MATEMATIKA 10

ALGEBRA HÁM ANALIZ TIYKARLARÍ
GEOMETRIYA
II BÓLIM

Orta bilimlendiriw mákemeleriniń 10-klass hám orta arnawlı kásip-óner bilimlendiriw mákemeleri oqıwshıları ushın sabaqlıq

1-basılımı

Ózbekistan Respublikası Xalıq bilimlendiriw ministrligi tastıyıqlaǵan

TASHKENT
2017

UOK 51(075.3)
KBK 22.1
M 54

Algebra hám analiz tiykarları bóliminiń avtorları:

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov.

Geometriya bóliminiń avtorı:

B.Q. Haydarov

Pikir bildiriwshiler:

B.Q. Beshimov – Mirza Ulıǵbek atındaǵı Ózbekistan Milliy Universiteti "Geometriya hám topologiya" kafedrası baslıǵı, fizika-matematika ilimleriniń doktorı.

M.D. Pardayeva – Ózbekistan Respublikası Bilimlendiriw orayı direktorınıń orınbasarı.

D.E. Davletov – Nızamıy atındaǵı TMPU "Matematikanı oqıtıw metodikası" kafedrası baslıǵı, fizika-matematika ilimleriniń kandidatı.

Ǵ.M. Rahimov – TIAXMII qasındaǵı akademiyalıq licey oqıtıwshısı, fizika-matematika ilimleriniń kandidatı, docent.

A.A. Akmalov – Tashkent qalası XBKQTQAI prorektori, pedagogika ilimleriniń kandidatı, docent.

Sabaqlıqtıń "Algebra hám analiz tiykarları" bóliminde qollanılǵan belgiler hám olardıń talqını:

– máseleni sheshiw (dáliyllew) baslandı

– máseleni sheshiw (dálillew) tamamlandı

– baqlaw jumıslar hám test (sınaw) shınıǵıwları

– soraw hám tapsırmalar

– tiykarǵı maǵlıwmat

– quramalıq shınıǵıwlar

Respublika máqsetli kitap qorı qarjıları esabınan basıp shıǵarıldı.

ISBN 978-9943-48-595-2

III BAP

ELEMENTAR FUNKCIYALAR HÁM TEŃLEMELER

47-49 QATNASLAR HÁM SÁWLELENDIRIWLER. FUNKCIYA

Tómendegi kestede Nyu York qalasınıń aeroportında avtomashinalar turar ornında waqıtqa qarap tóleniwi lazım bolǵan qarjı muǵdarları keltirilgen:

Tólenetuǵın qarjınıń mánisi waqıt dawamlılıǵına tikkeley baylanıslı.

Waqıt (t)	Mánisi
0 – 1 saat	\$5,00
1 – 2 saat	\$9,00
2 – 3 saat	\$11,00
3 – 6 saat	\$13,00
6 – 9 saat	\$18,00
9 – 12 saat	\$22,00
12 – 24 saat	\$28,00

Bul kestege qarap tómendegi sorawlarǵa juwap bereyik:

Avtomashinanıń anıq (dál) bir saat turıwı ushın qansha pul sarıplanadı?

5 AQSh dolları ma, 9 AQSh dolları ma yamasa 11 AQSh dolları ma?

Qolaysız jaǵdayǵa túspew hám mashqalanı anıqlastırıw ushın biz kestedegi máǵluwmatlardı grafikalıq kórinisine keltiremiz. Kestedegi "2 – 3 saat" jazıw "2 saattan artıq biraq 3 saattan artıq emes waqıt", yaǵnıy $2 < t \leqslant 3$ aralıq dep túsiniledi. Ol jag'dayda tómendegi kesteni payda etemiz:

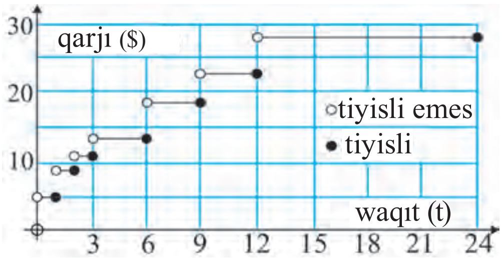
Waqıt (t)	**Mánisi**
$0 < t \leqslant 1$ saat	\$5,00
$1 < t \leqslant 2$ saat	\$9,00
$2 < t \leqslant 3$ saat	\$11,00
$3 < t \leqslant 6$ saat	\$13,00
$6 < t \leqslant 9$ saat	\$18,00
$9 < t \leqslant 12$ saat	\$22,00
$12 < t \leqslant 24$ saat	\$28,00

Matematika tilinde usı keste eki ózgeriwshi (*waqıt* hám tólenetuǵın *pul muǵdarı*) arasındaǵı **qatnasqa** mısal bola aladı.

Qatnas tártiplengen juplıqlar kópligi retinde talqılanıwı múmkin, máselen

$\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$.

Avtomashinalar turar ornında $0 < t \leqslant 24$ aralıqtaǵı t waqıtqa qarap tóleniwi lazım bolǵan qarjı ózgeriwi tómendegishe súwretlenedi:



Gorizontal kósherdegi ózgeriwshiniń qabıl qılatuǵın mánisler kópligi *anıqlanıw oblastı* delinedi.

Máselen, $\{t|0<t\leqslant 24\}$ kóplik joqarıdaǵı *waqıt* hám tólenetuǵın *qarjı muǵdarı* arasındaǵı qatnastıń, {− 2, 1, 4} kóplik bolsa {(1, 5), (− 2, 3), (4, 3), (1, 6)} qatnastıń anıqlanıw oblastları boladı.

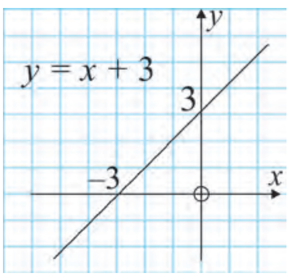
Vertikal kósherdegi ózgeriwshiniń qabıl qılatuǵın mánisler kópligi qatnastıń *mánisler kópligi* delinedi.

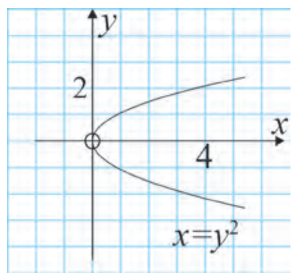
Máselen, {5, 9, 11, 13, 18, 22, 28} kóplik joqarıdaǵı *waqıt* hám tólenetuǵın qarjı *muǵdarı* arasındaǵı qatnastıń, {3, 5, 6} kóplik bolsa (1, 5), (−2, 3), (4, 3), (1, 6)} qatnastıń mánisler kóplikleri boladı.

Endi qatnasqa anıǵıraq anıqlama bereyik. Dekart koordinatalar tegisliginde berilgen noqatlar kópligi **qatnas** delinedi. Kóbinese qatnas x, y **ózgeriwshiler** qatnasqan teńleme kórinisinde beriledi.

Máselen, $y=x+3$, $x=y^2$ teńlemelerdiń hár biri qatnastı anıqlaydı.

Bul teńlemelerdiń hár biri Dekart koordinatalar tegisliginde noqatlar kópligin payda etedi.

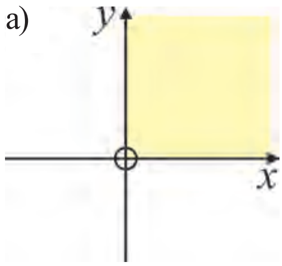




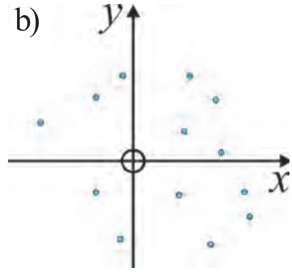
Ayırım qatnaslardı teńlemeler járdeminde jazıp bolmaydı.

Máselen, $x>0$, $y>0$ shártti qanaatlandıratuǵın (x, y) noqatlar kópligi (koordinatalar tegisliginiń birinshi sheregi, *a*-súwret)

a)



b)



yamasa *b*-súwrettegi noqatlar kópligin teńlemeler járdeminde jazıp bolmaydı.

Eger qatnasta birinshi koordinatası teń bolǵan eki túrli noqat bar bolmasa, bul qatnas **sáwlelendiriw** yamasa **funkciya** delinedi.

Demek, funkciya – qatnastıń arnawlı túri eken.

Berilgen qatnas funkciya ekenligin tekseriwdiń eki usılın keltiremiz.

Algebralıq usıl

Bul usıl qatnas teńleme járdeminde berilgen jaǵdaylarda qollanıladı. Bunda berilgen teńlemege x hám y tiń qálegen mánisin qoyǵanda x tiń hár bir mánisi ushın y tiń tek ǵana bir mánisi payda bolsa, bunday qatnas funkciya boladı.

Máselen, $y=3x-2$ teńlemege x tiń qálegen mánisin qoysaq, y tiń tek ǵana bir mánisi payda boladı. Demek, bul teńleme járdeminde anıqlanǵan qatnas funkciya boladı.

Sonıń menen birge $x=y^2$ teńleme menen anıqlanǵan qatnas funkciya bolmaydı, sebebi, máselen, $x=4$ mánisin qoysaq, eki $y=\pm2$ mánis payda boladı.

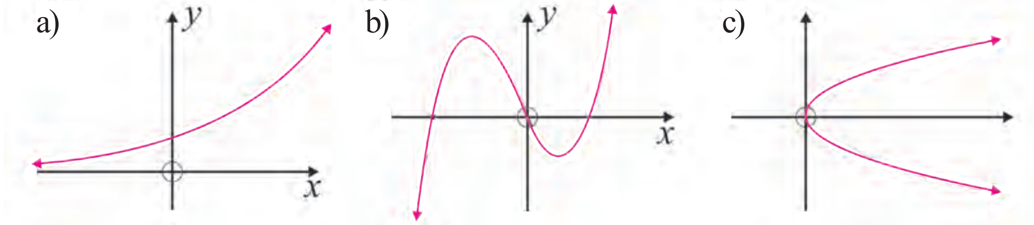
Grafikalıq usıl

Qatnas Dekart koordinatalar sistemesında kóplik kórinisinde berilgen bolsın. Eger biz barlıq múmkin bolǵan vertikal tuwrılardı sızsaq, bul tuwrılardan qálegeniniń berilgen qatnas penen kesilisiw noqatları sanı birewden artpasa, ol jaǵdayda bul qatnas funkciya boladı. Kerisinshe, eger qandayda bir vertikal tuwrınıń berilgen qatnas penen kesilisiw noqatları sanı birewden kóp bolsa, ol jaǵdayda qatnas funkciya bolmaydı.

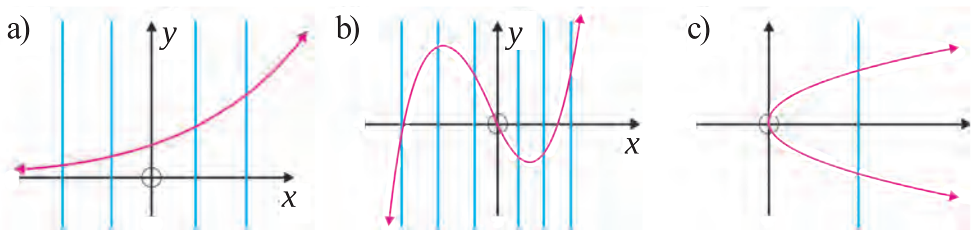
Bunda biz tómendegilerge shártli ráwishte kelisemiz:

- Eger sızıqta kishkene aq reńdegi dóńgelekshe belgilengen bolsa, (—o—), bunday noqat sızıqqa tiyisli emes.
- Eger sızıqta kishkene qara reńdegi dóńgelekshe belgilengen bolsa, (—●—), bul noqat sızıqqa tiyisli.
- ⟶ kóristegi (strelka) kósher sızıq sol baǵıtta sheksiz dawam ettiriliwi múmkinligin bildiredi.

1- mısal. Tómendegi qatnaslardan qaysı biri funkciya bolıwın tekserеyik:



△ Vertikal tuwrılardı sızıp, sonday juwmaqqa kelemiz:



a) hám b) qatnaslardan (grafiklerden) hár biri funkciya boladı (sebebi qálegen vertikal tuwrı onıń menen eń kóbi bir noqatta kesilisedi), c) qatnas (grafik) bolsa funkciya emes, sebebi onı eki noqatta kesiwshi vertikal tuwrı tabıladı. ▲

Esaplaw úskenesi tómendegi algoritm boyınsha islesin:

1- qádem. Qandayda bir san kirgizilmekte.

2- qádam. Kirgizilgen san 2 ge kóbeytilmekte.

3- qádem. Nátiyjege 3 qosılmaqta.

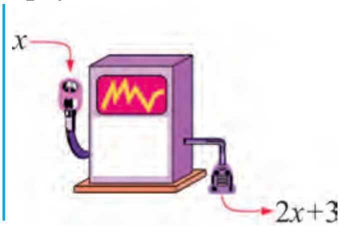
Máselen, úskenege 4 sanı kirgizilse, nátiyjede $4\cdot2+3=11$ sani payda boladı.

Tap usınday úskenege (-4) sanı kirgizilse, nátiyjede $2\cdot(-4)+3=-5$ sanı payda boladı.

Ulıwma jaǵdayda, úskenege x sanı kirgizilse, nátiyjede tek ǵana bir $2x+3$ sanı payda boladı.

Úskenege qandayda bir x san kirgizilse, nátiyjede tek ǵana bir $2x+3$ mánis payda bolıwı kórinip tur.

Demek, usı úskene isleytuǵın algoritm funkciyanı anıqlaydı.



Bul jaǵday $f{:}x\mapsto2x+3$, $f(x)=2x+3$ yamasa $y=2x+3$ kórinisinde jazıladı.

Eger $f(x)=2x+3$ bolsa, onıń -4 sanına sáykes mánisi $f(-4)=2(-4)+3=-5$ kórinisinde tabıladı.

Ulıwma jaǵdayda, $f(x)$ − funkciyanıń berilgen x sandaǵı *mánisi* dep aytıladı hám usı qatnas $y=f(x)$ kórinisinde jazıladı.

2- mısal. Eger $f{:}x\mapsto 2x^2-3x$ bolsa: a) $f(5)$; b) $f(-4)$ mánislerdi tabıń.

△ $f(x)=2x^2-3x$ qatnasqa $x=5$ hám $x=-4$ sanlardı qoyıp, olarǵa sáykes mánislerdi tabamız: a) $f(5)=2\cdot5^2-3\cdot5=2\cdot25-15=35$;

b) $f(-4)=2\cdot(-4)^2-3\cdot(-4)=2\cdot16+12=44$. ▲

3- mısal. Eger $f(x)=5-x-x^2$ bolsa: a) $f(-x)$; b) $f(x+2)$ mánislerin tabıń hám nátiyjelerdi ápiwayılastırıń.

△ $f(x)=5-x-x^2$ funkciyaǵa x ornına $-x$ hám $x+2$ mánislerdi qoyıp, olarǵa sáykes mánislerdi tabamız:

a) $f(-x)=5-(-x)-(-x)^2=5+x-x^2$;

b) $f(x+2)=5-(x+2)-(x+2)^2=5-x-2-(x^2+4x+4)=3-x-x^2-4x-4=$
$=-x^2-5x-1.$ ▲

Soraw hám tapsırmalar

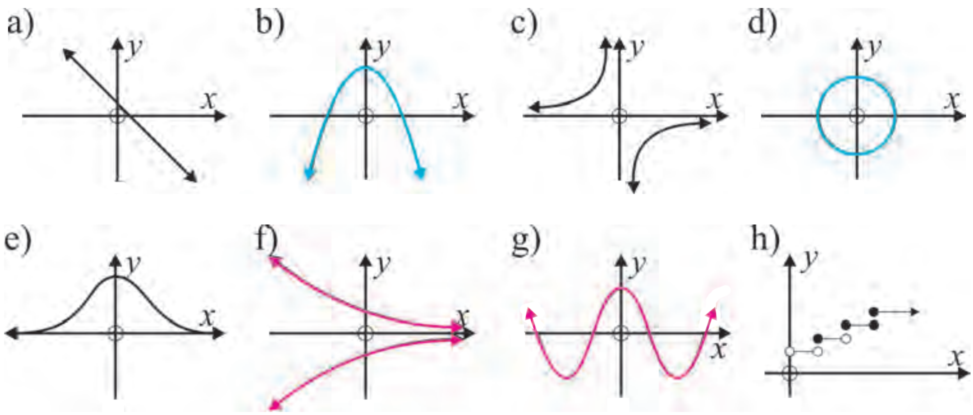
1. Qatnasqa mısallar keltiriń.
2. Sáwlelendiriw yamasa funkciyaǵa anıqlama beriń.
3. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın túsindiriń.
4. Funkciyanıń mánisler oblastın túsindiriń.

Shınıwlar

73. Tómendegi qatnaslardan qaysıları funkciya boladı:

a) {(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 6)};
b) {(1, 3), (3, 2), (1, 7), (–1, 4)};
c) {(2, –1), (2, 0), (2, 3), (2, 11)};
d) {(7, 6), (5, 6), (3, 6), (–4, 6)};
e) {(0, 0), (1, 0), (3, 0), (5, 0)};
f) {(0, 0), (0, –2), (0, 2), (0, 4)}?

74. Tómendegi qatnaslardan qaysıları funkciya boladı?



75. Dekart koordinatalar tegisliginde berilgen hár qanday tuwrı funkciya bola ma? Juwabıńızdı tiykarlań.

76. $x^2+y^2=9$ teńleme járdeminde berilgen qatnas funkciya bola ma?

77. Eger $f{:}x \mapsto 3x+2$ bolsa, tómendegi mánislerdi tabıń:

A) $f(0)$; B) $f(2)$; C) $f(-1)$; D) $f(-5)$; E) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

78. Eger $f{:}x \mapsto 3x-x^2+2$ bolsa, tómendegi mánislerdi tabıń:

A) $f(0)$; B) $f(3)$; C) $f(-3)$; D) $f(-7)$; E) $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

79. Eger $g : x \mapsto x-\dfrac{4}{x}$ bolsa, tómendegi mánislerdi tabıń:

A) $g(1)$;   B) $g(4)$;   C) $g(-1)$;   D) $g(-4)$;   E) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

80. Eger $f(x)=7-3x$ bolsa, tómendegi mánislerdi tabıń hám nátiyjeni múmkin bolsa ápiwayılastırıń.
a) $f(a)$; b) $f(-a)$; c) $f(a+3)$; d) $f(b-1)$; e) $f(x+2)$; f) $f(x+h)$.

81. Eger $F(x)=2x^2+3x-1$ bolsa, tómendegi mánislerdi tabıń hám nátiyjeni ápiwayılastırıń.
a) $F(x+4)$; b) $F(2-x)$; c) $F(-x)$; d) $F(x^2)$; e) $F(x^2-1)$; f) $F(x+h)$.

82. $G(x)=\frac{2x+3}{x-4}$ funkciya ushın:

a) **I** $G(2)$ **II** $G(0)$ **III** $G\left(-\frac{1}{2}\right)$ lardı tabıń;

b) Qanday x larda $G(x)$ tın mánisi bolmaydı?
c) $G(x+2)$ ni tabıń hám ápiwayılastırıń;
d) x tiń $G(x)=-3$ bolatuǵın mánisin tabıń.

83. Funkciya f háribi menen belgilengen bolsın. f hám $f(x)$ belgilerdiń mánisleri arasında qanday parıq bar?

84. Góneriw nátiyjesinde nusqa kóbeytiw úskenesiniń t jıldan keyingi bahası $V(t)=9650-860t$ nızamı boyınsha ózgeredi.
a) $V(4)$ ti tabıń hám onıń mánisin túsindiriń;
b) $V(t)=5780$ bolǵanda t nı tabıń. Jáǵdaydı túsindiriń;
c) Úskene qaysı bahada satıp alınǵan?

85. Bir koordinatalar tegisliginde $f(2)=1$, $f(5)=3$ bolatuǵın úsh túrli funkciya grafiklerin sızıń.

86. $f(2)=1$ hám $f(-3)=11$ bolatuǵın $f(x)=ax+b$ sızıqlı funkciyanı tabıń.

87. $f(x)=ax+\frac{b}{x}$, $f(1)=1$, $f(2)=5$ bolsa, a, b larni tabıń.

88. $T(0)=-4$, $T(1)=-2$, $T(2)=6$ bolatuǵın $T(x)=ax^2+bx+c$ kvadrat funkciyanı tabıń.

89. $f(x)=2^x$ bolsa, $f(a)f(b)=f(a+b)$ teńlikti dálilleń.

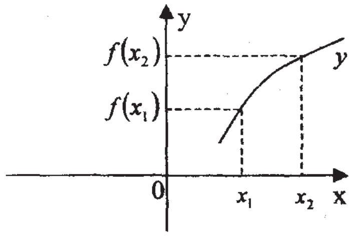
50-51 ELEMENTAR FUNKCIYALARDÍŃ MONOTONLÍǴÍ, EŃ ÚLKEN HÁM EŃ KISHI MÁNISLERI HAQQÍNDA TÚSINIK

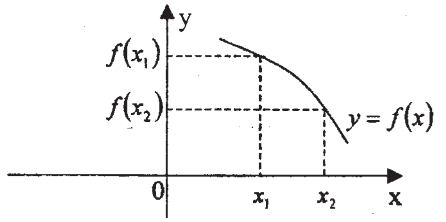
Funkciyanıń monotonlıǵı

Eger $x_1<x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı barlıq $x_1, x_2 \in I$ ushın $f(x_1)<f(x_2)$ teń-

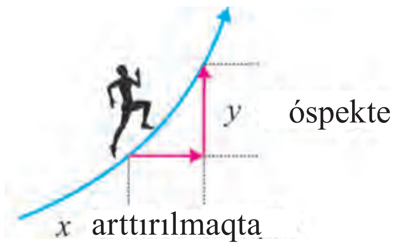
sizlik orınlı bolsa, I aralıqta $y=f(x)$ funkciya *ósiwshi* delinedi.

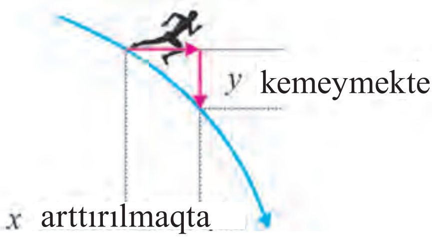
Eger $x_1<x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı barlıq barlıq $x_1, x_2 \in I$ ushın $f(x_2)<f(x_1)$ teńsizlik orınlı bolsa, I aralıqta $y=f(x)$ funkciya *kemeyiwshi* delinedi.



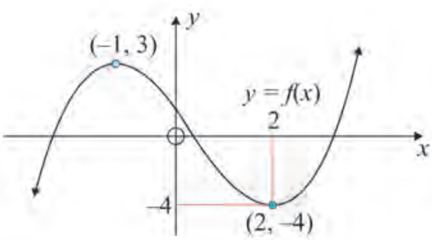


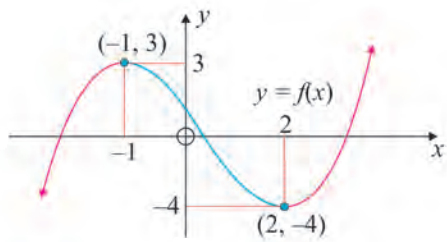
Eger funkciya ósiwshi bolsa, grafik boylap shepten ońǵa “háreket” qılsaq, ordinatalar artadı; funkciya kemeyiwshi bolsa, ordinatalar kemeyedi.





1- mısal. Funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń:

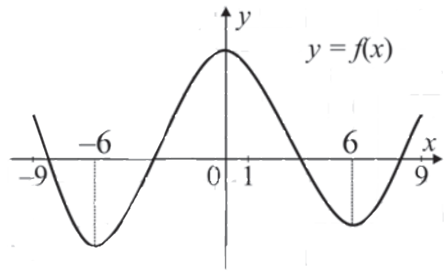




Eger funkciya ósiwshi bolsa, grafik boylap shepten ońǵa háreket qılsaq, ordinatalar ósedi (grafikte qızıl reńde ajıratılǵan). Demek funkciya $x \leqslant -1$ hám $x \geqslant 2$ aralıqlarda ósedi. Juwaptı $(-\infty,-1] \cup [2,+\infty)$ kórinisinde de jazıwǵa boladı.

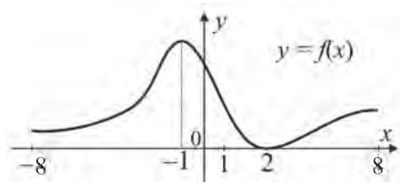
Tap sonday, eger funkciya kemeyiwshi bolsa, grafik boylap shepten ońǵa háreket qılsaq, ordinatalar kemeyedi (grafikte kók reńde ajıratılǵan). Demek, funkciya $-1 \leqslant x \leqslant 2$ aralıqlarda kemeyedi.

2- mısal. Funkciya qaysı aralıqlarda ósedi?



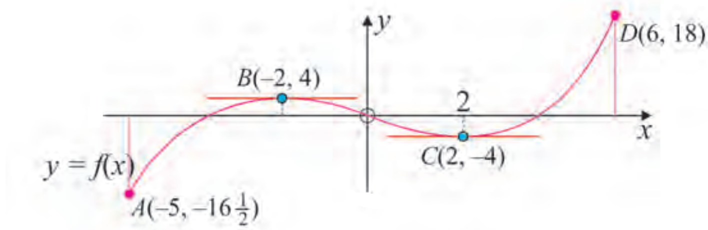
△Bul funkciya [−9; 9] aralıqta berilgen. Eger funkciya ósiwshi bolsa, grafik boylap shepten ońǵa háreket qılsaq, ordinatalar úlkeyedi (ósedi). Demek, funkciya [−6;0] hám [6;9] aralıqlarda ósedi. juwaptı [−6;0]∪[6;9] kórinisinde de jazıwǵa boladı.▲

3- mısal. Funkciya qaysı aralıqlarda kemeyedi?



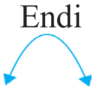
△Eger funkciya kemeyiwshi bolsa, grafik boylap shepten ońǵa háreket qılsaq, ordinatalar kishireyedi. Demek funkciya [−1; 2] aralıqta kemeyedi.▲

Funkciyanıń eń úlken hám eń kishi mánisleri haqqında túsinik beremiz. $-5 \leqslant x \leqslant 6$ aralıqta anıqlanǵan funkciya grafigin qarayıq.



A noqattıń ordinatası basqa noqatlar ordinatalarınan kishi bolǵanı sebepli usı noqat **global minimum** noqatı delinedi. Funkciyanıń oǵan sáykes bolǵan mánisi **funkciyanıń eń kishi mánisi** delinedi. Biziń mısalımızda funkciyanıń eń kishi mánisi −16,5 ke teń.

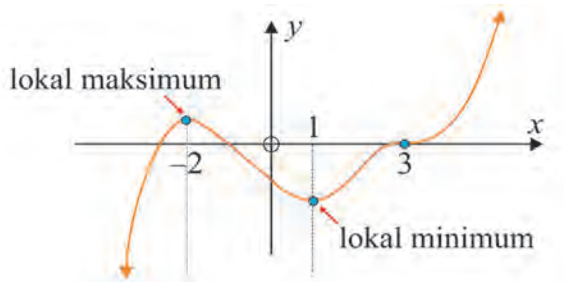
Tap sonday, *D* noqattıń ordinatası basqa noqatlar ordinatalarınan úlken bolǵanı sebepli usı noqat **global maksimum** noqatı delinedi. Funkciyanıń oǵan sáykes bolǵan mánisi **funkciyanıń eń úlken mánisi** delinedi. Biziń mısalımızda funkciyanıń eń úlken mánisi 18 ge teń.

Endi *B* noqatqa itibar bereyik. Grafiktiń oǵan jaqın bolǵan noqatları kópligi  kóriniske iye. Bunday qásiyetke iye bolǵan noqat **lokal maksimum** noqatı delinedi.

Tap sonday, grafiktiń *C* noqatqa jaqın bolǵan noqatları kópligi 

kóriniske iye. Bunday qásiyetke iye bolǵan noqat **lokal minimum** noqatı delinedi.

Tek ǵana lokal minimum hám lokal maksimumǵa iye bolǵan funkciyaǵa mısal keltireyik:

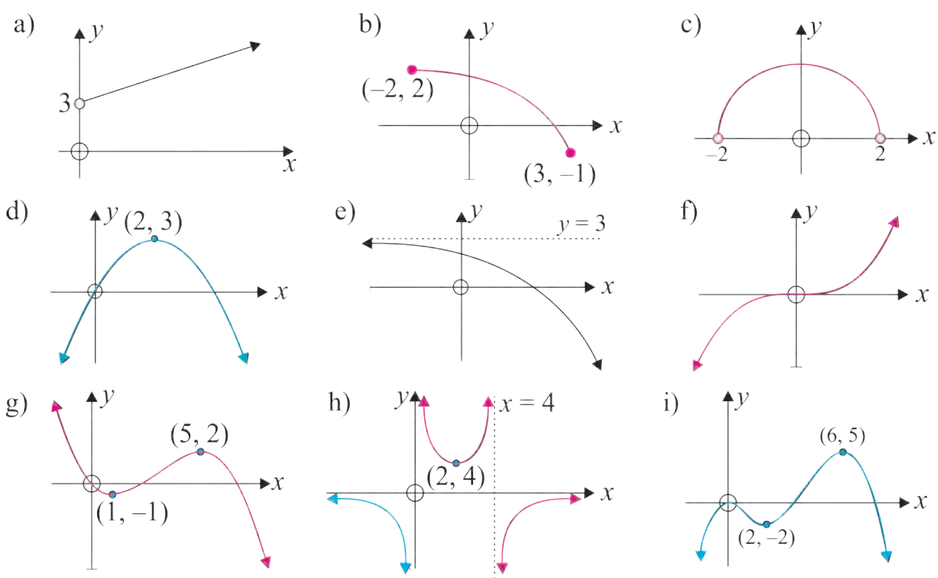


Soraw hám tapsırmalar

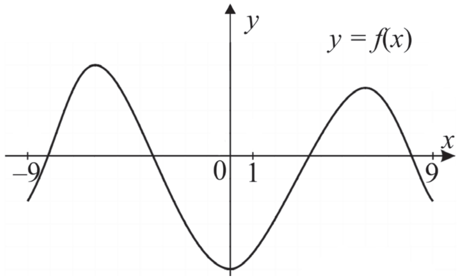
1. Aralıqta ósiwshi funkciyaǵa anıqlama beriń.
2. Aralıqta kemeyiwshi funkciyaǵa anıqlama beriń .
3. Sızılmaǵa qarap funkciyanıń ósiwi qalay anıqlanadı?
4. Sızılmaǵa qarap funkciyanıń kemeyiwi qalay anıqlanadı?

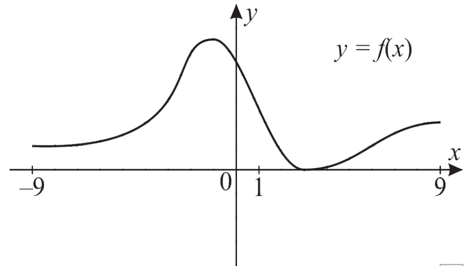
Shınıǵıwlar

90. Grafigi berilgen funkciya ushın: **I)** ósiw; **II)** kemeyiw aralıqlardı tabıń. Eger múmkin bolsa, olardıń lokal maksimumın hám minimumın, eń úlken hám eń kishi mánislerin tabıń:



91. [–9; 9] aralıqta berilgen funkciya qaysı aralıqlarda ósedi? Qaysı aralıqlarda kemeyedi? Onıń lokal maksimumın hám minimumın, eń úlken hám eń kishi mánislerin tabıń:





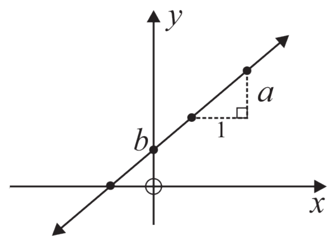
52-54 SÍZÍQLÍ HÁM KVADRATLÍ MODELLER

Sızıqlı funkciya

$f(x)=ax+b$ kórinisindegi funkciya sızıqlı delinedi, bul jerde x, y – ózgeriwshiler, a, b – berilgen sanlar, $a \neq 0$.

Sızıqlı funkciya grafigi koordinata tegisliginde tuwrı bolıp, bunda a san múyesh koefficienti delinedi.

Tómende biz sızıqlı funkciyanıń qollanılıwların keltiremiz.



1- mısal. Tennis kortın ijáraǵa alıw bahası $C(h)=5h+8$ (AQSh dolları) formula menen anıqlanǵan, bul jerde h – ijára waqtı (saatda). 4 saat hám 10 saat ushın ijáraǵa qansha qarjı sarıplanadı?

△ $C(h)=5h+8$ formuladan paydalanıp, $C(4)=5 \cdot 4+8=20+8=28$ hám $C(10)=5 \cdot 10+8=50+8=58$ ekenligin tabamız. Demek, 4 saatqa 28 AQSh dolları, 10 saatqa bolsa 58 AQSh dolları qarjı sarıplanadı. ▲

2- mısal. Nyu Yorkda taksi passajir alıw ushın toqtawǵa 3 AQSh dolları hám 30 cent, hár kilometrge bolsa 1 AQSh dolları hám 75 cent aladı.

a) Kesteni dápterińizge kóshirip alıń hám onı toltırıń:

d – aralıq (km)	0	2	4	6	8	10
C – qarjı ($)						

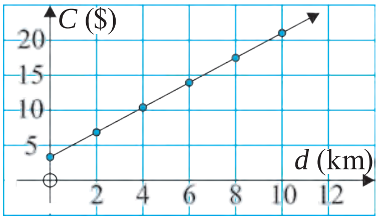
b) C hám d arasındaǵı baylanıstı grafikalıq kórinisinde ańlatıń;

c) C (d) funkciyanıń algebralıq kórinisiniń–formulasın jazıń;

d) 9,4 km júriw ushın qansha qarjı sarıplanadı?

