, onıń ushınıń bissektrisası hám qaptal tárepleri arasındaǵı múeshti tabıń.
A) 18°; *B*) 36°; *C*) 72°; *D*) 60°; *E*) 30°.

1


2


3


4


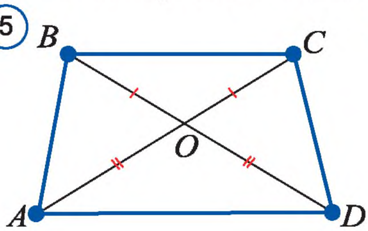
1.6. 4- súwrette kórsetilgen *KMZ* úshmúeshlik múeshine sırtı bolgan *KMN* múeshtiń gradus ólshemin tabıń.
A) 135°; *B*) 108°; *C*) 45°; *D*) 125°; *E*) 117°.

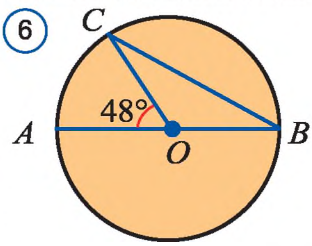
1.7. Durıs teńliklerdi anıqlań (5 – súwret).

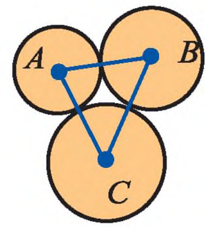
A) $\triangle ABO = \triangle OCD$; *B*) $BA = CD$; *C*) $\triangle ABO = \triangle COD$;

D) $\angle AOB = \angle DOC$; *E*) $\angle BAO = \angle DCO$; *F*) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.8. 6-súwrettegi BOC úshmúeshlik múeshlerin tabıń.

5


6


7


A) 48°, 48°; 84°; *B*) 24°, 132°, 24°; *C*)132°, 48°, 48°; *D*)42°,90°,48°; *E*)48°,32°, 20°.

1.9. Úshmúeshliktiń ushları radiusları 6 sm, 7 sm hám 8 sm bolǵan hám jup-juptı menen urınatuǵın úsh sheńber oraylarında jatırıptı (7 – súwret). Bul úshmúeshliktińperimetirn tabiń.

A) 28 sm; *B*) 29 sm; *C*) 27 sm; *D*) 42 sm; *E*) 21 sm.

1.10. Kvadrattıń tárepi $20\sqrt{2}$ ge teń. Bul kvadratqa ishley sızılǵan sheńber radiusın tabıń.

A) 20; *B*) $10\sqrt{2}$; *C*) 10; *D*) $5\sqrt{2}$; *E*) 5.

1.11. Trapecianıń bir ultanı ekinshisinen 8 sm ge uzın, orta sızıǵı bolsa 10 sm ge teń. Trapeciyanıń kishi ultanın tabıń.

A) 2 sm; *B*) 4 sm; *C*) 6 sm; *D*) 8 sm; *E*) 10 sm.

1.12. Diagonalları 10 m hám 36 m bolǵan rombtıń maydanın tabıń.

A) 90 m^2; *B*) 92 m^2; *C*) 180 m^2; *D*) 184 m^2; *E*) 36 m^2.

1.13. 8-súwrettegi *m* hám *n* tuwrılar óz – ara parallel bolsa, *a* hám *b* tuwrılar arasındaǵı múeshti tabıń.

A) 50°; *B*) 80°; *C*) 100°; *D*) 65°; *E*) 115°.

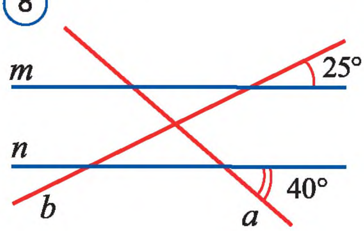
1.14. 9-súwrettegi úshmúeshlik maydanın tabıń.

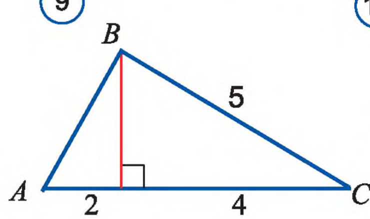
A) 6; *B*) 9 ; *C*) 12; *D*) 24; *E*) 30.

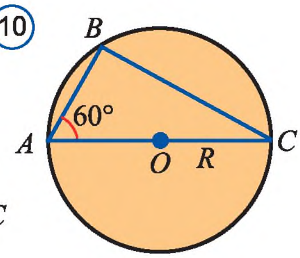
1.15. 10- súwrettegi *R* radiuslı sheńberge ishley sızılǵan *ABC* úshmúeshliktiń *BC* tárepin tabıń.

A) *R*; *B*) $R\sqrt{2}/2$; *C*) $R\sqrt{2}$; *D*) $R\sqrt{3}$; *E*) $R\sqrt{3}/2$.

1.16. Maydanı 9π sm^2 bolǵan dóńgelekti orap turǵan sheńber uzınlıǵın tabıń.

8


9


10


A) 3π sm; *B*) 9π sm; *C*) 12π sm; *D*) 18π sm; *E*) 6π sm.

1.17. Tárepi 6sm ge teń bolǵan kvadratqa ishley sızılǵan dóńgelek maydanın tabıń.

A) 9π sm^2; *B*) 144π sm^2; *C*) 36π sm^2; *D*) 72π sm^2; *E*) 18π sm^2.

1.18. Kvadratqa ishley sızılǵan sheńberdiń radiusı 5 sm. Kvadrat diagonalın tabıń.

A) $5\sqrt{2}/2$; *B*) $5\sqrt{2}$; *C*) $5\sqrt{2}/4$; *D*) $10\sqrt{2}$; *E*) $20\sqrt{3}$.

1.19. Ishki múeshler qosındısı 1600° bolǵan durıs kópmúeshliktiń tárepleri sanın tabıń.

A) 12; *B*) 14; *C*) 16; *D*) 18; *E*) 20.

1.20. Diagonalları 24 sm hám 18 sm bolǵan rombınıń perimetrin tabıń.

A) 120 sm; *B*) 60 sm; *C*) 84 sm; *D*) 108 sm; *E*) 144 sm.

1.21. Parallelogrammnıń perimetri 48 dm bolıp, bir tárepi ekinshisinen 8 dm ge uzın. Parallelogrammnıń kishi tárepin tabıń.

A) 8 dm; *B*) 16 dm; *C*) 6 dm; *D*) 12 dm; *E*) 10 dm.

1.22. 11- súwrettegi *ABC* teń qaptallı úshmúeshlik tısqarısındaǵı eki teń *ABM* hám *CBK* múeshler qurıldı. Bul múeshler tárepleri *AC* tárepti, sáykes túrde *M* hám *K* noqatlarda kesip ótti. *MBC* hám *KBA* úshmúeshlikler teńligin dálilleń.

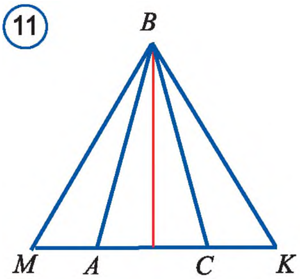
1.23. 12-súwrette kórsetilgen *AB* hám *CD* tuwrılardıń óz – ara jaylasıwın anıqlań. Juwabıńızdı tiykarlań.

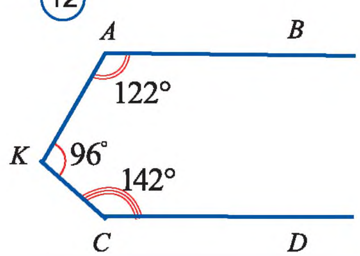
1.24. 13-súwrettegi *ABC* úshmúeshlikke sheńber ishley sızılǵan. Sheńberdiń *M* hám *Z* urınıw noqatları úshmúeshliktiń *AB* hám *AC* tárepleriń ayırması sáykes túrde 3 sm hám 4 sm bolǵan kesindilerge ajıratadı ($AN > NB$, $AZ > ZC$). Eger úshmúeshliktiń perimetri 28 sm bolsa, onıń tárepleriń tabıń.

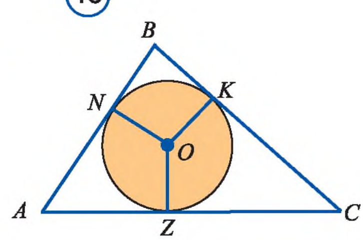
1.25. Teń tárepli úshmúeshlikke radiusı $3\sqrt{3}$ bolǵan sheńber ishley sızılǵan. Ishley sızılǵan sheńber radiusın tabıń.

1.26. Ultanındaǵı múeshi 30° bolǵan, teń qaptallı trapeciyaǵa sheńber sırtlay sızılǵan. Trapeciyanıń biyikligi 7 sm ge teń bolsa, onıń orta sızıǵın tabıń.

1.27. Ultanındaǵı múeshi 150° bolǵan, teń qaptallı trapeciya sheńberge sırtlay sızılǵan. Trapeciyanıń orta sızıǵı $16\sqrt{3}$ ke teń bolsa, onıń biyikligin tabıń.

11


12


13


1.28. Ultanı 16 sm hám bul ultanǵa túsirilgen biyikligi 15 sm bolǵan teń qaptallı úshmúeshliktiń qaptal tárepin tabıń.

1.29. *ABC* úshmúeshliktiń *AO* biyikligi onıń *BC* tárepin *BO* hám *OC* kesindilerge ajıratadı. $AB = 10\sqrt{2}$ sm, $AC = 26$ sm hám $B = 45°$, *OC* kesindiler uzınlıqların tabıń.

1.30. Rombınıń tarepi 10 sm, diagonallarinan biri 12 sm. Rombıǵa ishley sizilgan sheńber radiusin tabıń.

1.31. Radiusı 15 sm bolǵan sheńberde onıń orayınan 12 sm aralıqta bolǵan xorda ótkizilgen. Xorda uzınlıǵın tabıń.

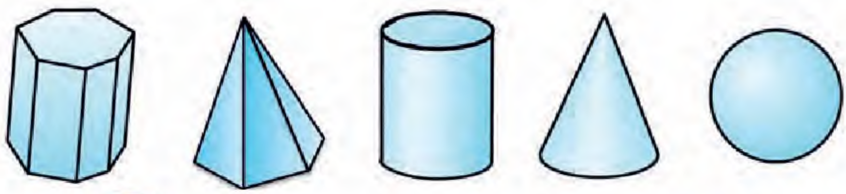
II BÓLIM

STEREOMETRIYAǴA KIRIW

4 KEŃISLIKTEGI GEOMETRIYALIQ FIGURALAR KÓPJAQLILAR

Geometriyalıq shákiller tegislikte tolıq jatırǵan yamasa jatırmaǵanlıǵa qarap, tegis (jalpaq) hám keńisliktegi shákillerge ajıratıladı. Aldıńgı klasslarda geometriyalı sabaqlarında tiykarınan tegis(jalpaq) geometriyalıq shákillerdiń qásietlerin úyrendik. 9 – klass aqırında bolsa, geypara keńisliktegi shákiller: prizma, piramida, cilindr, konus hám shardıń (1 – súwret) qásietlerine qarap shıqqan edik. Geometriyanıń planimetriya bólimi tegis (jalpaq) geometriyalıq shákillerdi, *stereometriya* bólimi bolsa, keńisliktegi geometriyalıq shákillerdiń (yamasa denelerdiń) qásiyetlerin úyrenedi. Stereometriya sózi greksheden alınǵan bolıp, "stereos" – keńislik, "metreo" – ólsheymen degen mánini ańlatadı.

1



2

2- súwrette átiraptaǵı geypara zatlar keńisliktegi denelerge mısal retinde olar haqqında tásewir beredi. Átirapımızdaǵı barlıq predmetrler úsh ólshemli bolıp, olardıń kórinisleri keńisliktegi qaysıdur geometriyalıq denege uqsap ketedi.

9- klass aqırında bunday keńisliktegi deneler menen tanısqansız. Stereometriya kursın sistemalı túrde úyreniwdi baslaymız. Aldın geybir keńisliktegi deneler elementleri haqqındaǵı maǵlıwmatlardı qısqasha esletip ótiwdi lazım dep taptıq.

3

Kópjaqlı dep tegis (jalpaq) kópmúyeshlikler menen shegaralanǵan denege aytıladı. Jalpaq kópmúyeshlikler bul *kópjaqlınıń jaqları,* kópmúyeshliklerdiń ushları *kópjaqlınıń ushları,* tárepleri qabırǵaları bolsa, *kópjaqlınıń qabırǵaları* dep ataladı. Bir jaqqa tiyisli bolmaǵan ushlarıń tutastırıwshı kesindi *kópjaqlınıń diagonalı* dep ataladı (3 – súwret).

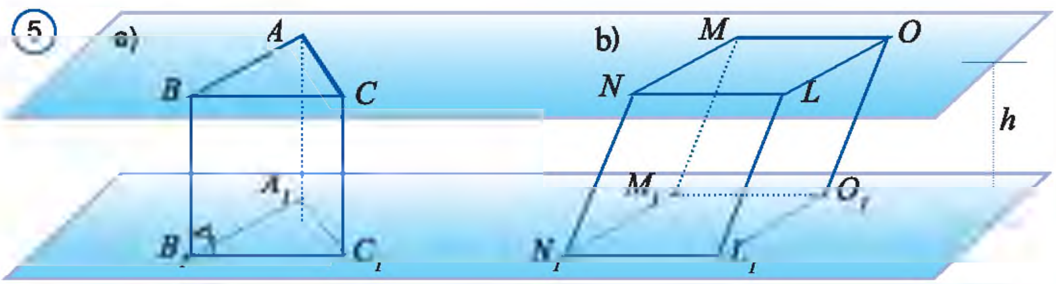
4

Kópjaqlınıń shegarası onıń beti (sırtı) dep ataladı. Kópjaqlınıń sırtı keńislikti eki bólekke ajıratadı. Olardan sheksiz bólegi *kópjaqlınıń sırtqı oblastı,* shekli bólegi bolsa, *kópjaqlınıń ishki bólegi* dep ataladı.

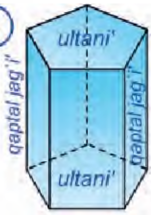
Kópjaqlı qálegen jaǵı jatırǵan tegisliktiń bir tárepinde jatsa, bunday kópjaqlıǵa *dóńes kópjaqlı* delinedi. Máselen, kub – dóńes kópjaqlı esaplanadi. 4 – súwrette bolsa, dóńes bolmaǵan kópjaqlı súwretlengen. Kelejekte eń ápiwayı dóńes kópjaqlılar: prizma hám piramidalardı úyrenemiz.