△ a) 3,3 AQSh dollarına izbe-iz $2 \cdot 1{,}75=3{,}5$ AQSh dolların qosıp, keteklerdi toltıramız:

d – aralıq (km)	0	2	4	6	8	10
C – qarjı ($)	3,30	6,80	10,30	13,80	17,30	20,80

b) 

Bul – sızıqlı funkciya.

c) Múyeshlik (qıyalıq) koefficientin tabamız:

$$a = \frac{20,80-17,30}{10-8} = 1,75.$$

Demek, $C(d)=1,75d+3,3$.

d) $C(9,4)=1,75\cdot 9,4+3,3=19,75$.

Demek, 19,75 AQSh dolları sarıplanadı.

Kvadratlıq funkciya

$y=ax^2+bx+c$ kórinisindegi funkciya kvadratlıq funkciya delinedi, bul jerde x, y – ózgeriwshiler, a, b, c – berilgen sanlar, $a\neq 0$.

$y=2x^2+4x-5$ funkciyanıń a) $x=0$; b) $x=3$ noqatlardağı mánisin tabayıq.

a) $x=0$ bolsın. Ol jağdayda $y=2\cdot 0^2+4\cdot 0-5=0+0-5=-5$.

b) $x=3$ bolsın. Ol jağdayda $y=2\cdot 3^2+4\cdot 3-5=18+12-5=25$.

3- mısal. Tas atılğanda t sekundta onıń jerge salıstırğandağı biyikligi $h(t)=-5t^2+30t+2$ funkciya járdeminde anıqlanadı.

a) $t=3$ bolğanda tas jerden qansha biyiklikte boladı?

b) Tas qanday biyiklikten turıp atıldı?

c) Qaysı waqıtta tastıń biyikligi 27 m boladı?

a) $h(3)=-5\cdot 3^2+30\cdot 3+2=-45+90+2=47$. Demek, atılğan tas $t=3$ sekundtan keyin 47 m biyiklikte boladı.

b) tas $t=0$ bolğanda atılğanı ushın, $h(0)=-5\cdot 0^2+30\cdot 0+2=2$. Demek, tas 2 metr biyiklikten atılğan.

c) Tas jerden 27 m biyiklikte bolsa, $h(t)=27$ boladı, yağnıy $-5t^2+30t+2=27$. Bul teńlemeni sheshemiz: $-5t^2+30t-25=0$, $t^2-6t+5=0$, $t_1=1$, $t_2=5$. Demek, tas 27 m biyiklikte 1 sekundtan soń (joqarığa kóterilip atırğanda) hám 5 sekundtan keyin (tómenge túsip atırğanda) boladı.

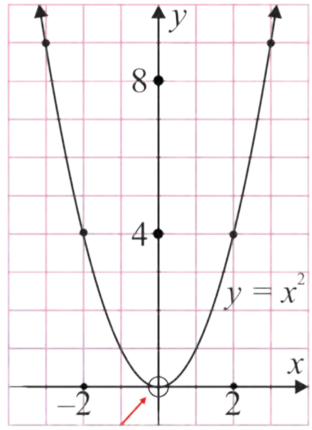
Kvadratlıq funkciya grafigi

$f(x)=x^2$ funkciyanı qarayıq. Onıń geypara noqatlardağı mánisleri kestesin dúzemiz:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Usı kestedegi (x, y) noqatlardı koordinata tegisligine qoyıp, olardı tegis sızıq penen tutastırıp, usı grafikti payda etemiz:

Payda bolǵan sızıq **parabola** dep ataladı. Parabola shaqaları joqarıǵa baǵıtlanǵan bolıp, ol ordinata kósherine salıstırǵanda simmetriyalı bolǵan iymek sızıqtan ibarat ekenligi kórinip tur.



(0, 0) noqat $y=x^2$ **parabolanıń ushı (tóbesi)** delinedi.

4-mısal. $y=x^2-2x-5$ kvadratlıq funkciya grafigin sızıń.

△ Funkciyanıń bir noqattaǵı, máselen $x=-3$ noqatındaǵı mánisin tabayıq:

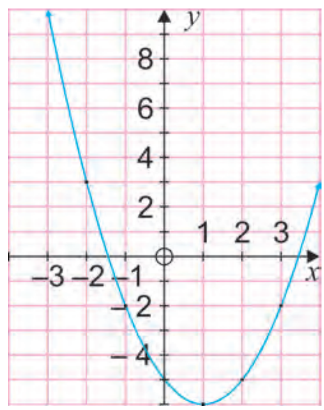
$f(-3)=(-3)^2-2(-3)-5=9+6-5=10.$

Funkciyanıń bir neshe noqattaǵı mánisin tawıp, kesteni dúzemiz:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	10	3	−2	−5	−6	−5	−2

(x, y) noqatlardı koordinata tegisligine qoyıp, olardı tegis sızıq penen tutastırıp, berilgen kvadrat funkciya grafigin payda etemiz:

Payda bolǵan grafik te parabola kórinisinde. Onıń shaqaları bolsa joqarıǵa baǵıtlanǵan.▲



Qálegen $y=ax^2+bx+c$ parabolanıń ordinatalar kósheri – Oy kósheri menen kesilisiw noqatın tabamız:

$x=0, \quad y=a\cdot0^2+b\cdot0+c=0+0+c=c.$

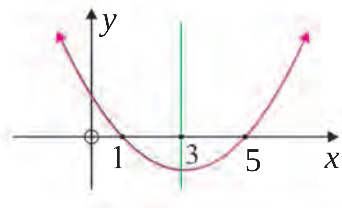
Demek, parabola $(0, c)$ noqatta ordinatalar kósheri menen kesilisedi.

$y=ax^2+bx+c$ parabolanıń abscissalar kósheri menen kesilisiw noqatların tabıw ushın $ax^2+bx+c=0$ kvadrat teńlemeniń sheshimlerin tabıw jeterli.

Máselen, $y=x^2-2x-15$ parabolanıń abscissalar kósheri menen kesilisiw noqatların tabamız. $x^2-2x-15=0$ dep, bul kvadrat teńlemeni sheshemiz. Onıń sheshimleri $x=-3$ hám $x=5$ boladı. Demek, $y=x^2-2x-15$ parabola abscissalar kósheri menen $(-3, 0)$, $(5, 0)$ noqatlarda kesilisedi. $y=ax^2+bx+c$ parabola ushın $x=h$ kórinisindegi vertikal tuwrı onıń *simmetriya* kósheri boladı.

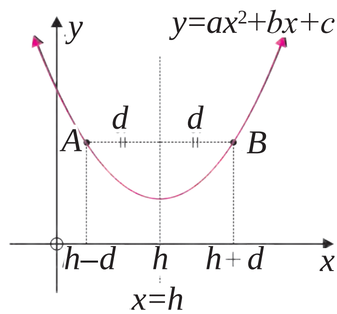
Eger $y=ax^2+bx+c$ parabola abscissalar kósheri menen kesilisse, h san parabolanıń Ox kósheri menen kesilisiw noqatları abscissalarınıń orta arifmetigine teń boladı.

5- mısal. Súwrettegi parabolanıń simmetriya kósherin tabıń.



△ Eger parabola abscissalar kósheri menen $(1,\ 0)$ hám $(5,\ 0)$ noqatlarda kesilisse, $x=\dfrac{5+1}{2}=3$ - simmetriya kósheri boladı. ▲

Eger $y=ax^2+bx+c$ parabola abscissalar kósheri menen kesilispese, h sandı basqa usılda da tabıwǵa boladı.



Abscissaları $h-d$ hám $h+d$ bolǵan A, B noqatlar birdey ordinatalarǵa iye, yaǵnıy $f(h-d)=f(h+d)$ ekenligi kórinip turıptı, demek, A hám B noqatlar $x=h$ kósherge salıstırǵanda simmetriyalıq noqatlar esaplanadı.

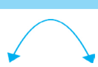
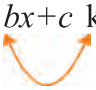
Bul shártten paydalanıp tómendegi teńlikten h tı tabamız:

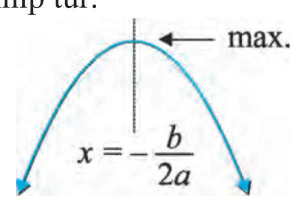
$a(h-d)^2+b(h-d)+c=a(h+d)^2+b(h+d)+c$ yamasa

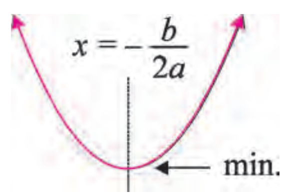
$a(h^2-2hd+d^2)+bh-bd=a(h^2-2hd+d^2)+bh+bd$ yamasa $-4ahd=2bd$, bunnan $h=\dfrac{-b}{2a}$. Demek, simmetriya kósheri $x=\dfrac{-b}{2a}$ eken.

Juwmaq. $y=ax^2+bx+c$ parabolanıń simmetriyalıq kósheri $x=\dfrac{-b}{2a}$ boladı. Parabolanıń óz-ózine simmetriyalı bolǵan noqatı parabolanıń ushı (tóbesi) delinedi. Parabola ushınıń (tóbesiniń) koordinataları $x=\dfrac{-b}{2a}$, $y=y(\dfrac{-b}{2a})=\dfrac{-(b^2-4ac)}{4a}$.

Parabola kósheri $(-\dfrac{b}{2a},0)$ noqattan Oy kósherine parallel bolıp ótedi.

$a<0$ bolǵanda parabola kórinisi  kibi bolıp, onıń ushı (tóbesi) $y=ax^2+bx+c$ kvadrat funkciyanıń maksimum noqatı, $a>0$ bolǵanda parabola kórinisi  kibi bolıp, onıń ushı (tóbesi) kvadrat funkciyanıń minimum noqatı bolatuǵını kórinip tur.





6- mısal. $y=3x^2+4x-5$ parabolanıń simmetriya kósherin tabıń.

$y=3x^2+4x-5$ ushın $a=3$, $b=4$.

Demek, $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-4}{2\cdot3}=-\dfrac{2}{3}$, yaǵnıy $x=-\dfrac{2}{3}$ – simmetriya kósheri.

7- mısal. $f(x)=x^2+6x+4$ parabolanıń ushın (tóbesin) tabıń.

$a=1$, $b=6$. $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-6}{2\cdot1}=-3$.

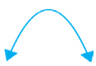
Demek, parabola ushınıń (tóbesiniń) abscissası ı $x=-3$,
ordinatası bolsa: $y=f(-3)=(-3)^2+6(-3)+4=9-18+4=-5$.
Sonıń ushın, parabola ushı (tóbesi) $(-3,-5)$ koordinatalarǵa iye.

8-mısal. Sportshı toptı joqarıǵa attı, bunda toptıń t sekundtan keyingi biyikligi $H(t)=30t-5t^2$ metr boldı, $t\geqslant0$.

a) Neshe sekundta top eń joqarı noqatqa jetedi?

b) Eń joqarǵı noqat jerden qansha biyiklikte boladı?

c) Top neshe sekundtan keyin jerge túsedi?

a) $H(t)=30t-5t^2$ ushın $a=-5<0$. Sonıń ushın bul parabola tómendegishe kóriniste boladı: . $t=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-30}{2\cdot(-5)}=3$ sekundta maksimumǵa erisiledi.

Yaǵnıy eń joqarı noqatqa top 3 sekundta kóteriledi.

b) Maksimal biyiklikti tabamız:

$H(3)=30\cdot3-5\cdot3^2=90-45=45$, yaǵnıy eń joqarı noqat jerden 45 metr biyiklikte boladı.

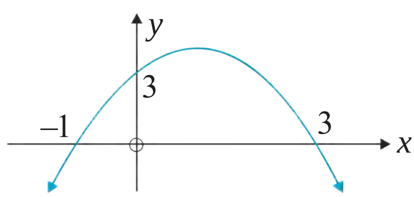
c) $H(t)=0$ bolsa, top jerge túsedi. Usı teńlemeni sheshemiz:

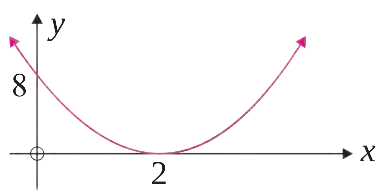
$30t-5t^2=0$, $5t^2-30t=0$, $5t(t-6)=0$. Bunnan $t_1=0$ yamasa $t_2=6$.

Demek, 6 sekundtan keyin top jerge túsedi.

Tómende biz parabola kórinisine qarap kvadrat funkciya formulasın tabıw boyınsha mısallar keltiremiz.

9-mısal. Berilgen parabolalarǵa qarap kvadrat funkciya formulasın jazıń:

a) 

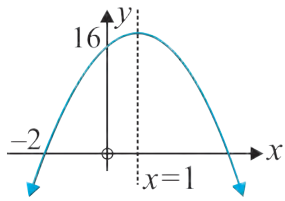
b) 

a) Parabola shaqaları tómenge qaraǵan, ol abscissalar kósheri menen -1 hám 3 noqatlarda kesilisedi. Sonıń ushın $y=a(x+1)(x-3)$, $a<0$. $x=0$ de $y=3$ shártten $a=-1$ di tabamız.

Demek, kvadrat funkciya $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$ formula menen ańlatıladı.

b) Parabola shaqaları joqarıǵa qaraǵan, ol abscissalar kósherine $x=2$ noqatta urınadı. Sonıń ushın $y=a(x-2)^2$, $a>0$. $x=0$ de $y=8$ shártten $a=2$ ni tabamız. Demek, kvadrat funkciya $y=2(x-2)^2$ formula menen beriledi.

10- mısal. Berilgen parabolaǵa qarap kvadrat funkciya formulasın jazıń.



$x=1$ – simmetriya kósheri bolǵanı sebepli, abscissalar kósheri menen ekinshi kesilisiw noqatı $x=4$ boladı. Demek, $y=a(x+2)(x-4)$. Bunnan $x=0$, $y=16$. Sonıń ushın $16=a(0+2)(0-4)$. Bul jerden $a=-2$ yamasa $y=-2(x+2)\cdot(x-4)=-2x^2+4x+16$.

Soraw hám tapsırmalar.

1. Sızıqlı funkciya degen ne?
2. Sızıqlı funkciyanıń múyesh koefficiyenti degen ne?
3. Kvadrat funkciya degen ne?
4. Kvadrat funkciyanıń ushı (tóbesi) qalay tabıladı?
5. Qashan kvadrat funkciya maksimumǵa iye boladı?
6. Qashan kvadrat funkciya minimumga iye boladı?

Shınıǵıwlar

92. Góneriwi nátiyjesinde avtomashina bahası t jıldan keyin $V(t)=25000-3000t$ evro nızamı menen ózgeredi.

a) $V(0)$ mánisin tabıń. Bul mánisti túsindiriń;

b) $V(3)$ mánisin tabıń. Bul mánisti túsindiriń;

c) $V(t)=10000$ mániske neshe jıldan keyin erisiledi?

93. AQShta elektr montajshı shaqırılǵanı ushın \$60 hám hár bir saat ushın \$45 xizmet haqı aladı.

a) $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ bolǵanda sáykes kesteni dúziń. C xizmet haqınıń t waqıtqa qalay baylanıslı ekenligin grafik kórinisinde ańlatıń.

b) $C(t)$ funkciyanıń formulasın (algebralıq kórinisin) jazıń.

c) $6\frac{1}{2}$ saat waqıt ushın qansha qarjı tólenedi?

94. Cisterna 265 l suw menen toltırılǵan. Onnan hár bir minutta 11 l suw alınbaqta.

a) $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ bolǵanda aǵıp shıǵıp atırǵan suwdıń V l kólemi t (minut) waqıtqa qanday baylanıslı ekenligin ańlatıwshı keste dúziń.

b) $V(t)$ baylanıstı grafik kórinisinde ańlatıń;

c) $V(t)$ funkciyanıń formulasın (algebralıq kórinisin) jazıń.
d) 15 minuttan keyin cisternada qansha suw qaladı?
e) Cisterna qansha waqıttan keyin bosaydı?

95. Tómendegilerden qaysı biri kvadrat funkciya boladı?
a) $y=2x^2-4x+10$; c) $y=-2x^2$; e) $3y+2x^2-7=0$;
b) $y=15x-8$; d) $y=\frac{1}{3}x^2+6$; f) $y=15x^3+2x-16$?

96. (x, y) juplıq kórsetilgen $y=ax^2+bx+c$ kvadrat funkciya menen ańlatılǵan qatnasta bola ma?
a) $f(x)=6x^2-10$, $(0, 4)$;
b) $y=2x^2-5x-3$, $(4, 9)$;
c) $y=-4x^2+6x$, $(-\frac{1}{2}, -4)$;
d) $y=-7x^2+9x+11$, $(-1, -6)$;
e) $f(x)=3x^2-11x+20$, $(2, -10)$;
f) $f(x)=-3x^2+x+6$, $(\frac{1}{3}, 4)$?

97. $y=ax^2+bx+c$ kvadrat funkciya ushın y tiń berilgen mánisine sáykes bolǵan x tiń mánisin tabıń:
a) $y=x^2+6x+10$, $y=1$;
b) $y=x^2+5x+8$, $y=2$;
c) $y=x^2-5x+1$, $y=-3$;
d) $y=3x^2$, $y=-3$.

98. Materiallıq dene 80 m/s tezlikte biyiklikke atılǵan. Onıń t sekundta jerge salıstırǵandaǵı biyikligi $h(t)=80t-5t^2$ funkciya járdeminde anıqlanadı.
a) 1 sekund, 3 sekund, 4 sekundtan keyin deneniń biyikligin tabıń;
b) qaysı waqıtta deneniń biyikligi: 140 m; 0 metr boladı? Juwaplarǵa sáykes jaǵdaylardı túsindiriń.

99. Tovar islep shıǵarıwshı is bilermenniń tabısı tómendegi formula menen esaplanadı:

$P(x)=-\frac{1}{2}x^2+36x-40$ (mıń sum), bul jerde x – tovarlardıń sanı.

a) 0 dana tovar, 20 dana tovar islep shıǵarılǵanda is bilermen qanday tabısqa iye boladı? b) 270 mıń sum tabıs alıw ushın is bilermen neshe dana tovar islep shıǵarıwı kerek?

100. Funkciyalardıń $x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ mánislerge sáykes mánislerin tabıń. Nátiyjelerdi keste kórinisinde beriń hám grafiklerin sızıń:
a) $y=x^2+2x-2$; d) $f(x)=-x^2+x+2$; g) $y=x^2-5x+6$;
b) $y=x^2-3$; e) $y=x^2-4x+4$; h) $y=x^2+x+1$;
c) $y=x^2-2x$; f) $(x)=-2x^2+3x+10$; i) $y=-x^2+x-1$?
Bul grafikler qanday kóriniste boladı?

101. Parabolalardıń ordinatalar kósheri menen kesilisiw noqatın tabıń:

a) $y=x^2+2x+3$; d) $f(x)=3x^2-10x+1$; g) $y=8-x-2x^2$;
b) $y=2x^2+5x-1$; e) $y=3x^2+5$; h) $f(x)=2x^2-x^2-5$;
c) $y=-x^2-3x-4$; f) $y=4x^2-x$; i) $y=6x^2+2-5x$

102. Funkciyalar grafikleri ordinatalar kósheri menen qanday noqatlarda kesilisedi:

a) $y=(x+1)(x+3)$; d) $y=(2x+5)(3-x)$; g) $y=(x-1)(x-6)$;
b) $y=(x-2)(x+3)$; e) $y=\ x(x-4)$; h) $y=-(x+2)(x+4)$;
c) $y=(x-7)^2$; f) $y=-(x+4)(x-5)$; i) $y=-(x-3)(x-4)$?

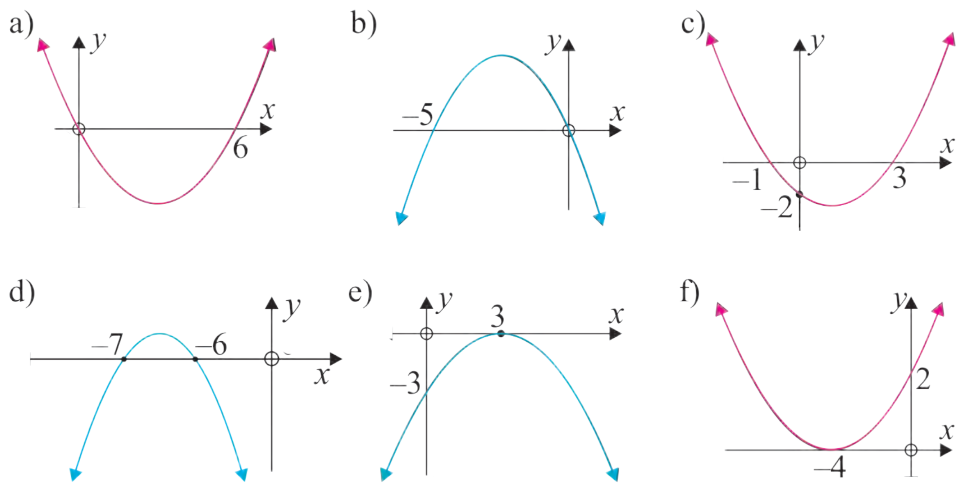
103. Parabolalardıń abscissalar kósheri menen kesilisiw noqatların tabıń:

a) $y=x^2-x-6$; d) $y=3x-x^2$; g) $y=-x^2-4x+21$; j) $y=-2x^2+x-5$;
b) $y=x^2-16$; e) $y=x^2-12x+36$; h) $y=2x^2-20x+50$; k) $y=-6x^2+x+5$;
c) $y=x^2+5$; f) $y=x^2+x-7$; i) $y=2x^2-7x-15$; l) $y=3x^2+x-1$.

104. Parabolalardıń koordinatalar kósherleri menen kesilisiw noqatların tabıń:

a) $y=x^2+x-2$; d) $y=x^2+x+4$; g) $y=-x^2-7x$; j) $y=-x^2+2x-9$;
b) $y=(x+3)^2$; e) $y=3x^2-3x-36$; h) $y=-2x^2+3x+7$; k) $y=4x^2-4x-3$;
c) $y=(x+5)(x-2)$; f) $y=-x^2-8x-16$; i) $y=2x^2-18$; l) $y=6x^2-11x-10$.

105. Parabolanıń simmetriya kósherin tabıń:



106. Parabolanıń simmetriya kósherin tabıń:

a) $y=(x-2)(x-6)$; d) $y=(x-3)(x-8)$;
b) $y=x(x+4)$; e) $y=2(x-5)^2$;
c) $y=-(x+3)(x-5)$; f) $y=3(x+2)^2$.

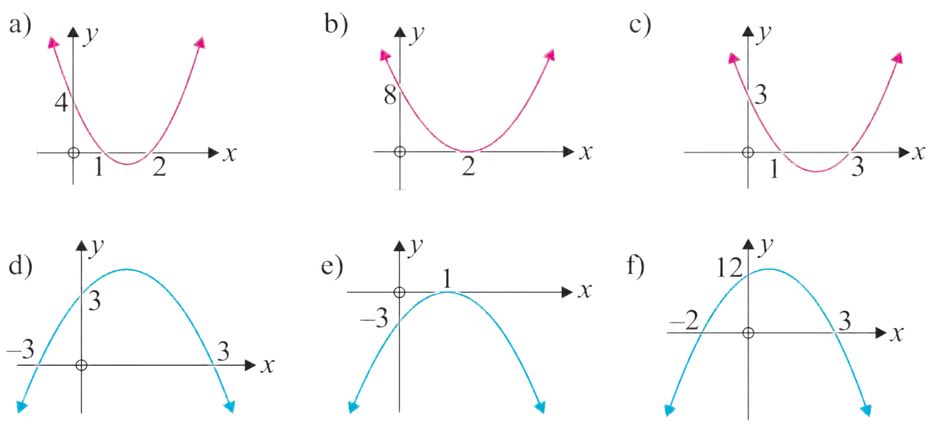
107. Parabolanıń simmetriya kósherin tabıń:

a) $y=x^2+6x+2$;
b) $y=x^2-8x-1$;
c) $f(x)=2x^2+5x-3$;
d) $y=-x^2+3x-7$;
e) $y=2x^2-5$;
f) $y=-5x^2+7x$;
g) $f(x)=x^2-6x+9$;
h) $y=10x-3x^2$;
i) $y=\frac{1}{8}x^2+x-1$.

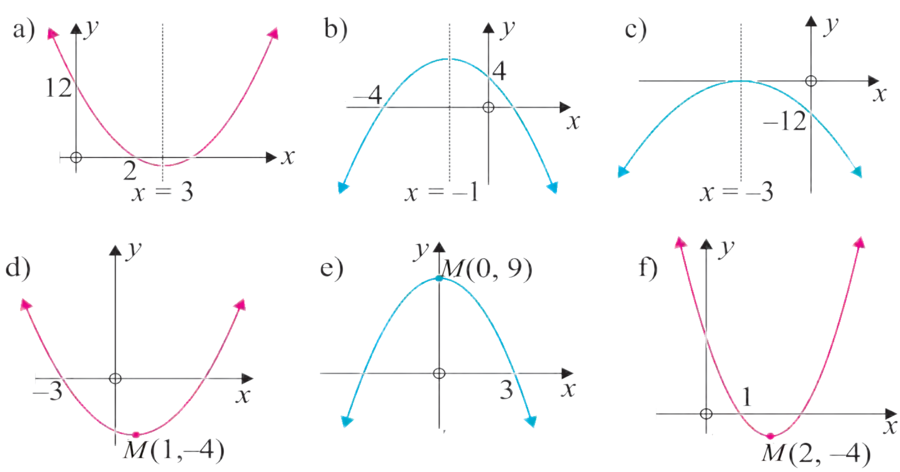
108. Parabola ushınıń (tóbesiniń) koordinataların tabıń:

a) $y=x^2-4x+7$;
b) $y=x^2+2x+5$;
c) $f(x)=-x^2+6x-1$;
d) $y=x^2+3$;
e) $f(x)=2x^2+12x$;
f) $y=-3x^2+6x-4$;
g) $y=x^2-x-1$;
h) $y=-2x^2+3x-2$;
i) $y=-\frac{1}{4}x^2+3x-2$.

109. Parabolaǵa qarap, oǵan sáykes kvadrat funkciya formulasın jazıń:



110. Parabolaǵa qarap, kvadrat funkciya formulasın jazıń:



111. Dániyar teńizge dúrdi alıw ushın súńgidi. Onıń t sekunddan keyingi súńgiw tereńligi $H(t)=-4t^2+4t+3$ metr boldı, $t \geqslant 0$.

a) dúrler qanday tereńlikte jaylasqan?

b) Dániyar dúrdi alıw ushın qansha waqıt sarıplaydı?

c) Dániyar qanday biyiklikten suwǵa súńgidi?

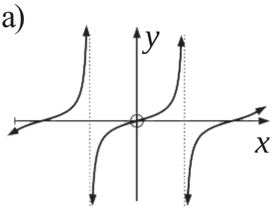
112. Jasmina kóylek tigiw ushın buyırtpa aldı. Ol bir kúnde x dana kóylek tikse, ol $P(x)=-x^2+20x$ AQSh dolları muǵdarında tabıs aladı.

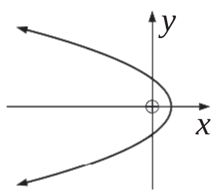
a) Eń úlken tabıs alıw ushın ol qansha kóylek tigiwi kerek?

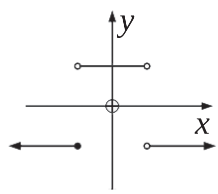
b) Eń úlken tabıs neshe dollarǵa teń?

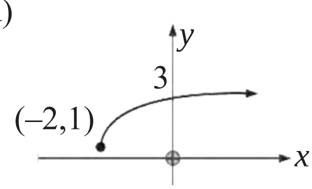
Baqlaw jumısı úlgisi

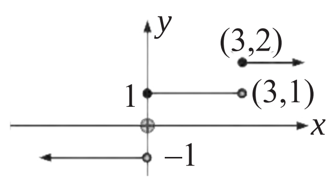
1. Tómendegi qatnaslardan qaysılari funkciyalar esaplanadı?

a)


b)


c)


d)


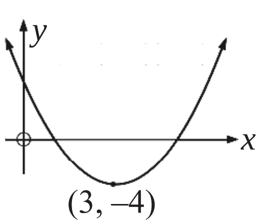
e)


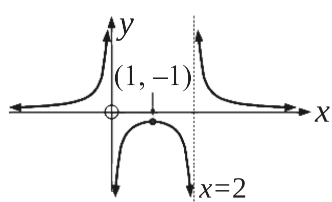
2. Tómendegi tártiplengen juplıqlar kópliklerinen qaysıları sáwlelendiriw boladı? Juwabıńızdı tiykarlań.

a) $\{(1, 2),(-1, 2),(0, 5),(2, -7)\}$; b) $\{(0, 1),(1, 3),(2, 5),(0, 7)\}$;

c) $\{(6, 1),(6, 2),(6, 3),(6, 4)\}$.

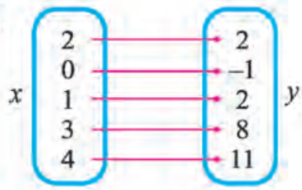
3. Grafik kórinisinde berilgen funkciyalardıń anıqlanıw oblastın hám mánisler kópligin tabıń:

a)


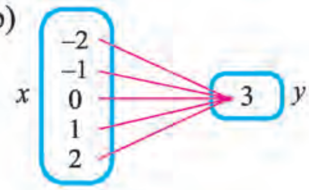
b)


4. Tómendegi diagramma $y=f(x)$ sáwlelendiriwdi bermekte.

a)



b)



1) $y=f(x)$ sáwlelendiriwdiń anıqlanıw oblastın hám mánisler kópligin jazıń.

2) $y=f(x)$ sáwlelendiriw tegisliktegi koordinatalar sistemesında qalay súwretlenedi?

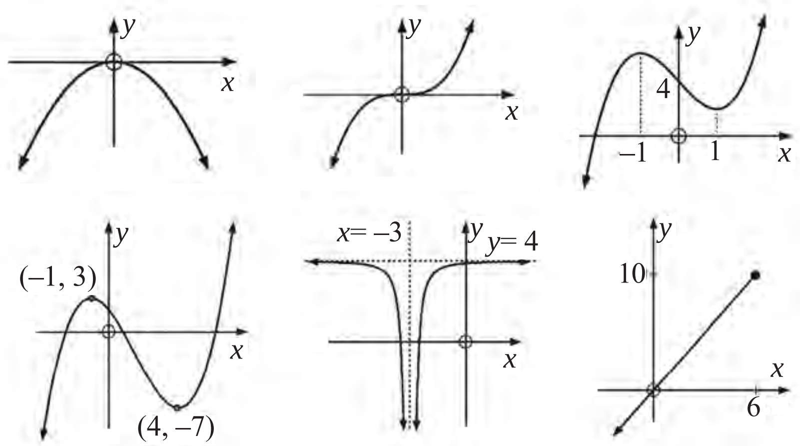
3) $y=f(x)$ ushın anıq ańlatpanı jazıń.

5. $f(x)=2x-x^2$ funkciya ushın:

a) $f(2)$; b) $f(-3)$; c) $f(-\frac{1}{2})$ mánislerin tabıń.

6. $g(x)=x^2-3x$ funkciya ushın a) $g(x+1)$; b) $g(x^2-2)$ ańlatpalardı tabıń hám ápiwayılastırıń.

7. Grafik kórinisinde berilgen funkciyalardıń kemeyiw hám ósiw aralıqların tabıń:



8. a) $f(x)=2x+1$; b) $f(x)=-3x+2$;

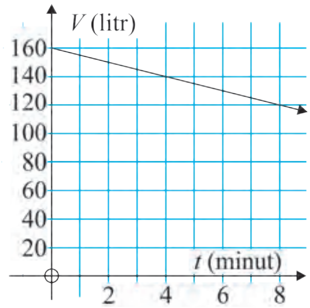
c) $f(x)=x^2$; d) $f(x)=-x^3$ funkciyalar ushın:

1) funkciyalardıń kósherler menen kesilisiw noqatların tabıń;

2) lokal maksimum, lokal minimum noqatları koordinataların tabıń;

3) funkciyalar grafigin shamalap sızıń.

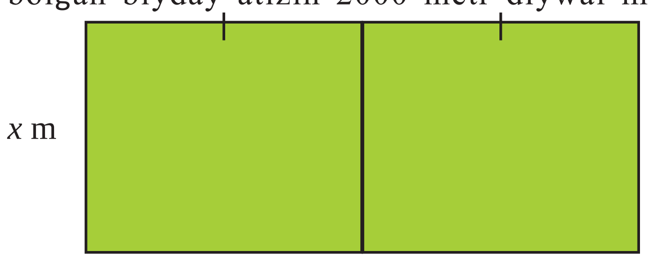
9. Tómendegi grafikte minutlarda ańlatılǵan t waqıtta cisternadan shıǵıp atırǵan neft óniminiń V kólemi súwretlengen.



1) Shıǵıp atırǵan neft óniminiń kólemi menen waqıt arasındaǵı baylanıs formulasın tabıń.
2) 15 minutta qansha neft shıǵadı?
3) 50 litr neft neshe minutta shıǵadı?
4) Cisterna qansha waqıttan soń bosaydı?

10. Tas teńiz qáddinen (betinen) 60 metr biyiklikten joqarıǵa ılaqtırılǵan. t sekunddan soń tastıń teńiz qáddine salıstırǵandaǵı biyikligi $H(t)=-5t^2+20t+60$ metrge teń bolsa:
1) Neshe sekundtan soń tastıń biyikligi eń úlken boladı?
2) Tastıń teńiz qáddine salıstırǵandaǵı biyikligi qanshaǵa teń?
3) Neshe sekundtan soń tas suwǵa túsedi?

11. Fermer súwrette kórsetilgen eki birdey maydanǵa iye bolǵan biyday atızın 2000 metr diywal menen qorshadı.



1) Atızlardıń ulıwma maydanı x arqalı qalay ańlatıladı?
2) Eki atızdıń ulıwma maydanı eń kóbi menen neshe kvadrat metrge teń bolıwı múmkin? Bul atızlardıń ólshemlerin anıqlań.

55 DÁWIRLI PROCESLER HÁM OLARDÍ BAQLAW

Dáwirli procesler tábiyatta hám texnikada keń tarqalǵan. Olarǵa mısallar keltireyik:

- jıl máwsimleri boyınsha hawa rayınıń ózgeriwi;
- aylardaǵı ortasha temperaturanıń ózgeriwi;
- kún hám túnniń dawamlılıǵı;
- teńiz jaǵası janındaǵı suw tereńligi;
- haywanlar sanı;

• quyash aktivliginiń ózgeriwi;
• Mexanika, elektrotexnikadaǵı dáwirli terbelisler.

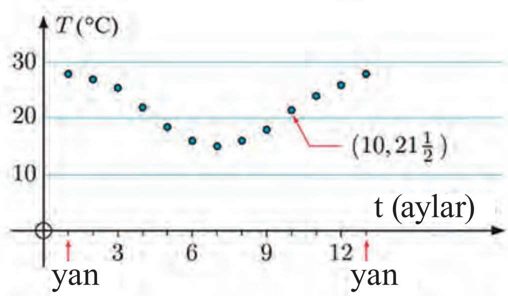
Bul proceslerde anıq waqıt aralıqlarında tákirarlanıp turatuǵın jaǵdaylar baqlanadı. Olar jaǵdayǵa qarap dáwirli, terbeletuǵın yamasa ciklli delinedi.

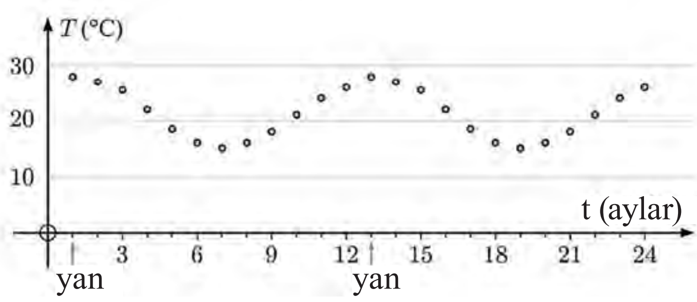
Máselen, Qubla Afrikadaǵı Keyptaun qalasında aylıq maksimal temperaturanıń ózgeriwin ańlatıwshı kesteni qarayıq:

Ay	Yan	Fev	Mar	Apr	May	Iyun	Iyul	Avg	Sen	Okt	Noy	Dek
Temp (0 °C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Bul maǵlıwmatlardı grafikalıq kórinisinde ańlatayıq. Bunıń ushın ordinatalar kósheri temperaturanı, abscissalar kósheri bolsa aydıń tártiplik sanın (Máselen, fevral ushın $t=2$) bildirsin. Grafikte yanvar ayında ortasha 28 °C temperatura bolıwı baqlanbaqta. Bunday mánistiń hár jıldıń yanvarında, yaǵnıy hár 12 ayda tákirarlanıwın kútiw tabiyiy.

Basqa aylar ushın da ortasha temperatura ózgeriwin shamalap kórsetiwshi grafikti sızıp, onı keyingi jılǵa da dawam ettirsek boladı:





Eger $y=f(t)$ funkciya t ayda ortasha temperaturanı ańlatsa, $f(0)=f(12)=f(24)=...$, $f(1)=f(13)=f(25)=...$ hám t.b. kibi nızamı, ulıwma jaǵdayda, qálegen t ushın $f(t+12)$ bolıwı baqlanbaqta.

Bunda tákirarlanıw baqlanatuǵın 12 ay múddetti dáwir dep aytamız.

X kóplikte anıqlanǵan $f(x)$ funkciya ushın qálegen x ta $f(x+T)=f(x)$ teńlikti qanaatlandıratuǵın $T>0$ bar bolsa, $f(x)$ funkciya *dáwirli* delinedi, bunda $x+T \in X$.

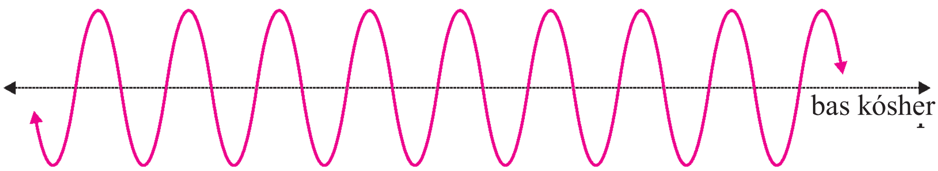
Eger $f(x+T)=f(x)$ bolsa, ol jaǵdayda $f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\ldots$ekenligi belgili.

Bunday $T>0$ sanlardıń eń kishi mánisin funkciyanıń dáwiri dep ataymiz.

Dóńgelek tuwrı boylap aylanıp háreket qılsa, ondaǵı anıq bir belgilengen noqat *cikloida* dep atalǵan iymek sızıq boyınsha dáwirli háreket qıladı.

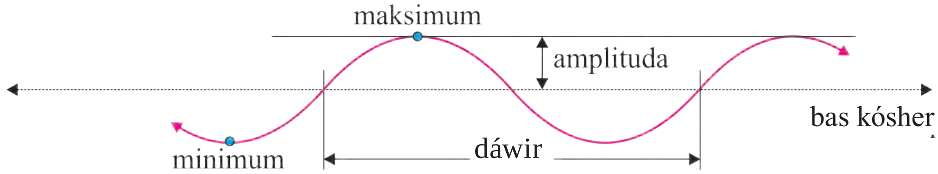
Sikloida $y=f(x)$ kórinisindegi teńlemege iye emes ekenligin aytıp ótiwimiz orınlı.

Dáwirli funkciyalar grafikleri tómendegi kóriniske iye:



Bas kósher teńlemesi tómendegishe tabıladı: $y=\dfrac{\max+\min}{2}$, bunda max – funkciyanıń eń úlken, min bolsa eń kishi mánisi.

Dáwirli funkciya grafigi tómendegishe bóleklerge iye:



Amplituda funkciyanıń maksimumı menen kósher (yamasa kósher menen minimum) arasındaǵı aralıq bolıp, ol tómendegishe tabıladı:

$$\text{amplituda}=\frac{\max-\min}{2}.$$

Soraw hám tapsırmalar

1. Dáwirli proceske mısal keltiriń.
2. Funkciyanıń dáwirine anıqlama beriń.
3. Dáwirli funkciyanıń amplitudası qalay esaplanadı?
4. Sikloidanıń ne ekenligin túsindiriń.
5. Qashan kvadrat funkciya maksimumǵa (minimumǵa) iye?

Shınıǵıwlar

113. Hár bir jaǵday ushın maǵlıwmatlardı grafik kórinisinde súwretleń hám olardıń dáwirli-dáwirli emesligi haqqında juwmaq shıǵarıń:

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	1	1,4	1	0	–1	–1,4	–1	0	1	1,4	1	0

b)

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

c)

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
y	0	1,9	3,5	4,5	4,7	4,3	3,4	2,4

d)

x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
y	0	4,7	3,4	1,7	2,1	5,2	8,9	10,9	10,2	8,4	10,4

114. Tómendegi kesteda dóńgelek tuwrı boylap aylanıp qozǵalsa, onda belgilengen noqattıń qozǵalısın ańlatıwshı muǵdarlar keltirilgen:

Aralıq (sm)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Biyiklik (sm)	0	6	23	42	57	64	59	43	23	7	1

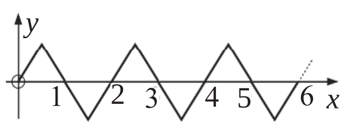
Aralıq (sm)	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400
Biyiklik (sm)	5	27	40	55	63	60	44	24	9	3

a) Biyikliknıń aralıqqa baylanıslı ekenligin grafik kórinisinde ańlatıń.

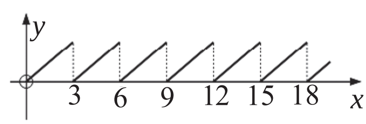
b) Bul process dáwirli me? Eger dáwirli bolsa, kósher teńlemesin, funkciyanıń maksimumın, dáwirin, amplitudasın tabıń.

115. Grafiklerden qaysı biri dáwirli processti ańlatadı?

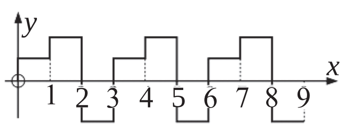
a)



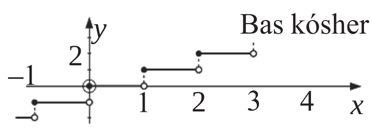
b)



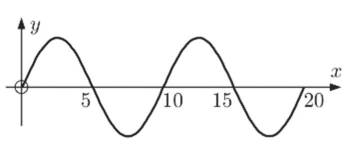
c)



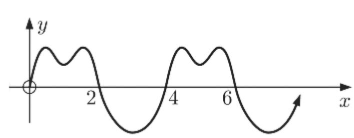
d)



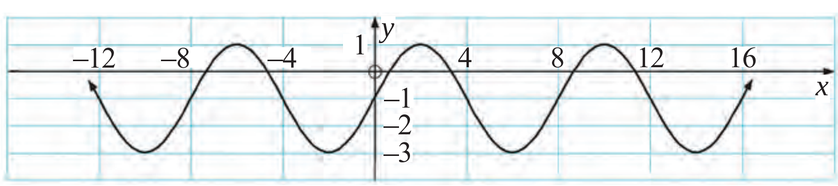
e



f



16.



Berilgen dáwirli funkciya ushın:

a) amplitudani tabıń;

b) dáwirdi tabıń;

c) birinshi maksimum noqatın tabıń;

d) eki maksimum noqat arasındaǵı aralıqtı anıqlań;

e) bas kósherdiń teńlemesin dúziń.

56-58 $y=\sin x$, $y=\cos x$ FUNKCIYALAR HÁM OLAR JÁRDEMINDE MODELLESTIRIW

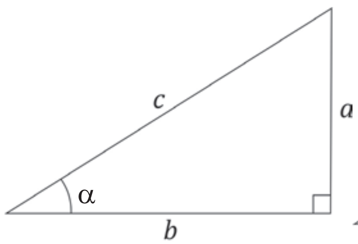
Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte a, b – katetler, c – gipotenuza bolsın. α dep a katetke qarama-qarsı múyeshti belgileymiz (1-súwretke qarań).

Geometriya kursında α múyeshtiń sinusı hám kosinusı tómendegi teńlikler járdeminde kirgiziledi:

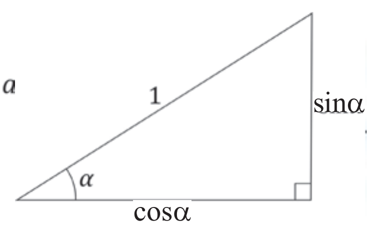
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Gipotenuzanı 1 dep alsaq, 1-súwret 2-súwrettegi kórinisti aladı.

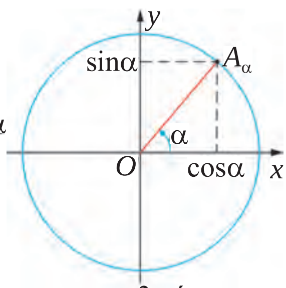
Tegislikte koordinatalar sistemesın kirgizip, onda *radiusı 1 ge teń sheńberdi – birlik sheńberdi* qaraymız hám usı sheńberde α múyeshke sáykes bolǵan noqattı belgileymiz (3-súwret).



1-súwret.



2-súwret.

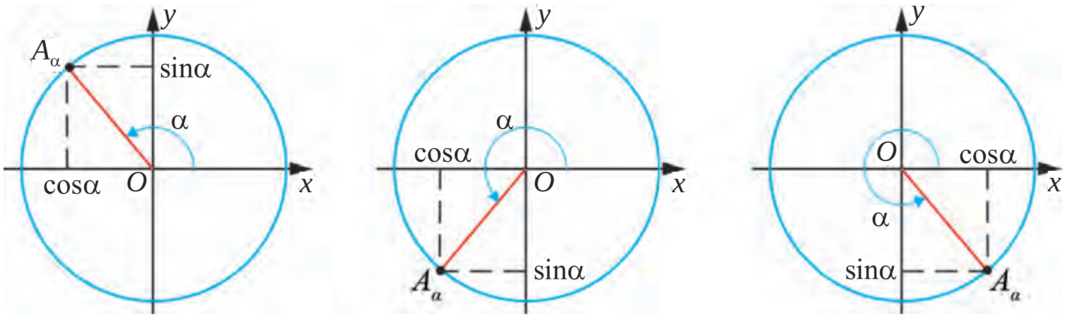


3-súwret.

α múyeshtiń sinusı dep $(1;0)$ noqattıń koordinatalar bası átirapında α múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan A_α noqattıń ordinatasına aytıladı ($\sin\alpha$ kibi belgilenedi).

Tap sonday, α múyeshtiń kosinusı dep $(1; 0)$ noqattı koordinatalar bası átirapında α múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan A_α noqattıń abscissasına aytıladı ($\cos\alpha$ kibi belgilenedi).

α múyeshke sáykes noqat basqa shereklerde jatsa, tómendegi kibi kórinislerge iye bolamız (4-súwret):



4-rasm.

Pifagor teoreması boyınsha, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ – *tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylik orınlı, bunda* $0^\circ\le\alpha\le360^\circ$. Trigonometriyada qaralatuǵın múyeshler (doǵalar) graduslarda yamasa radianlarda ólsheniwi múmkin.

α oraylıq múyeshke sáykes doǵa uzınlıǵınıń sol doǵa radiusına qatnası usı múyeshtiń radian ólshemi delinedi.

Graduslarda berilgen α múyeshtiń radian ólshemi $\dfrac{\pi}{180^\circ}\alpha$ ǵa teń.

Ko‘p ushırasatuǵın múyeshlerdiń radian ólshemleri kestesin keltiremiz:

Gradus	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

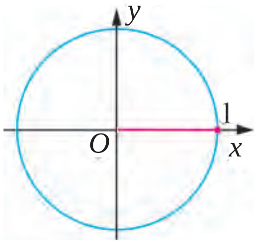
Ayırım α múyeshler sinusı hám kosinusı mánislerin tabayıq.

1. $\alpha=0^\circ$ bolsın (5-súwret). Bul jaǵdayǵa sáykes noqattıń abscissası 1 ge, ordinatası bolsa 0 ge teń, demek, $\sin0^\circ=0$, $\cos0^\circ=1$.

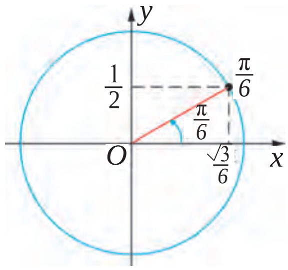
2. $\alpha=\pi/6=30^\circ$ bolsın (6-súwret). Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte 30° lı múyesh qarsısındaǵı katet gipotenuzanıń yarımına teń bolǵanı ushın, $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ boladı. Tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylik boyınsha $\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\alpha=\pi/4=45^\circ$ bolsın (7-súwret). Bul jaǵdayda teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshlik payda boladı.

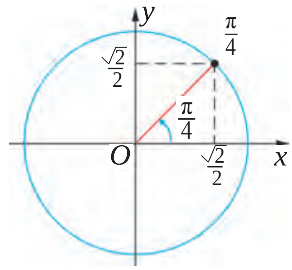
Bunday úshmúyeshlikte α múyeshtiń sinusı hám kosinusı óz ara teń. Olardı x deyik. Tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylikten $x^2+x^2=1$, yaǵnıy $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ boladı. Demek, $\cos\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



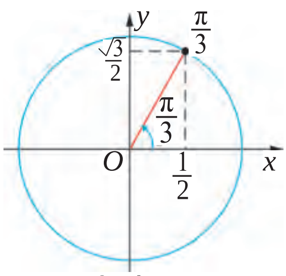
5-súwret.



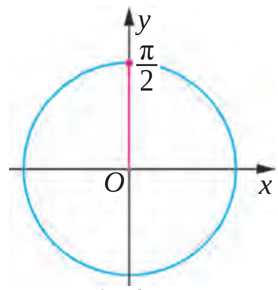
6-súwret.



7-súwret.



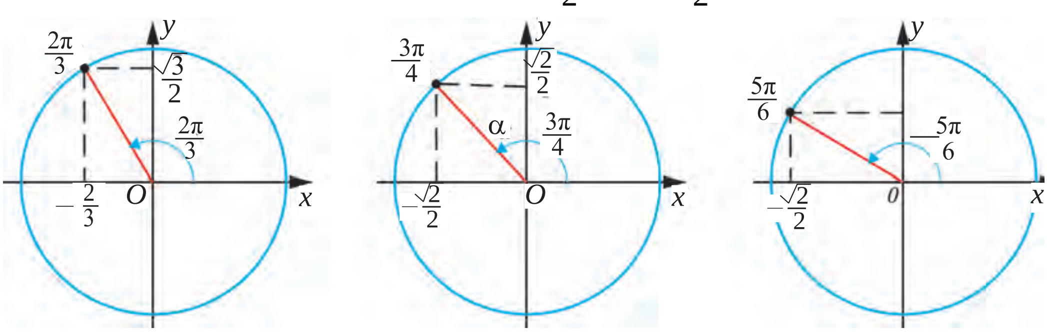
8-súwret.



9-súwret.

4. $\alpha = \pi/3 = 60°$ bolsın (8-súwret). Bul jağdayda tap $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ jağdayğa uqsas aytım júrgizip, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ teńliklerge iye bolamız.

5. $\alpha = \pi/2 = 90°$ bolsın (9-súwret). Bul jağdayğa sáykes noqattıń abscissası 0 ge, ordinatası bolsa 1 ge teń. Demek, $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.



10-súwret.

6. $\dfrac{2\pi}{3} = 120°$, $\dfrac{3\pi}{4} = 135°$, $\dfrac{5\pi}{6} = 150°$ bolğan jağdaylardı qarayıq. (10-súwret).

$\dfrac{2\pi}{3}$ noqat ushın $\dfrac{2\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3}$. Ol jağdayda, bul noqat $\dfrac{\pi}{3}$ noqatqa *Oy* kósherine salıstırǵanda simmetriyalı. Demek, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{3\pi}{4}$ noqat ushın $\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$. Ol jaǵdayda, bul noqat $\frac{\pi}{4}$ noqatqa *Oy* kósherine salıstırǵanda simmetriyalı. Demek, $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

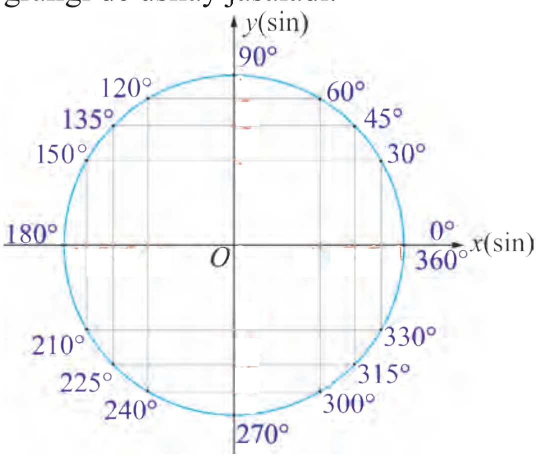
$\frac{5\pi}{6}$ noqat ushın $\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$. Ol jaǵdayda, bul noqat $\frac{\pi}{6}$ noqatqa *Oy* kósherine salıstırǵanda simmetriyalı. Demek, $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

7. $\alpha=\pi=180°$ jaǵdayda $\cos\pi=-1$, $\sin\pi=0$ ekenin dálillew hám sáykes súwret sızıwdı oqıwshıǵa usınıs etemiz.

Joqarıda biz $[0; \pi]$ aralıqta ayırım múyeshler ushın sinus hám kosinus mánislerin anıqladıq. Bul múyeshlerdiń hár birine π di qosıp $[\pi; 2\pi]$ aralıqtaǵı múyeshler ushın da sinus hám kosinus mánislerin anıqlaw múmkin.

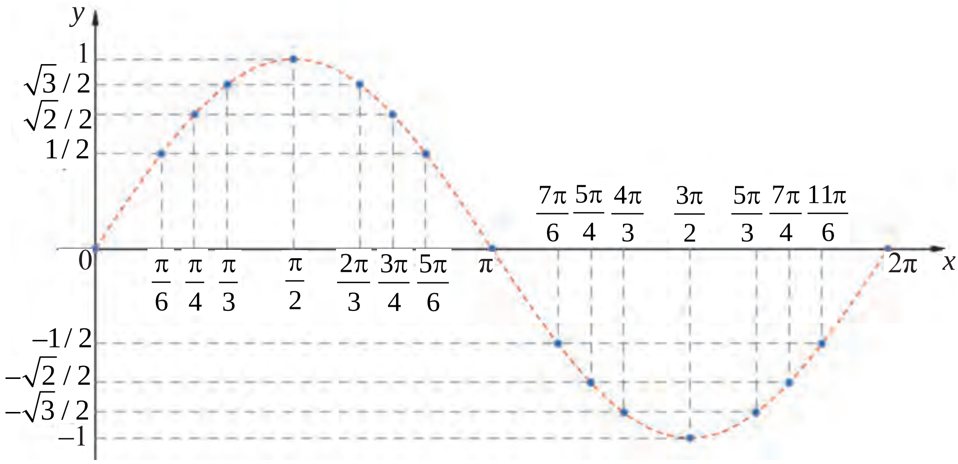
Nátiyjelerdi *trigonometriyalıq sheńber* dep atalǵan 11-súwrette ańlatamız:

Joqarıdaǵı mánislerden paydalanıp $y=\sin x$, $y=\cos x$ funkciyalar grafiklerin sızıw múmkin. Bunıń ushın abscissalar kósherinde α múyeshtiń mánislerin, al ordinatalar kósherinde sinustıń sáykes mánislerin alıp, payda bolǵan noqatlardı belgileymiz. Soń belgilengen noqatlardı tegis sızıq penen tutastırıp, $[0; 2\pi]$ aralıqtaǵı $y=\sin x$ (12-súwret) funkciya grafigin payda etemiz. $y=\cos x$ (13-súwret) grafigi de usılay jasaladı.

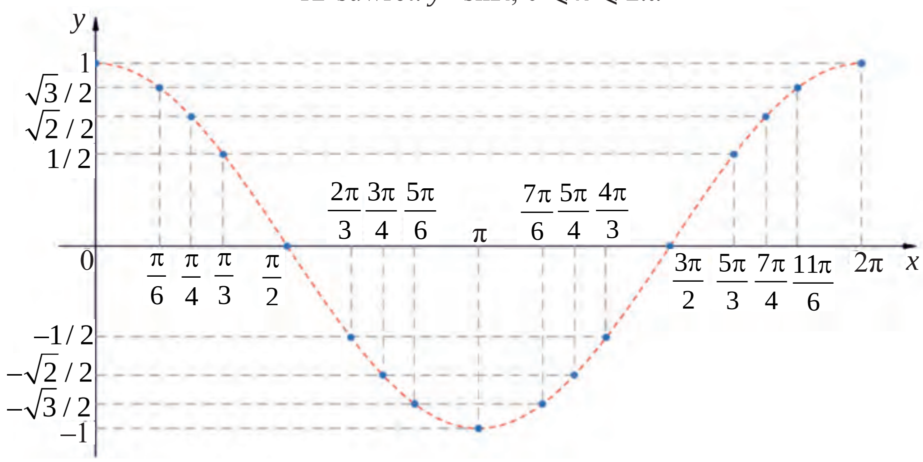


$30°=\frac{\pi}{6}$;	$45°=\frac{\pi}{4}$;	$60°=\frac{\pi}{6}$;
$90°=\frac{\pi}{2}$;	$120°=\frac{2\pi}{3}$;	$135°=\frac{3\pi}{6}$;
$180°=\pi$;	$210°=\frac{7\pi}{6}$;	$225°=\frac{5\pi}{4}$;
$240°=\frac{4\pi}{3}$;	$270°=\frac{3\pi}{2}$;	$300°=\frac{5\pi}{3}$;
$315°=\frac{7\pi}{4}$;	$330°=\frac{11\pi}{6}$.	

11-súwret. Trigonometriyalıq sheńber. Sinus hám kosinustıń ayırım mánisleri.

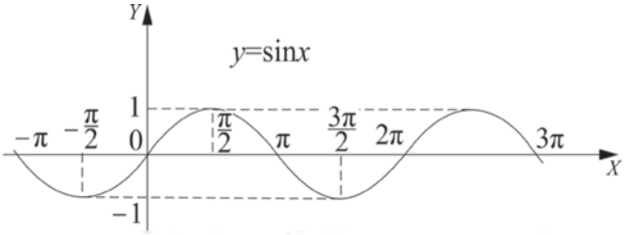


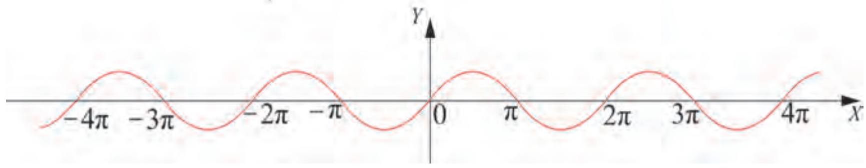
12-súwret. $y=\sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.



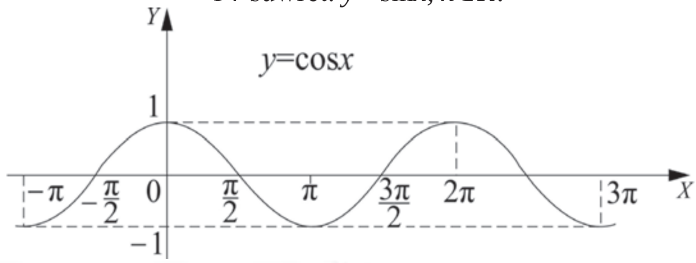
13-súwret. $y=\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

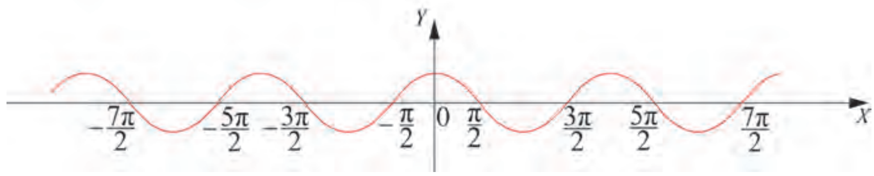
Bul grafiklerdi dáwirli dawam ettirip, $y=\sin x$, $y=\cos x$ funkciyalardıń grafiklerin payda etemiz (14 hám 15-súwretler).





14-súwret. $y=\sin x,\ x\in R$.





15-súwret. $y=\cos x,\ x\in R$.

Grafiklerdi oqıp sonday juwmaqqa kelemiz: $y=\sin x$ ($y=\cos x$) funkciyanıń dáwiri 2π ge, amplitudası 1 ge, eń úlken mánisi 1 ge, eń kishi mánisi bolsa -1 ge teń.

Qollanılıwlarda keń ushırasatuǵın $y=a\sin x$ hám $y=\sin bx,\ b\neq 0$ funkciyalar haqqında geypara aytımlardı keltiremiz.

$y=a\sin x$ funkciyanıń amplitudası $|a|$ ǵa teń. Onıń grafigi $y=\sin x$ funkciya grafigin $|a|>1$ bolǵanda ordinata kósheri boyınsha sozıw, $|a|<1$ bolǵanda bolsa qısıw nátiyjesinde payda boladı. $y=\sin bx$ funkciyanıń dáwiri $\dfrac{360°}{|b|}$ ge teń. Bul funkciyanıń grafigi $y=\sin x$ funkciya grafiginen $0<|b|<1$ bolǵanda abscissa kósheri boyınsha sozıw, $|b|>1$ bolǵanda qısıw nátiyjesinde payda boladı.

$y=\sin x+c$ kórinisindegi funkciya grafigi $y=\sin x$ funkciya grafigin c birlikke parallel kóshiriw nátiyjesinde payda boladı hám bunda $y=\sin x+c$ funkciyanıń bas kósheri $y=c$ teńlemege iye.

Joqarıdaǵılardı inábatqa alıp, $y=a\sin bx+c$ kórinisindegi funkciya grafigin payda qılıw múmkin.

Máselen, $y=2\sin 3x+1$ funkciyanı qarayıq.

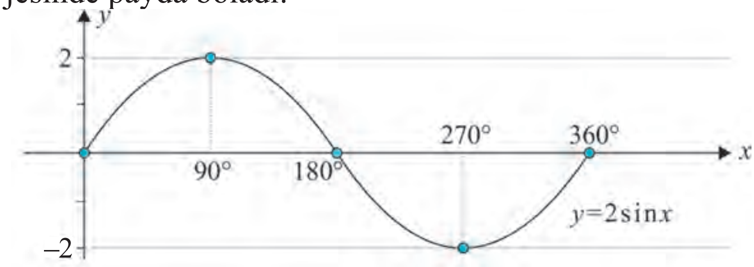
Bul funkciya grafigi $y=\sin x$ funkciya grafiginen tómendegishe payda boladı:

1. Amplitudanı ekige kóbeytip $y=2\sin x$ ti payda etemiz
2. Dáwirdi úshke bólip, $y=2\sin 3x$ ti payda etemiz
3. Berilgen 1 birlikke parallel kóshiremiz. $y=2\sin 3x+1$ funkciyanıń bas kósheri $y=1$ teńlemega iye.
4. Nátiyjede $y=2\sin 3x+1$ funkciya grafigin payda etemiz.

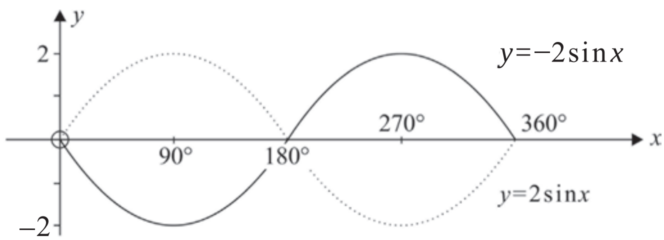
Soǵan uqsas aytımlardı $y=\cos x$ funkciya haqqında da keltiriwge boladı.

1- mısal. $y=2\sin x$, $y=-2\sin x$, $y=\sin 2x$ funkciyalar grafiklerin sızıń, $0°\leq x\leq 360°$.

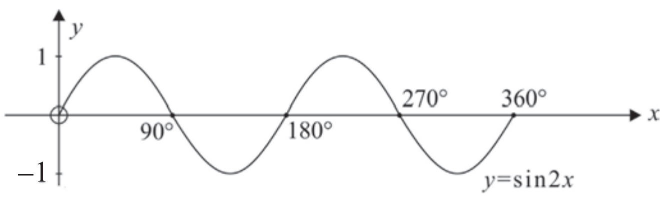
△Dáslep $y=2\sin x$ funkciya grafigin sızamız. Bul funkciyanıń amplitudası 2 ge teń hám onıń grafigi $y=\sin x$ funkciya grafiginiń ordinatalar kósheri boyınsha sozıw nátiyjesinde payda boladı:



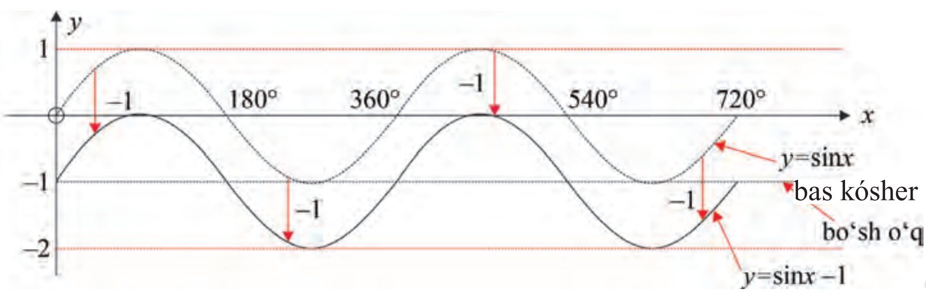
$y=-2\sin x$ funkciya grafigi $y=2\sin x$ funkciya grafigine abscissa kósherine salıstırǵanda simmetriyalı. Bunnan paydalanıp, $y=-2\sin x$ funkciya grafigin sızamız.



$y=\sin 2x$ funkciyanıń dáwiri $\dfrac{360°}{2}=180°$. Bul funkciya grafigi tómendegishe boladı:



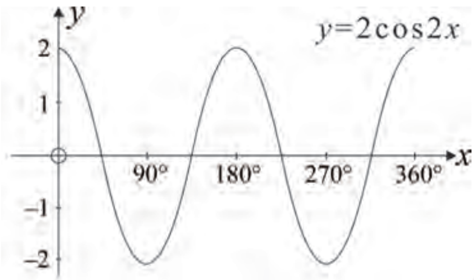
2- mısal. $0°\leqslant x\leqslant 720°$ bolǵanda $y=\sin x$ hám $y=\sin x-1$ funkciyalar grafiklerin sızıń.



▲

3- mısal. $0° \leqslant x \leqslant 360°$ kesindide $y=2\cos 2x$ funkciya grafigin sızayıq.

△ $a=2$. Demek, funkciya amplitudası $|2|=2$ boladı, $b=2$ bolǵanı ushın funkciyanıń dáwiri bolsa $\frac{360°}{|b|}=\frac{360°}{2}=180°$ boladı. Bunnan usı grafikke iye bolamız:



▲

Soraw hám tapsırmalar

1. Birlik dóńgelekte múyesh sinusına anıqlama beriń.
2. Birlik dóńgelekte múyesh kosinusına anıqlama beriń.
3. 30° li múyesh ushın sinus hám kosinustı esaplań.
4. $y=\sin x$ funkciya grafigin sızıń.
5. $y=\cos x$ funkciya grafigin sızıń.

Shınıǵıwlar

117. Grafiklerdi $0° \leqslant x \leqslant 360°$ kesindide sızıń:

a) $y=3\sin x$; b) $y=-3\sin x$; c) $y=\frac{3}{2}\sin x$; d) $y=-\frac{3}{2}\sin x$.

118. Grafiklerdi $0° \leqslant x \leqslant 540°$ kesindide sızıń:

a) $y=\sin 3x$; b) $y=\sin(\frac{x}{2})$; c) $y=\sin(-2x)$; d) $y=-\sin\frac{x}{3}$.

119. Funkciyanıń dáwirin anıqlań:

a) $y=\sin 4x$; b) $y=\sin(-4x)$; c) $y=\sin(\frac{x}{3})$; d) $y=\sin(0{,}6x)$.