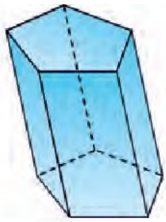
Prizma dep eki jaǵı teń kópmúyeshliklerden, qalǵan jaqları bolsa, parallelogrammlardan ibárat bolǵan kópjaqlıǵa aytıladı. (5 – súwret). Teń jaqlar prizmanıń *ultanları,* parallelogrammlar bolsa onıń *qaptal jaqları* dep ataladı (6 – súwret).Ultanınıń tárepleri sanına qarap prizmalar *ushmúyeshli, tórtmúyeshli* hám taǵı basqa *n – múyeshli prizmalar* dep júrgiziledi. 5. *a* – súwrette ushmúyeshli, $ABCA_1B_1C_1$ prizma, 5.*b* – súwrette bolsa, tórtmúyeshli $MNLOM_1N_1L_1O_1$ prizma súwretlengen.

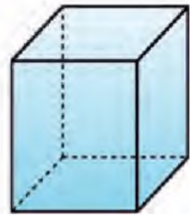
5



Prizma qaptal jaqları ultanına perpendikulyar yamasa perpendikulyar emesligine qarap tuwrı prizma (6 - súwret) yamasa qıya prizma (7 - súwret) dep ataladı.

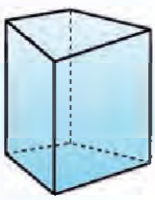
6


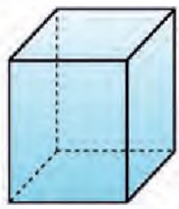
7


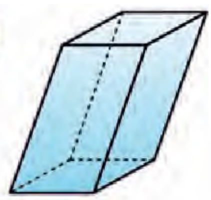
8


Ultanı durıs kópmúyeshlikten ibárat tuwrı prizma *durıs prizma* dep ataladı (8 - súwret). Ultanı parallelogramnan ibárat prizma *parallelepiped* dep ataladı (9 - súwret). Parallelepipedler de prizma kibi tuwrı hám qıya bolıwı múmkin.Ultanı tuwrı tórtmúeshlikten ibárat tuwrı parallelepiped *tuwrı múyeshli parallelepiped* dep ataladı (8,10,11 – súwret). Parallelepipedler de prizma siyaqlı tuwrı hám qiya boliwi mumkin. Ultanı tuwri to'rtmuieshliklerden ibárat tuwri parallelepiped *tuwri múyeshli parallelepiped* dep ataladi. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń barlıq jaqları tuwrı tórtmúeshliklerden ibárat boladı. Tuwrı múeshli parallelepipedtiń bir ushınan shıgıwshı úsh qabırgası onıń *ólshemleri* dep ataladı.

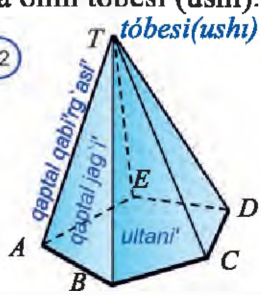
Ólshemleri teń bolgan tuwrı múyeshli parallelepiped *kub* dep ataladı. Kubtıń barlıq jaqları kvadratlardan ibárat boladı.

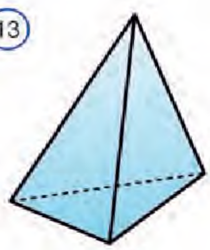
9


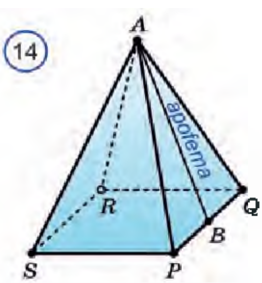
10


11


Piramida dep bir jagı kópmúyeshlikten, qalgan jaqları bolsa bir tóbege (ushqa) iye úshmúeshliklerden ibárat kópjaqlıga aytıladı. Kópmúyeshlik piramidanıń *ultanı*, úshmúyeshlikler bolsa onıń *qaptal jaqları* dep ataladı. 12 – súwrette *TABCDE* besmúyeshli piramida súwretlengen. *ABCDE* besmúyeshli piramidanın ultanı, *ATB*, *BTC*, *CTD*, *DTE* hám *ETA* úshmúyeshlikler onıń qaptal jaqları, *T* bolsa onıń tóbesi (ushı).

12


13


14


Ultanınıń tárepleri sanına qarap piramidalar *úshmúyeshli, tórtmúyeshli* hám tağı basqa *n – múyeshli piramidalar* dep júrgiziledi. Sonday – aq, úshmúyeshli piramida *tetraedr* dep te ataladı.

13 – súwrette úshmúyeshli, 14 – súwrette bolsa, tórtmúyeshli piramida súwretlengen.

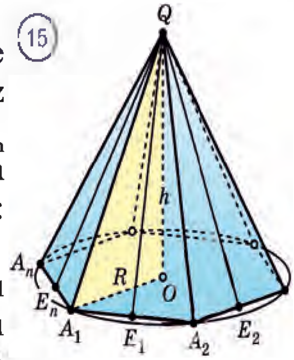
Piramidanıń tóbesinen ultan tegisligine túsirilgan perpendikulyar, onıń biyikligi dep ataladı. Pirmamidanıń ultanı durıs kópmúyeshlik hám biyikliginiń bir ushı ultanıń orayı menen ústpe – úst tússe, onda ol *durıs piramida* dep ataladı.

Durıs piramidanıń qaptal jağınıń, onıń tóbesinen júrgizilgen biyikligi, piramidanıń *apofeması* dep ataladı.

14 – súwrette APQRS *tórtmúyeshli durıs piramida súwretlengen. Ondağı AB kesindi piramidanıń apofemalarınıń biri esaplanadı.*

Teorema 1.1. Durıs piramidanıń a) qaptal jaqları; b) qaptal qabırğaları; c) apofemaları óz – ara teń.

Dáliylleniwi. Meyli, $QA_1A_2...A_n$ durıs piramida, O bolsa piramidanıń ultanınıń orayı bolsın (15 – súwret).



a) $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ kesindiler durıs kópmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńber radiusınan ibárat bolğanı ushın óz – ara teń boladı. Tuwrı múyeshli $QOA_1, QOA_2, \ldots, QOA_n$ úshmúyeshliklerde eki katetler óz – ara teń bolğanı ushın olar teń boladı. Onda olardıń gipotenuzaları da teń boladı: $QA_1 = QA_2 = \ldots = QA_n$.

b) $QA_1A_2 \ldots A_n$ durıs piramidanıń qaptal qabırğaları óz – ara teń bolğanı ushın onıń qaptal jaqları teń qaptallı úshmúyeshliklerden ibárat boladı. Bul úshmúyeshliklerdiń ultanları durıs kópmúyeshliktiń tárepi bolğanlığı ushın óz – ara teń boladı. Demek, durıs piramidanıń qaptal jaqları úsh tárepleri boyınsha óz – ara teń.

c) Durıs piramidanıń qaptal jaqları teń bolğanı ushın, olardıń Q ushınan túsirilgen biyiklikleri de óz – ara teń boladı.

Demek, durıs piramidanıń apofemaları da óz – ara teń.❑

Teorema 1.2. Durıs piramidanıń qaptal beti onıń ultanınıń yarım perimetri hám apofemasınıń kóbeymesine teń.

Dáliylleniwi. Meyli, $QA_1A_2 \ldots A_n$ durıs piramida bolsın (15 – súwret). Piramidanıń qaptal betinin maydanı onıń qaptal jaqları maydanları qosındısına teń. Onıń qaptal jaqları bolsa óz – ara teń bolğan teń qaptallı úshmúyeshlikten ibárat. O'z gezeginde (náwbetinde) bul úshmúyeshliklerdiń biyiklikleri de óz – ara teń apofemalardan ibárat:

$$QE_1 = QE_2 = \ldots = QE_n.$$

Bulardan $S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \ldots + S_{A_nQA_1} =$

$$= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + \ldots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n =$$

$$= \frac{1}{2} QE_1 (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1) = p \cdot a,$$

Bul jerde p – piramida ultanınıń yarımperimetri, a – piramida apofeması.❑

Tema boyınsha sorawlar

1. Qanday geometriyalıq figuralar a) tegis; b) keńisliktegi dep ataladı?
2. Qanday dene kópjaqlı dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.
3. Qanday dene prizma dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.
4. Qanday prizma túrlerin bilesiz?
5. Tuwrı múyeshli parallelepipedke anıqlama beriń.
6. Qanday dene piramida dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.
7. Qanday piramida túrlerin bilesiz?
8. Durıs piramida qásiyetlerin aytıń?

5 AYLANİW DENELERI: CILINDR, KONUS HÁM SHAR

Keńislik figuralarınıń jáne áhmiyetli klasslarınan biri – bul aylanıw deneleridir. Olarǵa cilindr, konus hám shar kiredi.

Tuwrı tórtmúyeshlikti bir tárepi átirapında aylandırıwdan payda bolǵan denege *cilindr* dep aytıladı (16 – 18 – súwretler).

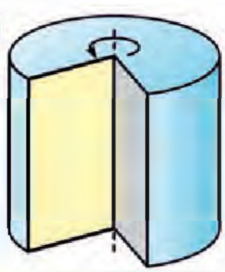
Bunday aylandırıwda tuwrı tórtmúyeshliktiń bir tárepi qozǵalıssız qaladı.

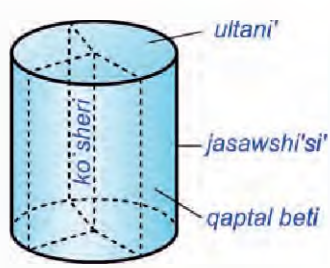
Onı *cilindrdiń kósheri* dep ataymız (17 – súwret).

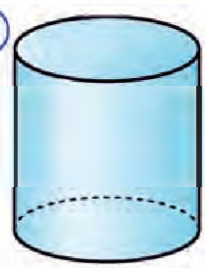
Kósherge qarama – qarsı jatırǵan tárep aylanıwdan payda bolǵan bet (sırt) *cilindrdiń qaptal beti* dep, tárеptiń ózi bolsa *cilindrdiń jasawshısı* dep júrgiziledi.

Tuwrı tórtmúyeshliktiń qalǵan tárеplеriniń hár biri bul aylanıwda dóńgelek kórinisindegi betti payda qıladı. Bul dóńgelekler *cilindrdiń ultanları* dep ataladı.

Tuwrı múyeshli ushmúyeshlikti bir kateti átirapında aylandırıwdan payda bolǵan denege *konus* dep aytıladı (19 – 21 – súwretler). Bul katetti bolsa *konustıń kósheri* dep ataymız.

16


17


18


19

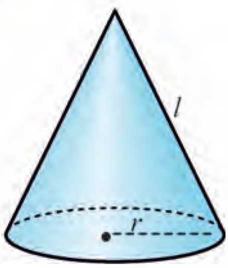

20

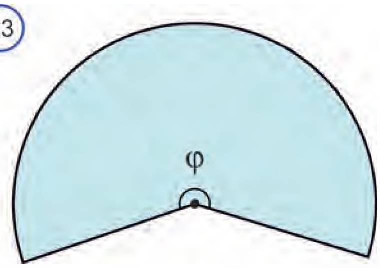

21


Bul aylantırıwda basqa katet payda qılǵan dóńgelek konustıń ultanı, gipotenuza payda qılǵan bet bolsa konustıń qaptal beti dep, gipotenuzanıń ózi bolsa konustıń jasawshısı dep jürgiziledi. Sonday – aq, bul aylanıwda qozǵalmastan qalǵan üshmüeshlik ushı konustıń ushı (tóbesi) delinedi (20 – süwret).

1.3. Teorema ***Konustıń qaptal betiniń maydanı π, ultanı radiusı hám jasawshısınıń kóbeymelerine teń, yaǵnıy $S = \pi \cdot r \cdot l$.***

Dáliylleniwi. Meyli, ultanınıń radiusı r hám jasawshısı l bolǵan konus

22


23


berilgen bolsın (22 – süwret). Konus qaptal betin tegislikke jayamız. Nátiyjede, radiusı l ge teń bolǵan dóńgelekli sektorǵa iye bolamız (23 – süwret).

Bul sektordıń oraylıq müyeshi φ di tabamız (21 – süwret). Bul oraylıq müyesh, konus ultanı sheńber uzınlıǵı - $2\pi r$ ge teń bolǵan sektordıń sheńber doǵasına tirelgen. Radiusı l bolǵan dóńgelektiń uzınlıǵı $2\pi l$ ge teń bolıp, ol 360° lı oraylıq müyeshke tirelgen. Nátiyjede proporciyaǵa iye bolamız:

φ° lı oraylıq müyesh - $2\pi r$ ge teń doǵa;

360° lı oraylıq müyesh - $2\pi l$ ge teń doǵa.

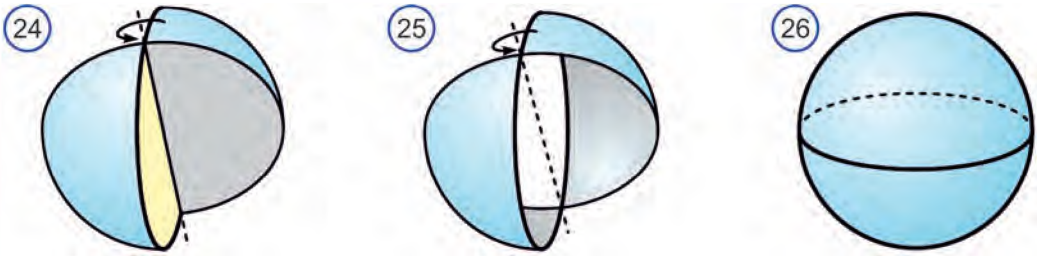
Onnan $\varphi = 360°/(2\pi l) \cdot 2\pi r = 360° \pi r / l$.

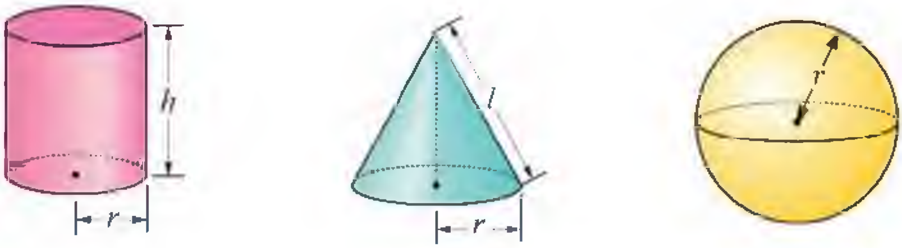
Endi radiusı 1 ge teń bolǵan, φ müyeshli S sektor maydanın tabamız:

$$S = \pi l^2/360° \cdot \varphi° = \pi l^2/360° \cdot 360° \cdot r/l = \pi \cdot r \cdot l.$$

Dóńgelektiń óz diametri átirapında aylanıwınan payda bolǵan denege *shar* dep aytıladı (24 – süwret). Bul aylandırıwda sheńber payda qılǵan bet *sfera* dep ataladı 25 – süwrette shar süwretlengen.