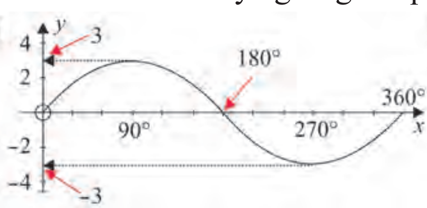
120. Eger $y=\sin bx$, $b>0$ ushın funkciyanıń dáwiri

a) 900°; b) 120°; c) 2160°; d) 720°

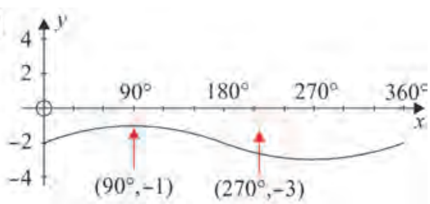
qa teń bolsa, b nı tabıń.

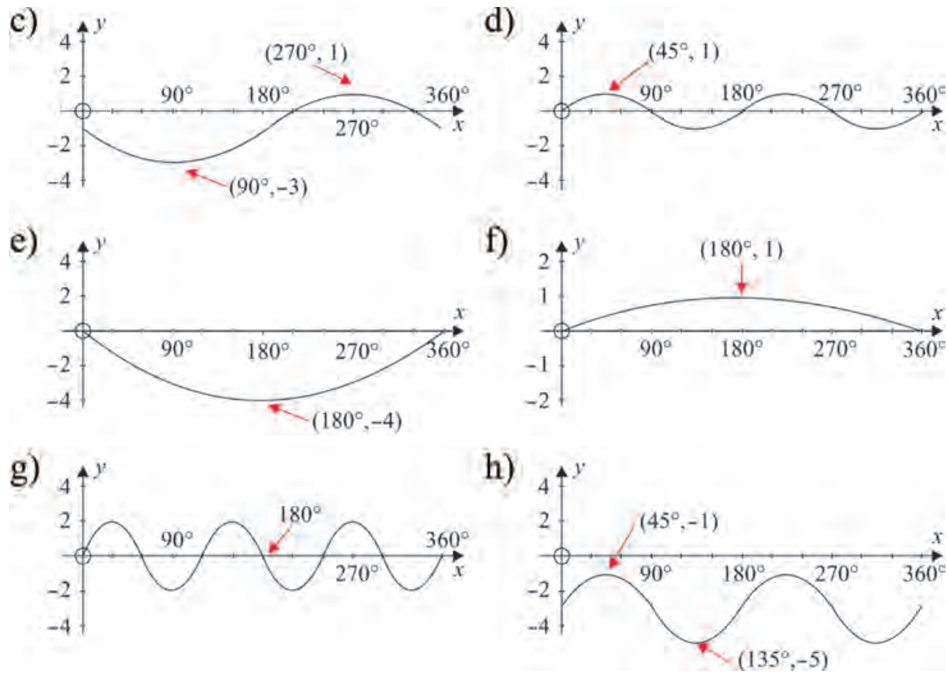
121. $y=a\sin bx+c$ funkciya grafigine qarap a, b, c sanlardı tabıń:

a)



b)



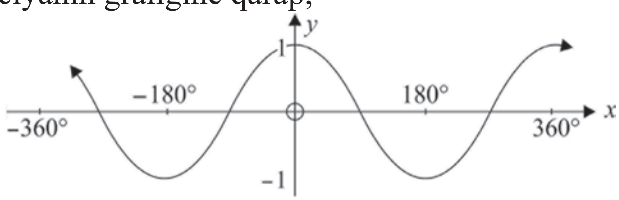


122. Grafiklerdi $0° \leqslant x \leqslant 360°$ kesindide sızıń:

a) $y=\sin x+1$; b) $y=\sin x-2$; c) $y=1-\sin x$;

d) $y=2\sin x-1$; e) $y=\sin 3x+1$; f) $y=1-\sin 2x$.

123. $y=\cos x$ funkciyanıń grafigine qarap,



a) $y=\cos x+2$; b) $y=\cos x-1$; c) $y=\dfrac{2}{3}\cos x$;

d) $y=\dfrac{3}{2}\cos x$; e) $y=-\cos x$;f) $y=\cos 2x$;

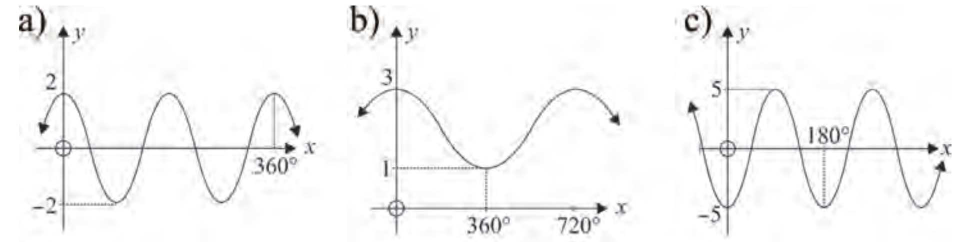
g) $y=\cos(\dfrac{x}{2})$; h) $y=3\cos 2x$ funkciyalar grafiklerin sızıń.

124 Funkciyanıń dáwirin anıqlań:

a) $y=\cos 3x$; b) $y=\cos(\dfrac{x}{3})$; c) $y=\cos(\dfrac{x}{2})$; d) $y=\cos 4x$.

125. $y=a\cos bx+c$ funkciya berilgen bolsın. a, b, c sanlardıń geometriyalıq mánisin anıqlań.

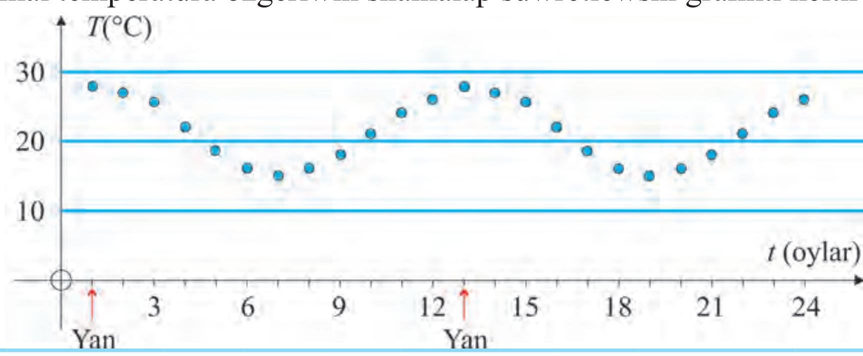
126. $y=a\cos bx+c$ funkciya grafigine qarap *a, b, c* sanlardı tabıń.



4- mısal. Tómende Qubla Afrikadağı Keyptaun qalasında hawa rayınıń aylıq maksimal temperaturasınıń ózgeriwin ańlatıwshı keste berilgen:

Ay	*Yan*	*Fev*	*Mar*	*Apr*	*May*	*Iyun*	*Iyul*	*Avg*	*Sen*	*Okt*	*Noy*	*Dek*
T(°C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Maksimal temperatura ózgeriwin shamalap súwretlewshi grafikti keltiremiz:



Meyli, bul procestiń modeli $T=a\cos bt+c$ kórinisinde bolsın dep, parametrler – *a, b, c* lardı tabamız. Dáwir 12 ay bolǵanı ushın

$$\frac{360°}{|b|}=12\text{, yaǵnıy } b=\frac{360°}{12}=30°.$$

Amplitudanı esaplaymız: $\frac{\max-\min}{2}\approx\frac{28-15}{2}=6{,}5$. Bunnan α≈6,5.

Bas kósher maksimal hám minimal mánisler tuwrıları ortasında bolǵanı ushın $c\approx\frac{28+15}{2}\approx 21{,}5.$

Demek, maksimal aylıq temperatura waqıt ótiwi menen ózgeriwiniń matematikalıq modeli $T\approx 6{,}5\cos 30t+21{,}5$ funkciyası boladı.

Shınıǵıwlar

127. Antarktidadaǵı Polyus bazasında 30 jıl dawamında ortasha temperatura tómendegishe bolǵanlıǵı belgili:.

Aydıń tártip-lik sanı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temperatura (°C)	0	−4	−10	−15	−16	−17	−18	−19	−17	−13	−6	−1

O‘rtasha temperatura ózgeriwiniń matematikalıq modelin dúziń

128. Teńiz jaǵasında teńiz suwınıń kóteriliwi hám qaytıw procesi baqlanǵanda tómendegiler anıqlandı: 1) suw tereńliginiń eń úlken hám eń kishi mánisleri arasındaǵı parıq 14 metr; 2) suw tereńligi eń úlken mánislerge ortasha hár 12,4 saatta erisedi. Suw tereńliginiń waqıtqa salıstırǵandaǵı ózgeriwiniń matematikalıq modelin dúziń hám onı grafikalıq kórinisinde ańlatıń.

129. Velosiped dóńgeleginde sarı reńli nur qaytarǵısh ornatılǵan. Velosiped túnde tegis jol boylap háreketlengende ol videoǵa túsirip alındı. Videoǵa túsiriwdiń tiykarında nur qaytarǵıshtıń jolǵa salıstırǵandaǵı biyikligi waqıt ótiwi menen qalay ózgergeni anıqlanıp, tómendegi keste toltırıldı:

Waqıt (t)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Biyiklik (H, sm)	19	17	38	62	68	50	24	15	31

a) Sinus funkciyasınan paydalanıp, procestiń matematikalıq modelin dúziń;

b) procestiń grafikalıq kórinisin keltiriń; t (aylar)

c) dóńgelektiń radiusın tabıń;

d) velosiped qanday tezlikte háreketlenbekte?

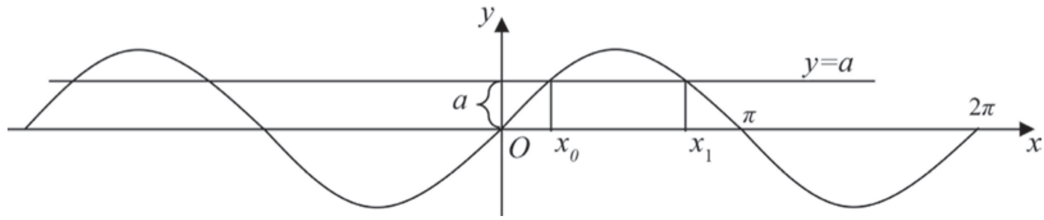
59-61 EŃ ÁPIWAYÍ TRIGONOMETRIYALÍQ TEŃLEMELER

sin $x=a$ teńleme

$-1\le \sin x \le 1$ ekenliginen, $\sin x=a$ teńleme $|a|>1$ bolǵanda sheshimge iye emes. $-1\le a \le 1$ aralıqta teńlemeniń sheshimin tabıw ushın tómendegi anıqlamani kirgizemiz.

$a\in[-1;\ 1]$ sannıń ***arksinusı*** dep sinusı a ǵa teń bolǵan $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ sanǵa aytıladı: Eger $\sin x=a$ hám $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ bolsa, $\arcsin a=x$.

Teńlemeni sheshiw ushın 16-súwrettegi $y=\sin x$ funkciya grafiginen paydalanamız.



16-súwret.

$a \in [-1;\ 1]$ bolǵanda $y=a$ funkciya $[0;\ 2\pi]$ aralıqta $y=\sin x$ funkciya grafigin abscissaları x_0 hám $x_1=\pi-x_0$ bolǵan noqatlarda kesiwin grafikten kóriwge boladı. Bul eki noqattı bir formula arqalı jazıw múmkin:

$$x=(-1)^n \arcsin a, \text{ bul jerde } n=0,\ 1.$$

$y=\sin x$ funkciyanıń dáwirliliginen paydalanıp, teńlemeni sheshiw ushın usı formulanı payda etemiz:

$$x=(-1)^k \arcsin a+\pi k,\ k\in Z. \quad (1)$$

1- mısal. Esaplań: 1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Anıqlama boyınsha $-1\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le 1$, $\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ hám $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bolǵanı ushın $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$. Tap sonday, $\arcsin(-\frac{1}{2})=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$ boladı.

2- mısal. Teńlemeni sheshiń: $\sin x=\frac{1}{2}$.

(1) Formula boyınsha teńlemeniń sheshimi

$$x=(-1)^k \arcsin\frac{1}{2}+\pi k=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z \text{ boladı.}$$

3-mısal. Teńlemeni sheshiń: $\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$y=\sin x$ funkciya taq bolǵanı ushın $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ boladı.

(1) formulanı qollap, $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k,\ k\in Z$ teńlikti payda etemiz. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ bolǵanı ushın $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$ yoki $x=\frac{\pi}{6}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$ sheshimlerdi alamız.

$\sin x = a$ teńlemeniń dara jaǵdaylardaǵı sheshimlerin keltiremiz:

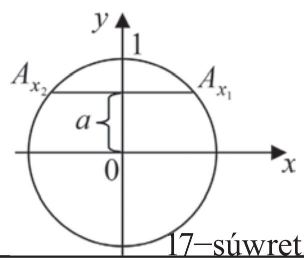
$a=1$ bolǵanda $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $a=-1$ bolǵanda $x=\frac{3}{2}\pi+2\pi k,\ k\in Z$;

$a=0$ bolǵanda $x=\pi k,\ k\in Z$.

4-mısal. Teńlemeni sheshiń: $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=0$.

△ $a=0$ bolǵanlıqtan $-\frac{\pi}{10}+\frac{x}{2}=\pi k$, $\frac{x}{2}=\pi k+\frac{\pi}{10}$, yaǵnıy $x=\frac{\pi}{5}+2\pi k,\ k\in Z$ sheshimlerdi tabamız. ▲

$\sin x=a$ teńlemeni sheshiwdi birlik dóńgelekte túsindiriw ańsat. $\sin x$ tiń anıqlaması boyınsha, onıń mánisi birlik dóńgelektegi A_x noqattıń ordinatası boladı. $|a|<1$ bolǵanda bunday noqatlar ekew, yaǵnıy A_{x_1} hám A_{x_2}. $a=\pm1$ bolǵanda bolsa birew (17-súwret).



17–súwret.

$\cos x=a$ teńleme

$-1\le\cos x\le1$ bolǵanı ushın $\cos x=a$ teńleme $|a|>1$ bolǵanda sheshimge iye emes. $-1\le a\le1$ aralıqta teńlemeni sheshiw ushın usı anıqlamanı kirgizemiz.

$a\in[-1;\ 1]$ sannıń ***arkkosinusı*** dep kosinusı a ga teń bolǵan $x\in[0;\ \pi]$ sanǵa aytıladı: Eger $\cos x=a$ hám $x\in[0;\ \pi]$ bolsa, $\arccos a=x$.

Anıqlamaǵa kóre, $[0;\ \pi]$ aralıqta $\cos x=a$ teńleme bir $x=\arccos a$ korenge iye. $y=\cos x$ funkciya jup bolǵanlıǵı ushın $[-\pi;0]$ aralıqta da bir $x=-\arccos a$ sheshimge iye. Funkciyanıń dáwiri 2π. Ol jaǵdayda $\cos x=a$ teńlemeni sheshiw ushın $x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z$ (2) formulanı payda etemiz.

5- mısal. Esaplań: 1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

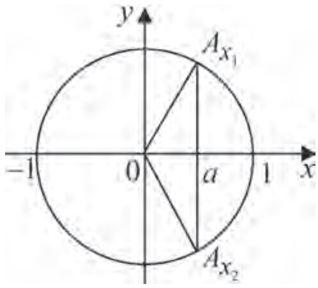
△ Anıqlama boyınsha, $-1\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le1$, $\frac{\pi}{6}\in[0;\pi]$ hám $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bolǵanı ushın $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$ boladı. Tap sonday, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$ boladı. ▲

6-mısal. Teńlemeni sheshiń: $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

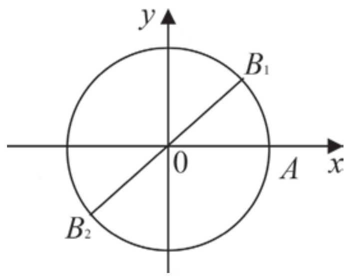
△ (2) formula boyınsha teńlemeniń sheshimi $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k,\ k\in Z$, biraq

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$.

Demek, sheshim usı kórinisinde boladı: $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$ ▲



18-súwret.



19-súwret.

$\cos x=a$ teńleme sheshiliwin birlik dóńgelekte túsindiremiz (18-súwret). $\cos x$ funkciyanıń anıqlaması boyınsha onıń mánisi birlik dóńgelektegi A_x noqattıń abscissası boladı. $|a|<1$ bolǵanda bunday noqatlar ekew, yaǵnıy A_{x_1} hám A_{x_2}; $a=1$ hám $a=-1$ bolǵanda bunday noqat birew.

$\cos x=a$ teńlemeniń dara jaǵdaylardaǵı sheshimlerin keltiremiz:

$a=1$ bolǵanda $x=2\pi k,\ k\in Z;$ $a=-1$ bolǵanda $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z;$

$a=0$ bolǵanda $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$

7- mısal. Teńlemeni sheshiń: $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$

△ $\cos x=0$ teńlemeniń sheshimi formulasınan $3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k$ nı payda etemiz.

Bunnan, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$. ▲

$\mathrm{tg}x=a$ teńleme

Bul teńlemeni sheshiw ushın tómendegi anıqlamanı kirgizemiz. $a\in R$ sannıń ***arktangensi*** dep, tangensi a sanǵa teń bolǵan $x\in(-\pi/2;\pi/2)$ sanǵa aytıladı: Eger $\mathrm{tg}x=a$ hám $x\in(-\pi/2;\pi/2)$ bolsa, $\mathrm{arctg}\,a=x$.

$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ bolǵanı ushın $\mathrm{tg}x$ birlik dóńgelektegi $B\ (x;\ y)$ noqat ordinatasınıń abscissasına qatnasına teń (19-súwret), yaǵnıy bul noqat $\frac{y}{x}=a$ tuwrı menen birlik dóńgelektiń kesilisiw noqatı esaplanadı. 19-súwret boyınsha bunday noqatlar ekew: B_1 hám B_2 noqatlar. Sonıń ushın teńlemeniń sheshimi tómendegishe boladı:

$$x=\mathrm{arctg}a+\pi n,\ n\in Z. \quad (3)$$

8- mısal. Esaplań: 1) $\operatorname{arctg}1$; 2) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

△ 1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ hám $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ bolǵanı ushın $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$;

2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ hám $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ bolǵanı ushın $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$. ▲

9- mısal. Teńlemeni sheshiń: $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$.

△ (3) boyınsha, teńlemeniń sheshimleri tómendegishe boladı:

$x-\frac{\pi}{6}=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\pi n$. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}(\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$ bolǵanı ushın teńlemeniń sheshimleri $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, yamasa $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. ▲

Eń ápiwayı trigonometriyalıq teńlemeler ushın kesteni keltiremiz:

Teńleme	Sheshimler	Geybir qásiyetler
$\sin x=a$	$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in Z.$	$\arcsin(-a)=-\arcsin a,\ \lvert a\rvert\leqslant 1.$
$\cos x=a$	$x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z.$	$\arccos(-a)=\pi-\arccos a,\ \lvert a\rvert\leqslant 1.$
$\operatorname{tg}x=a$	$x=\operatorname{arctg} a+\pi k,\ k\in Z.$	$\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a,\ a\in R.$

Úshinshi ústinde keltirilgen qásiyetler teris sanlar arksinusları (arkkosinusları, arktangensleri) mánislerin oń sanlar arksinusları mánisleri arqalı tabıw imkániyatın beredi. Máselen, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$,

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6},$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\pi}{6}.$$

10- mısal. Teńlemeni sheshiń: $\cos(10x+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}$.

△ $10x+\frac{\pi}{8}=z$ belgilew kirgizip, $\cos z=\frac{1}{2}$ teńlemeni payda etemiz. Bunnan (2) formula boyınsha $z=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$, yaǵnıy $10x+\frac{\pi}{8}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ yamasa $x=\frac{1}{10}\left(-\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in Z$. ▲

$\sin x=\sin a$, $\cos x=\cos b$, $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}c$ kórinisindegi teńlemeler

Bunday teńlemelerdiń sheshimi, sáykes ráwishte, tómendegishe boladı:
$x=(-1)^k a+\pi k;\quad k\in Z;\quad x=\pm b+2\pi n,\ n\in Z;\quad x=c+\pi m,\ m\in Z.$ (4)

11- mısal. Teńlemeni sheshiń: $\cos(3x-40°) = \cos(2x+60°)$.

△(4) formula boyınsha, $3x-40°=\pm(2x+60°)+360°n,\ n\in Z$ teńlemeni payda etemiz. Bunnan belgisiz x tabıladı:

$$3x-40°=2x+60°+360°n \Leftrightarrow x=100°+360°n,\ n\in Z;$$

$$3x-40°=-2x-60°+360°n,\ 5x=-20°+360°n \Leftrightarrow x=-4°+72°n,\ n\in Z.$$ ▲

12- mısal. Teńlemeni sheshiń: $\sin^2 x+3\sin x+2=0$.

△$\sin x=z$ belgilew kirgizip, $z^2+3z+2=0$ kvadrat teńlemege kelemiz. Bul teńlemeni sheship $z_1=-2,\ z_2=-1$ ler tabıladı. Belgilewge kóre $\sin z=-2$ hám $\sin x=-1$ teńlemelerdi payda etemiz. $\sin z=-2$ sheshimge iye emes. $\sin x=-1$ teńleme $x=270°+360°k,\ k\in Z$ sheshimge iye. Demek, teńlemeniń sheshimi $x=270°+360°k,\ k\in Z$ boladı.▲

Soraw hám tapsırmalar

1. $\sin x=a$ teńleme qalay sheshiledi? Mısalda túsindiriń.
2. $\cos x=a$ teńleme qalay sheshiledi? Mısal keltiriń.
3. $\mathrm{tg}x=a$ teńleme qalay sheshiledi? Mısal járdeminde túsindiriń.
4. arcsin a sanına anıqlama beriń. Mısalda túsindiriń.
5. arccos a sanına anıqlama beriń. Mısalda túsindiriń.
6. arctg a sanına anıqlama beriń. Mısalda túsindiriń.

Shınıǵıwlar

130. Esaplań (**130–141**):

1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin\frac{1}{2}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

131. 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\arcsin 1$; 4) $\arcsin(-1)$.

132. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\arccos(-1)$.

133. 1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arccos\frac{1}{2}$; 3) $\arccos 1$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

134. 1) $\mathrm{arctg}\,1$; 2) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 3) $\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3\,\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

135. 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}(-1)$; 4) $7\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

136. 1) $\arcsin 1+\arcsin(-1)$; 2) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+4\arcsin\frac{1}{2}$.

137. 1) $4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

138. 1) $2\arccos 1+3\arccos 0$; 2) $6\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

139. 1) $2\arccos(-1)-3\arccos 0$; 2) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

140. 1) $3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+3\arccos\frac{1}{2}$; 2) $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

141. 1) $2\operatorname{arctg} 1+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})-3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ańlatpalar mániske iye yamasa iye emesligin anıqlań (**142–143**):

142. 1) $\arccos(\sqrt{8}-3)$; 2) $\arcsin(2-\sqrt{15})$; 3) $\arccos(3-\sqrt{18})$.

143. 1) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin(\sqrt{6}-2)$; 3) $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$.

Teńlemeni sheshiń (**144–161**):

144. 1) $\sin x=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

145. 1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x=1$; 3) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

146. 1) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos 2x=-1$; 4) $\cos 3x=1$.

147. 1) $\cos x=\frac{1}{2}$; 2) $\cos x=-1$; 3) $\cos 5x=-\frac{1}{2}$; 4) $\cos 3x=-1$.

148. 1) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg}x=1$; 3) $\operatorname{tg}9x=-1$; 4) $\operatorname{tg}3x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

149. 1) $\operatorname{tg}x=0$; 2) $\operatorname{tg}x=2$; 3) $\operatorname{tg}6x=-3$; 4) $\operatorname{tg}5x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

150. 1) $2\cos x+1=0$; 2) $2\cos x+\sqrt{3}=0$; 3) $2\cos x+\sqrt{2}=0$;

151. 1) $2\sin x+1=0$; 2) $2\sin x+\sqrt{3}=0$; 3) $2\sin x+\sqrt{2}=0$;

152. 1) $\sin\left(-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg}4x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\cos(-3x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

153. 1) $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=1$; 3) $2\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$.

154. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=-1$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{3}\right)=1$; 3) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$.

155. 1) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$; 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$; 3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

156. 1) $(2\sin x+\sqrt{2})(\sin 4x+1)=0$; 2) $(2-\cos x)(1+3\cos x)=0$.

157. 1) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; 2) $4\cos^2 x-8\cos x-3=0$;
4) $2\sin^2 x-\sin x-6=0$; 3) $2\cos^2 x-\cos x-6=0$;

158. 1) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; 2) $4\cos^2 x-8\cos x-3=0$;
4) $2\sin^2 x-\sin x-6=0$; 3) $2\cos^2 x-\cos x-6=0$;

159. 1) $2\cos^2 x-\sin x+1=0$; 2) $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x-4=0$;
4) $2\sin^2 x-\cos x-1=0$; 3) $\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1=\sqrt{3}$;

160. 1) $\cos x=\cos 2x$; 2) $\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x$; 3) $\sin 7x=\sin 3x$; 4) $\cos 4x=\cos 5x$

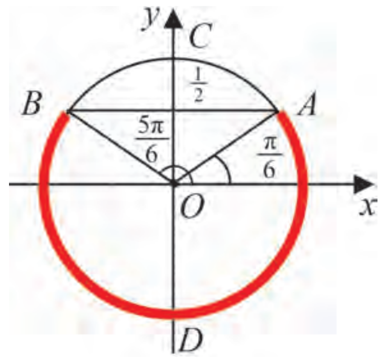
161. 1) $\sin 4x=\sin x$; 2) $\sin 2x=\cos 3x$; 3) $\operatorname{tg}10x=\operatorname{tg}8x$; 4) $\sin 5x=\sin 7x$

62-64 EŃ ÁPIWAYÍ TRIGONOMETRIYALIQ TEŃSIZLIKLER

$a_1<\sin x<b_1$, $a_2<\cos x<b_2$, $a_3<\operatorname{tg}x<b_3$ kórinisindegi teńsizlikler *eń ápiwayı trigonometriyalıq teńsizlikler* delinedi. Bul jerde a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 – berilgen haqıyqıy sanlar. Bunday teńsizliklerdi sheshiwde birlik dóńgelekten, funkciya grafiginen paydalanıw qolay.

1- mısal. $\sin x \leq 0,5$ teńsizlikti $[0, 2\pi]$ kesindide sheshiń.

△Birlik dóńgelekti qaraymiz. Bul dóńgelekte ordinataları 0,5 ke teń hám onnan kishi noqatlardı tabamız. 20-súwretten, *BDA* doǵanıń barlıq noqatları joqarıdaǵı shártti qanaatlandırıwı belgili. Sonıń ushın *x* sanlardıń $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$ kópligi teńsizliktiń sheshimi boladı. *juwap*: $x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$ ▲

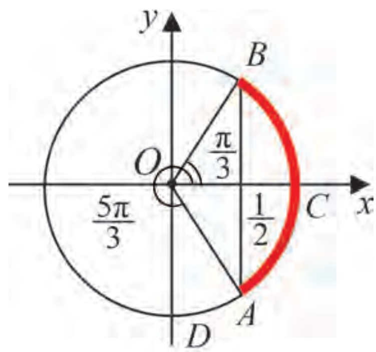


20-súwret.

2- mısal. $\cos x > \frac{1}{2}$ teńsizlikti $[0, 2\pi]$ kesindide sheshiń.

△Birlik dóńgelekte abscissaları $\frac{1}{2}$ ge teń hám onnan úlken noqatlardı tabamız. *ACB* doǵanıń barlıq noqatları joqarıdaǵı shártti qanaatlandırıwı 21-súwretten ko'rinip tur. Sonıń ushın *x* lardıń $\left[0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$ kópligi teńsizliktiń sheshimi boladı.

juwap: $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$ ▲



21-súwret.

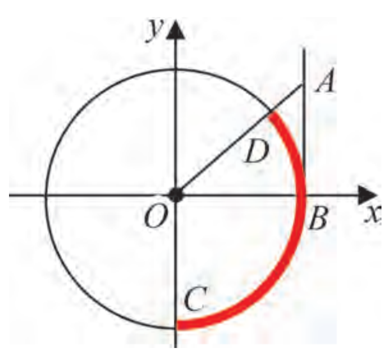
3- mısal. $\operatorname{tg}x \leq 1$ teńsizlikti $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ aralıqta sheshiń.

△Birlik dóńgelektiń *B* noqatınan *Oy* kósherine parallel *AB* tuwrı ótkizemiz (22-súwret).

Onda *A* noqattı sonday tańlaymız, bunda *OB*=*AB* bolsın. △*AOB* teń qaptallı hám tuwrı múyeshli. *OA* gipotenuzanıń sheńber menen kesilisiw noqatı *D* bolsın.

DBC doǵanıń barlıq noqatları berilgen teńsizlikti qanaatlandırıwı súwretten kórinip tur.

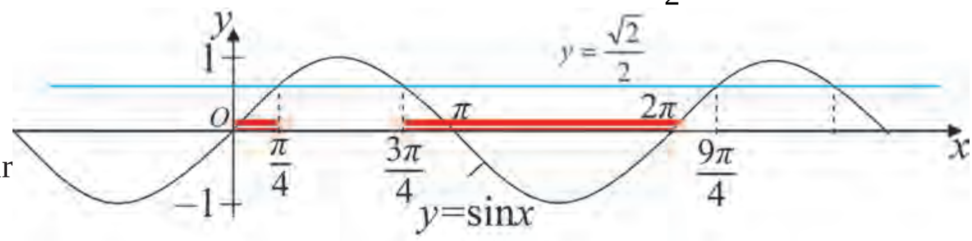
juwap: $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$. ▲



22-súwret.

4- mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

△ Bir koordinatalar sistemasına $y=\sin x$ hám $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (23-súwret) funkciya-



lar

23-súwret.

grafiklerin sızıp, $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ teńlemeniń [0; 2π] kesindidegi sheshimin tabamız. $\sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ teńsizliktiń [0; 2π] kesindidegi sheshimi $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ hám $\left(\dfrac{3\pi}{4};2\pi\right]$ aralıqlar bolıwı súwretten kórinedi. Funkciyanıń dáwirliliginen x tıń $\left[2\pi n;\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n;2\pi(n+1)\right]$, $n\in Z$ kópligi teńsizliktiń sheshimi boladı.▲

5-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $-2\cos x\geq 1$. Sáykes súwret sızıń.

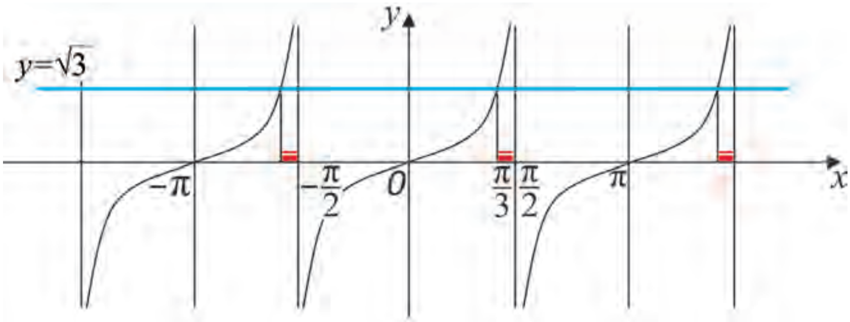
△Aldın $y=\cos x$ hám $y=-\frac{1}{2}$ funkciyalar grafigin bir koordinatalar sistemasına sızamız. Onnan $\cos x=-\frac{1}{2}$ teńlemeniń [0; 2π] kesindidegi sheshimleri $\dfrac{2\pi}{3}$ va $\dfrac{4\pi}{3}$ ekenin anıqlaymız. Demek, teńsizliktiń sheshimleri $\left[\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n;\dfrac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$ kesindilerden ibarat eken.▲

6- mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$.

△ $y=\operatorname{tg} x$ hám $y=\sqrt{3}$ funkciyalar grafigin bir koordinatalar sistemesına sızamız (24-súwret). $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ teńlemeni [0, π] kesindidegi sheshimin tabamız. Bul teńlemeniń sheshimi $x=\dfrac{\pi}{3}$. Sonıń ushın teńsizliktiń [0, π] kesindidegi sheshimleri kópligi $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$ aralıq esaplanadı. $y=\operatorname{tg}x$ funkciyanıń dáwiri π

ekenligin paydalanıp, teńsizliktiń barlıq sheshimlerin tabamız:

$$\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z.$$



24-súwret.

Soraw hám tapsırmalar

$\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}x>-1$ teńsizlikler qalay sheshiledi?

Shınıǵıwlar

162. Teńsizlikti berilgen aralıqta sheshiń:

1) $\sin x>\frac{1}{2},\ x\in[0;\pi]$;
2) $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2},\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\operatorname{tg}x>-\sqrt{3}, x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;
4) $\cos x>\frac{1}{2},\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

5) $\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2},\ x\in[-\pi;0]$;
6) $\operatorname{tg}x<\frac{1}{\sqrt{3}},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

7) $\cos x<-\frac{\sqrt{3}}{2},\ x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$;
8) $\cos 2x\le\frac{\sqrt{2}}{2},\ x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

163. Teńsizlikti sheshiń (**163–169**):

1) $\sin x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\operatorname{tg}x<-\frac{1}{\sqrt{3}}$;
4) $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

164. 1) $\sin x>\frac{1}{2}$;
2) $\operatorname{tg}x>-1$;
3) $\cos x\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos x\le\frac{1}{2}$.

165. 1) $\sin 3x < \frac{1}{2}$; 2) $\sin\frac{x}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\operatorname{tg} 3x > 1$.

166. 1) $2\cos(2x+\frac{\pi}{3}) \le \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \ge 1$; 3) $2\cos(2x-\frac{\pi}{3}) > \sqrt{3}$.

167. 1) $\sin 2x\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x\sin\frac{\pi}{3} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $2\sin 2x\cos 2x \ge \frac{1}{2}$.

168. 1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos 3x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin 2x\sin\frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

169. 1) $\cos\left(\frac{x}{2}+1\right) \ge \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{4}-2\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\left(1-\frac{x}{3}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Baqlaw jumısı úlgisi

Teńlemelerdi sheshiń (**1–4**):

1.	$\sin 3x = 0$.	2.	$4\cos 6x = -2\sqrt{3}$.
3.	$5\cdot\operatorname{tg} 4x = 3$.	4.	$5\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 1 = 0$.

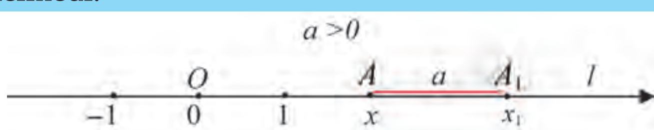
Teńsizliklerdi $x \in [0; \pi]$ aralıqta sheshiń (**5-6**):

5.	$\sin x > \frac{1}{2}$.	6.	$\operatorname{tg} x \le -1$.

68 GRAFIKLERDI ALMASTÍRÍW

Jıljıtıw

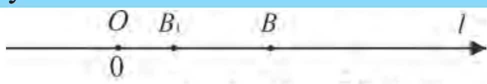
l san kósheri hám *O* noqat ondağı esap bası bolsın (25-súwret). *l* diń hár bir noqatı *a* birlik jıljıtılsın. Eger $a>0$ bolsa, jıljıtıw oń bağıtta (kósher bağıtında) boladı. Eger $a<0$ bolsa, jıljıtıw qarama-qarsı bağıtta orınlanadı, $a=0$ de noqatlar óz ornınan jıljımaydı. Eger *x* koordinatalı $A=A(x)$ noqat *a* birlikke jıljıtılǵanda $A_1(x_1)$ noqatqa ótken bolsa, A_1 noqattıń koordinatası $x_1=x+a$ formula boyınsha anıqlanadı. *A* noqat A_1 noqattıń proobrazı, A_1 bolsa *A* niń obrazı delinedi.



25-súwret.

Soziw

l san kósherinde $B(x)$ noqat O koordinata basınan k márte uzaqlastırıp (yamasa O ǵa jaqınlastırıp), $B_1(x)$ noqatqa ótkizilgen bolsın. B_1 noqattıń koordinatası $x_1=kx$ formula boyınsha esaplanadı. Eger $k>0$ bolsa, B_1 hám B noqatlar O noqattıń bir tárepinde; eger $k<0$ de B_1 hám B noqatlar O niń túrli tárepinde jaylasadı. Eger $|k|<1$ bolsa, (26-súwret) $x=OB$ kesindi k márte qısqaradı; eger $|k|>1$ bolsa, (27-súwret) OB kesindi k márte sozıladı, $k=1$ de B hám B_1 noqatlar ústpe-úst túsedi, $k=-1$ de olar O noqatqa salıstırǵanda simmetriyalı jaylasadı.

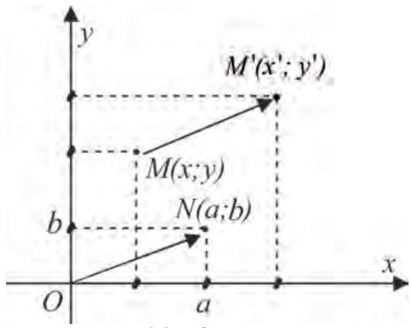


$0<k<1$ 26- rasm.

$k>1$ 27-rasm.

Parallel kóshiriw

Parallel kóshiriwde xOy koordinata tegisligindegi barlıq noqatlar birdey baǵıtta birdey aralıqqa kóshedi (28-súwret). $O(0;\ 0)$ koordinata bası $N(a;\ b)$ noqatqa kóshirilgen bolsa, $M\ (x;\ y)$ noqat $M'\ (x';\ y')$ ge kóshedi. $M'\ (x';\ y')$ noqattıń koordinataları ushın tómendegi formula orınlı: $x'=x+a,\ y'=y+b$.



28-súwret.

Funkciya grafigin almastırıw

Joqarıdaǵı almastırıwlar (jıljıtıw, soziw, parallel kóshiriw) $y=f(x)$ funkciya grafigi járdeminde $y=f(x-a)+b,\ y=m\cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ (bunda $a,\ b,\ m,\ k$ – turaqlı sanlar hám $m\neq 0,\ k\neq 0$) funkciyalar grafigin sızıw múmkinshiligin beredi.

Máselen, $y=f(x-a)+b$ funkciya grafigin $y=f(x)$ funkciya grafigi járdeminde sızıw ushın $y=f(x)$ funkciya grafiginiń hár bir noqatı a birlik ońǵa jıljıtıladı hám b birlik joqarıǵa kóteriledi, yaǵnıy $(a;\ b)$ vektor boyınsha parallel kóshiriledi.

$y=f(x)$ funkciya grafigi járdeminde $y=m\cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ funkciya grafigin sızıw ushın $y=f(x)$ funkciya grafiginiń hár bir noqatınıń abscissası Ox boylap k márte qısıladı ($k>0$ bolsa – ońǵa, $k<0$ bolsa – shepke) hám ordinatası Oy kósher boylap m birlik sozıladı ($m>0$ bolsa – joqarıǵa, $m<0$ bolsa – tómenge).

1- mısal. $y=3x$ funkciya grafigi járdeminde $y=3(x-1)+4$ funkciya grafigin sızıń.

△ $y=3(x-1)+4$ funkciya grafigin sızıw ushın $y=3x$ funkciya grafigi (1; 4) vektor boyınsha parallel kóshiriledi. ▲

2- mısal. $y=-2x+4$ funkciya grafigi járdeminde $y=-2(x+3)+5$ funkciya grafigin sızıń.

△ $y=-2(x+3)+5$ funkciya grafigin sızıw ushın $y=-2x+4$ funkciya grafigi (3; 1) vektor boyınsha parallel kóshiriledi. ▲

3- mısal. $y=x^2$ parabola grafiginen paydalanıp $y=2-(x+3)^2$ funkciya grafigin sızıń.

△ $y=2-(x+3)^2$ funkciya grafigin sızıw ushın $y=x^2$ funkciya grafigi aldın 3 birlik shepke jıljıtıladı hám Ox kósherine salıstırǵanda simmetriyalı kóshiriledi. Soń payda bolǵan grafik Oy kósheri boyınsha 2 birlik joqarıǵa kóteriledi. ▲

4- mısal. $y=\sin x$ funkciya grafigi járdeminde $y=\sin 2x$ funkciya grafigin sızıń.

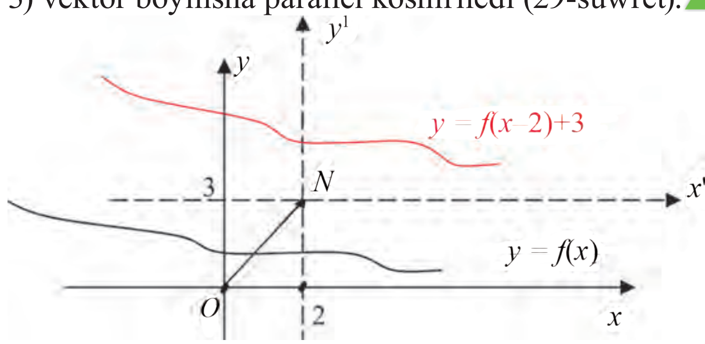
△ $y=\sin 2x$ funkciya grafigin sızıw ushın $y=\sin x$ funkciya grafiginiń hár bir noqatınıń abscissası Ox kósheri boylap eki márte ońǵa qısıladı. ▲

5- mısal. $y=\cos x$ funkciya grafigi járdeminde $y=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ funkciya grafigin sızıń.

△ $y=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ yamasa $y=-2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ funkciya grafigin sızıw ushın aldın $y=\cos x$ funkciya grafigi ońǵa $\frac{\pi}{8}$ ge jıljıtıladı, keyin abscissası ońǵa eki márte qısıladı, ordinatası eki márte joqarıǵa sozıladı. Payda bolǵan grafik Ox kósherine salıstırǵanda simmetriyalı kóshiriledi. ▲

6- mısal. $y=f(x)$ funkciya grafigi járdeminde $y=f(x-2)+3$, funkciya grafigin sızıń.

△ $y=f(x-2)+3$ funkciya grafigin sızıw ushın $y=f(x)$ funkciya grafiginiń hár bir noqatı (2; 3) vektor boyınsha parallel kóshiriledi (29-súwret). ▲

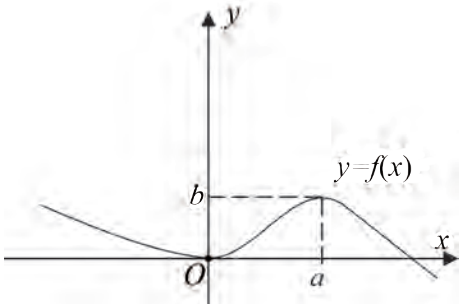


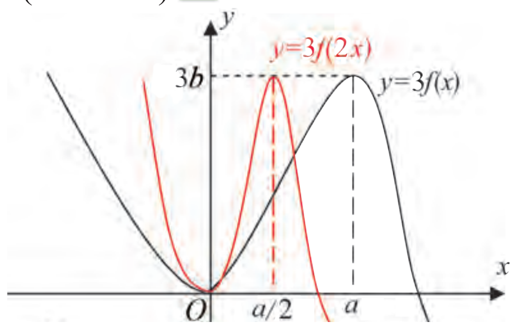
29-súwret.

▲

7- mısal. $y=f(x)$ funkciya grafigi járdeminde (30-súwret) $y=3f(2x)$ funkciya grafigin sızıń ($m=3$, $k=\frac{1}{2}$ bolǵan jaǵday).

△ $y=f(x)$ funkciya grafigi Ox kósher boylap ońǵa 2 márte qısıladı hám Oy kósher boylap joqarıǵa 3 márte sozıladı (31-súwret).▲





Soraw hám tapsırmalar

1. Jıljıtıw degen ne? Sozıw-she? Parallel kóshiriw-she? Mısallar keltiriń.

4. $y=\sin x$ funkciya grafigi járdeminde $y=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ funkciya grafigin sızıń.

Shınıǵıwlar

170. $y=f(x)=x^2-2x+3$ funkciya grafigi járdeminde kórsetilgen funkciyalar grafigin sızıń:

1) $y=f(x)+1$; 2) $y=3f(x)$; 3) $y=3f(x)-2$;

4) $y=f(x-1)+1$; 5) $y=2f(x+1)+1$; 6) $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$;

7) $y=\frac{1}{2}f(2x)$; 8) $y=f(2x)-3$; 9) $y=2f(2x)-5$.

171. $y=f(x)=x^2-5x+6$ funkciya grafigi járdeminde kórsetilgen funkciyalar grafigin sızıń:

1) $y=f(x-1)$; 2) $y=f\left(\frac{x}{3}\right)$; 3) $y=f(2x)$; 4) $y=3f\left(\frac{x}{3}\right)+1$;

5) $y=-f(x)$; 6) $y=2f(x)-3$; 7) $y=-f(-x)$; 8) $y=2f(x+1)+5$.

172. $y=\cos x$ funkciya grafigi járdeminde kórsetilgen funkciyalar grafigin sızıń:

1) $y=\cos x-1$; 2) $y=2\cos x+1$;

3) $y=-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 4) $y=3\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

69-70 PARAMETRLI KÓRINISTE BERILGEN ÁPIWAYÍ FUNKCIYALARDÍŃ GRAFIKLERI

Materiallıq noqattıń (x, y) koordinatları t parametrge baylanıslı bolsın: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. t qanday da bir T aralıqta ózgergende $(\varphi(t), \psi(t))$ noqatlar kópligi qanday boladı? Bul kóplikti *parametrli kóriniste berilgen funkciyanıń grafigi* dep ataymız.

1- mısal. Materiallıq noqattıń koordinataları parametrli kóriniste $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=5t+8 \end{cases}$ berilgen. Bul materiallıq noqat háreketi dawamında sızǵan sızıqtı (materiallıq noqat trayektoriyasın) tabıń.

△ Teńlemelerden t parametrdi tabamız: $t=\dfrac{x-1}{3}$ hám $t=\dfrac{y-8}{5}$.

Payda bolǵan ańlatpalardan $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-8}{5}$ teńlemege kelemiz. Bunnan $5x-5=3y-24$ yamasa $5x-3y+19=0$. Bul tuwrınıń teńlemesi.

Demek, izlengen funkciya $3y=5x+19$ yamasa $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{19}{3}$ eken.

juwap: $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{19}{3}$. ▲

2- mısal. $\begin{cases} x=3+5\sin t, \\ y=-7+5\cos t \end{cases}$ parametrli kóriniste berilgen funkciya grafigi qanday sızıq boladı?

△ Berilgen teńliklerden $\sin t=\dfrac{x-3}{5}$, $\cos t=\dfrac{y+7}{5}$ ekenin tabamız.

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ birdeylikten paydalanıp, $\left(\dfrac{x-3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{y+7}{5}\right)^2=1$ teńlemege kelemiz. Bunnan $(x-3)^2+(y+7)^2=25$. Bul teńleme orayı $(3; -7)$ hám radiusı $r=5$ bolǵan sheńber teńlemesi boladı. ▲

3- mısal. Materiallıq noqat koordinataları $x=7t^2+1$, hám $y=3t$ nızamı menen ózgerse, x hám y arasındaǵı baylanıstı anıqlań, $t \geq 0$.

△Berilgen nızamlardan t nı tabamız: $t=\sqrt{\frac{x-1}{7}}$, $t=\frac{y}{3}$. Bul ańlatpalardan $\frac{y}{3}=\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ teńlemege kelemiz. Bunnan $y=3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ funkciyanı tabamız. Demek, izlengen funkciya $y=3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ eken. ▲

4- mısal. $\begin{cases} x=4\sin t, \\ y=3\cos t \end{cases}$ parametrli kóriniste berilgen funkciya grafigi qanday sızıq boladı, bul jerde $0 \leq t \leq 2\pi$?

△Berilgen teńliklerden $\sin t=\frac{x}{4}$ hám $\cos t=\frac{y}{3}$ ekenin tabamız. $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ birdeylikten paydalanıp, $(\frac{x}{4})^2+(\frac{y}{3})^2=1$, yamasa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ teńlemeni payda etemiz. Bul teńleme menen berilgen noqatlar kópligi orayı koordinata basında hám yarım kósherleri $a=4$, $b=3$ bolǵan *ellips* dep ataladı. ▲

Soraw hám tapsırmalar

Parametrli kóriniste berilgen funkciyalarǵa mısallar keltiriń.

Shınıǵıwlar

173. Materiallıq noqattıń koordinataları parametrli kóriniste berilgen. Bul materiallıq noqat háreketi dawamında sızǵan sızıqtıń (materiallıq noqat traektoriyasınıń) formulasın tabıń. Sáykes súwret sızıń:

1) $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=4t+8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=6t+4, \\ y=9t+3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=4t+9, \\ y=7t+18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=12t+11, \\ y=15t+18. \end{cases}$

174. Materiallıq noqat koordinataları parametrli kóriniste berilgen. x hám y koordinatalar arasındaǵı baylanıstı anıqlań:

1) $\begin{cases} x=17t^2+1, \\ y=13t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=27t^2+21, \\ y=23t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=37t^2+31, \\ y=33t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=47t^2+41, \\ y=43t. \end{cases}$

175. Parametrli kóriniste berilgen funkciya grafigi qanday sızıqtan ibarat? Sáykes súwretti sızıń:

1) $\begin{cases} x=7\sin t, \\ y=7\cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=5\sin t, \\ y=5\cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=9\sin t, \\ y=9\cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$

176. Parametrli kóriniste berilgen funkciya grafigi qanday sızıqtan ibarat? Sáykes súwretti sızıń:

1) $\begin{cases} x = 6\sin t + 3, \\ y = 6\cos t + 7, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3\sin t, \\ y = 3\cos t - 1, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2\sin t - 3, \\ y = 2\cos t + 7, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

71 KÓRSETKISHLI FUNKSIYA HÁM ONÍŃ GRAFIGI

Dáreje hám onıń qásiyetleri

Haqıyqıy san kórsetkishli dáreje tómendegi qásiyetlerge iye ($a>0$, $a\neq1$):

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$; 3) $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$;

4) $(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

6) Eger $0<a<b$ hám $x>0$ bolsa, $a^x<b^x$; 7) Eger $0<a<b$ hám $x<0$ bolsa, $a^x>b^x$;
8) Eger $x<y$ hám $a>1$ bolsa, $a^x<a^y$; 9) Eger $x<y$ hám $0<a<1$ bolsa, $a^x>a^y$ boladı.

1- mısal. Salıstırıń: $2^{-\sqrt{3}}$ hám $3^{-\sqrt{3}}$.

△ 7-qásiyet boyınsha $0<2<3$ hám $-\sqrt{3}<0$ bolǵanı ushın $2^{-\sqrt{3}} > 3^{-\sqrt{3}}$. ▲

2- mısal. Salıstırıń: $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2}$ hám $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$.

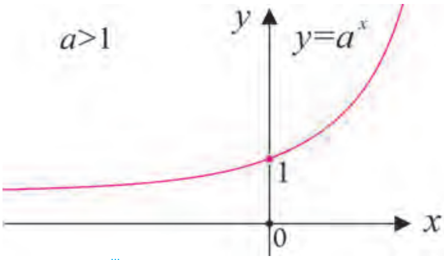
△ 9-qásiyet boyınsha 0,2<0,3 hám $0<\frac{1}{2}<1$ bolǵanı ushın $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$. ▲

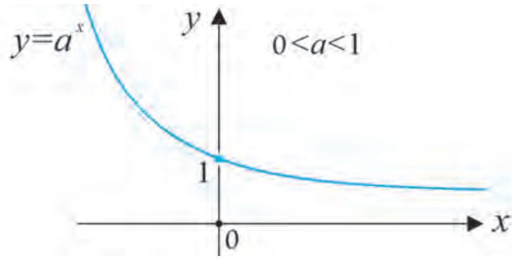
Kórsetkishli funkciya hám onıń qásiyetleri

$f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq1$ kórinisindegi funkciya *kórsetkishli funkciya* delinedi. Bunday funkciya tómendegi qásiyetlerge iye:

1) anıqlanıw oblastı $(-\infty; +\infty)$ aralıqtan ibarat;
2) mánisler oblastı $(0; +\infty)$ aralıqtan ibarat;
3) barlıq $a(a>0,\ a\neq1)$ ushın $a^0=1$;
4) $a>1$ bolsa, funkciya ósiwshi;
5) $0<a<1$ bolsa, funkciya kemeyiwshi boladı.

Tómendegi súwretlerde $f(x)=a^x$ funkciyanıń grafikleri keltirilgen.





Soraw hám tapsırmalar

1. Haqıyqıy san kórsetkishli dárejeniń qásiyetlerin aytıń. Mısallar keltiriń.
2. Kórsetkishli funkciyanıń qásiyetlerin aytıń.

Shınıǵıwlar

177. Esaplań:

1) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; 2) $9^{\sqrt{3}} : 3^{2\sqrt{3}}$ 3) $\left(2^{\sqrt[3]{4}}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $4^{6\sqrt{2}-1} \cdot 16^{1-3\sqrt{2}}$.

178. Salıstırıń (**178–179**):

1) $2^{-\sqrt{3}}$ va 1; 2) $4^{-\sqrt{6}}$ va $\left(\frac{1}{2}\right)^4$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ va 1.

179.

1) $-3^{\sqrt{2}}$ va 1; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$ va $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ va $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

180. Funkciyalardıń ósiwshi yamasa kemeyiwshi ekenin anıqlań (**180–182**):

1) $y = 4^x$; 2) $y = -3^x$; 3) $y = 5^x - 2$; 4) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

181.

1) $y = \sqrt{3}^x$; 2) $y = (\frac{1}{\sqrt{3}})^x$; 3) $y = (\frac{\pi}{3})^x$; 4) $y = (\sqrt{3} - 1)^x$.

182.

1) $y = (\sqrt{3} - 1)^{-x}$; 2) $y = (\sqrt{10} - 2)^x$; 3) $y = \left(\pi - \sqrt{2}\right)^x - 3$.

72-74 TIKKELEY SHESHILETUǴÍN KÓRSETKISHLI TEŃSIZLIKLER

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a>0$, $a \neq 1$ kórinisindegi teńsizlik

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a>0$, $a \neq 1$ teńsizlik kórsetkishli teńsizlikke mısal bola aladı. Bul teńsizlik $a>1$ bolǵanda $f(x)>g(x)$ teńsizlikke, $0<a<1$ bolǵanda bolsa $f(x)<g(x)$ teńsizlikke teń kúshli.

1- mısal. Teńsizlikti sheshiń: $3^{x+5} > 3^{2-5x}$.

△ $a=3>1$ bolǵanı ushın berilgen teńsizlik $x+5>2-5x$ teńsizlikke teńkúshli.

Bunnan $6x>-3$ yamasa $x>-0{,}5$ ekenin tabamız. Demek, teńsizliktiń sheshimi $(-0{,}5;\ \infty)$ aralıqtan ibarat. *juwap*: $x\in(-0{,}5;\ \infty)$. ▲

2- mısal. Teńsizlikti sheshiń: $2\cdot3^{x+2}-2\cdot3^{x+1}-5\cdot3^{x}<63$.

△ 3^x ti qawsırmadan sırtına shıǵaramız: $3^x(2\cdot3^2-2\cdot3-5\cdot1)<63$. Ápiwayılastırıp, $3^x<9$ teńsizlikti payda etemiz. Bunnan $x<2$. *juwap*: $x\in(-\infty;\ 2)$. ▲

3- mısal. Teńsizlikti sheshiń: $8^{5x^2-46}\geq8^{2(x^2+1)}$.

△ $a=8>1$ bolǵanı ushın teńsizlik $5x^2-46\geq2(x^2+1)$ teńsizlikke teńkúshli. Usı teńsizlikti sheshemiz: $3x^2\geq48$, bunnan $x^2\geq16$. Demek, berilgen teńsizliktiń sheshimi $x\in(-\infty;\ -4]\cup[4;\ +\infty)$ boladı. ▲

$a^x<b$ teńsizliktiń $(a>0,\ a\neq1)$ $b<0$ bolǵanda sheshimi joq hám $a^x>b$ teńsizliktiń $b<0$ bolǵanda sheshimi $(-\infty;+\infty)$ aralıqtan ibarat ekenligi belgili.

4- mısal. Teńsizlikti sheshiń: $4^x+2^x-6\geq0$.

△ $2^x=t$ almastırıw kirgizemiz, nátiyjede $t^2+t-6\geq0$ kvadrat teńsizlik payda boladı. Bunnan $t\leq-3,\ t\geq2$ ekenin tabamız hám $2^x\geq2$ hám de $2^x\leq-3$ teńsizliklerge kelemiz. 1- teńsizlikten $x\geq1$ sheshim tabıladı, 2- teńsizliktiń bolsa sheshimi joq. Demek berilgen teńsizliktiń sheshimi $[1;\ +\infty;)$ aralıqtan ibarat.

juwap: $x\in[1;\ +\infty)$. ▲

Soraw hám tapsırmalar

$a^{f(x)}>a^{g(x)},\ a>0,\ a\neq1$ teńsizlik haqqında maǵlıwmat beriń. Mısal keltiriń.

Shınıǵıwlar

183. Teńsizlikti sheshiń (**183–184**):

1) $4^{3x+5}\leq4^{3-5x}$; 2) $7^{4x+5}<7^{9-5x}$; 3) $6^{x+5}>6^{3x}$, 4) $8^{x+5}\leq8^{2-5x}$;
5) $11^x<11^{2+5x}$; 6) $2^{x-5}>2^{25x}$; 7) $2\cdot2^{x+2}-3\cdot2^{x+1}-5\cdot2^x\leq-6$;
8) $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}<68$; 9) $2\cdot4^{x+2}+4^{x+1}-5\cdot4^x\leq31$;
10) $2\cdot7^{x+2}-2\cdot7^{x+1}-14\cdot7^x<10$. 11) $13^{x^2+46}\leq13^{x^2+25x}$;
12) $3^{x^2-4x}<3^{2(x^2-15)}$; 13) $7^{2x^2-4}\leq7^{3(x^2-x)}$.

184. 1) $9^x+3^x-6\leq84$; 2) $25^x+5^x-30>0$;
3) $5\cdot4^x+2^x-6\leq0$; 4) $9^x+3^x-12>0$;

Baqlaw jumısı úlgisi

1. $\begin{cases} x=7\sin5t \\ y=7\cos5t \end{cases}$ kórinisindegi funkciya grafigin sızıń.

2. $y=11^x+7$ funkciyanıń qásiyetlerin jazıń.

Teńsizliklerdi sheshiń (**3–5**):

3. $6^{x^2-7x-1}<6^7$. 4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{17x}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{54-x}$. 5. $0{,}7^{-3x}\leq1$.

75-78 LOGARIFM HAQQÍNDA TÚSINIK. LOGARIFMLIK FUNKCIYA. EŃ ÁPIWAYÍ LOGARIFMLIK TEŃLEME HÁM TEŃSIZLIKLER

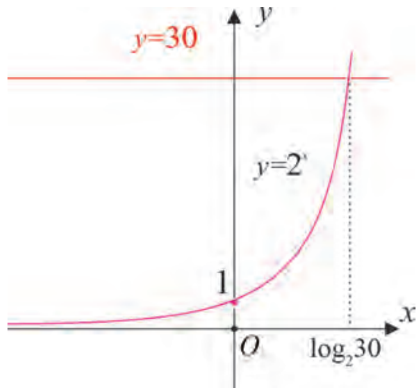
Logarifm haqqında túsinik

$2^x=32$ teńlemeniń koreni $x=5$, biraq $2^x=30$ teńlemeniń koreni qalay tabıladı? Bunday teńlemelerdi sheshiw ushın sannıń logarifmi túsinigi kirgiziledi. $2^x=30$ *teńleme tek ǵana bir korenge iye*. Onı 32-súwretten kóriw múmkin.

Bul koren 30 sanınıń 2 tiykar boyınsha logarifmi delinedi hám $\log_2 30$ kibi belgilenedi. Demek, $2^x=30$ teńlemeniń koreni $x=\log_2 30$ san boladı.

Usı anıqlamanı kirgizemiz:

b oń sannıń *a* tiykar boyınsha logarifmi dep, *b* sandı payda qılıw ushın tiykar *a* nı kóteriw kerek bolǵan dáreje kórsetkishine aytıladı hám $\log_a b$ kibi belgilenedi. Tiykar $a>0$ hám $a\neq1$ shártti qanaatlandırıwı kerek.



32-súwret.

Máselen, $\log_3 9=2$, sebebi $9=3^2$. Sonday-aq, $\log_2 \frac{1}{8}=-3$; $\log_5 5=1$; $\log_7 1=0$.

1- mısal. Esaplań: $\log_3 81$.

△ $3^4=81$ bolǵanı ushın logarifmniń anıqlaması boyınsha $\log_3 81=4$. ▲

Logarifmniń qásiyetleri

- tiykarǵı logarifmlik birdeylik: Eger $a>0$, $a\neq1$, $b>0$ bolsa, $a^{\log_a b}=b$ teńlik orınlı boladı;
- Eger $a>0$, $a\neq1$ bolsa, $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$;
- Eger $a>0$, $a\neq1$ hám $x>0$, $y>0$ bolsa, $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$;
- Eger $a>0$, $a\neq1$ hám $x>0$, $y>0$ bolsa, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x-\log_a y$;
- Eger $a>0$, $a\neq1$, $x>0$ bolsa $\log_a x^n=n\cdot\log_a x$;
- jańa tiykarǵa (bir tiykardan basqa tiykarǵa) ótiw formulası: Eger $a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $b>0$, $b\neq1$ bolsa, $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$;
- Eger $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$ bolsa, $\log_a b\cdot\log_b a=1$.

$\log_{10}x=\lg x$ hám $\log_e x=\ln x$ kibi belgilew qabıl qılınǵan. ($e=2{,}718281...$).
Bunda $\lg x$ – x tiń onlıq logarifmi, $\ln x$ bolsa x tiń natural logarifmi delinedi.
$f(x)=\log_a x$ funkciya (bul jerde x – argument, $a>0$, $a\neq1$) a – tiykarli *logarifmlik*

funkciya delinedi.

Logarifmlik funkciyanıń qásiyetleri:

- anıqlanıw oblastı (0; +∞) aralıq;
- mánisler oblastı R=(−∞; +∞);
- noli: $x=1$, yaǵnıy $\log_a 1=0$.
- $a>1$ bolsa, logarifmlik funkciya (0; +∞) aralıqta ósiwshi;
- $0<a<1$ bolsa, logarifmlik funkciya (0; +∞) aralıqta kemeyiwshi.

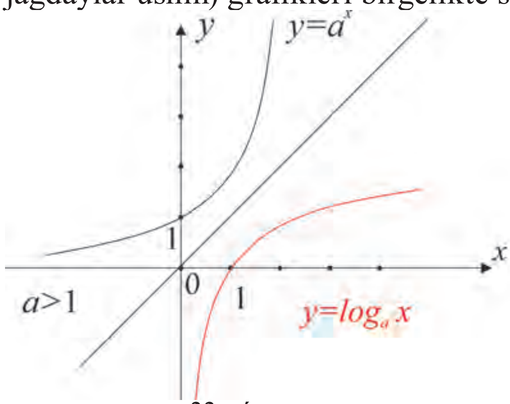
2- mısal. Salıstırıń: $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ hám 0.

△ $\log_{\frac{1}{2}} 1=0$, tiykar $a=\frac{1}{2}$, yaǵnıy funkciya kemeyiwshi $0<\frac{1}{2}<1$ hám $0<\frac{1}{3}<1$ bolǵanlıqtan $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}1$ boladı. Demek, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>0$ eken.▲

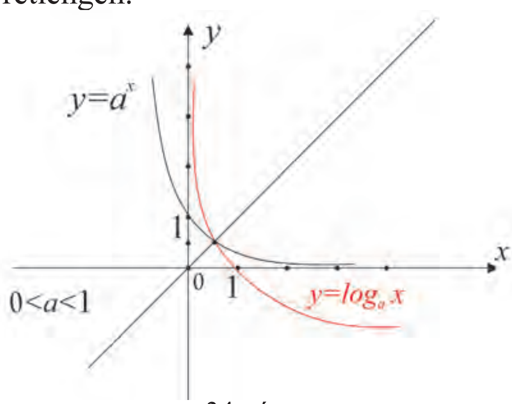
3- mısal. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń: $f(x)=\log_2\frac{x^2-5x+6}{x-1}$.

△Bul logarifmlik funkciyanıń anıqlanıw oblastı x tiń $\frac{x^2-5x+6}{x-1}>0$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı barlıq mánisleri kópliginen ibarat. Bul teńsizlikti sheship, funkciyanıń anıqlanıw oblastı $x\in(1;2)\cup(3;+\infty)$ ekenin tabamız. ▲

33 hám 34-súwretlerde $y=a^x$ hám $y=\log_a x$ funkciyalardıń ($a>1$ hám $0<a<1$ jaǵdaylar ushın) grafikleri birgelikte súwretlengen.



33-súwret.



34-súwret.

4- mısal. Salıstırıń: $\log_3 2+\log_3 8$ hám $\log_3(2+8)$.

△Logarifmniń qásiyetlerinen paydalanamız:

$\log_3 2+\log_3 8=\log_3(2\cdot 8)=\log_3 16 \log_3(2+8)=\log_3 10$. Logarifmniń tiykarı $3>1$ bolǵanı ushın $\log_3 16>\log_3 10$.

Bunnan: $\log_3 2+\log_3 8>\log_3(2+8)$.▲

5- mısal. Esaplań: $A=4^{\log_8 125}+27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4}$.

△ Logarifmniń qásiyetlerinen paydalanamız: $\frac{1}{2}\log_3 4=\log_3 2;$

$\log_8 125=\frac{\log_2 125}{\log_2 8}=\frac{3\log_2 5}{3}=\log_2 5;\quad 4^{\log_8 125}=4^{\log_2 5}=2^{2\log_2 5}=2^{\log_2 25}=25.$

Sonday-aq, $27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4}=27^{\frac{1}{3}-\log_3 2}=27^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{-\log_3 2}=$

$=3\cdot 3^{-3\log_3 2}=3\cdot 3^{\log_3\frac{1}{8}}=3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$. Demek, $A=25+\frac{3}{8}=25\frac{3}{8}$. ▲

6- mısal. Esaplań: $\frac{\lg 54+\lg\frac{1}{2}}{\lg 72-\lg 8}$.

△ Logarifmniń qásiyetlerinen paydalanamız:

$$\lg 54+\lg\frac{1}{2}=\lg(54\cdot\frac{1}{2})=\lg 27=\lg 3^3=3\lg 3,$$

$$\lg 72-\lg 8=\lg\frac{72}{8}=\lg 9=\lg 3^2=2\lg 3.$$

Ol jaǵdayda: $\frac{\lg 54+\lg\frac{1}{2}}{\lg 72-\lg 8}=\frac{3\lg 3}{2\lg 3}=\frac{3}{2}$. *juwap*: $\frac{3}{2}$. ▲

Eń ápiwayı logarifmlik teńleme

$\log_a x=b$ kórinisindegi teńlemeni ($a>0,\ a\neq 1,\ b$ – haqıyqıy san) eń ápiwayı logarifmlik teńleme dew múmkin. Teńlemeniń tek ǵana bir sheshimi: $x=a^b$.

7- mısal. Teńlemeni sheshiń: $\log_3 x=\frac{1}{2}$.

△ Logarifm anıqlaması boyınsha, sheshim $x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$. *juwap*: $x=\sqrt{3}$. ▲

8- mısal. Teńlemeni sheshiń: $\log_x 16=2$.

△ Logarifmniń anıqlaması boyınsha, $x^2=16$ hám $x>0,\ x\neq 1$ Demek, teńlemeniń sheshimi $x=4$ eken. *juwap*: $x=4$. ▲

9- mısal. Teńlemeni sheshiń: $\log_2(x^2-5x+10)=4$.