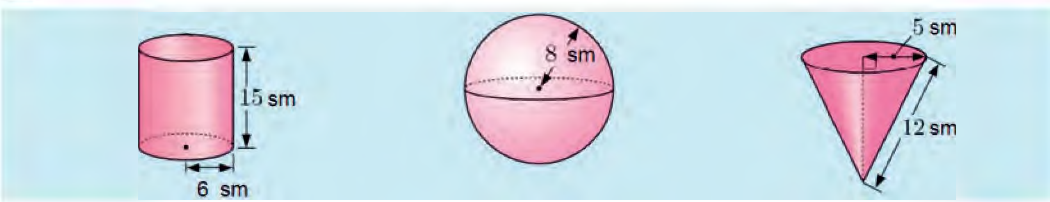
Aylanıw denelerdiń qaptal hám tolıq betiniń maydanı formulaları:





Cilindr	**Konus**	**Shar**
$S_{qapt.} = 2\,\pi r h$	$S_{qapt.} = \pi r l$	$S = 4\,\pi r^2$
$S_{tolıq.} = 2\,S_{ultan.} + S_{qapt.} = 2\,\pi r^2 + 2\,\pi r h$	$S_{tolıq} = S_{ultan.} + S_{qapt.} = \pi r^2 + \pi r l$	

Mısal: Tómendegi denelerdiń qaptal betiniń maydanın tabıń.



$S_{qapt.} = 2\pi r h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot 5 =$
$= 565{,}5\ (см^2)$

$S = 4\,\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8^2 =$
$= 804{,}2\ (см^2) =$

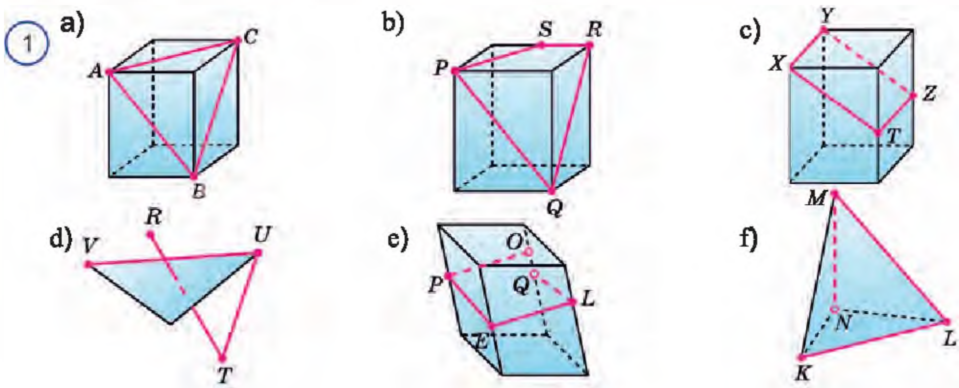
$S_{tolıq.} = \pi r l + \pi r^2 =$
$3{,}14 \cdot 5 \cdot 12 + 3{,}14 \cdot 5^2 =$
$= 267\ (см^2).$

Tema boyınsha sorawlar

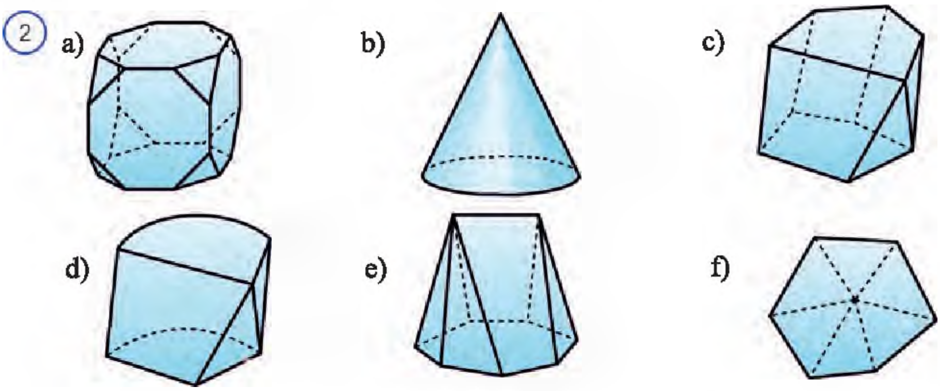
1. Aylanıw denelerine mısal keltiriń.
2. Qanday dene cilindr dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.
3. Qanday dene konus dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.
4. Qanday dene shar dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.

6 ÁMELIY SHİNİǴİW HÁM QOLLANİLİWLARİ

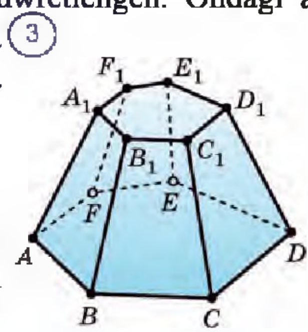
2.1. Tuwrı prizmanıń qaptal jaqları tuwrı múyesh ekenligin dáliylleń.
2.2. Tuwrı prizmanıń qaptal betiniń maydanı ultanınıń perimetri hám qaptal qabırǵasınıń kóbeymesine teń ekenligin dáliylleń.



2.3. 1 – súwrette qanday keńisliktegi sınıq sızıq súwretlengen?
2.4. 2 – súwrettegi denelerdiń qaysıları kópjaqlı boladı?



2.5. 3 – súwrette $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ kópjaqlı súwretlengen. Ondaǵı a) CD qabırǵa ulıwma bolǵan jaqlardı; b) DD_1 qabırǵa ulıwma bolǵan jaqlardı; c) E tóbesi (ushı) ulıwma bolǵan jaqlardı; d) C_1 tóbesi ulıwma bolǵan jaqlardı; e) A tóbesi (ushı) ulıwma bolǵan qabırǵalardı; f) F_1 ulıwma bolǵan qabırǵalardı aytıń.



2.6. Tuwrı parallelepipedtiń ultanı rombtan ibarat. Rombınıń tárepi 8 m, diagonalları bolsa 10 m hám 24 m ge teń. Parallelepipedtiń tolıq betiniń maydanın tabıń.

2.7. *AB* hám *AK* tuwrı sızıqlar neshe ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin?

2.8. Durıs ushmúyeshli prizma ultanınıń tárepi 6 sm, qaptal qabırǵası bolsa 11 sm ge teń. Prizmanın tolıq betinin maydanın tabın.

2.9. Durıs n – múyeshli prizma ultanınıń tárepi a, qaptal qabırǵası h qa teń. Eger a) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$; b) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$; c) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$; d) $n = 5$, $a = 16$, $h = 25$ bolsa, prizmanıń qaptal beti hám tolıq beti maydanların tabıń.

2.10. Durıs úshmúyeshli piramida apofeması 15 ke, piramida tóbesin ultan orayı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 12 ge teń. a) piramida qaptal qabırǵası hám ultanınıń tareplerin; b) piramida qaptal betiniń maydanın; c) piramida tolıq betiniń maydanın tabıń.

2.11. Durıs tórtmúyeshli piramida ultanı 12 sm ge, piramida tóbesin ultan orayı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 16 sm ge teń. a) piramida qaptal qabırǵası hám apofemasın; b) piramida qaptal betin; c) piramida tolıq betiniń maydanın tabıń.

2.12*. *REFGH* piramida ultanı tárepleri 10 sm hám 18 sm bolǵan hám maydanı 90 sm^2 ge teń bolǵan *EFGH* parallelogrammnan ibárat. Piramida tóbesi *R* di ultan diagonalları kesilisiw noqatı *O* menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 6 sm ge teń. a) piramida qaptal qabırǵasın; b) piramida qaptal betinin maydanın; c) piramida tolıq betiniń maydanların tabıń.

2.13*. Piramida ultanı tárepleri 8 hám 10 bolǵan hám kishi diagonalı 6 ǵa teń bolǵan parallelogrammnan ibárat. Piramida tóbesin ultan diagonalları kesilisken noqatı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 4 ke teń. a) piramida qaptal qabırǵaların; b) piramida qaptal betiniń maydanıń; c) piramida tolıq betinin maydanın tabıń.

2.14*. Durıs altımúyeshli piramida ultanınıń tárepi 10 sm ge teń. Piramida tóbesin ultan orayı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı $\sqrt{69}$ ǵa teń. a) piramida qaptal qabırǵası hám apofemasın; b) piramida qaptal betinin maydanıń; c) piramida tolıq betiniń maydanların tabıń.

2.15. Durıs altımúyeshli piramida qaptal betiniń maydanı 150 m^2 ge, qaptal qabırǵası bolsa 10 m ge teń. Piramida ultanınıń maydanın tabıń.

2.16. Cilindr qaptal betinin maydanı ultanı shenberi uzınlıǵınıń cilindr jasawshısına kóbeymesine teń ekenligin dáliyllen.

4

2.17. Cilindr ultanınıń radiusı hám jasawshısına kóre onıń qaptal betiniń maydanın tabıń. a) 7 sm hám 12 sm; b) 12 sm hám 7 sm; c) 1 m hám 12 m; d) 0,7 m hám 1,2 m.

2.18. Cilindr ultanınıń maydanı 300 π sm^2, jasawshısı 6 sm bolsa, cilindr ultanınıń maydanın tabıń.

2.19. Cilindr qaptal betiniń maydanı 90 π sm^2, jasawshısı 5 sm bolsa, cilindr tolıq betiniń maydanın tabıń.

2.20. Cilindr ultanınıń diametri 1 m, jasawshısı bolsa ultan sheńberi uzınlıǵına teń. Cilindr qaptal betiniń maydanın tabıń.

2.21. Cilindrdiń jasawshısı onıń radiusınan 12 sm ge uzın. Cilindr tolıq betiniń maydanı bolsa 128π sm². Cilindr ultanınıń radiusı hám jasawshısın tabıń.

2.22. 4 – súwrette cilindr kórinisinde baktiń biyikligi 2,5 m, ultanınıń diametri 1,2 m hám boyaw qalıńlıǵı 0,1 mm bolsa, bakti boyaw ushın qansha boyaw (kraska) kerek boladı?

2.23. 5 – súwrette uzınlıǵı 25 m hám diametri 6 m bolǵan trubanı tayarlawda neshe bólek qańıltır kerek boladı? Qańıltır bóleklerin bir – birine jalǵawda truba qaptal betiniń 2,5% ke teń qańıltır isletiliwin esapqa alıń.

5

2.24. Konus ultanınıń radiusı 12 mm, konustıń tóbesin (ushın) ultanınıń orayı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 35 mm ge teń, hámde ol ultan tegisligine perpendikulyar. Konustıń qaptal betiniń maydanın tabıń.

2.25. Konus ultanınıń diametri 32sm, konus tóbesin ultan orayı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 63 sm ge teń, hámde ol ultan tegisligine perpendikulyar. Konus qaptal sırtın tabıń.

2.26*. Konustıń jasawshısı l ge teń bolıp, ol ultan tegisligi menen α múyesh payda etedi. Eger a) $l = 10$ sm, $\alpha = 30°$; b) $l = 24$ dm, $\alpha = 45°$; c) $l = 5$ m, $\alpha = 60°$ bolsa, konus ultanınıń maydanın tabıń.

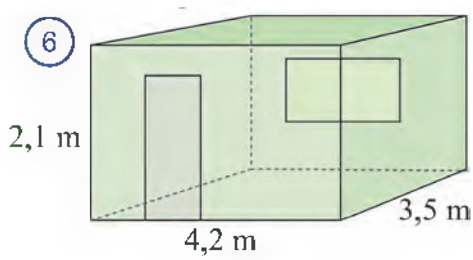
2.27*. Konustıń jasawshısı l ge teń bolıp, ol ultanınıń radiusı menen α múyesh payda etedi. Eger a) $l = 18$ sm, $\alpha = 30°$; b) $l = 20$ dm, $\alpha = 45°$; c) $l = 2{,}4$ m, $\alpha = 60°$ bolsa, konustıń tolıq betiniń maydanın tabıń.

2.28*. Konus ultanınıń radiusı hám jasawshısı sáykes túrde a) 11 sm hám 8 sm; b) 8 mm hám 11 mm; c) 3 m hám 18 m; d) 2,7 m hám 1,2 m ge teń bolsa, konus qaptal betiniń maydanin tabıń.

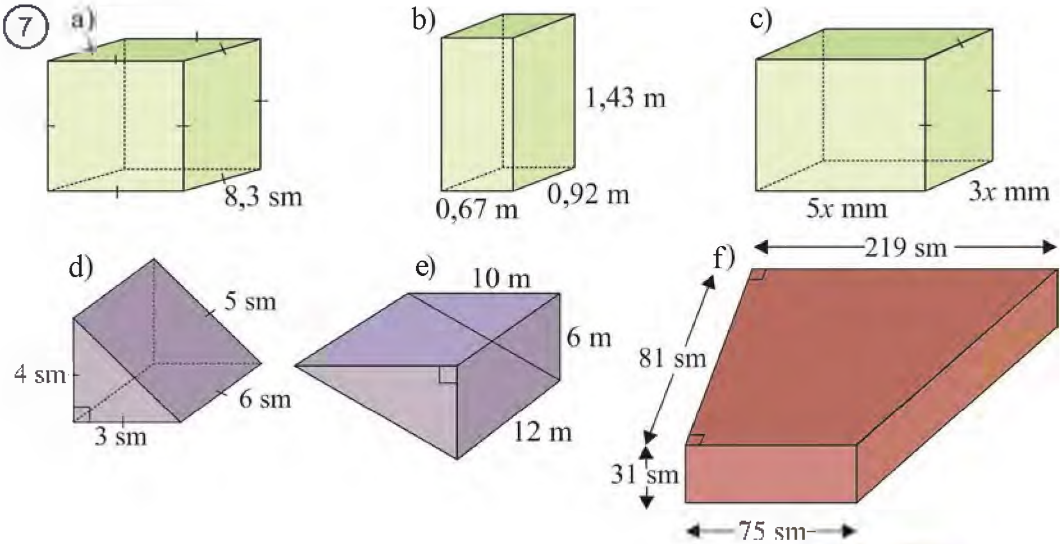
2.29. 6 – súwrette kórsetilgen bólmeni (xananı) ońlaw (remontlaw) kerek. Bólmede ólshemleri 8 m hám 2,2 m bolǵan esik hám ólshemleri 183 sm hám 91 sm bolǵan dereze bar. Esiktiń eki tárepi de boyalıwı lazım. Kestede eki túrli boyawdıń bahaları berilgen. Bul maǵlıwmatlardan paydalanıp, únemli (tejemli) ońlaw ushın qansha pul (qarjı) kerekligin esaplań.