△ Logarifmniń anıqlaması boyınsha, $x^2-5x+10=2^4$ teńlemeni payda etemiz. Kvadrat teńlemeni sheship $x_1=-1,\ x_2=6$ korenlerdi tabamız. Demek, teńlemeniń sheshimi $\{-1;\ 6\}$ eken. *juwap*: $x=-1,\ x=6$. ▲

10- mısal. Teńlemeni sheshiń: $\lg(2x-3)=\lg(x-1)$.

△ Logarifmniń anıqlaması boyınsha, $2x-3>0,\ x>1$ bolıwı kerek. Teńlemeniń anıqlanıw oblastı $x>\frac{3}{2}$ aralıqtan ibarat. Logarifmniń qásiyeti boyınsha,

$2x-3=x-1$ teńlemege kelemiz, bunnan $x=2$. Bul koren bolsa anıqlanıw oblastına tiyisli. *juwap*: $x=2$. ▲

11- mısal. Teńlemeni sheshiń: $\log_x(x+2)=2$.

△ Teńlemeniń anıqlanıw oblastın tabamız: $x+2>0$ $x>0$, $x\neq1$, yaǵnıy teńleme $(0,1)\cup(1;\infty)$ kóplikte anıqlanǵan. Logarifmniń anıqlaması boyınsha, $x+2=x^2$ teńlemeni payda etemiz. Bul kvadrat teńlemeni sheship $x_1=-1$, $x_2=2$ korenlerdi tabamız. Bul korenlerden tek ǵana $x=2$ anıqlanıw oblastına tiyisli. Sonıń ushın ham ol berilgen teńlemeniń sheshimi boladı. *juwap*: $x=2$. ▲

12-mısal. Teńlemeni sheshiń: $\log_3^2 x-5\log_3 x+6=0$.

△ $t=\log_3 x$ belgilew kirgizip, $t^2-5t+6=0$ kvadrat teńlemeni payda etemiz. Onı sheship $t=2$ hám $t=3$ korenlerdi tabamız. Tabılǵan korenlerdi $t=\log_3 x$ ke qoyıp, $\log_3 x=2$ hám $\log_3 x=3$ teńliklerdi alamız. Bul teńlemelerdiń sheshimleri, sáykes túrde (ráwishte), 9 hám 27 boladı. *juwap*: $x=9$, $x=27$. ▲

Eń ápiwayı logarifmlik teńsizlik

$\log_a x>b$ kórinisindegi teńsizlikti ($a>0$, $a\neq1$, b – haqıyqıy san) eń ápiwayı logarifmlik teńsizlik dew múmkin.

13- mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)>-3$.

△ $3-x>0$ bolıwı kerek, $-3=\log_{\frac{1}{2}}8$ bolǵanlıqtan $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)>\log_{\frac{1}{2}}8$. Tiykar $a=\frac{1}{2}<1$ bolǵanı ushın logarifmlik funkciya kemeyiwshi, demek, $3-x<8$ hám $0<3-x<8$. Bunnan $-3<-x<5$ yamasa $-5<x<3$ teńsizliklerge kelemiz.
juwap: $x\in(-5;\ 3)$. ▲

14- mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\lg(x+1)<\lg(2x-3)$.

△ Logarifmlik funkciyanıń qásiyetlerinen tómendegi teńsizlikler sistemasın alamız:

$$\begin{cases} x+1<2x-3, \\ x+1>0, \\ 2x-3>0 \end{cases} \quad \text{yaki} \quad \begin{cases} x>4, \\ x>-1, \\ x>\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Bul sistemanıń sheshimi $(4;\ +\infty)$ aralıqtan ibarat. *juwap*: $x\in(4;\ +\infty)$. ▲

15- mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\log_{\frac{1}{2}}^2 x-9\leq0$.

△ Logarifmlik funkciya anıqlaması boyınsha, $x>0$ bolıwı kerek. $t=\log_{\frac{1}{2}}x$ belgini kirgizemiz. Ol jaǵdayda $t^2-9\leq0$ teńsizlikti payda etemiz. Bunı sheship

$-3 \le t \le 3$, yaǵnıy $-3 \le \log_{\frac{1}{2}} x \le 3$ teńsizliklerge kelemiz. $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$; $3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ bolǵanlıqtan $\log_{\frac{1}{2}} 8 \le \log_{\frac{1}{2}} x \le \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$. Tiykar $a = \frac{1}{2} < 1$ bolǵanı ushın $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ funkciya kemeyiwshi, demek, $\frac{1}{8} \le x \le 8$ bolıwı kerek. *juwap*: $x \in [\frac{1}{8}; 8]$. ▲

Soraw hám tapsırmalar

1. Logarifmge anıqlama beriń. Mısal keltiriń.
2. Logarifmniń qásiyetlerin aytıń. Mısalda túsindiriń.
3. Logarifmlik funkciyalardıń qásiyetlerin aytıp beriń.
4. Eń ápiwayı logarifmlik teńleme degen ne hám ol qalay sheshiledi?
5. Eń ápiwayı logarifmlik teńsizlik degen ne hám ol qalay sheshiledi? Mısal keltiriń.

Shınıǵıwlar

185. Esaplań:

1) $\log_5 125$; | 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; | 3) $\log_5 0,04$; | 4) $\log_{0,1} 1000$; | 5) $\log_3 \frac{1}{27}$.

186. Salıstırıń:

1) $\log_2 3$ hám $\log_2 5$; | 2) $\frac{\log_2 3}{\log_2 5}$ hám $\log_5 4$; | 3) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ hám $\log_{\frac{1}{2}} 5$;

4) $\log_2 3$ hám 1; | 5) $\log_3 2 + \log_3 5$ hám $\log_3(2+5)$; | 6) $\log_7 \frac{1}{2}$ hám 0.

187. Esaplań:

1) $1,5^{\log_{1,5} 2}$; | 2) $e^{\ln 5}$; | 3) $2^{3\log_2 5}$; | 4) $3^{2+\log_3 5}$; | 5) $7^{-2\log_7 6}$;

6) $3^{3-\log_3 54}$; | 7) $\log_6 2 + \log_6 18$; | 8) $\lg 25 + \lg 4$; | 9) $\log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{5}$;

10) $\frac{\lg 2 + \lg 162}{2\lg 3 + \lg 2}$; 11) $\log_4 7 - \log_4 \frac{7}{16}$; 12) $\frac{\ln 64}{\ln 4}$.

188. Funkciyalardıń anıqlanıw oblastın tabıń:

1) $y = \log_3(2x-5)$; | 2) $y = \log_7(x^2 - 2x - 3)$; | 3) $y = \log_5(4 - x^2)$.

4) $y = \log_2(x^2 - 2x + 1)$; | 5) $y = \log_{\sqrt{2}}(3 - x)$; | 6) $y = \log_2 \frac{x-1}{x+2}$.

189. Funkciyanıń grafigini sızıń:

1) $y = \log_2 x$; | 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; | 3) $y = \log_4(x-1)$; | 4) $y = -\log_3 x$.

190. Teńlemeni sheshiń:

1) $\log_2 x=-5$; 2) $\log_{\sqrt{3}} x=0$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x=-2$; 4) $\log_x 128=7$;

5) $\log_9 x=\frac{1}{2}$; 6) $\log_{\sqrt{x}} 27=3$; 7) $\log_3 x=5$;

8) $\log_2(x-5)=\log_2(4x+1)$; 9) $\log_{\frac{1}{2}} x=-2$; 10) $\log_5(3-2x)=\log_{\frac{1}{5}} x$;

11) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-6)=-2$; 12) $\log_2(x+1)+\log_2(8-x)=3$; 13) $\log_x 5=2$;

14) $\lg(x^2+x-10)-\lg(x-3)=1$; 15) $\log_7^2 x - \log_7 x=2$;

16) $5^{4-x}=6$; 17) $\log_x 3+\log_3 x=2$; 18) $5^{x^2}=6$; 19) $5^{x^2}=\frac{1}{2}$;

20) $\lg(x^2-6x+19)=1$; 21) $\log_5(5^x-4)=1-x$; 22) $\lg(x^2-21)=2$.

191. Teńsizlikti sheshiń:

1) $\log_8 x>2$; 2) $\log_3^2 x-3>2\cdot\log_3 x$; 3) $\log_8 x<2$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} x>1$;

5) $\lg(3-2x)>1$; | 6) $2^{x+1}<3$; | 7) $\log_3(2x-4)<\log_3(x+1)$; | 8) $2^{|x+1|}>3$.

79-81 KÓRSETKISHLI HÁM LOGARIFMLIK FUNKCIYALAR JÁRDEMINDE MODELLESTIRIW

1-mısal. Bakteriya belgili waqıttan (bir neshe saat yamasa minutlardan) soń ekige bólinedi hám bakteriyalar sanı eki ese artadı. Náwbettegi waqıttan soń usı eki bakteriya da ekige bólinedi hám populyaciya muǵdarı (bakteriyalardıń ulıwma sanı) jáne eki ese artadı; endi, bakteriyalar sanı tórt dana boldı. Bul kóbeyiw procesi qolay sharayatlarda (populyaciya ushın zárúrli resurslar: orın, jemtik, suw, energiya hám taǵı basqalar bar bolǵanda) dawam ete beredi.

Meyli, dáslep 10 million dana bakteriya bar ekenligi, bunday bakteriyalar bir saattan soń ekige bóliniwi belgili bolsın. Tómendegi keste t = 1, 2, 3, 4 saat ótkende b populyaciya muǵdarı qalay ózgeriwin ańlatadı:

t (saat)	0	1	2	3	4
b_t (million)	10	20	40	80	160

Usı menen birge, barlıq bakteriyalar da hár saatta bir waqıtta sinxron túrde (ráwishte) ekige bólinbeytuǵını belgili. Bunday jaǵdayda t pútin san bolmaǵanda (Máselen, $t=1\frac{1}{2}$ saat) bakteriyalar populyaciyası muǵdarın tabıw máselesi tur.

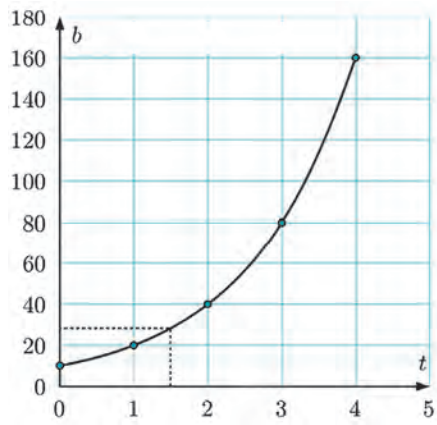
a) b_1, b_2, ... izbe-izlik qanday izbe-izlik?

b) Tegisliktegi tuwrı múyeshli koordinatalar sistemesında keste boyınsha sáykes noqatlardı belgilep, soń payda bolǵan noqatlardı tegis sızıq penen tutastırıń.

c) $t=1\frac{1}{2}$ saat ótkennen keyin bakteriyalar populyaciyası qanday boladı?

d) Bakteriyalar populyaciyasınıń qálegen t waqıtqa salıstırǵandaǵı ózgeriwin qanday funkciya járdeminde modellestiriwge boladı?

△Kesteniń 2-qatardaǵı $b_1, b_2, \ldots$ sanlar izbe-izligi bólimi 2 ge teń bolǵan geometriyalıq progressiya ekenligi belgili. Onıń ulıwma kórinisi tómendegishe boladı: $b_t=20\cdot 2^{t-1}$, bul jerde $t = 1, 2, 3, 4$.



Tegisliktegi koordinatalar sistemesında keste boyınsha sáykes noqatlardı belgilep, soń payda bolǵan noqatlardı tegis sızıq penen tutastırayıq:

$t=1\frac{1}{2}$ saat ótkende bakteriyalar populyaciyası shama menen 28 million ekenligin kórsek boladı.

Payda bolǵan iymek sızıq kórinisi kórsetkishli funkciya grafigine uqsaslıǵı kórinip tur. Bul funkciyani $b(t)$ dep belgilep, (bul jerde $t\geq 0$), $b(t)=20\cdot 2^{t-1}=10\cdot 2^t$ kórinisinde jaza alamız.▲

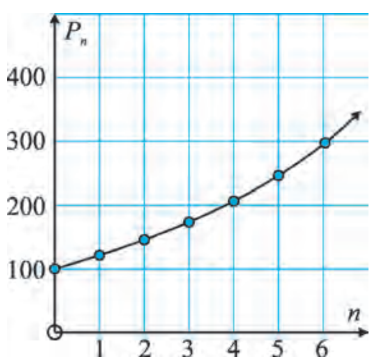
Ulıwma jaǵdayda, $b(t)=b_0a^t$ nızamı menen ózgeretuǵın muǵdar (bul jerde $b_0>0,\ a>1,\ t\geq 0$) *eksponencial ósiwshi* muǵdar delinedi.

Tómendegi juwmaqqa iye bolamız:

Eger populyaciyanıń muǵdarlıq ósiwi onıń dáslepki sanına proporcional bolsa, bunday populyaciya eksponencial kóbeyedi.

"Eksponencial ósiw" ibarası ádette qanday da tez, toqtawsız ósiw procesin ańlatadı. Máselen, janzatlar populyaciyası, qandayda bir mámleket xalqınıń tez ósiwin baspasózde solay táriypleydi.

2-mısal. Epidemiologiya xizmetiniń maǵlıwmatı boyınsha, tıshqanlar populyaciyası muǵdarı qolay sharayatlarda hár háptede 20% artadı eken. Dáslep 100 dana tıshqan bolsa, olardıń populyaciyası muǵdarı qanday nızam menen ósiwin tabıń.



△Eger P_n dep n hápte dawamındaǵı populyaciya muǵdarın belgilesek, tómendegilerge iye bolamız:

$P_0=100$ (dáslepki muǵdar), $P_1=P_0\cdot 1{,}2=100\cdot 1{,}2$,

$P_2=P_1\cdot 1{,}2=100\cdot(1{,}2)^2$, $P_3=P_2\cdot 1{,}2=100\cdot(1{,}2)^3$,

hám t.b. n háptede populyaciya muǵdarı
$P_n=100\cdot(1{,}2)^n$ boladı. ▲

Kalkulyatordan paydalanıp, sáykes mánislerdi esaplasaq, tómendegi grafikke iye bolamız:

6 háptede populyaciya muǵdarı 3 márte artıwı kórinip tur.

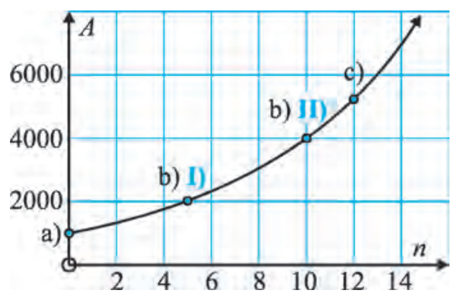
3- mısal. Entomolog ilimpaz shegirtke populyaciyasınıń awıl xojalıǵı atızlarına zıyan jetkiziwin úyrengende zıyan kórgen jer maydanlar $A_n=1000\cdot2^{0{,}2n}$ (gektar) nızamı menen ózgeriwin anıqladı, bul jerde n hápteler sanı.

a) Dáslep qanday maydanǵa zıyan jetkizilgen?

b) **I)** 5; **II)** 10 háptede qanday maydanǵa zıyan jetkiziledi?

c) Kalkulyatordan paydalanıp, 12 háptede qanday maydanǵa zıyan jetkiziliwin tabıń.

d) Zıyan kórgen maydan menen hápteler sanı arasındaǵı baylanıs nızamıiniń grafigin sızıń.

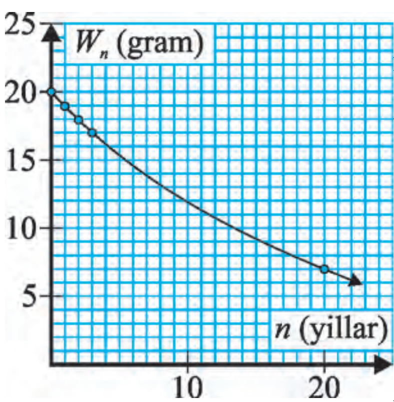


△ a) $A_0=1000\cdot2^{0{,}2\cdot0}=1000$ (gektar). Demek, dáslep 1000 ga maydanǵa zıyan jetkizilgen.

b) **I)** $A_3=1000\cdot2^{0{,}2\cdot5}=2000$ zıyan kórgen maydan 2000 (ga) ǵa teń.

II) $A_{10}=1000\cdot2^{0{,}2\cdot10}=4000$ zıyan kórgen maydan 4000 (ga) ǵa teń.

c) $A_{12}=1000\cdot2^{0{,}2\cdot12}=1000\cdot2^{2{,}4}\approx5280$ zıyan kórgen maydan shama menen 5280 gektarǵa teń. ▲



4-mısal. Radioaktiv jemiriliw nátiyjesinde massası 20 gramm bolǵan radioaktiv zat hár jılı 5% ke kemeyedi. W_n dep zattıń n jıldaǵı massasın belgilesek,

$W_0=20$ g;
$W_1=W_0\cdot0{,}95=20\cdot0{,}95$ g;
$W_2=W_1\cdot0{,}95=20\cdot(0{,}95)^2$ g;
$W_3=W_2\cdot0{,}95=20\cdot(0{,}95)^3$ g;
$W_{20}=20\cdot(0{,}95)^{20}\approx7{,}2$ g;
$W_{100}=20\cdot(0{,}95)^{100}\approx0{,}1$ g

teńliklerge iye bolamız.
Bunnan $W_n=20\cdot(0{,}95)^n$.

$b(t)=b_0a^t$ nızamı menen ózgeretuǵın muǵdar (bul jerde $b_0>0$, $0<a<1$, $t\geq0$) *eksponencial kemeyiwshi* muǵdar delinedi.

5- mısal. Paydalanılıǵan dári insan denesine áste-sekin sińip, onıń t saattan soń qalıp atırǵan muǵdarı (dozası) $D(t)=120\cdot(0,9)^t$ (mg) nızamı menen ózgeredi.

a) $t=0$, 4, 12, 24 saat bolǵanda $D(t)$ ni tabıń.

b) Dáslep insan denesine qanday doza kirgizilgen?

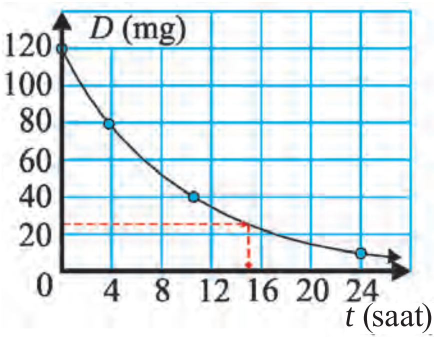
c) *a)* daǵı maǵlıwmatlardan paydalanıp, $D(t)$ grafigin súwretleń, bul jerde $t\geq 0$.

d) Grafikten paydalanıp, 25 mg muǵdardaǵı dári insan denesinde qansha waqıt qalıwın bahalań.

a) $D(t)=120\cdot(0,9)^t$ mg

$D(0)=120\cdot(0,9)^0=120$ mg;	$D(4)=120\cdot(0,9)^4\approx 78,7$ mg;
$D(12)=120\cdot(0,9)^{12}\approx 33,9$ mg;	$D(24)=120\cdot(0,9)^{24}\approx 9,57$ mg;

b) $D(0)=120$ bolǵanı ushın, dáslep 120 (mg) dári kirgizilgen.



c) Usı grafikten paydalanıp, insan denesine kirgizilgen 120mg dáriniń shama menen 15 saattan soń 25 mg qalıwın anıqlaymız.

6-mısal. Radioaktiv jemiriliw nátiyjesinde radioaktiv zat massası $W_t=W_0\cdot 2^{-0,001t}$ (g) nızamı boyınsha ózgeredi, bul jerde t jıllar.

a) Dáslep zat qanday massaǵa iye bolǵan?

b) 200 jıldan soń zattıń neshe procenti qaladı?

$t=0$ bolǵanda $W_t=W_0\cdot 2^0=W_0$ boladı. Demek, zattıń dáslepki massası W_0 eken. $t=200$ bolǵanda $W_{200}=W_0\cdot 2^{-0,001\cdot 200}=W_0\cdot 2^{-0,2}\approx$ $\approx W_0\cdot 0,8706$. Demek, 200 jıldan soń zattıń shama menen 87,1 procenti qaladı.

7- mısal. Teńiz qáddinen (betinen) h km biyiklikke kóterilgenimizde, atmosfera basımı $p=76\cdot 2,7^{-\frac{h}{8}}$ (sm sınap baǵanası) nızamı menen ózgeredi eken. 5,6 km biyiklikte atmosfera basımı qanday boladı?

8- mısal. Teńiz qáddinen (betinen) biyiklik $h=\dfrac{8000}{0,4343}\lg\dfrac{p_0}{p}$ formula menen esaplanadı, bul jerde $p_0=760$ mm sınap baǵanası – teńiz qáddindegi atmosfera basımı, p bolsa h (m) biyikliktegi atmosfera basımı. Alpinistler tawǵa kóterilgende basım 304 mm sınap baǵanası bolǵanın anıqladı. Alpinistler qanday biyiklikke kóterildi?

$$h=\frac{8000}{0,4343}\lg\frac{760}{304}\approx 7330,2\ \text{m}.$$

9- mısal. Radioaktiv zat massası waqıt ótiwi menen $m(t)=m_0\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ nızamı boyınsha kemeyedi, bul jerde m_0 – dáslepki waqıttaǵı massa, m bolsa t waqıttaǵı massa, T – radioaktiv jemiriliw tezligin ańlatıwshı koefficient (yarim jemiriliw dáwiri).

Zattıń házirgi kúnde saqlanıp qalǵan m massasın bilsek, neshe jılda massa m_0 den m ge shekem kemeygenin taba alamız:

$$t = -T\log_2\left(\frac{m(t)}{m_0}\right).$$

Bunday qatnas tarıyxıy izertlewlerde de qollanılıwın aytıw orınlı.

10- mısal. Tabiyiy til sózligindegi sózler sanı waqıt ótiwi menen $N(t)=N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ nızamı menen kemeyiwi baqlanǵan, bul jerde N_0 – dáslepki waqıttaǵı sózler sanı, $N(t)$ – t (mıń jıllar) waqıttaǵı saqlanıp qalǵan sózler sanı, λ – tilindegi sózlerdiń saqlanıp qalıwın ańlatıwshı koefficient.

Házirgi kúnde saqlanıp qalǵan sózler $N(t)$ muǵdarın bilsek, neshe jılda sózler kólemi N_0 den $N(t)$ ge shekem kemeygenin taba alamız:

$$t = -\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right).$$

11- másele. Dáslep qala turǵınları a adam bolıp, turǵınlar sanı hár jılı 10 % ke artsa, turǵınlardıń x jıldan keyin qansha bolıwın anıqlawshı formulanı tabıń.

△Quramalı procent formulası boyınsha, qala turǵınları sanı x jıldan soń $y = a\cdot\left(\frac{100+10}{100}\right)^x = a\cdot(1{,}1)^x$ boladı: Demek, $y=a\cdot(1{,}1)^x$ formula járdeminde a berilgende x jıldan soń turǵınlar sanı qansha bolıwın anıqlaw múmkin boladı. $a=1000000$ hám jıllar sanı x boyınsha turǵınlar sanın anıqlawshı kesteni keltiremiz:

x	y	x	y
1	1 100 000	11	2 853 117
2	1 210 000	12	3 138 428
3	1 331 000	13	3 452 271
4	1 464 100	14	3 797 498
5	1 610 510	15	4 177 248
6	1 771 561	16	4 594 973
7	1 948 717	17	5 054 470
8	2 143 589	18	5 559 917
9	2 357 948	19	6 115 909
10	2 593 742	20	6 727 500

Keste boyınsha turǵınlar sanı 5 jıldan soń 1 610 510 adam; 10 jıldan soń 2 593 742 adam; al 20 jıldan soń 6 727 500 adam boladı eken.▲

12-másele. Dáslep qala turǵınları a adam bolıp, turǵınlar sanı hár jılı 2% ke kemeyse, turǵınlardıń x jıldan keyin qansha bolıwın anıqlawshı formulanı tabıń.

△Quramalı procent formulası boyınsha, qala turǵınları sanı x jıldan soń

$y = a\cdot\left(\frac{100-2}{100}\right)^x = a\cdot 0{,}98^x$ boladı. Demek, $y=a\cdot 0{,}98^x$ formula járdeminde a berilgende x jıldan soń turǵınlar sanın anıqlaw múmkin. $a=2000000$ hám jıllar sanı x boyınsha turǵınlar sanın anıqlawshı kesteni keltiremiz:

Keste boyınsha turǵınlar sanı 5 jıldan soń 1 807 842 adam; 10 jıldan soń 1 634 146 adam; al 20 jıldan soń 1 335 216 adam boladı eken.

x	y	x	y
1	1 960 000	11	1 601 463
2	1 920 800	12	1 569 433
3	1 882 384	13	1 538 045
4	1 844 736	14	1 507 284
5	1 807 842	15	1 477 138
6	1 771 685	16	1 447 595
7	1 736 251	17	1 418 644
8	1 701 526	18	1 390 271
9	1 667 496	19	1 362 465
10	1 634 146	20	1 335 216

13- másele. Qala turǵınları dáslep a adam edi. Eger turǵınlar sanı hár jılı 10% ke artsa, turǵınlardıń x jıldan keyin qansha bolıwın hám neshe jıldan keyin k ese artıwın anıqlawshı formulanı tabıń.

$y=a\cdot 1{,}1^x$ hám másele shártinen $y=k\cdot a$ ekenin esapqa alıp $k=1{,}1^x$ yamasa $x=\log_{1,1}k$ formula tabılıwı, málim. Tómende turǵınlar sanı k ese artıwı ushın kerekli jıllar sanın anıqlawshı keste keltirilgen:

k	y	k	y	k	y
1	0	6	19	11	25
2	7	7	20	12	26
3	12	8	22	13	27
4	15	9	23	14	28
5	17	10	24	15	28

Kesteden, turǵınlar sanı 2 ese artıwı ushın 7 jıl;
5 ese artıwı ushın 17 jıl;
10 ese artıwı ushın 24 jıl kerek ekenligi, málim.

14- másele. Qala turǵınları hár jılı 2 % ke kemeyse hám de turǵınlardıń dáslepki sanı a adam bolsa, turǵınlardıń x jıldan keyin qansha bolıwın hám neshe jıldan keyin k ese kemeyiwin anıqlawshı formulanı tabıń.

$y=a\cdot 0{,}98^x$ hám másele shártinen $y=\frac{a}{k}$ bolıwın inabatqa alıp $1/k=0{,}98^x$

yamasa $x=\log_{0,98}(1/k)$ formula tabılıwı, málim. Tómende turǵınlar sanı k ese kemeyiwi ushın kerekli jıllar sanın anıqlawshı keste keltirilgen:

k	$1/k$	x	k	$1/k$	x
1	1	0	11	0,090909	119
2	0,5	34	12	0,083333	123
3	0,333333	54	13	0,076923	127
4	0,25	69	14	0,071429	131
5	0,2	80	15	0,066667	134
6	0,166667	89	16	0,0625	137
7	0,142857	96	17	0,058824	140
8	0,125	103	18	0,055556	143
9	0,111111	109	19	0,052632	146
10	0,1	114	20	0,05	148

Kesteden, turǵınlar sanı: 2 ese kemeyiwi ushın 34 jıl;
5 ese kemeyiwi ushın 80 jıl;
10 ese kemeyiwi ushın 114 jıl kerek ekenligi, málim. ▲

15-másele. 1935-jılı amerikalı seysmolog Ch. Rixter jer silkiniwlerdi úyreniw ushın 1 – 9,5 ballıq magnitudalar shkalasın usınıs qılǵan. Bunda jer silkiniw waqtında júzege keliwshi seysmologiyalıq tolqın energiyası *intensivlik* dep atalıwshı muǵdar arqalı bahalanadı. Rixter shkalasında *intensivligi I bolǵan jer silkiniwdiń R magnitudası* $R=\lg I$ formula járdeminde tabıladı eken.

1966-jılı Tashkentte 5,2 magnitudalı, al 2010-jılı Gaitida 7 magnitudalı jer silkiniw bolǵan. Usı jer silkiniwlerdi intensivligi boyınsha salıstırayıq.

△ Gaiti jer silkiniwi: $7=\lg I_1$, bunnan $I_1=10^7=10\,000\,000$;
Tashkent jer silkiniwi: $5{,}2=\lg I_2$, bunnan $I_2=10^{5,2}\approx 158\,489{,}3$;

Bunnan $\dfrac{I_1}{I_2}\approx 63{,}1$. Demek, Gaitide Tashkenttegige salıstırǵanda shama menen 63 ese kúshlirek jer silkiniw bolǵan. ▲

Soraw hám tapsırmalar

1. Kórsetkishli modelge mısal keltiriń.
2. Logarifmli modelge mısal keltiriń.

Shınıǵıwlar

192. Jerge qaralmasa, t kúnnen soń jabayı otlar maydanı $A(t)=3\cdot 2^{0,1t}$ (kv. m) bolǵan jer maydanın qaplap, paydalı ósimliklerge zıyan jetkizedi.
a) Dáslep qansha maydanǵa zıyan jetkizilgen?
b) **I)** 2; **II)** 10; **III)** 30 kúnde qanday maydanǵa zıyan jetkiziledi?
c) *a), b)* da alınǵan maǵlıwmatlardan paydalanıp, zıyan kórgen maydan-

nıń kúnler sanına baylanıs nızamı grafigin sızıń.

193. Aral boyı ekologiyalıq sistemasın tiklew máqsetinde kem ushırasatuğın haywanlar populyaciyasın kóbeytiw proektinde ekologlar 25 juplıq haywanlardı kóbeyttirmekshi. Izertlewler boyınsha, berilgen sharayatlarda bul haywanlar populyaciyası muğdarı $P_n=P_0\cdot 1{,}23^n$ nızamı menen ózgeredi, bul jerde P_n – n jıldağı haywanlar sanı.

a) P_0 sanı neni bildiredi?

b) **I)** 2; **II)** 5; **III)** 10 jılda qanday populyaciyağa iye bolamız?

c) *a), b)* da alınğan mağlıwmatlardan paydalanıp, populyaciya muğdarınıń jıllar sanına baylanıs nızamınıń grafigin sızıń.

194. Ximiyalıq reakciya tezligi $V_t=V_0\cdot 2^{0{,}05t}$ nızamı menen ózgeredi eken, bul jerde t(°C) – temperatura.

a) 0 °C; b) 20 °C temperaturada reakciya tezligi qanday boladı?

c) 20 °C temperaturadağı reakciya tezligi 0 °C temperaturadağı reakciya tezligine salıstırğanda neshe procent artadı?

d) $\left(\dfrac{V_{50}-V_{20}}{V_{20}}\right)\cdot 100\%$ mánisin esaplań hám mánisin túsindiriń.

195. 2017- jılı Alyaska yarım atawı janındağı atawğa ayıwlardıń 6 dana juplığı qoyıp jiberildi. Dáslep atawda ayıwlar joq edi. Ayıwlar populyaciyası $B_t=B_0\cdot 2^{0{,}18t}$ nızamı (bul jerde t - jıllar) menen ózgerse, esaplaw qurallarınan paydalanıp, tómendegilerge juwap beriń:

a) B_0 sanı neni bildiredi? Ol neshege teń?

b) 2037-jılda qanday populyaciyağa iye bolamız?

c) 2037-jılğı ayıwlar sanı 2027-jıldağı ayıwlar sanına salıstırğanda neshe procent artadı?

196. Radioaktiv jemiriliw nátiyjesinde radioaktiv zat massası $W(t)=250\cdot(0{,}998)^t$ (g) nızamı boyınsha ózgeredi, bul jerde t – jıllar.

a) Dáslep zat qanday massağa iye bolğan?

b) **I)** 400; **II)** 800; **III)** 1200 jılda zattıń neshe gramı qaladı?

c) Joqarıdağı mağlıwmatlardan paydalanıp, $W(t)$ nıń grafigin súwretleń.

d) Grafikten paydalanıp, zat qashan 125 mg muğdarda qalıwın bahalań.

197. Qaynap turğan suw suwıtılğanda onıń T temperaturası $T(t)=100\cdot 2^{-0{,}02t}$ °C nızamı menen ózgeredi, bul jerde t - minutlar.

a) Dáslep qanday temperatura bolğan?

b) **I)** 15; **II)** 20 minuttan keyin temperatura neshege teń boladı?

c) Joqarıdağı mağlıwmatlardan paydalanıp, $W(t)$ nıń grafigin súwretleń.

d) Grafikten paydalanıp, 78 minuttan keyin temperatura neshege teń bolıwın bahalań.

198. Elektr shınjırındağı tok kúshi $I_t=0{,}6\cdot 2^{-5t}$ (A) nızamı menen ózgeredi, bul jerde t – sekundlar.

a) Dáslep qanday tok kúshi bolğan?

b) **I)** 0,1; **II)** 0,5; **III)** 1 sekundtan keyin tok kúshi neshege teń boladı?

c) Joqarıdağı mağlıwmatlardan paydalanıp, $W(t)$ nıń grafigin súwretleń.

199. Teńizde d metr tereńlikke salıstırğanda jaqtılıq $L(d)=L_0\cdot(0{,}9954)^d$ (kandela) nızamı menen ózgeredi.

a) Teńiz túbinde qanday jaqtılıq bolğan?

b) 1000 metr tereńliktegi jaqtılıq neshe procentke kemeyedi?

200. 8 bakteriya populyaciyası 2 saattan soń 100 danağa shekem ósti. Usı sharayatlarda qashan populyaciya 500 ge jetedi?

201. Mobil baylanıs kompaniyası mağlıwmatları boyınsha, kompaniya mobil baylanısınan paydalanıwshılar sanı $N(t)=100000e^{0{,}09t}$ formula járdeminde ańlatıladı eken, bul jerde t – aylar. Házirgi kúnde 3 mln paydalanıwshılar bar ekenligi belgili bolsa, kompaniya qashan jumıs baslağan?

202. Awqat mikrotolqınlı pechten alınğanda, ol $T(t)=80e^{-0{,}12t}$ nızamına tiykarlanıp suwıydı, bul jerde t – minutlar. Házir bólme temperaturası 22°C bolsa, neshe minuttan soń awqat usı temperaturağa shekem suwıydı?