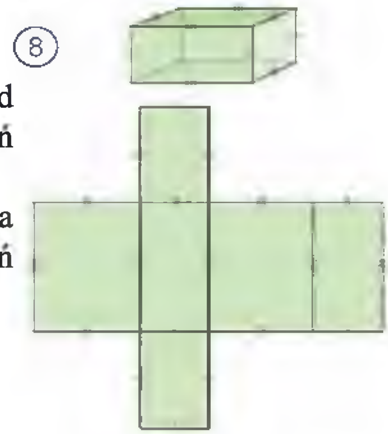
Boyaw túri	Kólemi	Boyalatuǵın maydan	Bahası
Diywal ushın	*4 l*	*16 м²*	*32450 s.*
	2 l	*8 м²*	*20800 s.*
esik ushın	*2 l*	*10 м²*	*23600 s.*
	1 l	*5 м²*	*15400 s.*

6



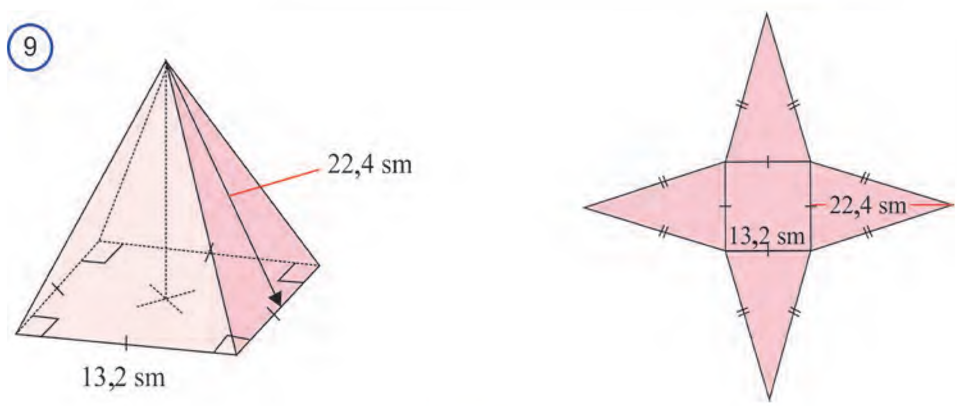
2.30. 7 – súwretteǵi maǵlıwmatlardan (berilgenlerden) paydalanıp, kópjaqlılardıń tolıq betiniń maydanın tabıń.

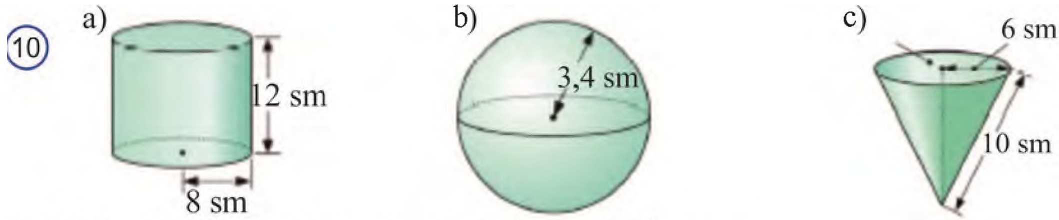




2.31. 8 – súwrette tuwrı múyeshli parallelepiped jayılmasına kóre onıń tolıq betiniń maydanınıń formulasın tabıń (dúziń).

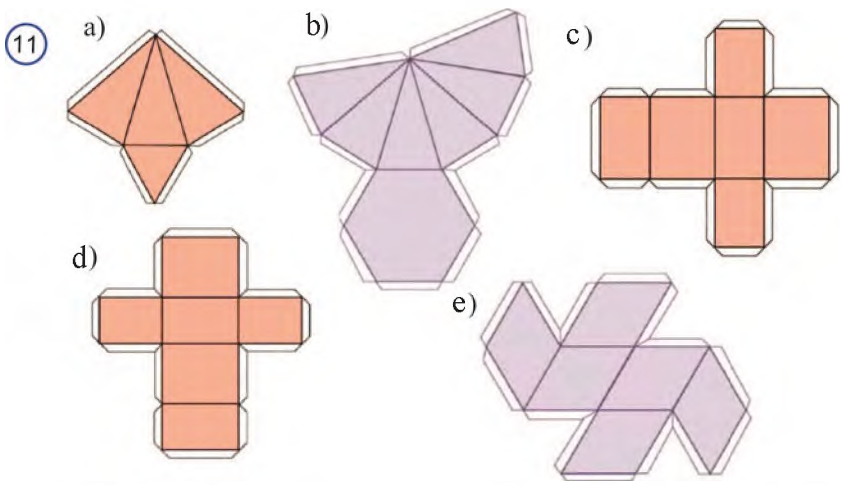
2.32. 9 – súwrette tórtmúyeshli durıs piramida jayılmasına kóre onıń tolıq beti maydanınıń formulasın tabıń (dúziń)



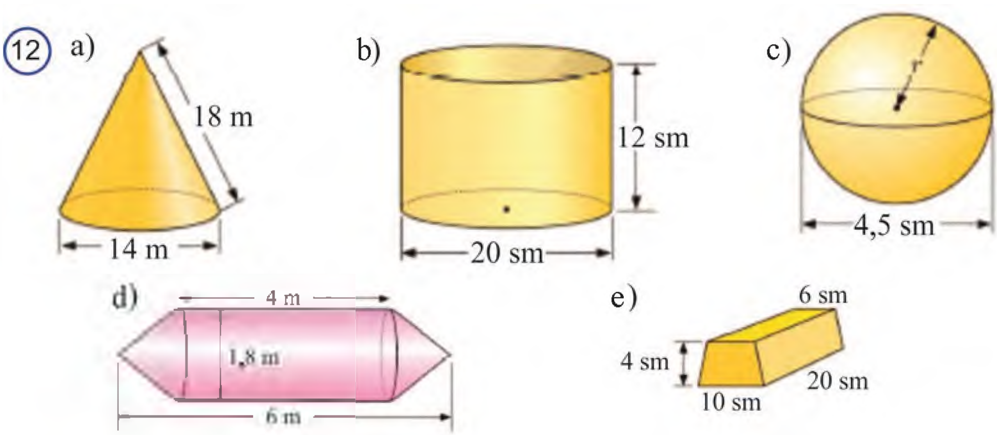


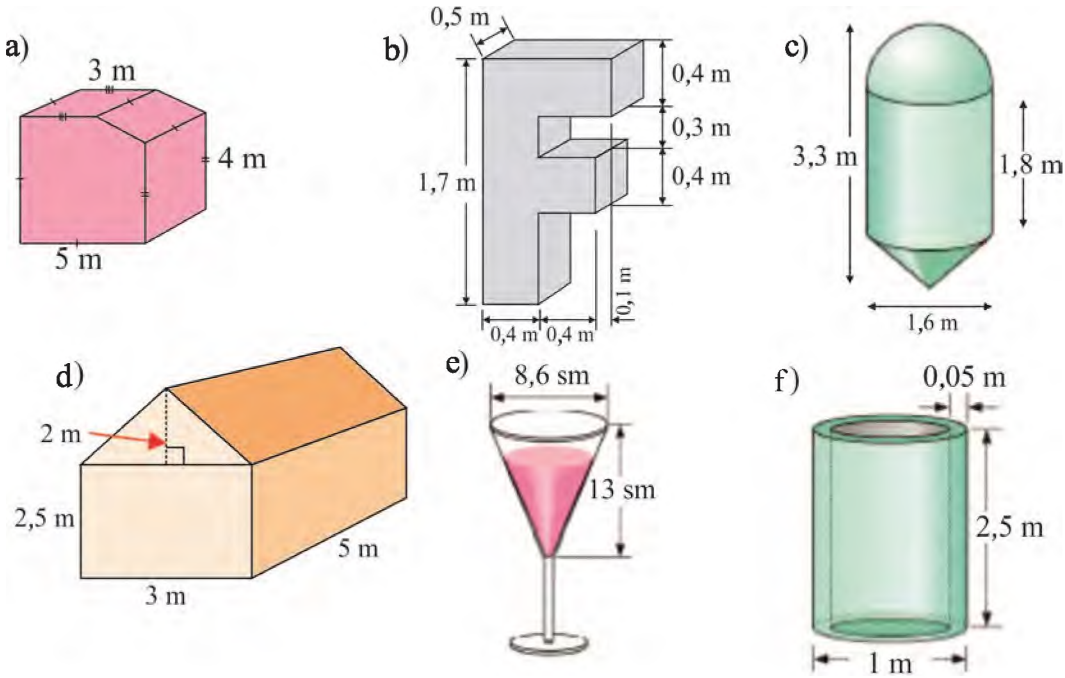
2.33. 10 – súwrette aylanıw denelerinıń tolıq betin tabıń.

2.34. Keńisliktegi denelerdi jaqsıraq tásewir qılıw ushın olardıń modellerinen paydalanǵan maqul. Keńisliktegi denelerdiń modelin olardıń jayılmasınan paydalanıp jasaw múmkin (11 – súwret). Kórip turǵanımızday, keńislik denelerinıń jayılması tegis geometriyalıq shákillerden ibárat. Tómendegi jayılmalardan paydalanıp, tuwrı múyeshli parallelepiped, kub hám piramidalar modelin jasań.



2.35. 12 – súwrette kórsetilgen denelerdi kólemin hám tolıq betiniń maydanların tabıń:





Geometriyalıq súykimlilik

Ótmishte qurılǵan áyemgi arxitektura esteliklerin qurıwda ata – babalarımız úlken geometriyalıq bilim hám mártebege iye bolǵan. Bunı bir ǵana Samarqand qalasındaǵı Registan maydanında qurılǵan tarıyxıy esteliklerden de bilip alıw múmkin (1 – súwret).

Xiva qalasındaǵı Ishanqala súwretinde (2 – súwret) qanday geometriyalıq dene (shákil) kórip tursız?

1


2


Táj – Mahal – dunyanıń jeti káramatınıń biri (3 – súwret). Hindistannıń Agra qalasında Babıriy Shax – Jahan tárepinen qurılgan áyyemgi estelik. Onı qurgan ustalar geometriyadan tereń (shuqır) bilimge iye bolganlıqları belgili.

3

4

Sidney qalasındagı opera teatrı (4 – súwret) – Avstraliyada qurılgan zamanagóy arxitekturalıq úlgisi esaplanadı. Óziniń ájayıp geometriyalıq kórinisi menen dıqqatqa sazawar.

Sulıw (Gózzal) geometriyalıq tásewir iyesi, iraqlıq belgili arxitektor hayal Zaha Hadidtiń proekti tiykarında Qıtay paytaxtı Pekin qalasında qád kótergen "Galaxy Soho" dem alıw kompleksiniń ájayıp kórinisinenház etpewdiń (lazzet almawdiń) ilajı joq (5 – súwret).

5

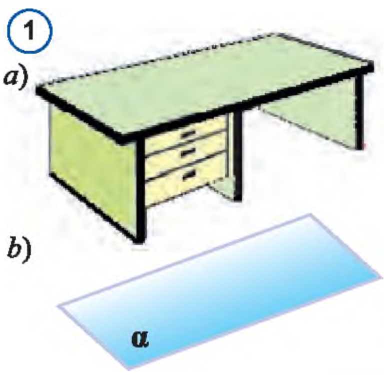
Mámleketimiz paytaxtında qád kóterip atırgan "Tashkent city" kompleksiniń proektin kórip, hayran qalmawdıń ilaji joq. Bunday ájayıp gózzallıqlardı jaratıwda injener qurıwshılarga qanshalıq geometriyalıq bilimler kerek bolganın kóz aldıga keltiriw múmkin (6 – súwret).

6

III BÓLIM

KEŃISLIKTE TUWRÍLAR HÁM TEGISLIKLER

7 KEŃISLIKTE TUWRÍLAR HÁM TEGISLIKLER

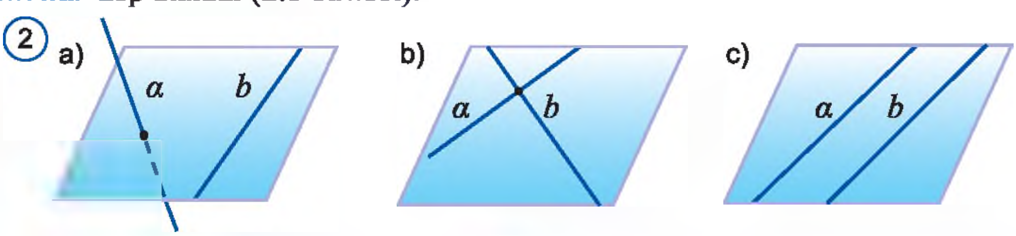


Keńislikte tiykarǵı geometriyalıq figuralar: noqat, tuwrı hám tegislik. Tegislikti stol ústi kibi tegis bet dep kóz aldıǵa keltiremiz (1.a – súwret). Tegislik te tuwrı sıyaqlı sheksizdir. Súwrette tegisliktiń tek ǵana bir bólegin ǵana (ádette parallelogramm kórinisinde) súwretleymiz (1.a.súwret). Biraq, onı hámme tárepke sheksiz dawam etken dep kóz aldıǵa keltiremiz hám sızılmada parallelogramm ko'rinisinde súwretleymiz (1.b – súwret). Tegisliklerdi α, β, γ,... grek háripleri menen belgileymiz.

Tegislikte eki tuwrı bir tegislikte jatıwı yamasa jatpawı da múmkin (2 – súwret). Keńislikte bir tegislikte jatpaytuǵın eki tuwrıǵa *ayqasıwshı tuwrılar* delinedi (2.a-súwret).

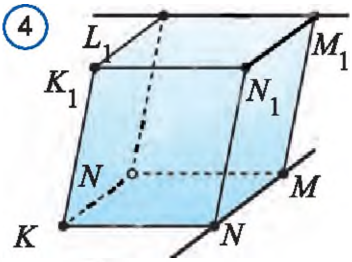
Bir tegislikte jatırǵan hám tek ǵana bir ulıwma noqatqa iye bolǵan tuwrılar *kesilisiwshi tuwrılar* dep ataladı (2.b-súwret).

Bir tegislikte jatırǵan hám óz-ara kesilispeytuǵın tuwrılar bolsa *parallel tuwrılar* dep ataladı (2.c-súwret).



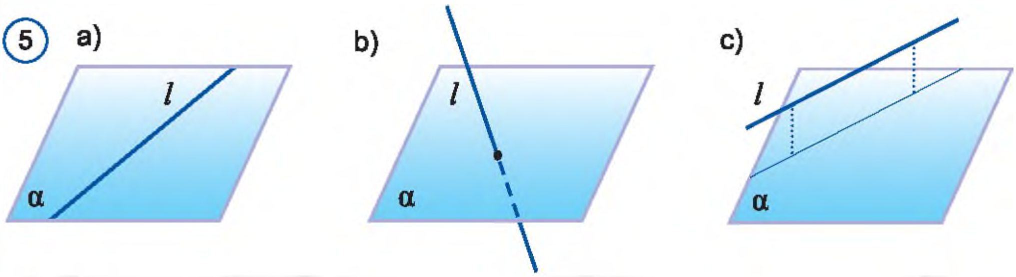
Ayqasıwshı tuwrılarğa biri kópirden, ekinshisi kópir astınan ótiwshi jollardı mısal retinde keltiriw múmkin (3 – súwret). Sonday-aq, 4-súwrettegi parallelepipedtiń MN hám L_1M_1 qabırğaları jatırğan tuwrılar da ayqasıwshı boladı.

3

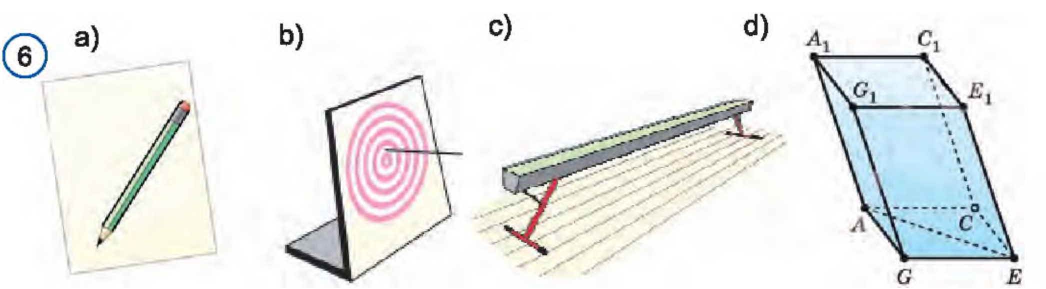

4


Keńislikte tuwrı hám tegislik óz-ara qalay jaylasıwı múmkin?

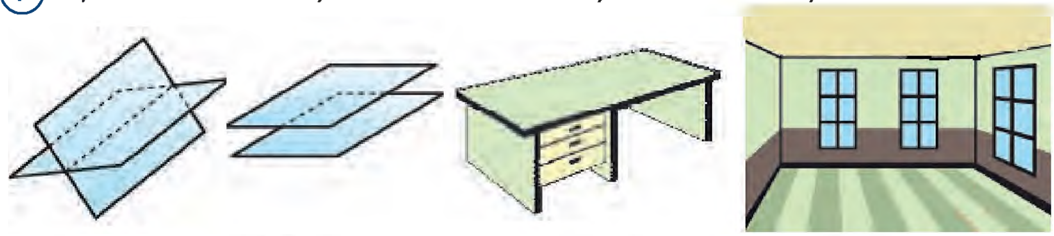
Tuwrı tegislikte jatıwı (5.a – súwret), onı kesip ótiwi (5.b – súwret) yamasa kesip ótpewi, yağnıy ulıwma noqatqa iye bolmawı (5.c-súwret) múmkin. Aqırğı jağdayda ***tuwrı tegislikke parallel*** dep ataladı.

5


Stol ústinde jatırğan qálem – tegislikte jatırğan tuwrı haqqında (6.a-súwret), moljelge qadalğan oq (6.b-súwret) – tegislikti kesip ótiwshi tuwrı (sızıq) haqqında hámde polda turğan gimnastikalıq ağash – tegislikke parallel tuwrı (sızıq) haqqında (6.c-súwret) túsinik beredi.

6


7 a) b) c) d)



Sonday-aq, 6.d-súwrette parallelepipedtiń $AGEC$ ultanınıń diagonalı AE jatırǵan tuwrı ultan tegisliginde jatadı, $AG\,G_1A_1$ jaq jatırǵan tegislikti kesip ótedi hámde $A_1G_1E_1C_1$ joqarı ultan tegisligine parallel boladı.

Endi keńislikte tegisliklerdiń o'z-ara jaylasiwina aydınlıq kirgizeylik.

Keńislikte tegislikler birár tuwrı boylap kesilisedi (7.a-súwret) yamasa ulıwma noqatqa iye bolmaslıǵı múmkin (7.b-súwret). Sodan kelip shıǵıp, bul tegislikler sáykes túrde *kesilisiwshi* yamasa *parallel tegislikler* dep ataladı.

7.c-súwrette stoldıń ústi beti hám qaptal jaǵı kesilisiwshi tegislikler haqqında, bólmeniń polı hám potologı bolsa (7.d-súwret) parallel tegisliklerge mısal boladı.

Sonday-aq, 4-súwrette parallelepipedtiń qarama-qarsı bolmaǵan qaptal jaqları – kesilisiwshi tegislikler haqqında, tómengi hám ústingi ultanları hámde qarama – qarsı jaqları bolsa parallel tegislikler haqqında túsinik beredi.

Parallelik belgisi – "// " tek ǵana parallel tuwrılardı emes, al tegislikke parallel tuwrılar hám parallel tegisliklerdi belgilewde de paydalanıladı:

$a \parallel b$, $a \parallel \alpha$ hám $\alpha \parallel \beta$.

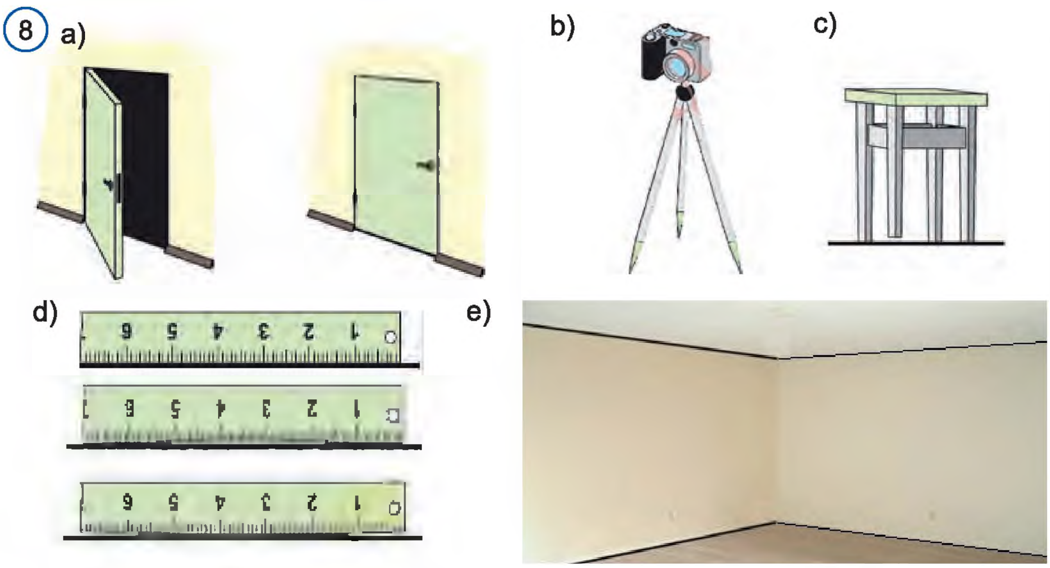
Planimetriyadaǵı kibi, stereometriyada da bazı geometriyalıq figuralardıń qásiyetleri dálilleniwsiz qabıl qılınadı. Keńislikte tegisliklerdiń tómendegi qásiyetlerin dálilsiz, S gruppa aksiomaları retinde qabıl qılamız:

S_1 *Eger úsh noqat bir tuwrı sızıqta jatpasa, ol jaǵdayda olar arqalı tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin.*

S_2 *Eger tuwrı sızıqtıń eki noqatı bir tegislikte jatsa, ol jaǵdayda onıń barlıq noqatları usı tegislikte jatadı.*

S_3 *Eger eki tegislik ulıwma noqatqa iye bolsa, ol jaǵdayda bul tegislikler usı noqattan ótiwshi ulıwma tuwrıǵa da iye boladı.*

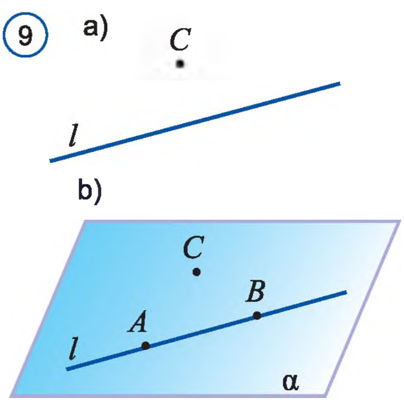
Aktivlestiriwshi shınıǵıw. Tómendegi 8-súwretlerdegi jaǵdaylardı túsintiriwde qaysı aksiomalarǵa súyeniw múmkin?



Planimetriyada kiritilgen aksiomalar menen birgelikte bul úsh aksiomalar stereometriyanıń tiykarın quraydı. Sonı esletiw kerek, planimetriyada biz qarap atırǵan figuralar jaylasatuǵın bir tegislikke iye edik. Stereometriyada bolsa bunday tegislikler sheksiz kóp bolıp, olardıń barlıǵında planimetriya aksiomaları hám planimetriyada dálillengen barlıq qásiyetler orınlı boladı, dep qaraladı. Sonday-aq, stereometriya kursında planimetriya aksiomalarına stereometriya názerinde qarawǵa tuwra keledi.

2.1- Teorema. Tuwrı hám onda jatpaytuǵın noqat arqalı bir hám tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin.

Dáliylleniwi. l – berilgen tuwrı, C bolsa onda jatpaytuǵın noqat bolsın (9.a-súwret).



Aldın teoremanıń juwmaqlaw bóleginde aytılǵan tegisliktiń bar ekenligin kórsetemiz. l – tuwrı A hám B noqatlardı alamız. Shártke kóre A, B hám C noqatlar bir tuwrıda jatpaydı. Onda S_1 aksiomaǵa kóre, A, B hám C noqatlar arqalı α tegislikti ótkiziw múmkin (9.b-súwret). S_2 aksiomaǵa kóre bolsa, α tegislik l tuwrıdan ótedi.

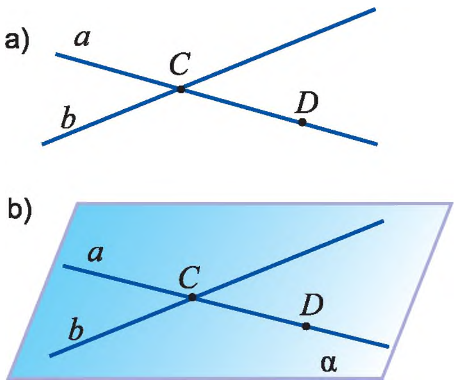
Demek, α – izlengen tegislik eken.

Endi bul tegisliktiń jalǵız (tek ǵana birew) ekenligin kórsetemiz.

Kerisinsheni kóz aldıǵa keltiremiz: l – berilgen tuwrı hám onda jatpaǵan C noqattan jáne bir, β tegislik ótkiziw múmkin bolsın. Onda β tegislik te A, B hám C noqatlardan ótedi. Biraq, S_2 aksiomaǵa kóre úsh noqattan tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin. Qarama – qarsılıq. Demek, oylawımız nadurıs. Tuwrı hám onda jatpaytuǵın noqat arqalı bir hám de tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin.❑

2.2- Teorema. *Berilgen kesilisiwshi eki tuwrı arqalı jalǵız tegislik ótkiziw múmkin.*

10



Dáliylleniwi. Meyli berilgen a hám tuwrılar C noqatta kesilissin (10.a- súwret).

a tuwrıda C noqattan parıqlı jáne bir D noqattı alamız. Ol jaǵdayda, dálillengen *1*- teoremaǵa kóre, b tuwrı hám onda jatpaytuǵın D noqat arqalı jalǵız α tegislik ótedi (10.b- súwret). Bul tegislik a tuwrınıń C hám D noqatlarınan ótedi. Onda S_2 aksiomaǵa kóre, α tegislik a tuwrıdan da ótedi.

Demek, α tegislik berilgen kesilisiwshi eki tuwrı arqalı ótedi.

Bul tegisliktiń jalǵızlıǵın óz betińizshe tiykarlań.❑

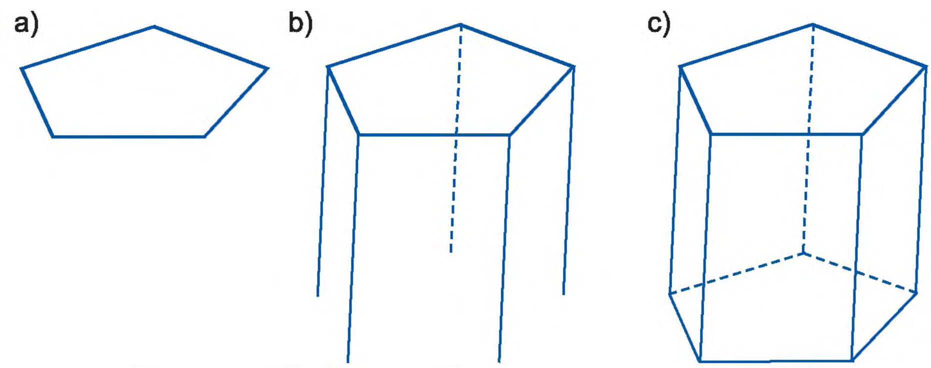
? *Temaǵa say sorawlar*

1. Keńislikte tiykarǵı geometriyalıq figuranlardı aytıń.
2. S gruppa aksiomaların aytıń.
3. Tegislikte jatıwshı qanday tuwrılar: a) kesilisiwshi; b) parallel dep ataladı?
4. Qanday tuwrılar ayqasıwshı dep ataladı? Mısallar keltiriń.
5. Keńislikte eki tuwrı qalay jaylasıwı múmkin?
6. Qanday tuwrılar: a) tegislikte jatıwshı; b) tegislikke parallel dep ataladı?
7. Keńislikte tuwrı hám tegislik qalay jaylasıwı múmkin?
8. Keńislikte qanday tegislikler: a) kesilisiwshi; b) parallel dep ataladı?
9. Keńislikte eki tegislik qalay jaylasıwı múmkin?
10. Keńislikte tuwrı hám tegisliklerdiń qásietlerin ańlatıwshı aksiomalardı aytıń.
11. Úsh noqattan ótiwshi tegislik qásiyetin aytıń.