203. Súniy joldas biyikligi t (jıllar) waqıt ótiwi menen $H(t)=30000e^{-0{,}2t}$ nızamı menen ózgeredi.

a) 2 jıldan soń biyiklik qanday bolıwın esaplań.

b) Joldas 320 km biyiklikte bolsa, ol atmosferanıń joqarı qatlamlarında janıp ketedi. Usı payıtqa shekem qansha waqıt ótedi?

III BAP USHÍN SHÍNÍĞÍWLAR

204. Teńlemelerdi sheshiń (**204–205**):

a) $x^4-1=0$; b) $5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0$; c) $3x^4-4x^3-7x^2-4x+5=0$.

205. a) $(x-3)(x+14)(x-15)=0$; b) $(4x+11)(3x-5)=0$;

c) $x^4-15x^2-16=0$; d) $x^4+24x^2-25=0$.

206. Teńsizliklerdi sheshiń (**206–208**):

a) $(2-x)(3x+1)(2x-3)>0$; b) $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4>0$.

207. a) $x^4+8x^3+12x^2\geq 0$; b) $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-x)\leq 0$.

208. a) $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1}<0$; b) $\dfrac{3x-2}{2x-3}<3$; c) $\dfrac{7x-4}{x+2}\geq 1$; d) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{3}{x+2}$.

209. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=113, \\ xy=56; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2y+xy^2=84, \\ x^3+y^3=91; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+9xy+2y^2=12, \\ 2x^2+3xy-4y^2=1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=2, \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$

210. Teńsizlikler sistemasın sheshiń (**210–211**):

a) $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7}+\dfrac{10-3x}{5}>\dfrac{2x+7}{3}-7\dfrac{3}{21}, \\ \dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+1)}{6}>\dfrac{3x-1}{3}-\dfrac{13-x}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2}<2x, \\ \dfrac{2x+15}{9}>\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{x}{3}. \end{cases}$

211. a) $\begin{cases} 2x^2+2<5x, \\ x^2\geq x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-16\leq 0, \\ -x^2+16\geq 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9}\leq 0, \\ \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8}\geq 0. \end{cases}$

212. Irracional teńlemeni sheshiń:

a) $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$;

b) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}$;

c) $\dfrac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$; d) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}>-\sqrt{x-5}$.

213. Sanlardı salıstırıń (**213–215**):

a) $4,2^{-\sqrt{2}}$ hám 1; b) $0,2^{\frac{3}{5}}$ hám $0,2^{-\frac{3}{5}}$; c) $(0,4)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ hám 1.

214. a) $4^{0,5}$ hám $4^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$; b) $\sqrt{3}^{\,0,2}$ hám $3^{0,2}$; c) $2^{-\frac{3}{4}}$ hám $8^{-\frac{4}{9}}$.

215. a) $2^{-\sqrt{3}}$ hám $2^{-\sqrt{5}}$; b) $7^{-0,3}$ hám $7^{-\frac{1}{3}}$; c) $(\frac{1}{3})^{\sqrt{5}}$ hám $3^{-\sqrt{3}}$.

216. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

a) $y=5^{\sqrt{x^2-1}}$; b) $y=\dfrac{1}{3^x+1}$; c) $y=\dfrac{1}{3^{x^2}-9}$; d) $y=3^{\frac{1}{2-x}}$.

217. Funkciyanıń mánisler oblastın tabıń:

a) $y=2^{-|x|}$; b) $y=3+4^{x+1}$; c) $y=-6^x$; d) $y=5^{|x|}+1$.

218. Teńlemelerdi sheshiń (**218–219**):

a) $8^x=2^{\frac{1}{5}}$; b) $121^x-7\cdot 11^x=5\cdot 11^x-11$; c) $0,5^{x^2+x-3,5}=2\sqrt{2}$.

219. a) $6^{2x}-5^{2x-1}=6^{2x-1}+5^{2x}$; b) $4^{x+3}+4^x=130$; c) $125^x+20^x=2^{3x+1}$.

220. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

a) $\begin{cases} x+y=5, \\ 5^{y-x^2}=0,2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{x-1}=2^y, \\ 0,1^{2x-y}=0,01; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5^{x-y}=25, \\ 3^{x+y}=27. \end{cases}$

221. Teńsizlikti sheshiń:

a) $4^x \le 3^x$; b) $16^x-7\cdot 4^x-8<0$; c) $4^x\cdot 5^{1-x}<\frac{25}{4}$; d) $6^{\frac{x-3}{x+8}}\ge 1$.

222. Sanlardı salıstırıń:

a) $\log_3 2$ hám 2; b) $\log_3 5$ hám $2\cdot\log_3 2$; c) $\log_2 5$ hám $\log_5 2$

e) $\log_{0,2}5$ hám $\log_{0,2}6$; d) $\log_4 3$ hám $\log_3 4$; f) lg18,8 hám lg6π.

223. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

a) $y=\log_2(2x+7)$; b) $y=\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2)$; c) $y=\log_5(-8x)$; d) $y=\lg\frac{x-3}{x+8}$.

224. Teńlemelerdi sheshiń:

a) lg(x–9)+lg(2x–1)=2; b) $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{x+3}=2$.

225. Teńlemeler sistemasın sheshiń (**225–226**):

a) $\begin{cases} 5^{x-y}=1, \\ 2^{\log_2(x+y)}=6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lg x+\lg y=4, \\ \lg x-\lg y=6; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_{17}(3^x+2^y)=1, \\ 3^{x+1}-4\cdot 2^y=-5; \end{cases}$

226. a) $\begin{cases} 2^x\cdot 5^y=40, \\ 5^x\cdot 2^y=250; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x+5^{\log_5 y}=4, \\ x^y=16; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^x\cdot 3^y=81, \\ 3^x-3^y=24. \end{cases}$

227. Teńsizlikti sheshiń:

a) $\log_3(x^2+x+1)\ge 1$; b) $\log_2(x^2+x-6)-\log_2(x+3)\le 1$;

c) $\lg^2 x<\lg x^5-6$; d) $\log_3(4^x-5\cdot 2^x+13)>2$; e) $5^{x+7}>2$.

228. Funkciya grafigin sızıń:

a) $y=1,5\sin(2x-1)$; b) $y=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$; c) $y=\log_3(1-x)$.

229. Salıstırıń:

a) $\arcsin(-\frac{1}{2})$ hám $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\arccos\frac{1}{2}$ hám arctg(–1);

c) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$ hám arctg1; d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ hám $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

230. Esaplań:

a) $2\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\operatorname{arctg}(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$;

231. Teńlemeni sheshiń (**231–233**):
a) $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$; b) $3\sin^2 2x+7\cos^2 x-3=0$; c) $4\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg} x+1=0$.

232. a) $3\sin^2 x+7\sin x-10=0$; b) $2\cos^2 x-5\cos x+3=0$; c) $\sin 6x=\sin 3x$.

233. a) $\cos 7x=\cos 2x$; b) $\operatorname{tg} 8x=\operatorname{tg} 11x$.

234. Teńsizlikti sheshiń (**234–235**):
a) $\sin x>-\frac{1}{2}$; b) $\cos 2x\le\frac{1}{2}$; c) $\operatorname{tg} 3x\ge 1$; d) $\sin 2x\le\frac{1}{2}$.

235. a) $\sin 4x\le\frac{1}{2}$; b) $\cos 10x\ge 0$; c) $\operatorname{tg} 9x\le\sqrt{3}$; d) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le 0$.

Baqlaw test tapsırmalari

1. Teńlemeni sheshiń: $\sin 6x=0$.

A) $x=\frac{\pi}{6}n,\ n\in Z$; B) $x=\frac{\pi}{5}n,\ n\in Z$;

C) $x=\frac{\pi}{4}n,\ n\in Z$; D) $x=\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z$.

2. Teńlemeni sheshiń: $\cos 2x=0$.

A) $x=2\pi n,\ n\in Z$; B) $x=\pi n,\ n\in Z$;

C) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$; D) $x=\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z$.

3. Teńlemeni sheshiń: $\operatorname{tg} 4x=\sqrt{3}$.

A) $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$; B) $x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$;

C) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$; D) $x=\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$.

4. Teńsizlikti sheshiń: $\sin 2x>3$.

A) $x=\pi n,\ n\in Z$; B) $\varnothing$; C) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; D) $x=2\pi n,\ n\in Z$.

5. Teńsizlikti sheshiń: $\cos 2x<3$.

A) $(-\infty;+\infty)$; B) $\varnothing$; C) $(-\infty;0)$; D) $(0;+\infty)$.

6. Anıqlanıw oblastın tabıń: $y=12^x$.

A) $(-\infty;+\infty)$; *B*) $(0;+\infty)$; *C*) $(-\infty;0)$; *D*) $\varnothing$.

7. Anıqlanıw oblastın tabıń: $y=\log_2(3-x)$.

A) $(3;+\infty)$; *B*) $[3;+\infty)$; *C*) $(-\infty;3)$; *D*) $(-\infty;3]$.

8. Esaplań: $\arcsin\frac{1}{2}$.

A) $\frac{\pi}{2}$; *B*) π; *C*) $\frac{\pi}{4}$; *D*) $\frac{\pi}{6}$.

9. Esaplań: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A) $\frac{\pi}{3}$; *B*) $\frac{\pi}{2}$; *C*) $\frac{\pi}{6}$; *D*) $\frac{\pi}{4}$.

10. Esaplań: $\operatorname{arctg}1$.

A) $\frac{\pi}{3}$; *B*) $\frac{\pi}{2}$; *C*) $\frac{\pi}{6}$; *D*) $\frac{\pi}{4}$.

IV BAP

KOMPLEKS SANLAR

86-87 KOMPLEKS SANLAR HÁM OLAR ÚSTINDE ÁMELLER. KOMPLEKS SANDÍ SÚWRETLEW

Kompleks sanlar

Kompleks sanlar haqqındaǵı bilimlendiriw ilim hám pánde, dara jaǵdayda, matematikada bólek orın tutadı. Tez rawajlanıp atırǵan bul oblast texnikada, sonday-aq, óndiristiń kóplep salalarında júdá keń qollanıwǵa iye. Usı sanlar haqqında ayırım maǵlıwmatlardı keltiremiz. Dara jaǵdaydaǵı bir mısaldan baslayıq.

$x^2+4=0$ teńlemeni sheshiw procesinde $x_1=2\sqrt{-1}$ hám $x_2=-2\sqrt{-1}$ "sanlar" payda boladı. Haqıyqıy sanlar arasında bolsa bunday "sanlar" joq. Sonday jaǵdaydan qutulıw ushın $\sqrt{-1}$ ge *san* dep qaraw zárúrligi payda boladı.

Bul jańa san hech qanday real muǵdardıń ólshemin, yamasa onıń ózgeriwin ańlatpaydı. Usı sebepli $\sqrt{-1}$ di ***jorımal*** (qıyalıy, haqıyqatta bar bolmaǵan) ***birlik*** dep ataw hám arnawlı belgilew qabul qılınǵan: $\sqrt{-1}=i$. Jorımal birlik ushın $i^2=-1$ teńlik orınlı boladı.

$a+bi$ kórinisindegi ańlatpanı qaraymiz. Bul jerde a hám b lar qálegen haqıyqıy sanlar, i bolsa jorımal birlik.

$a + bi$ ańlatpa haqıyqıy san a hám jorımal san bi lar "kompleksi"nen ibarat bolǵanı ushın onı kompleks san dep ataw qabıl qılınǵan.

$a+bi$ ańlatpa algebralıq kórinistegi kompleks san dep ataladı.

$a+bi$ di "algebralıq kórinistegi kompleks san" dewdiń ornına qısqalıq ushın "kompleks san" dep ataymiz. Kompleks sanlardı bir hárip penen belgilew qolay. Máselen, $a+bi$ di z penen belgileyik. $z=a+bi$ kompleks sannıń haqıyqıy bólegi a nı Re(z) (fransuzcha réelle – haqıyqıy) kibi, jorımal bólegi b nı bolsa Im(z) (fransuzcha *imaginaire* – jorımal) kibi belgilew qabıl qılınǵan: a=Re(z), b=Im(z).

Eger $z=a+bi$ kompleks san ushın $b=0$ bolsa, haqıyqıy san $z=a$ payda boladı. Demek, haqıyqıy sanlar kópligi R barlıq kompleks sanlar kópligi C niń úles kópligi boladı: $R\subset C$. úles kópligi

1- mısal. $z_1=1+2i$, $z_2=2-i$, $z_3=2{,}1$, $z_4=2i$, $z_5=0$ kompleks sanlardıń haqıyqıy hám jorımal bóleklerin tabıń.

△Kompleks sanlardıń haqıyqıy hám jorımal bólekleriniń anıqlamaları boyınsha tabamız:

$\mathrm{Re}(z_1)=1$; $\mathrm{Re}(z_2)=2$; $\mathrm{Re}(z_3)=2{,}1$; $\mathrm{Re}(z_4)=0$; $\mathrm{Re}(z_s)=0$;

$\mathrm{Im}(z_1)=2$; $\mathrm{Im}(z_2)=-1$; $\mathrm{Im}(z_3)=0$; $\mathrm{Im}(z_4)=2$; $\mathrm{Im}(z_s)=0$. ▲

Kompleks sanlar ushın "<", ">" qatnasları anıqlanbaǵan, lekin teń kompleks sanlar túsinigi kirgiziledi.

Eki komlpeks sannıń haqıyqıy hám jorımal bólekleri, sáykes túrde, teń bolsa, bunday kompleks sanlar óz ara teń dep ataladı.

Máselen, $z_1=1{,}5+\dfrac{4}{5}i$ hám $z_2=\dfrac{3}{2}+0{,}8i$ sanlari ushın $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)=1{,}5$; $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)=0{,}8$. Demek, $z_1=z_2$.

Bir-birinen tek ǵana jorımal bólekleriniń belgisi menen parıqlanatuǵın eki kompleks san óz ara túyinles kompleks sanlar delinedi. $z=a+bi$ kompleks sanǵa túyinles kompleks san $\overline{z}=a-bi$ kórinisinde jazıladı.

Máselen, $6+7i$ hám $6-7i$ ler túyinles kompleks sanlar esaplanadı: $\overline{6+7i}=6-7i$. Usı kibi $\overline{z}$ sanına túyinles san $\overline{\overline{z}}=z$ boladı. Máselen, $\overline{\overline{6+7i}}=\overline{6-7i}=6+7i$.

a haqıyqıy sanǵa túyinles san a nıń ózine teń: $\overline{a}=\overline{a+0\cdot i}=a-0\cdot i=a$. Biraq, bi jorımal sanǵa túyinles san $\overline{bi}=-bi$ boladı. Sebebi $\overline{bi}=\overline{0+bi}=0-bi=-bi$.

Kompleks sanlar ústinde arifmetikalıq ámeller

Kompleks sanlar ústinde arifmetikikalıq ámeller tómendegishe anıqlanadı:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i; \qquad (1)$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i; \qquad (2)$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i; \qquad (3)$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \qquad (4)$$

(1) hám (2) teńliklerdi tikkeley qollanıw qıyın emes. Kompleks sanlardı kóbeytiw ámelin $i^2=-1$ ekenligin itibarǵa alıp, kóp aǵzalını kóbeytiw kibi orınlaw múmkin.

2- mısal. Qosındını tabıń: $(3+7i)+(-5+4i)$.

△Qosındını tabıw ushın (1) formuladan paydalanamız:

$(3+7i)+(-5+4i)=(3+(-5))+(7+4)i=-2+11i$. ▲

3- mısal. Ayırmanı tabıń: $(13-7i)-(-5+4i)$.

Ayırmanı tabıw ushın (2) formuladan paydalanamız:
$(13-7i)-(-5+4i)=(13-(-5))+(-7-4)i=18-11i$.

4- mısal. Kóbeymeni tabıń: $(2-i)\cdot(\frac{3}{4}+2i)$.

Qawsırmalardı ashamız hám $i^2=-1$ ekenliginen paydalanamız:

$$(2-i)\cdot\left(\frac{3}{4}+2i\right)=2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot 2i-i\cdot\frac{3}{4}-2i^2=\frac{3}{2}+4i-\frac{3}{4}i+2=\frac{7}{2}+\frac{13}{4}i\,.$$

$\frac{a+bi}{c+di}$ bólinbeni esaplaw ushın, onıń alımı hám bólimin bólimniń “túyinlesi” $c-di$ ge kóbeytip, tiyisli ámellerdi orınlaw kerek.

5- mısal. Bóliw ámelin orınlań: $\frac{2-i}{-3+2i}$.

$$\frac{2-i}{-3+2i}=\frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-6-4i+3i-2}{(-3)^2-(2i)^2}=\frac{-8-i}{13}=\frac{-8}{13}-\frac{1}{13}i\,.$$

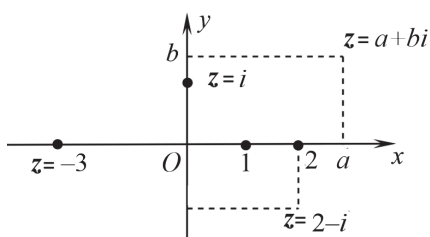
$z+w=0$ teńlikni qanaatlandırıwshı z, w kompleks sanlar óz ara *qarama-qarsı* sanlar delinedi. z kompleks sanına qarama-qarsı sandı $-z$ penen belgilew qabıl qılınǵan. $z=a+bi$ kompleks sanǵa qarama-qarsı bolǵan tek ǵana bir kompleks san bar hám bul san $-z=-a-bi$ kompleks sannan ibarat.

$zw=1$ teńlikti qanaatlandıratuǵın z hám w kompleks sanlar *óz ara keri* kompleks sanlar delinedi. $z=0$ sanǵa keri san joq. Hár qanday $z\neq 0$ kompleks sanǵa keri kompleks san bar. Bul san $\frac{1}{z}$ sanınan ibarat.

Kompleks sandı tegislikte súwretlew

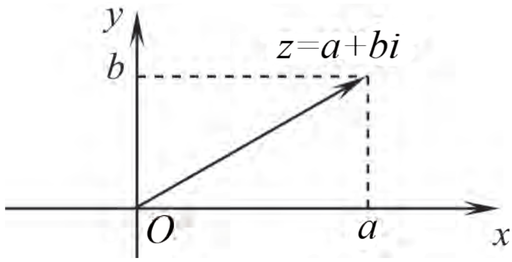
Meyli, tegislikte tuwrı múyeshli Dekart koordinatalar sisteması berilgen bolsın. Ol jaǵdayda $z=a+bi$ kompleks sanǵa tegislikte koordinataları $(a;\ b)$ bolǵan noqat sáykes keledi.

Bul usıl menen súwretlewde $a+0i$ kompleks sanǵa $(a;\ 0)$ koordinatalı noqat, $0+bi$ kompleks sanǵa bolsa $(0;\ b)$ noqat sáykes keledi. Sonıń ushın da Ox kósher haqıyqıy hám Oy kósher jorımal kósher delinedi (1-súwret).

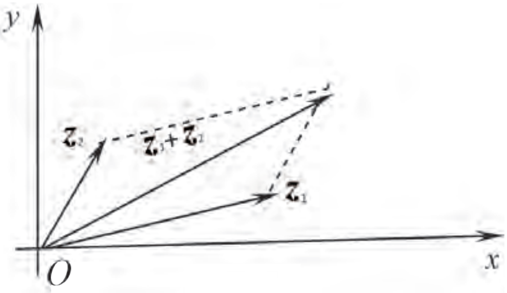


1- rasm.

$a+bi$ kompleks sandı tegislikte a hám b koordinatali vektor kibi de súwretlew múmkin (2-súwret). Bul bolsa kompleks sanlardı qosıwda vektorlardı qosıwdıń parallelogramm qaǵıydasın qollanıw múmkinshiligin beredi (3-súwret).



2-súwret.



3-súwret.

Soraw hám tapsırmalar

1. Jorımal birlik degen ne? Nege onı kirgiziwge talap sezildi?
2. Kompleks sannıń algebralıq kórinisin jazıń, mısal keltiriń
3. Eki kompleks san qashan teń delinedi? Mısal keltiriń.
4. Eki kompleks sannıń qosındısı, ayırması, kóbeymesi, bólinbesi qalay anıqlanadı? Mısallarda túsindiriń.
5. Qarama-qarsı kompleks san degen ne?
6. Túyinles kompleks san degen ne?
7. Óz ara keri kompleks sanlar degen ne? Mısallar keltiriń.
8. Kompleks sandı vektor kibi súwretleń? Mısal keltiriń.

Shınıǵıwlar

1. Kompleks sanlardıń haqıyqıy hám jorımal bóleklerin aytıń:

1) $z=-3+7i$; 2) $z=4-\frac{1}{2}i$; 3) $z=-2-5i$;

4) $z=-5,7+5i$; 5) $z=5i$; 6) $z=9$;

7) $z=-7+3i$; 8) $z=8-\frac{1}{2}i$; 9) $z=-5-6i$;

10) $z=-5,7-5i$; 11) $z=-5i$; 12) $z=90$.

2. Kompleks sanlardı algebralıq kórinisinde jazıń:

1) $\operatorname{Re}(z)=4,\quad \operatorname{Im}(z)=-5$; 2) $\operatorname{Re}(z)=-2,\quad \operatorname{Im}(z)=3$;

3) $\operatorname{Re}(z)=0,\quad \operatorname{Im}(z)=8$; 4) $\operatorname{Re}(z)=7,\quad \operatorname{Im}(z)=0$;

5) $\operatorname{Re}(z)=6,\quad \operatorname{Im}(z)=-7$; 6) $\operatorname{Re}(z)=-3,\quad \operatorname{Im}(z)=4$;

7) $\operatorname{Re}(z)=0,\quad \operatorname{Im}(z)=9$; 8) $\operatorname{Re}(z)=2,\quad \operatorname{Im}(z)=0$;

9) $\operatorname{Re}(z)=12,\quad \operatorname{Im}(z)=20$.

3. Teń kompleks sanlardı kórsetiń (**3–4**):

1) $2-4i$; | 2) $2+3i$; | 3) $\frac{2}{3}+i$; | 4) $\sqrt{121}-7i$; | 5) $33+44i$; | 6) $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}\,i$.

4. 1) $4-3i$; | 2) $1+3i$; | 3) $\frac{1}{3}+i$; | 4) $\sqrt{16}-\sqrt{9}i$; | 5) $3+4i$; | 6) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}i$.

5. z sanına túyinles bolǵan $\bar{z}$ sandı tabıń (**5–6**):

1) $z=5-3i$; 2) $z=-5+3i$; 3) $z=1-i$; 4) $z=2+3i$; 5) $z=-7-i$.

6. 1) $z=7{,}2$; 2) $z=6i$; 3) $z=\sqrt{16}-\sqrt{9}i$; 4) $z=-2i+(-7+3i)$.

7. Qosındını tabıń (**7–8**):

1) $(-5+3i)+(2-i)$; | 2) $(-3)+(3-4i)$; | 3) $(2+5i)+(-2-5i)$; | 4) $(-4i)+(3.6-3i)$.

8. 1) $(8-3i)+(8+3i)$; | 2) $(-7+5i)+(7-5i)$; | 3) $9i+(3-8i)$; | 4) $-17i+(-9+16i)$.

9. Ayırmanı tabıń (**9–10**):

1) $(3+4i)-(4+2i)$; 2) $(4-6i)-(3+2i)$; 3) $(2+4i)-(-4+2i)$.

10. 1) $(5+4i)-(5-4i)$; 2) $7-(8+5i)$; 3) $7i-(6i+3)$.

11. Kóbeymeni tabıń (**11–12**):

1) $(4+6i)(3+4i)$; 2) $(5+8i)(3-2i)$; 3) $(6-4i)(3-6i)$.

12. 1) $(-3+2i)(8-4i)$; 2) $\left(\frac{1}{3}-i\right)\left(\frac{1}{2}+i\right)$; 3) $\left(\frac{5}{7}+4i\right)\left(\frac{7}{5}-2i\right)$.

13. Bólinbeni tabıń (**13–14**):

1) $\frac{2+2i}{1-2i}$; 2) $\frac{4-5i}{3+2i}$; 3) $\frac{3+4i}{3-4i}$; 4) $\frac{2+3i}{4-3i}$; 5) $\frac{4-5i}{3+2i}$.

14. 1) $\frac{4-5i}{-2+3i}$; 2) $\frac{3}{5-2i}$; 3) $\frac{5-2i}{3}$; 4) $\frac{7i}{13-i}$; 5) $\frac{7+4i}{5-6i}$.

15. Ámellerdi orınlań (**15–16**):

1) $\frac{(3-4i)(4-3i)}{2+i}$; 2) $\frac{(4-i)(3+2i)}{3-2i}$; 3) $\frac{5-2i}{(2+i)(1-i)}$.

16. 1) $\frac{3-2i}{(1+i)(3-i)}$; 2) $\frac{3}{2-3i}+\frac{3}{2+3i}$; 3) $\frac{2}{1+i}+\frac{5}{2+i}$.

17. Kompleks sanlardı tegislikte súwretleń (**17–18**):

1) $z=3+4i$; | 2) $z=3-4i$; | 3) $z=-3+4i$; | 4) $z=-3-4i$; | 5) $z=2i$.

18. 1) $z=4-2i$; | 2) $z=5+3i$; | 3) $z=\frac{2+i}{2-i}$; | 4) $z=(2-i)(1+i)$; | 5) $z=(2+i)(2-i)$.

88 $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ hám $r\cdot e^{i\varphi}$ $(r>0,\ 0\le\varphi\le 2\pi)$ KÓRINISINDEGI KOMPLEKS SANLAR

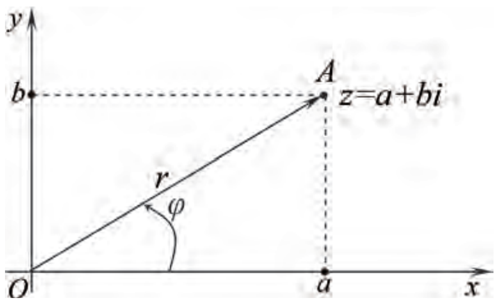
Bul temada kompleks sannıń trigonometriyalıq hám kórsetkishli kórinislerin úyrenemiz.

Trigonometriyaliq kórinisindegi kompleks sanlar

Tegislikte tuwrı múyeshli Dekart koordinatalar sistemasi berilgen bolsın. $z=a+bi$ kompleks sanǵa $(a;\ b)$ koordinatalı A noqat sáykes qoyılǵan, deyik. Koordinatalar bası O hám A noqatların tutastırıp $\overrightarrow{OA}$ vektordı payda etemiz (4-súwret).

O noqattan A noqatqa shekem bolǵan $r=OA$ aralıq ***kompleks sannıń moduli***, abscissa kósheriniń oń baǵıtı hám de $\overrightarrow{OA}$ vektor arasındaǵı (φ) múyesh ***kompleks sannıń argumenti*** delinedi.

$$0\le r<+\infty,\qquad 0\le\varphi<2\pi,\qquad r=\sqrt{a^2+b^2},\qquad \cos\varphi=\frac{a}{r},\qquad \sin\varphi=\frac{b}{r}.$$



4-súwret.

Kompleks sannıń $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ kórinisine onıń trigonometriyalıq kórinisi hám $z=r\cdot e^{i\varphi}$ kórinisine bolsa kórsetkishli kórinisi delinedi. Kompleks sandı trigonometriyalıq kórinisinen algebralıq kórinisine ótkiziw ushın tómendegi formuladan paydalanıladı: $a=r\cos\varphi,\ b=r\sin\varphi$.

1-mısal. Kompleks sanlardı trigonometriyalıq kórinisinde jazıń:

1) i; 2) $-2i$; 3) $-1-i$.

△ 1) $z=i=0+1\cdot i,\quad a=0,\quad b=1,\quad r=\sqrt{0^2+1^2}=1,\quad \cos\varphi=\frac{0}{1}=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$

Demek, $i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, yaǵnıy $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

2) $r=2,\ \varphi=\frac{3\pi}{2}$ bolǵanlıǵı ushın $-2i=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

3) $z=-1-i,\quad a=-1,\quad b=-1,\quad r=\sqrt{2},\quad \cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \varphi=\frac{5\pi}{4}.$

Demek, $-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. ▲

2-mısal. Kompleks sanlardı kórsetkishli kórinisinde jazıń:

1) i; 2) $-2i$; 3) $-1-i$.

△ 1-mısaldıń esaplawlarınan paydalanamız:

$$i=e^{\frac{\pi}{2}i},\qquad -2i=2e^{\frac{3\pi}{2}i},\qquad -1-i=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}.\ ▲$$

Soraw hám tapsırmalar

1. Kompleks sannıń moduli ne? Ol qalay esaplanadı?
2. Kompleks sannıń argumenti ne? Mısal keltiriń.
3. Kompleks sannıń trigonometriyalıq kórinisin túsindiriń.
4. Kompleks sannıń kórsetkishli kórinisin túsindiriń.
5. *Eylerdiń belgili (ataqlı) formulasın* dálilleń: $e^{i\pi}=-1$.

Shınıǵıwlar

19. Kompleks sannıń modulın tabıń (**19–20**):

1) $z=-2+3i$; 2) $z=-2+3i$; 3) $z=1+\sqrt{3}i$; 4) $z=\sqrt{8}-i$.

20. 1) $z=6-8i$; 2) $z=2+2\sqrt{3}i$; 3) $z=\sqrt{3}+i$; 4) $z=2i$.

21. Kompleks sannıń argumentin tabıń (**21–22**):

1) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 2) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 3) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $z=2\sqrt{2}i$.

22. 1) $z=5$; 2) $z=-2i$; 3) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$.

23. Kompleks sandı trigonometriyalıq hám kórsetkishli kórinisinde jazıń (**23–24**):

1) $z=-2-2i$; 2) $z=2-2i$; 3) $z=\sqrt{3}-i$; 4) $z=1-\sqrt{3}i$.

24. 1) $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; 2) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$; 4) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

89-90 TRIGONOMETRIYALÍQ KÓRINISTE BERILGEN KOMPLEKS SANLARDÍŃ KÓBEYMESI HÁM BÓLINBESI

Trigonometriyalıq kóriniste berilgen kompleks sanlardı kóbeytiw

$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ trigonometriyalıq korinistegi kompleks sanlardıń kóbeymesi ushın tómendegi formula orınlı:

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]. \quad (1)$$

z_1 hám z_2 trigonometriyalıq kórinisindegi sanlardı bóliw ushın bolsa $\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}\left[\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right)+i\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\right]$ formula orınlı, $r_1 \neq 0$. (2)

1- mısal. $z_1=3\left(\cos 20°+i\sin 20°\right)$ hám $z_2=2\left(\cos 35°+i\sin 35°\right)$ kompleks sanlardı kóbeytiń.

△ Joqarıdağı qağıyda boyınsha, kóbeymeni tabamız:

$z_1\cdot z_2=3\cdot 2(\cos(20°+35°)+i\sin(20°+35°))=6\left(\cos 55°+i\sin 55°\right).$ ▲

2- mısal. $z_1=2\left(\cos 140°+i\sin 140°\right)$, $z_2=3\left(\cos 150°+i\sin 150°\right)$ va 5 cos hám $z_3=5\left(\cos 70°+i\sin 70°\right)$ kompleks sanlardı kóbeytiń.

△ Joqarıdağı qağıyda boyınsha kóbeymeni tabamız:

$$z_1\cdot z_2\cdot z_3=2\cdot 3\cdot 5\left[\cos\left(140°+150°+70°\right)+i\sin\left(140°+150°+70°\right)\right]=30\ \cos 360$$

$$=30\left(\cos 360°+i\sin 360°\right)=30.$$ ▲

3- mısal. $z_1=6\left(\cos 50°+i\sin 50°\right)$ hám $z_2=2\left(\cos 25°+i\sin 25°\right)$ kompleks sanlar bólinbesin tabıń.

△ Bóliwdiń qağıydasına muwapıq:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{6}{2}\left[\cos\left(50°-25°\right)+i\sin\left(50°-25°\right)\right]=3\left(\cos 25°+i\sin 25°\right).$$ ▲

Natural dárejege kóteriw

$z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ kompleks sandı kvadratqa kóteriw ushın kompleks sanlardı kóbeytiw formulası (1) den paydalanamız:

$$z^2=r^2\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^2=r^2\left(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi\right).$$ Sonday-aq,

$$z^3=\left[r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^3=r^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)\,. \qquad (3)$$

Ulıwma, *Muavr formulası* dep atalatuğın usı

$z^n=\left[r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ formula orınlı, bunda $n\in N$.

4- mısal. $z=3\left(\cos 15°+i\sin 15°\right)$ kompleks sandı kubqa kóteriń:

△ (3) formula boyınsha:

$$z^3=27\left(\cos 45°+i\sin 45°\right)=\frac{27}{2}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)=\frac{27}{\sqrt{2}}(1+i)\,.$$ ▲

5-mısal. $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ kompleks sannıń 10-dárejesin tabıń.

△ Aldın berilgen sannıń modulı hám argumentin tawıp, onı trigonometriyalıq kórinisinde jazıp alamız: $r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$, $\varphi=\frac{\pi}{3}=60°$, $z=1\cdot\left(\cos 60°+i\sin 60°\right)$, bul jerden:

$$z^{10}=\left(\cos 600^\circ+i\sin 600^\circ\right)=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\cdot$$

Soraw hám tapsırmalar

1. Trigonometriyalıq kórinisindegi kompleks sanlar qalay kóbeyttiriledi? Mánisin ashıń hám aytıń.
2. Trigonometriyalıq kórinistegi kompleks sanlar qalay bólinedi? Mánisin ashıń hám aytıń.
3. Trigonometriyalıq kórinistegi kompleks sanlar dárejege qalay kóteriledi?

Shınıǵıwlar

27. Kompleks sanlardı kóbeytiń (**27–28**):

1) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ hám $z_2=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$;

2) $z_1=\frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9})$ hám $z_2=3(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$.

28. 1) $z_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ hám $z_2=\sqrt{3}(\cos\pi+i\sin\pi)$;

2) $z_1=2(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18})$ hám $z_2=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$.

29. Kompleks sanlardı bóliń (**29–30**):

1) $z_1=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$ ni $z_2=2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ ga;

2) $z_1=8(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ ni $z_2=4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ ga.

30. 1) $z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$ ni $z_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ ga;

2) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$ ni $z_2=\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$ ga.