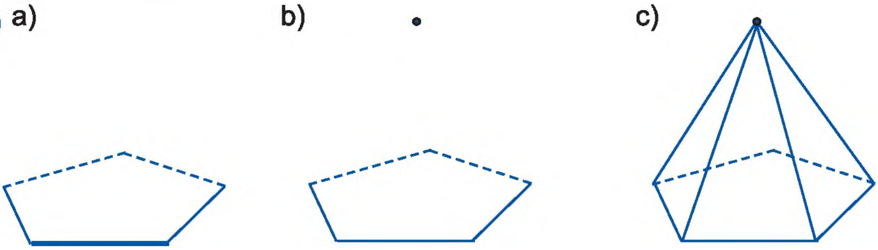
8 KÓPJAQLÍLAR HÁM OLARDÍŃ ÁPIWAYÍ KESIMLERIN JASAW

Geometriyalıq máselelerdi sheshiwde másele shartine sáykes sızılmanı sızıw júdá áhmietli esaplanadı. Geyde tuwrı sızılǵan sızılma – máseleniń "yarım sheshimi" menen teńlestiriledi. Stereometriyada máseleniń sızılmasın durıs sızıw óte áhmietli, juwapkerli hám geyde bolsa quramalı jumıs esaplanadı. Sebebi, stereometriyalıq figuralar (shákiller) úsh ólshemli bolıp, olardı tegislikte, dápter betlerinde súwretlew kerek boladı. Qáte (Nadurıs) sızılǵan sızılma qáte sheshimge yaki bası berk kóshege baslaydı.

Prizmanı súwretlew tómendegi tártipte alıp barıladı (11 – súwret). Aldın kópmúeshlik kórinisindegi ultanlarınan biri sızıladı. Soń, onıń hár bir ushınan ózara parallel hám teń kesindiler, yaǵnıy prizmanıń jasawshıları sızıladı. Kesindiniń aqırları sáykes túrde tutastırılıp shıǵıladı. Bunda ekinshi ultan payda boladı. Sızılmada prizmanıń kórinbeytuǵın qabırǵaları shtrix – punktir sızıqlar menen sızıladı.

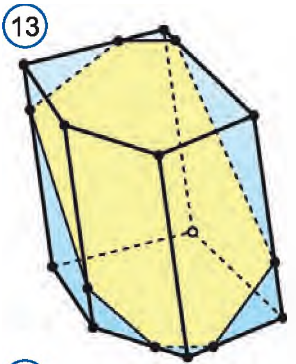
11


Piramidanı súwretlew de soǵan uqsas tártipte alıp barıladı (12 – súwret). Aldın kópmúeshlik kórinisindegi ultan sızıladı. Soń, piramida tóbesi (ushı) belgilenip, bul noqat ultanınıń hár bir tóbesi menen tutastırılıp shıǵıladı. Sızılmada piramidanıń kórinbeytuǵın qabırǵaları punktirler menen sızıladı.

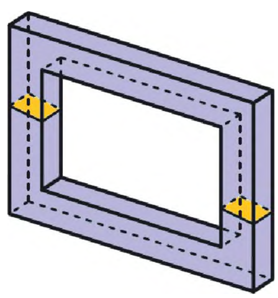
12


Keńisliktegi geometriyalıq figuralardıń óz-ara jaylasıwın durıs tásewir qılǵanda ǵana, onıń sızılmasın durıs sızıw múmkin boladı. Keńisliktegi figuralardıń (shákillerdiń) biri kópjaqlı, ekinshisi bolsa tegislik bolǵanda, túrli kesimlerdi súwretlewge tuwrı keledi. Tómendegi kópjaqlılardıń kesimlerin jasaw menen shuǵıllanamız.

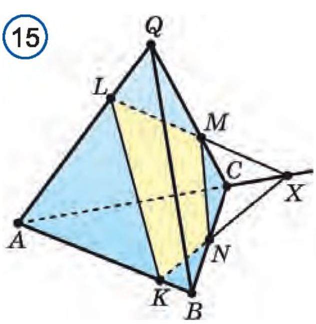
13



14



15



Meyli, kópjaqlını birar tegislik kesip ótken bolsın. *Kópjaqlınıń kesimi* dep kópjaqlını kesiwshi tegislikke tiyisli noqatlarınan ibárat geometriyalıq figuraǵa (shákilge) aytıladı.

Kesiwshi tegislik kópjaqli' betiniń kesindileri boyi'nsha kesip ótedi, kópjaqli'ni'ń kesimi bolsa bir yamasa bir neshe kópmú yeshliklerden ibárat boladi'. 13 – súwrette besmúyeshli prizmani'ń jetimúyeshlikten ibárat kesimi súwretlengen. 14 – súwrettegi ramani' tegislik penen keskende payda bolǵan kesimi – yeki tórtmúyeshlikten ibárat.

Kópmúeshliktiń kesimin súwretlew ushın onıń jaqları kesiwshi tegislik penen ulıwma noqatların anıqlaw jeterli.

1- másele. $QABC$ úshmúyeshli piramidanıń AB, AQ hám CQ qabırǵaları sáykes túrde K, L hám M noqatlarda kesip ótiwshi α tegislik penen keskende payda bolǵan kesimdi jasaymız (15 – súwret).

Jasaw (soǵıw, salıw). Kesiwshi α tegislik piramidanıń AQB jaǵı menen eki K hám L ulıwma noqatlarǵa iye. Onda kesiwshi tegislik bul jaqtı KL kesindi boyınsha kesip ótedi.

Tap soǵan usaǵan, α tegislik piramidanıń AQC jaǵı menen eki M hám L ulıwma noqatlarǵa iye. Onda kesiwshi tegislik bul jaqtı ML kesindi boyınsha kesip ótedi.

Kesiwshi α tegislik piramidanıń ABC jaǵı menen bir K ulıwma noqatqa iye. Bul tegisliktiń BC qabırǵanı kesip ótetuǵın noqatın tabamız.

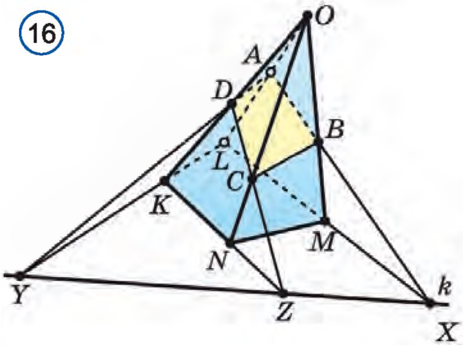
Bul tegislikke tiyisli LM hám AC tuwrılardı dawam ettirip, olardın kesilisiw noqatı X ti tabamız. X noqat AQC hám ABC tegisliklerde de jatadı. Kesiwshi α tegislik piramidanıń ABC jaǵı menen eki K hám X ulıwma noqatlarǵa iye. Onda kesilisiwshi tegislik bul jaqtı KX kesindi boyınsha kesip ótedi.

KX tuwrı hám BC jaqtıń kesilisiw noqatı N hám α tegislikte jatadı. Demek, α tegislik ABC jaqtı KN kesindi boyınsha, BQC jaqtı bolsa MN kesindi boyınsha kesip ótedi.

$KLMN$ tórtmúyeshlik α tegisliktiń piramida menen kesilisiwinen ibarat boladı. KL hám KN kesindiler α tegisliktiń ABQ hám ABC jaqlardaǵı *izleri dep ataladı.*

2- másele. $OKLMN$ piramidanıń OL qabırǵasınıń A noqatı hám piramidanıń $KLMN$ ultanı tegisliginde jatıwshı k tuwrıdan ótiwshi b tegislik penen keskende payda bolatuǵın kesindi jasaymız. (16 – súwret).

16



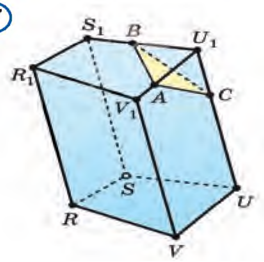
Jasaw (soǵıw, salıw). LM hám k tuwrılar kesilisetuǵın noqattı tabamız. Bul noqat k tuwrıda jatqanlıǵı ushın b tegislikke tiyisli. Sonday – aq, bul noqat LM tuwrıda jatqanı ushın LOM jaqqa da tiyisli. A noqat bul eki tegisliktiń hár birine de tiyisli. Sonıń ushın, b tegislik LOM tegislikti AX tuwrı boyınsha, LOM jaqtı bolsa AB kesindi boyınsha kesip ótedi. Bul jerde B noqat AX hám OM tuwrı sızıqlardıń kesilisiw noqatı.

Tap usınday, β tegisliktiń OLK jaqtı kesip ótetuǵın Y hám D noqatlardı hám AD kesindini anıqlaymız. Soń, Z hám C noqatlar hám DC hám BC kesindilerdi anıqlaymız. Nátiyjede, payda bolǵan $ABCD$ tórtmúeshlik izlenip atırǵan kesindiden ibarat boladı.

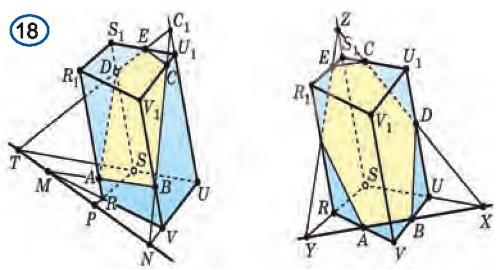
Tap soǵan usaǵan, α tegislik piramidanıń AQC jaǵı menen eki M hám L ulıwma noqatlarǵa iye. Onda kesiwshi tegislik bul jaqtı ML kesindi boyınsha kesip ótedi.

3- másele. A, B hám C tórtmúeshli prizmanıń túrli jaqlarındaǵı noqatları.

17



18

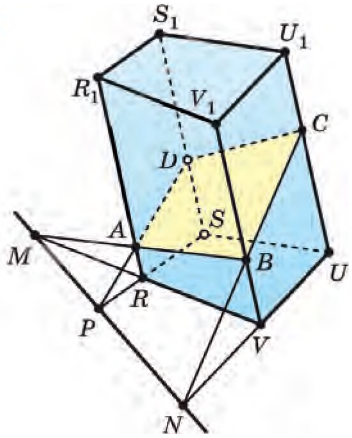


Prizmanıń ABC tegislik penen kesimin tabamız. (17 – súwret).

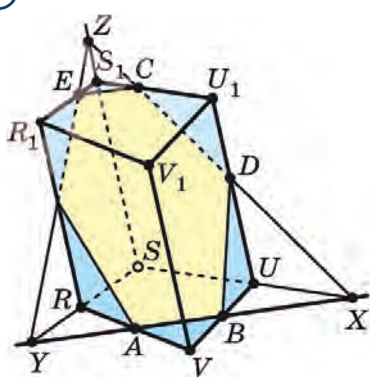
Izlenip atırǵan kesim A, B hám C noqatlardıń tórtmúeshli prizmanıń qaysı jaqlarında hám qanday jatırǵanlıǵına baylanıslı boladı. 17 – súwrette *A, B* hám *C* noqatlardıń bir tóbeden shıǵıwshı jaqlarda jatırǵan eń ápiwayı halı súwretlengen.

18 – súwrette kórsetilgen jaǵdayda kesimdi jasaw quramalıraq esaplanadı. Qalǵan jaǵdaylardaǵı kesindiler tómendegi 19 – hám 20 – súwretlerde berilgen. Kórip turǵanımızday, kesim úshmúyeshlik, tórtmúyeshlik, besmúyeshlik hám altımúyeshliklerden ibárat bolmaqta. Bul kesimlerdi jasalıwın óz – betińizshe analiz qılıń.

19



20

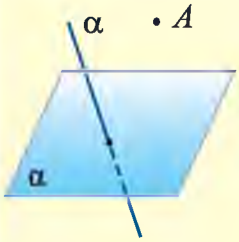
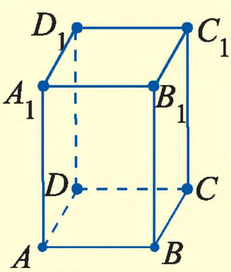
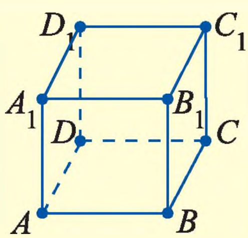
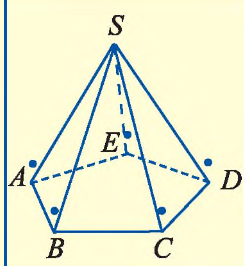


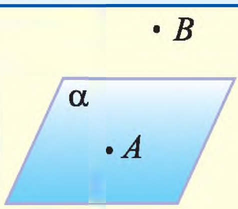
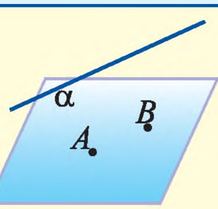
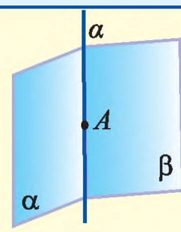
? *Temaǵa say sorawlar*

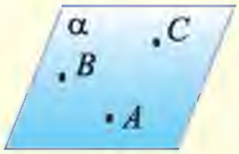
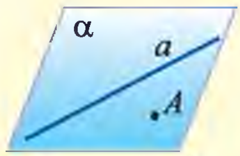
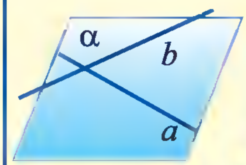
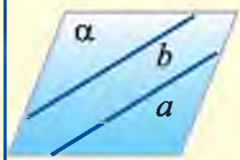
1. Kópjaqlınıń kesimi dep nege aytıladı?
2. Kópjaqlınıń kesimi qanday figura bolıwı múmkin?
3. Bir tegisliktiń ekinshi tegisliktegi izi dep nege aytıladı?
4. Tórtmúyeshli kópjaqlınıń kesimi neler bolıwı múmkin?

9 ÁMELIY SHÍNÍǴÍWLAR HÁM QOLLANÍLÍWLAR

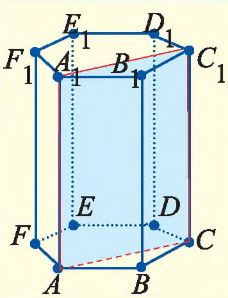
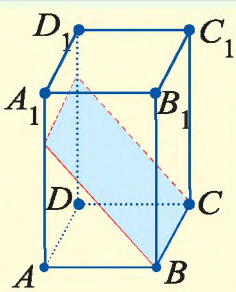
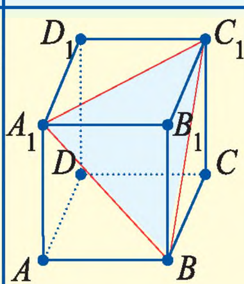
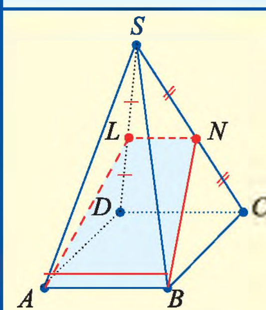
3.0. Tómendegi 3 – bólim boyınsha súyenish teoriyalıq maǵlıwmatlardı tákirarlań. Olar sizge ótilgenlerdi ulıwmalastırıw hám ámeliy shınıǵıwlardı orınlawǵa járdem beredi.

Tiykarǵı figuralar	**Kópjaqlılar**		
	Tuwrı múeshli parallelepiped	**Kub**	**Piramida**
			
A noqat, α tuwrı, *a* tegislik	Ultanları – tuwrı tórtmúeshlikler, qaptal jaqları – tuwrı tórtmúeshlikler	Ultanları – kvadratlar, qaptal jaqları – kvadratlar	Ultanı – kópmúeshlik, qaptal jaqları úshmúeshlik

Stereometriya aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar		
		
Tegislikte oǵan tiyisli bolǵan hám tiyisli bolmaǵan noqatlar bar	Eger tuwrı sızıqtıń eki noqatı bir tegislikte jatsa, ol jaǵdayda onıń barlıq noqatları usı tegislikte jatadı.	Eger eki tegislik ulıwma noqatqa ie bolsa, ol jaǵdayda olar usı noqattan ótiwshi ulıwma tuwrı sızıqqa da ie boladı.

 Bir tuwrıda jatpaytuǵın úsh noqat arqalı	 Tuwrı sızıq hám onda jatpaytuǵın noqat arqalı	 Kesilisiwshi eki tuwrı arqalı	 Parallel eki tuwrı sızıq arqalı
... bir hám tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin			

a) Kestede geybir kópjaqlılardıń ápiwayı kesimleri berilgen. Olardı tereń úyrenip bul kesindiler qalay hasıl (payda) boladı.

Kópjaqlılardıń ápiwayı kesimleri			
Kópmúeshli prizma	**Tuwrı múeshli parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
			
ACC1 – A, C, C1 noqatlardan ótiwshi, kesiwshi tegislik ACC_1CA_1 – kesim.	*CBK – K* noqat hám *CB* tuwrıdan ótiwshi, kesiwshi tegislie ótiwshi, kesiwshi tegislik, *CBKM* – kesim.	*A1BC1 – BC1 BA1* túwrı sızıqlardan ótiwshi, kesiwshi tegislik, *ACC1CA1*	*ABN – AB* hám *LN* parallel tuwrılardan ótiwshi, kesiwshi tegislik, ibrarat *ABNL* – kesindi.

b) Kesteniń shep útinindegi tegisliktegi, oń ústininde bolsa keńsiliktegi geometriyalıq figuralardıń (shákillerdiń) bir birine uxsas geypara qásietlerine uqsas gey bir qásietlerin keltirilgen. Olardı kóz aldıńızǵa keltiriń hám qanday uqsaslıqa ie ekenligin anıqlań. Jáne tegislik hám keńisliktegi qanday uqsaslılardı keltiriw múmkin?

Tegislikte	Keńislikte
Eger tuwrılar ulıwma noqatqa ie bolsa, olar sol noqatta kesilisedi	Eger tegislikler ulıwma tuwrıǵa ie bolsa, olar sol tuwrı boyınsha kesilisedi
Tegisliktiń birar noqatınan sheksiz kóp tuwrı ótkiziw múmkin	Keńisliktiń birar tuwrısınan sheksiz kóp tegislik ótkiziw múmkin
Tuwrıda jatpaytuǵın noqat arqalı berilgen tuwrıǵa parallel bir hám de tek ǵana bir tuwrı ótkiziw múmkin.	Tegislikte jatpaytuǵın tuwrı arqalı berilgen tegislikke parallel bir hám de tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin.
Bir tuwrı sızıqqa parallel tuwrı sızıqlar óz – ara paralleldir.	Bir tegislikke parallel tegislikler óz – ara parallеldir.

3.1. Keńislikte a) eki tuwrı; b) tuwrı hám tegislik; c) eki tegislik neshe ulıwma noqatqa ie bolıwı múmkin?

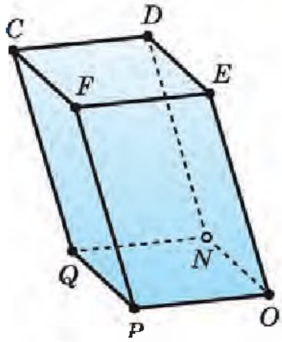
3.2. Keńislikte a) eki tuwrı; b) tuwrı hám tegislik; c) eki tegislik; d) úsh tegislik jalǵaız (tek ǵana bir) ulıwma noqatqa ie bolıwı múmkin be?

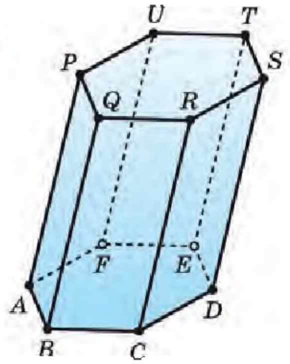
3.3. 1 – súwrette *NOPQDEFC* parallelepiped súwretlengen. a) *CD* tuwrı menen kesilisiwshi tuwrılardı; b) *BF* tuwrı menen kesiliwshi tuwrılardı; c) *CD* tuwrıǵa parallel tuwrı sızıqlardı; d) *FP* tuwrıǵa parallel tuwrı sızıqlardı; e) *CD* tuwrı menen ayqasıwshı sızıqlardı; f) *FP* tuwrı menen ayqasıwshı tuwrılardı kórsetiń (aytıń).

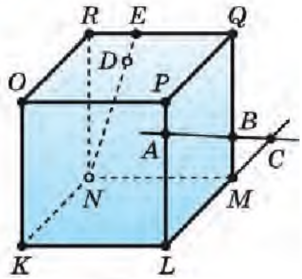
3.4. 2 – súwrette ultanı altımúeshlik bolgan *ABCDEFPQRSTU* parallelepiped súwretlengen. a) *ABC* tegislik penen kesilisiwshi tuwrılardı; b) *UTF* tegislik penen kesilisiwshi tuwrılardı; c) *PTR* tegislikte jatıwshı tuwrılardı; d) *CDR* tegislikke tiyisli tuwrılardı; e) *FEC* tegislikke parallel tuwrılardı; f) *AQB* tegislikke parallel tuwrılardı kórsetip (aytıp) beriń.

3.5. 1 – suwrettegi *NOPQDERC* parallelepipedte:

a) *CQ* tuwrí menen kesilisiwshi tegisliklerdi;
b) *OP* tuwrí menen kesilisiwshi tegisliklerdi;
c) *NO* tuwrí jatírgan tegisliklerdi;
d) *DN* tuwrí tiyisli bolgan tegisliklerdi;
e) *CF* tuwríga parallel tegisliklerdi;
f) *EO* tuwríga parallel tegisliklerdi kórsetip (aytíp) berin.

1


2


3


3.6. 2 – súwrette ultanı bolgan ABCDEFPQRSTU parallelepiped súwretlengen. a) UQR tegislik penen kesilisiwshi tegisliklerdi; b) FT tuwrı menen kesilisiwshi tegisliklerdi; c) ACE tegislikke parallel tegisliklerdi; d) ETS tegislikke parallel tegisliklerdi kórsetip (aytıp) beriń.

3.7. 3 – súwretten paydalanıp, a) *LMQ* hám *NME* tegisliklerde jatıwshı noqatlardı; b) *NR* tuwrı jatırǵan tegisliklerdi; c) *BC* tuwrınıń *KLN* tegislik penen kesilisiw noqatların; d) *PL* hám *ND* tuwrılardıń *OPR* tegislik penen kesilisiw noqatların; e) *KON* hám *KLM* tegislikler kesilisetuǵın tuwrını; f) *PDQ* hám *MNK* tegislikler kesilisetuǵın tuwrını; g) *BQ* hám *MC* tuwrılardıń kesilisiw noqatın kórsetiń (aytıń).

3.8. Bir tuwrıda jatıwshı úsh noqattan tegislik ótkiziw múmkinligin dálilleń. Bunday tegislikler sanı qansha (neshew)?

3.9. *A, B, C* hám *D* noqatlar bir tegislikte jatpaydı. *AB* hám *CD* tuwrılardıń kesilispeytuǵınlıǵın dálilleń.

3.10. Berilgen eki tuwrınıń kesilisken noqatınan bul tuwrılar menen bir tegislikte jatpaytuǵın tuwrı ótkiziw múmkin be? Juwabıńızdı tiykarlań.

3.11. *A, B, C* noqatlar eki túrli tegisliktiń hár birinde jatadı. Bul noqatlardıń bir tuwrı sızıta jatıwın dálilleń

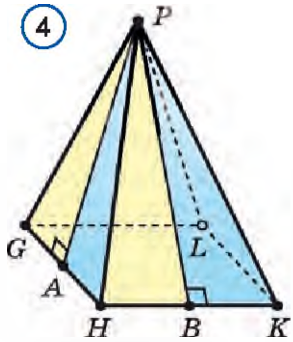
3.12. Tuwrı arqalı eki túrli tegislik ótiwin dálilleń.

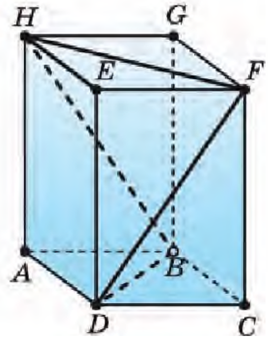
3.13. *a* hám *b* tuwrılar bir tegislikte jatpaydı. *a* hám *b* tuwrılarga parallel *c* tuwrı ótkiziw múmkin be?

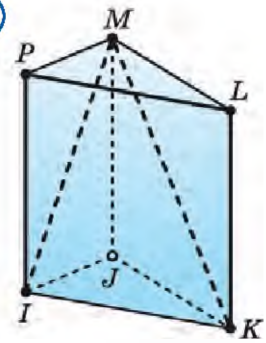
3.14. Eger tegislik eki parallel tuwrıdan birin kesip ótse, ol ekinshisin de kesip ótiwin dálilleń.

3.15. Eki ayqasıwshı tuwrılardan qálegen biri arqalı ekinshisine parallel tegislie ótkiziw múmkinligin dálilleń.

3.16. *ABC* úshmúeshlik berilgen. *AB* tuwrıga parallel tegislik bul úshmúeshliktiń *AC* tárepin A_1 nuqtada, *BC* tárepti B_1 noqatta kesip ótedi. A_1B_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń. Bunda: a) $AB = 15$ sm , $AA_1 : AC = = 2 : 3$; b) $AB = 8$ sm, $AA_1 :$ $AC = 5:3$; c) $B_1C = 10$ sm, $AB : BC = 4:5$; d) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C_1 = c$.

4


5


6


3.17. 4-suwrette tórtmúeshli durıs piramida berilgen. *PA* hám *PB* – piramida *PGH* hám *PHK* jaqlarınıń biyiklikleri bolsa, $\Delta PGA = \Delta PHB$ ekenligin dálillen.

3.18. *ABCDHGFE* tuwrı múeshli parallelepipedtiń (5 – súwret) qaptal qabırǵası 8 sm ge, ultanı tárepi 6 sm ge teń kvadrattan ibarat. Keńislikte *HFDBH* sınıq sızıqtıń uzınlıǵın tabıń.

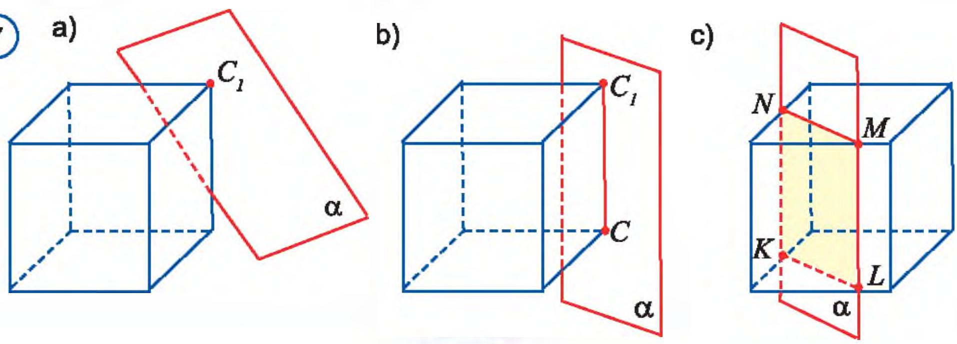
3.19. *IJKPML* úshmúeshli tuwrı prizmanıń (6 – súwret) ultanı qabırǵası hám qaptal qabırǵası uzınlıqları 2:3 qatnasta. Eger *IPLKMI* keńislikte sınıq sızıqtıń uzınlıǵı 16+4 13 ke teń bolsa, prizma qaptal sırtınıń maydanın tabıń.

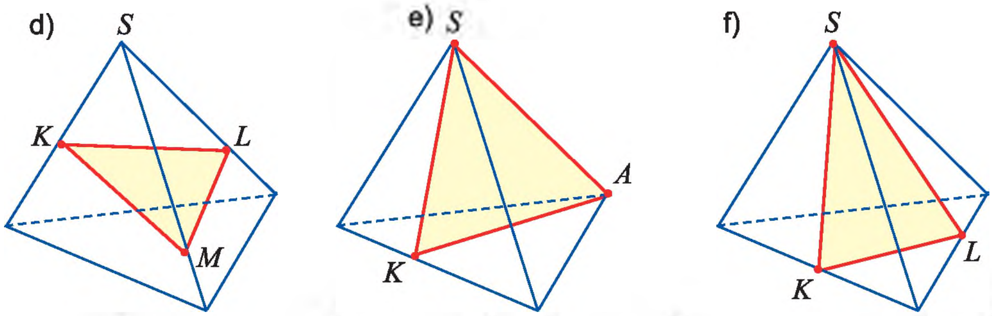
3.20. Ultanı kvadrat bolǵan tuwrı múeshli parallelepipedtiń qaptal sırtı 12 sm^2 qa teń. Ultanınıń diagonalı $\sqrt{2}$ bolsa, qaptal jaǵınıń diagonalın tabıń.

3.21. 7- súwrette keltirilgen jagdaylarda kenislik figuralarının qanday kesimi súwretlengenligin túsintiriń.

3.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń *AD* hám *CD* qabırǵası *M* hám *N* noqatlar berilgen. Kubtı MNB_1 tegislik penen keskende payda bolatuǵın kesimdi jasań.

3.23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtı sızıń hám *AB, BC* hám BB_1 qabırgaları ortaları bolgan *M, N* hám *L* noqatlardı belgileń. a) kubtı *MNL* tegislik penen keskende payda

7




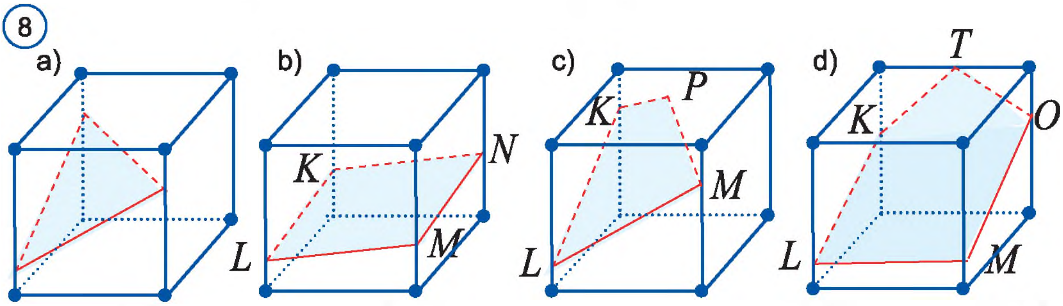
bolatuǵın kesimdi jasań; b) *MNL* úshmúeshliktiń durıs ekenligin dálilleń; c) kubtıń qabırǵası 1 sm bolsa, *MNL* úshmúeshlik maydanın tabıń.

3.24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrımúeshli parallelepipedtiń qabırǵası $AB = 6$ sm, $AD = 6$ sm,hám $AA_1 = 8$ sm. Parallelepipedtiń BC_1D tegislik penen kesimi teń qaptallı ekenligin dálilleń hám bul úshmúeshlik biyikligin tabıń.

3.25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizmanı sızıń. Prizmanıń AD, AA_1 hám DD_1 qabırǵaları ortaları bolǵan *M, N* hám *L* noqatlardan ótiwshi tegislik penen kesimin jasań.

3.26. Kubtı tegislik penen keskende kesimde 8 – súwrette kórsetilgen qaysı jaǵdaylar bolıwı múmkin? Qaysıları bolıwı múmkin emes?

8

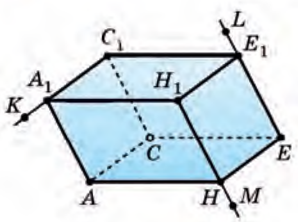


3.27. 9- súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında a) *K*, *L* hám *M*; b) *A*, *B* hám *C*; c) *A*, *B* hám *C* noqatlardan ótiwshi keńislik figuralarınıń tiyisli kesimlerin jasań.

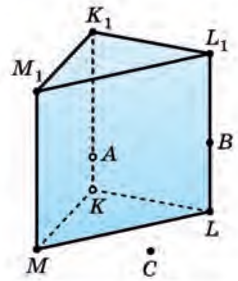
3.28. $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ prizmanıń MM_1, M_1P_1 hám M_1T_1 qabırǵalar jatırǵan *A, B* hám *C* noqatlar alınǵan (10 – súwret). Prizmanıń *ABC* tegislik penen kesimin jasań.

3.29. Berilgen maǵlıwmatlar tiykarında 11 – súwrette *U, V* hám *W*, 12 – úwrette *A* hám *B* noqatlardan ótiwshi keńislik figuralarınıń tiyisli kesimlerin jasań.

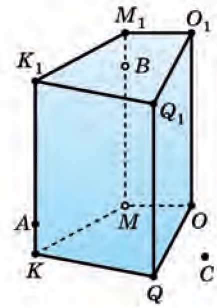
(9) a)



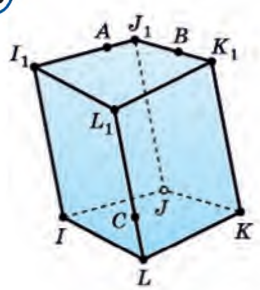
b)

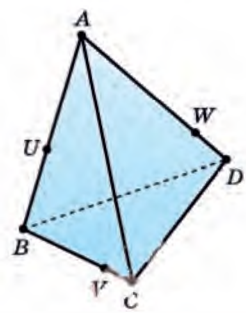


c)

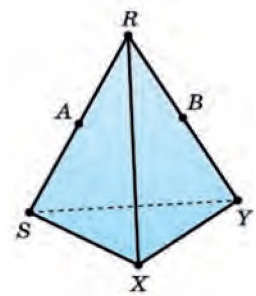


(10)





(12)



Qollanıwlar hám ámeliy kompetenciyalardı qáilplestiriw

1. Ne sebepten qanday da bir imárat ushın ura (shuqırlıq) qazıwdan aldın belgilew isleri tereń tartılǵan jip járdeminde orınlanadı?

Juwap: eki tegislik kesilispesi tuwrıdan ibarat boladı.

2. Gerbish quyıw procesinde qálipke ılay salınıp, tegis aǵash bólegi qálip ústinde júrgizilip, ılaydıń artıqsha bólegi sıyırıp alıp tasladı. Bunda ne sebepten gerbishtiń sırtı tegis shıǵadı?

3. Jasalǵan stuldıń ayaqları bir tegislikte jatqanlıǵın tekseriw ushın ustalar stuldıń qarama – qarsı ayaqlarına jip tartıp tekseredi. Bul usıldı qollap kóriń hám ol nege tiykarlanǵanlıǵın kórsetiń.

Juwap: eki kesilisiwshi sızıq jalǵız (tek ǵana bir) tegislikti anıqlaydı.

4. Bir bólek aǵash taxtanı jarǵı (pıshqı) menen jarıp atırıp, usta jarılǵan betiniń tegis shıǵıwına qalay erisiledi?

Juwap: aǵash taxtanıń eki qońsı jaqlarına AB hám AC kesindilerdi sızadı hám jarǵını múmkinshiligi barınsha usı kesindilerden ótiletuǵın qılıp jarıwdı orınlaydı. Nátiyjede, eki kesilisiwshi tuwrılardan ótiwshi tegislik jalǵız (tek ǵana birew) bolǵanlıǵı ushın jarılǵan bet tegis shıǵadı

5. Fotoapparattı ornatıw ushın móljellengen tirepberdi ne ushın úsh ayaqlı

qılıp jasaladı?

Juwap: bir tuwrı sızıqta jatpaǵan úsh noqattan tek ǵana bir tegislik ótedi.

6. Usta islew berilgen taxta sırtınıń tegisligin qalay tekseredi. Bul usıl nege tiykarlanǵan?

Juwap: eger tuwrı sızıqtıń eki noqatı tegislikte jatsa, onıń ózi de pútinliginshe usı tegislikte jatadı.

7. Ne sebepten úsh dóńgelekli (ayaqlı) motocikl eki dóńgeleklige qaraǵanda ádewir turǵınıraq boladı?

Juwap:bir tuwrıda jatpaytuǵın úsh noqattan tek ǵana bir tegislik ótedi.

8. Ne sebepten ashıq esikler topsada óz halınsha háreketke keledi? Ne sebepten bul jabıq esikler menen sadır bolmaydı?

Juwap: tuwrı hám onda jatpaytuǵın noqattan tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin.

9. Kesimi – tárepi 7 dm bolǵan kvadrattan ibarat, biyikligi 4 m bolǵan, 18 ústinlerdi qúrıw ushın qansha gerbish kerek boladı? (Gerbishtiń ólshemleri: 1:1,5:3 dm. Qurıw járayanında 5% gerbish taslandıǵa ketedi).

Juwap: 8200 dana.

Juwaplar hám kórsetpeler

1.23. *AB//CD*. **1.24.** $7\frac{2}{3}$ sm, $8\frac{2}{3}$ sm. **1.25.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sm. **1.26.** 14 sm. **1.27.** $8\sqrt{3}$ sm. **1.28.** 17 sm. **1.29.** 24 sm. **1.30.** 4,8 sm. **1.31.** 18 sm.

2.6. 256 m^2. **2.8.** $(11+\sqrt{3})$ sm^2. **2.9.** a) 150; 12,5 $(12+\sqrt{3})$; b) 1200; 1400; c) 3456; 108 $(32+9\sqrt{3})$; d) 2000; 2000+640 tg 54°. **2.10.** a) $6\sqrt{13}$ sm; $18\sqrt{3}$ sm; b) $405\sqrt{3}$ sm^2; c) $648\sqrt{3}$ sm^2. **2.11.** a) $2\sqrt{82}$ sm; $2\sqrt{73}$ sm; b) $48\sqrt{73}$ sm^2; c) $144+48\sqrt{73}$ sm^2. **2.12.** a) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ m; $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ m; b) 192 m^2; c) 282 m^2; **2.13.** a) 5 m; $\sqrt{89}$ m; b) $8(5+\sqrt{34})$ m^2; c) $8(11+\sqrt{34})$ m^2. **2.14.** a) 13 sm; 12 sm; b) 360 sm^2; c) $30(12+5\sqrt{3})$ sm^2. **2.15.** $150(2\sqrt{3}-3)$ sm^2. **2.17.** a) 168π sm^2; b) 168π sm^2; c) $2,4\pi$ m^2; d) $1,68\pi$ m^2. **2.18.** 625π sm^2. **2.19.** 252π m^2. **2.20.** π^2 m^2. **2.21.** 4 sm; 16 sm. **2.22.** 2,11 l. **2.23.** 4,83 m^2. **2.24.** 37 mm. **2.25.** 1040π sm^2. **2.26.** a) 75π sm^2; b) 288π dm^2; c) $6,25\pi$ m^2. **2.28.** a) 88π sm^2; b) 88π sm^2; c) 540π dm^2; d) $3,24\pi$ m^2;

3.18. $\sqrt{10}$ sm. **3.19.** $4(5+3\sqrt{2})$ sm. **3.20.** 72 dm^2. **3.23.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ m^2.

Sabaqlıqtı dúziwde paydalanılǵan hám qosımsha úyreniwge usınıs etilip atırǵan oqıw - metodikalıq ádebiyatları hám elektron resurslar

1. A. A’zamov, B. Haydarov. "Matematika sayyorasi". Toshkent. «O‘qituvchi», 1993.
2. Y. Saitov «Matematika va matematiklar haqida». Toshkent. «O‘qituvchi», 1992.
3. Yosh matematik qomusiy luǵati. Toshkent. «O‘zbekiston ensiklopediyasi», 1991.
4. S.I. Afonina Matematika va go‘zallik, Toshkent, «O‘qituvchi», 1986.
5. R.K. Otajonov Geometrik yasash metodlari, Toshkent, «O‘qituvchi», 1982.
6. X. Norjigitov, Ch. Mirzaev Stereometrik masalalarni echish. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma.-Toshkent, 2004 y.
7. I. Israilov, Z. Pashaev Geometriya. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. II qism. Toshkent, «O‘qituvchi», 2005 y.
8. А.В. Погорелов "Геометрия 10–11", учебник, Москва. "Просвешение", 2009.
9. С. Атанасян "Геометрия 10–11 классы", учебник, Москва. "Просвешение", 2002.
10. Я.И. Перельман Қизиқарли геометрия, Тошкент. "Ўқитувчи", 1981.
11. Б. А. Кордемский Математическая смекалка. Москва. «Наука», 1991.
12. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. "Математика 10", учебник, Минск, 2013.
13. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
14. О.Я. Билянина и др. "Геометрия 10" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
15. А.Д. Александров "Геометрия – 10–11", учебник, Москва. "Просвещение", 2013.
16. C. Daniel Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
17. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
18. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
19. http://www.uzedu.uz – Xalıq bilimlendiriw ministrliginiń xabar bilimlendiriw portalı.
20. http://www.eduportal.uz – Multimediya orayı xabar bilimlendiriw portalı.
21. http://www.school.edu.ru – Ulıwma bilimlendiriw portalı(rus tilinde).
22. http://www.mathc.chat.ru – Matematik kaleydoskop (rus tilinde).
23. http://www.problems.ru – Matematikadan máseleler izlew sisteması (rus tilinde).
24. http://matholymp.zn.uz – Ózbekstanda hám dunyada matematik olimpiadalar.
25. http://www.pdmi.ras.ru/~olymp – Matematikadan olimpiada máseleleri (rus tilinde).
26. http://www.ixl.com – Aralıqtan turıp oqıtıw saytı (ingliz tilinde).
27. http://mathkang.ru – “Kenguru” xalıqaralıq matematikalıq tan’law saytı (rus tilinde).

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov, B.Q. Haydarov

MATEMATIKA 10
ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI
GEOMETRIYA
I QISM

Orta bilimlendirw makemelerinin 10-klass ham orta arnawlı,
kásıp-óner úyretiw mákemeleri ushın sabaqlıq
1- basılımı

Redaktor:	K.Sagidullaev
Awdargan:	K.Sagidullaev
Texn. redaktor:	K. Madiarov
Kompyuterde teriwshi:	F. Qudratillaev

Baspaxana litcenziyası AI № 296. 22.05.2017
Basıwga ruqsat etildi 21.11.2017. Bishimi $70\times100^{1}/_{16}$
«TimesNewRoman» garniturası.
Kólemi: Baspa tab. 9,0. Esap b.t. 9,0
Tirajı:10 444 dana
Original-maket «Extremum-press» JSHJ da
tayyalandı. 100053, Tashkent q.
Bogishamol kóshesi, 3. Tel: 234-44-05
Oʻzbekistan Baspasóz ham xabar agentliginin «Oʻqituvchi»
Baspa-poligrafiya dóretiwshilik úyinde basıldı.
100206, Tashkent qalası. Yunusabad rayoni,
Jana qala kóshesi, 1- úy.
Buyırtpa № 259 -17