31. Kompleks sandı dárejege kóteriń (**31–32**):

1) $(3(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}))^5$; 2) $(\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}))^6$; 3) $(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}))^7$.

32. 1) $(4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}))^4$; 2) $(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15})^{10}$; 3) $(\cos\frac{\pi}{22}+i\sin\frac{\pi}{22})^{11}$.

33. Ámellerdi orınlań (**33–34**):

1) $\dfrac{(1+i)^5\left(\sqrt{2}-i\right)^4}{(1-i)\left(1+\sqrt{2}\,i\right)^4}$; 2) $\dfrac{(1-i)^4\left(\sqrt{2}+i\right)^3}{(1+i)^4}$; 3) $\dfrac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{10}-(1+i)^{10}\cdot i}$.

34. 1) $\dfrac{2+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 2) $\dfrac{12+5i}{6-8i}+\dfrac{(2-i)^2}{1-2i}$; 3) $\dfrac{3-4i}{3+4i}+\dfrac{5+6i}{5-6i}$.

91 KOMPLEKS SANNAN KVADRAT KOREN SHÍǴARÍW

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ kórinisindegi kompleks sannan kvadrat koren shıǵarıw ushın izlenip atırǵan kompleks sannıń modulın x hám argumentin y dep tómendegi teńlikti jazamız:

$$\sqrt{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y).$$

Teńliktiń eki bólegin kvadratqa kóterip,

$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=x^2(\cos 2y+i\sin 2y)$ hám de $x^2=r$, $2y=\varphi+2\pi n$ bolǵanlıqtan

$x=\sqrt{r}$, $y=\dfrac{\varphi}{2}+\pi n$, $n\in Z$ qatnasların tabamız. Demek, izlenip atırǵan z kompleks sannıń kvadrat koreni ushın

$$\beta=\sqrt{r}\left[\cos\frac{\varphi+2\pi n}{2}+i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{2}\right]$$

formula orınlı. n ge $0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ mánislerin qoyıp, túrli korenlerdi tabamız. Tekseriw nátiyjesinde tek ǵana 2 dana túrli mánis bar ekenligi anıqlanadı, yaǵnıy

$$n=0 \text{ de } \beta_1=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right), \quad (1)$$

$$n=1 \text{ de } \beta_2=\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right]. \quad (2)$$

1- mısal. $z=9(\cos 60°+i\sin 60°)$ kompleks sannan kvadrat koren shıǵarıń.

△ Joqarıdaǵı formula boyınsha, kvadrat korenlerdi esaplaymız:

$$\sqrt{z}=3\left[\cos(30°+180°n)+i\sin(30°+180°n)\right].$$

Bul formulada

$n=0$ ushın $\sqrt{z}=3(\cos 30°+i\sin 30°)=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ hám

$n=1$ ushın $\sqrt{z}=3(\cos 210°+i\sin 210°)=-\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ kvadrat korenler tabıladı. ▲

Kompleks sannan kub koren shıǵarıwda tómendegi formuladan paydalanıladı:

$$z_n=\sqrt[3]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y)=\sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi+360°n}{3}+i\sin\frac{\varphi+360°n}{3}),$$

$n=0, 1, 2.$

Bul tabılǵan sanlar Dekart koordinatalar sistemasında orayı koordinata basında hám radiusı $\sqrt[3]{r}$ bolǵan sheńberge ishley sızılǵan durıs úshmúyeshlik tóbelerinen ibarat boladı.

2- mısal. $z=1$ kompleks sannıń kub korenin tabıń hám sızılmada kórsetiń.

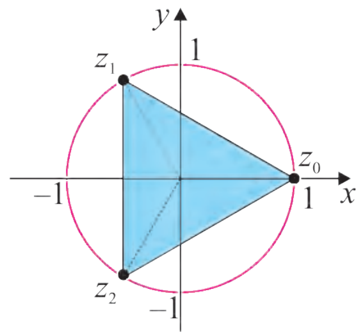
Bul sannıń modulı $r=1$ hám argumenti $\varphi=0°$ bolǵanı ushın,

$$z_n=\sqrt[3]{1}=1\cdot\left(\cos\frac{0°+360°n}{3}+i\sin\frac{0°+360°n}{3}\right),\ n=0,\ 1,\ 2.$$

Bul jerden: $n=0$ de $z_0=1\cdot(\cos0°+i\sin0°)=1,$

$n=1$ de $z_1=1\cdot(\cos120°+i\sin120°)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$

$n=2$ de $z_2=1\cdot(\cos240°+i\sin240°)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$



5-súwret

Bul sanlar durıs úshmúyeshliktiń tóbelerinen ibarat ekenin 5-súwretten kóriwimiz múmkin.

Kompleks sannan 4-dárejeli koren shıǵarıwda tómendegi formuladan paydalanıladı:

$$z_n=\sqrt[4]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[4]{r}\left(\cos\frac{\varphi+360°n}{4}+i\sin\frac{\varphi+360°n}{4}\right),$$

bul jerde $n=0, 1, 2, 3.$

3- mısal. $z=i$ kompleks sannan 4-dárejeli koren shıǵarıń.

Bul sannıń modulı $r=1$, argumenti $\varphi=90°$ bolǵanı ushın

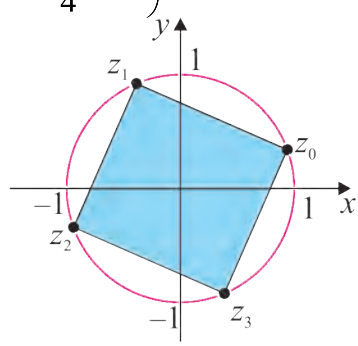
$$z_n=\sqrt[4]{1(\cos90°+i\sin90°)}=1\cdot\left(\cos\frac{90°+360°n}{4}+\sin\frac{90°+360°n}{4}\right).$$

Bul jerden: $n=0$ de $z_0=\cos22{,}5°+i\sin22{,}5°,$

$n=1$ de $z_1=\cos112{,}5°+i\sin112{,}5°,$

$n=2$ de $z_2=\cos202{,}5°+i\sin202{,}5°,$

$n=3$ te $z_3=\cos292{,}5°+i\sin292{,}5°.$



Bul sanlar orayı koordinata basında hám radiusı 1 bolǵan sheńberge ishley sızılǵan kvadrattıń ushlarınan ibarat boladı (6-súwret).

Soraw hám tapsırmalar

1. Kompleks sannan kvadrat koren qaysı formula arqalı tabıladı?
2. Muavr formulası degen ne? Onıń mánisin ashıń hám aytıp beriń.

Shınıǵıwlar

35. Kompleks sannan kvadrat koren shıǵarıń (**35–36**):

1) $z=25\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $z=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\cdot\sin\frac{\pi}{18}\right)$;

3) $z=\cos\frac{\pi}{5}+i\cdot\sin\frac{\pi}{5}$; 4) $z=\cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}$;

5) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{30}+i\cdot\sin\frac{\pi}{30}\right)$; 6) $z=\frac{1}{49}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

7) $z=\cos\frac{\pi}{10}+i\cdot\sin\frac{\pi}{10}$; 8) $z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$;

36.

1) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

3) $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$; 4) $z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$;

5) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 6) $z=\frac{16}{9}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

7) $z=5(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$; 8) $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.

IV bap boyınsha shınıǵıwlar

37. Esaplań:

1) $(3+4i)(2-5i)+(3-4i)(2+5i)$; 2) $(1+3i)^3-\left(4+i^5\right)$;

3) $\frac{(1-2i)^2}{1+3i}$; 4) $5-7i+8i^2-9i^3+i^4$.

38. Algebralıq kórinisinde jazıń:

1) $z=\left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{3i}\right)^2$; 2) $z=\frac{12-13i}{8+6i}+\frac{(1+2i)^2}{i+3}$; 3) $\frac{4i}{(\sqrt{3}-i)^2}$.

39. Esaplań (**39–42**):

1) $(1+i)^{10}$; 2) $(1-i)^4\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^3$; 3) $(1+i)^{2018}\cdot(1-1)^{2018}$;

4) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8$; 5) $\frac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i\right)}$; 6) $\left(\frac{\sqrt{2}-i}{1+i}\right)^{10}$.

40. 1) $z=\dfrac{(2+i)^2}{3-4i}$; 2) $z=\dfrac{(1+2i)^3}{2i}-3i^{10}$; 3) $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5$;

4) $z=\dfrac{3+2i}{1+4i}-i^7$; 5) $\dfrac{(4-i)}{3+4i}$; 6) $\dfrac{2-3i}{1-4i}$.

41. 1) $\dfrac{2+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 2) $\dfrac{12+5i}{6-8i}+\dfrac{(2-i)^2}{1-2i}$;

3) $(2-3i)^3-(2+3i)^3$; 4) $\dfrac{(4+3i)(2+3i)^2}{6+8i}$;

5) $\dfrac{33+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 6) $\dfrac{12-5i}{6-8i}+\dfrac{(2+i)^2}{1-2i}$.

42. 1) $(2-2i)\cdot 2\sqrt{3}\left(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ\right)$; 2) $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{3}-3i\right)$.

43. Bóliwdi orınlań:

1) $5\left(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ\right):\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$; 2) $(6+6i):3\left(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ\right)$.

44. Dárejege kóteriń:

1) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$; 2) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^4$; 3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)^6$;

4) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$; 5) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^{10}$; 6) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)^{10}$.

45. Kvadrat korendi esaplań:

1) $\sqrt{-27i}$; 2) $\sqrt{6-6\sqrt{3}\,i}$; 3) $\sqrt{8+8\sqrt{3}\,i}$; 4) $\sqrt{-256}$.

46. Teńlikti tekseriń:

1) $\left[\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right]^5+\left[\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}\right]^5=\sqrt{3}$;

2) $\dfrac{\left(\sin 26^\circ+i\cos 154^\circ\right)\cdot\left(\sin 27^\circ+i\cos 153^\circ\right)^3}{\sin 17^\circ-i\cos 17^\circ}=-1$.

47. Kub korendi esaplań:

1) $\sqrt[3]{1+i}$; 2) $\sqrt[3]{-i}$; 3) $\sqrt[3]{8}$; 4) $\sqrt[3]{1-i}$; 5) $\sqrt[3]{-8}$.

48. 4-dárejeli koren shıǵarıń:

1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sqrt[4]{16}$; 3) $\sqrt[4]{1+i}$; 4) $\sqrt[4]{1-i}$; 5) $\sqrt[4]{-16}$.

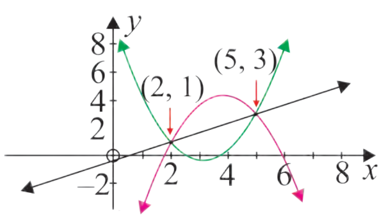
Baqlaw jumısı namunalari

1. Esaplań: $(35-7i)\cdot(4-6i)$.
2. Bóliwdi orınlań: $\dfrac{8-i}{40+3i}$.
3. Kóbeytiń:
   $3(\cos5°+i\sin5°)\cdot8(\cos3°+i\sin3°)$.
4. Dárejege kóteriń: $(3(\cos4°+i\sin4°))^6$
5. Kvadrat koren shıǵarıń: $\sqrt{64i}$.

JUWAPLAR
III bap

73. a) Barlıq *x* abscissalar túrli bolǵanı ushın bul funkciya boladı; b) eki noqatta *x* abscissalar birdey bolǵanı ushın bul funkciya bólmaydı; c) barlıq noqatlarda *x* abscissalar birdey bolǵanı ushın bul funkciya bólmaydı; d) barlıq *x* abscissalar túrli bolǵanı ushın bul funkciya boladı; e) barlıq *x* abscissalar túrli bolǵanı ushın bul funkciya boladı; f) barlıq noqatlarda *x* abscissalar birdey bolǵanı ushın bul funkciya bólmaydı. **74.** a) Funkciya; b) funkciya; c) funkciya; d) funkciya emes; e) funkciya; f) funkciya emes; g) funkciya; h) funkciya emes. **75.** Yaq, hár qanday vertikal tuwrı funkciya bolmaydı. **76.** Yaq, $y=\pm\sqrt{9-x^2}$. **77.** a) 2; b) 8; c) –1; d) –13; e) 1. **78.** a) 2; b) 2; c) –16; d) –68; e) $\frac{32}{9}$ **79.** a) –3; b) 3; c) 3; d) –3; e) $\frac{15}{2}$. **80.** a) $7–3a$; b) $7+3a$; c) $–3a–2$; d) $10–3b$; e) $1–3x$; f) $7–3x–3h$. **81.** a) $2x^2+19x+43$; b) $2x^2–11x+13$; c) $2x^2–3x–1$; d) $2x^4+3x2–1$; e) $2x^4–x^2–2$; f) $2x^2+4hx+2h^2+3x+3h–1$. **82.** a) **I)** $-\frac{7}{2}$; **II)** $-\frac{3}{4}$; **III)** $-\frac{4}{9}$; b) $x=4$. **84.** $V(4)=6210$. Bul úskeneniń 4 jıldan soń bolatuǵın bahası. $t=4{,}5$ jıldan keyin úskeneniń bahası 5780 boladı. Úskeneniń dáslepki bahası 9650 ga teń.

85.



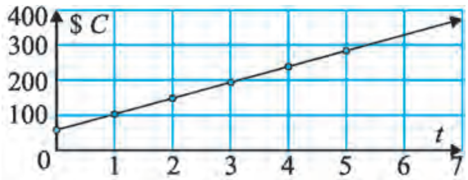
86. $f(x)=-2x+5$. **87.** $a=3$, $b=-2$. **88.** $a=3$, $b=-1$, $c=-4$. **90.** a) **I)** $x>0$; b) **II)** $-2\le x\le3$; c) **I)** $-2<x\le0$; **II)** $0\le x<2$; d) **I)** $x\le2$; **II)** $x\ge2$; e) **II)** $x\in\mathbb{R}$; f) **I)** $x\in\mathbb{R}$; g) **I)** $1\le x\le5$; **II)** $x\le1$, $x\ge5$; h) **I)** $2\le x<4$, $x>4$; **II)** $x<0$, $0<x\le2$; i) **I)** $x\le0$, $2\le x\le6$; **II)** $0\le x\le2$, $x\ge6$. **92.** a) V(0)=25000 evro. Bul avtomashinanıń dáslepki bahası; b) $V(3)=16\,000$. Bul avtomashinanıń 3 jıldan soń bolǵan bahası; c) $t=5$.

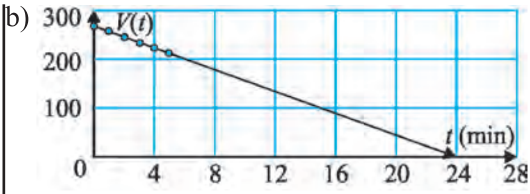
93. a)

t	0	1	2	3	4	5
C	60	105	150	195	240	285

94. a)

t	0	1	2	3	4	5
V	265	254	243	232	221	210





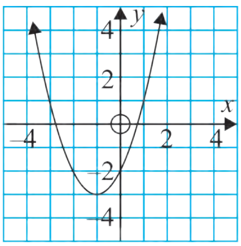
b) $C=60+45t$; c) $ 352,50. c) $V(t) = 265–11t$; d) **I)** 100 *l*.

95. a) Awa; b) joq; c) awa; d) awa; e) awa; f) joq. **96.** a) Yaq; b) awa; c) ha; d) awa; e) joq; f) joq.

97. a) $x=-3$; b) $x=-2$ yamasa –3; c) $x=1$ yamasa 4; d) haqıyqıy sheshimge iye emes. **98.** a) **I)** 75 m; **II)** 195; **III)** 275 m; b) **I)** $t=2$ s yamasa t=14 s; **II)** $t=0$ s yamasa $t=16$ s. **99.** a) 40 mıń, 480 mıń; b) 10 yamasa 62.

100. a)

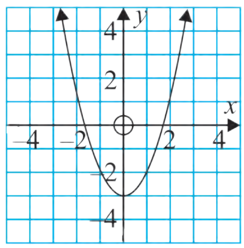
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1	–2	–3	–2	1	6	13



$y=x^2+2x-2$

b)

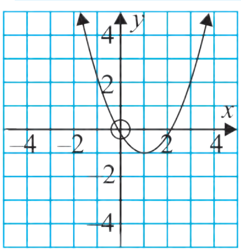
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	6	1	–2	–3	–2	1	6



$y=x^2-3$

c)

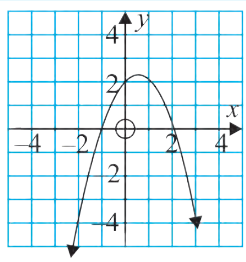
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	15	8	3	0	–1	0	3



$y=x^2-2x$

d)

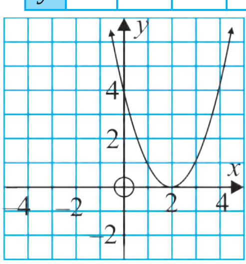
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–10	–4	0	2	2	0	–4



$f(x)=-x^2+x+2x$

e)

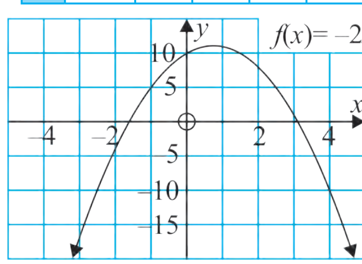
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	25	16	9	4	1	0	1



$y=x^2-4x+4$

f)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–17	–4	5	10	11	8	1

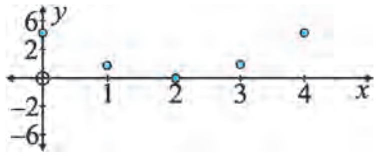


$f(x)= -2x^2+3x+10$

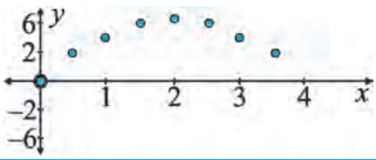
101. a) 3; b) –1; c) –4; d) 1; e) 5; f) 0; g) 8; h) –5; i) 2. **102.** a) 3; b) –6; c) 49; d) 15; e) 0; f) 20. **105.** a) x=3; b) x=–5/2; c) x=1; d) x=–4; e) x=3; f) x=–4. **106.** a) x=4; b) x=–2; c) x=1; d) x=11/2; e) x=5; f) x=–2. **107.** a) x=–3; b) x=4; c) x=–5/4; d) x=3/2; e) x=0; f) x=7/10; g) x=3; h) x=5/3; i) x=–4. **108.** a) (2, 3); b) (–1, 4); c) (3, 8); d) (0, 3); e) (–3, –18); f) (1, –1); g) (1/2, –5/4); h) (3/4, –7/8); i) (6, 7). **109.** a) $y=2(x-1)(x-2)$; b) $y=2(x-2)^2$; c) $y=(x-1)(x-3)$; d) $y=-(x-3)(x+1)$; e) $y=-3(x-1)^2$; f) $y=-2(x+2)(x-3)$. **110.** a) $y=3/2(x-2)(x-4)$; b) $y=-1/2(x+4)(x-2)$; c) $y=-4/3(x+3)^2$; d) $y=1/4(x+3)(x-5)$; e) $y=-(x+3)(x-3)$; f) $y=4(x-1)(x-3)$. **111.** a) 3m; b) 0,5s; c) 4m.

113. a) dáwirli;

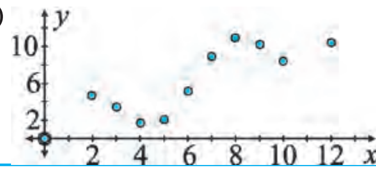
b) dáwirli emes;



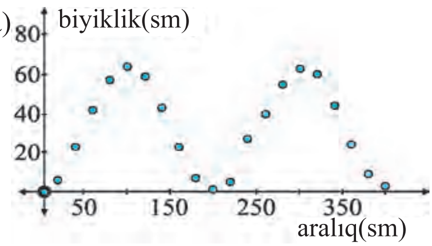
c) dáwirli emes;



d) dáwirli emes;



114. a)

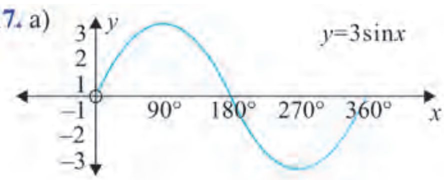


b) Kósher teńlemesi maksimum dáwir amplituda sáykes ráwishte y=32; 64 sm; 200 sm; 32 sm ge teń.

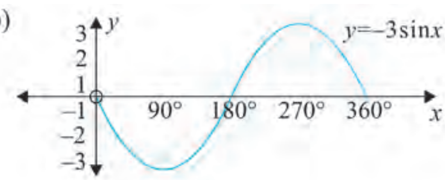
115. a) dáwirli; b) dáwirli; c) dáwirli; d) dáwirli emes; e) dáwirli; f) dáwirli.

116. a) 2; b) 8; c) (2,1); d) 8; e) y=–1.

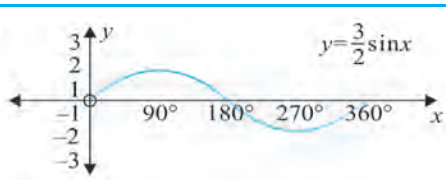
117. a)



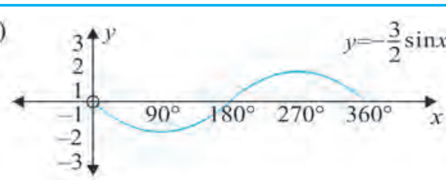
b)



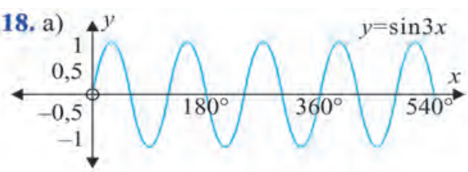
c)



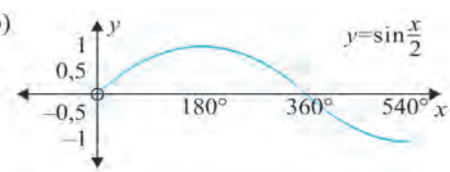
d)



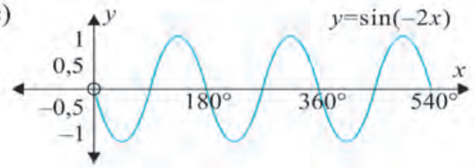
118. a)



b)



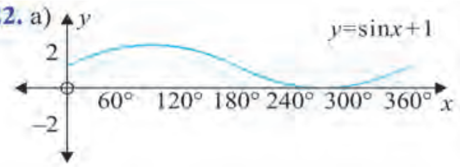
c)



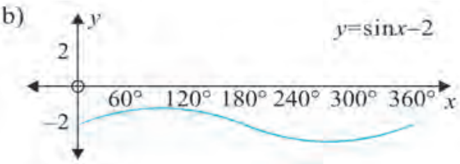
119. a) 90°; b) 90°; c) 1080°; d) 600°; **120.** a) b=2/5; b) b=3; c) b=1/6.

121. a) y=3sin$x$; b) y=sin$x$–2; c) y=–2sin$x$–1; d) y=sin2x; e) y=–4sin(x/2); f) y=sin(x/2); g) y=2sin3x; h) y=2sin2x–3.

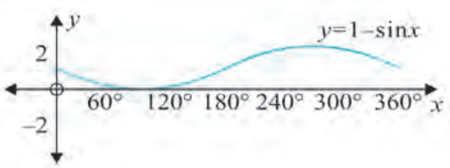
122. a)



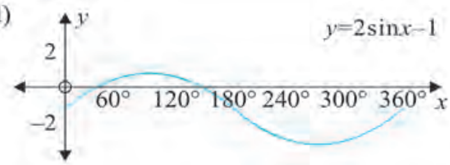
b)



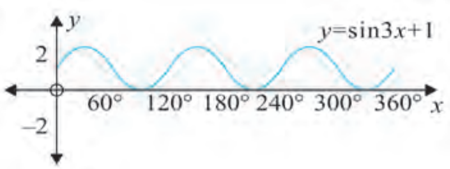
c)



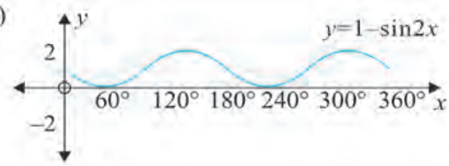
d)



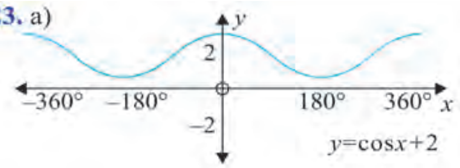
e)



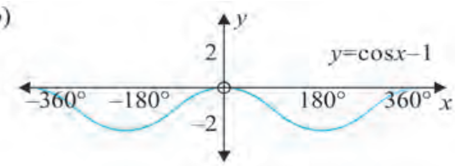
f)



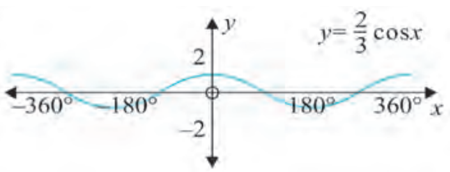
123. a)



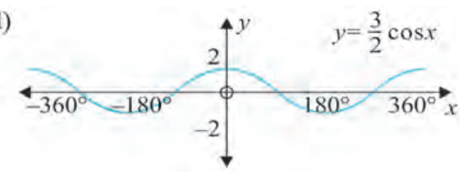
b)



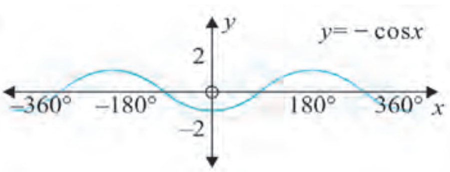
c)



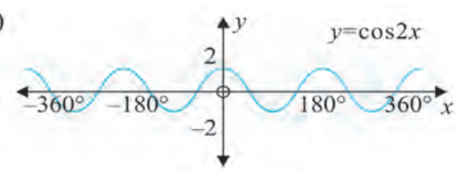
d)



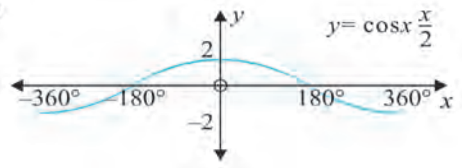
e)



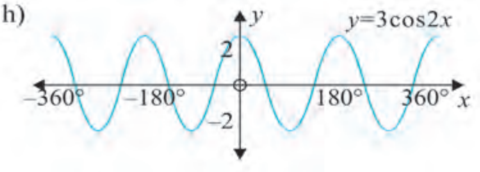
f)



g)



h)



124. a) 120°; b) 1080°; c) 720°. **126.** a) y=2cos2x; b) y=cos(x/2)+2; c) y=–5$x$cos2x. **127.** T=9,5cos(30t)–9,5. **130.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **131.** 1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$. **132.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) π. **136.** 1) 0; 2) $\frac{4\pi}{3}$. **138.** 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) –π. **140.** 1) 2π; 2) $\frac{3\pi}{2}$. **142.** 1) mániske iye; 2) mániske iye emes; 3) mániske iye emes.

144. 1) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z.$ **146.** 1) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2n\pi,\ n\in Z.$

148. 1) $x=-\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in Z.$ **150.** 1) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z.$

151. 1) $x=(-1)^{n}\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z.$ **152.** 2) $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4},\ n\in Z.$

153. 1) $x_1=k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$

156. 1) $x_1=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z.$

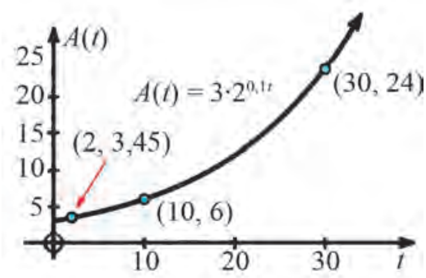
157. 1) $x_1=-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\quad x_2=(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z.$

158. 2) $x=\pm\arccos(1-\frac{\sqrt{7}}{2})+2n\pi,\ n\in Z.$ **159.** 2) $x_1=-\frac{\pi}{4}+n\pi,$ $x_2=\arccos 4+n\pi,\ n\in Z.$ **160.** 1) $x=\frac{2n\pi}{3},\ n\in Z;$ 3) $x_1=\frac{n\pi}{2},$ $x_2=\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5},\ n\in Z.$ **162.** 1) $\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$.

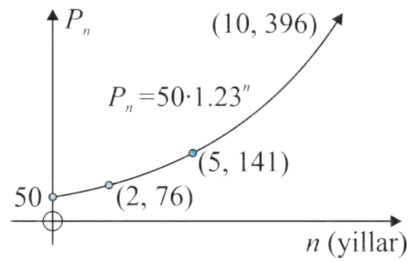
163. 1) $\left[\frac{\pi}{4}+2n\pi;\frac{3\pi}{4}+2n\pi\right],\ n\in Z;$ 2) $\left(\frac{3\pi}{4}+2n\pi;\frac{5\pi}{4}+2n\pi\right),\ n\in Z;$ 3) $\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi;-\frac{\pi}{4}+n\pi\right),\ n\in Z.$ **167.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{3}+n\pi\right],\ n\in Z.$ **173.** 1) y=2x+6.

174. 1) $y=13\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{17}}$. **175.** 1) $x^2+y^2=49$, sheńber. **176.** 1) $(x-3)^2+(y-7)^2=36$, sheńber. **177.** 1) 3; 2) 1; 3) 4; 4) 4. **178.** 1) úlken; 2) kishi. **180.** 1) anıqlanıw oblastı: $(-\infty;+\infty)$, mánisler oblastı: $(0;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$ aralıqta ósedi. **181.** 1) ósedi; 2) kemeyedi; 3) ósedi. **183.** 1) $(-\infty;1]$; 2) $\left(-\infty;\dfrac{4}{9}\right)$; 7) $[1;+\infty]$; 12) $\left(-\infty;\,-2-\sqrt{34}\right)\cup\left(-2+\sqrt{34};\,+\infty\right)$.
184. 1) $(-\infty;2]$. **185.** 1) 3; 2) –2; 3) –2; 4) –3; 5) –3. **186.** 1) úlken; 2) úlken; 3) kishi.
187. 1) 2; 2) 5; 3) 125; 4) 45; 5) $\dfrac{1}{36}$; 9) –2. **188.** 1) $(2,5;+\infty)$; 2) $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$; 3) $(-2;2)$. **190.** 1) $\dfrac{1}{32}$; 2) 1; 3) 4; 4) 2; 8) –2; 10) 0,5 hám 1; 15) $\dfrac{1}{7}$ hám 49. **191.** 1) $(64;+\infty)$; 2) $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)\cup(27;+\infty)$; 7) $(2;5)$.

192. a) 3 m^2;
b) **I)** 3,45 m^2; **II)** 6 m^2; **III)** 24 m^2;
c)

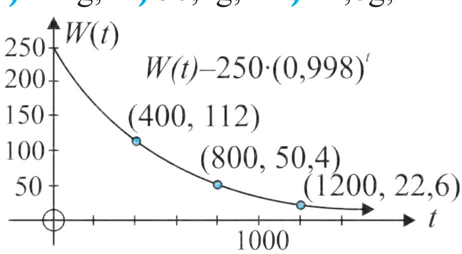


193. a) 50;
b) **I)** 76; **II)** 141; **III)** 396;
c)



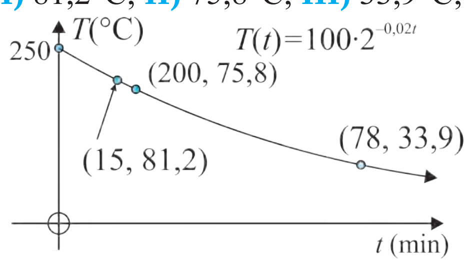
194. a) V_0; b) $2V_0$; c) 100%; d) 183 procentke artadı.

195. a) 250g;
b) **I)** 112g; **II)** 50,4g; **III)** 22,6g;
c)

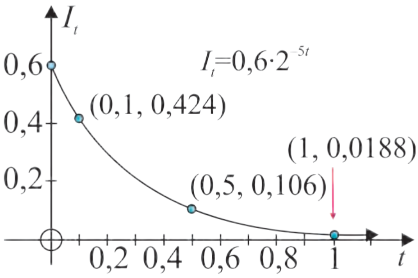


d) ≈346.

197. a) 100°C;
b) **I)** 81,2°C; **II)** 75,8°C; **III)** 33,9°C;
c)



198. a) 0,6 amper;
b) **I)** 0,424 amper; **II)** 0,106 amper;
III) 0,0188 amper;
c)



199. a) L_0; b) 99%. **200.** Shama menen 3 saat 15 min. **201.** 37,8 oy. **202.** 10,8 minut.
203. 22,7 yil. **204.** b) 1. **205.** a) $\{-14;\ 3;\ 15\}$; c) $\{-4;4\}$. **206.** a) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$.
207. a) $(-\infty;-6]\cup[-2;+\infty)$.
208. a) $\left(-2;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$;
c) $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$.

209. a) $\{(7;8);(8;7);(-7;-8);+8;-7)\}$. **212.** a) 3; b) 2. **213.** a) kishi; b) kishi. **216.** a) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; b) $(-\infty;+\infty)$. **217.** a) $(0;1]$; b) $(3;+\infty)$; c) $(-\infty;\ 0)$. **218.** a) $\frac{1}{15}$; b) 0 hám 1; c) 1 hám –2. **219.** c) 0. **220.** a)$\{(2;3);(-3;8)\}$. **221.** a) $(-\infty;0]$; b) $(-\infty;1,5)$. **222.** a) kishi; b) úlken. **223.** a) $(-3,5;\ +\infty)$; b) $(-2;2)$. **224.** a) $2\sqrt{5}$. **225.** b) $(100000;0,1)$. **226.** a) $(3;1)$. **227.** a) $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$. **229.** a) kishi; b) úlken.
230. a) $-\frac{2\pi}{3}$ **231.** c) $x_1=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ x_2=\arccos\frac{1}{4}+n\pi,\ n\in Z.$
234. a) $\left(-\frac{\pi}{6}+2n\pi;\frac{7\pi}{6}+2n\pi\right),\ n\in Z.$ **235.** c) $\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{9};\frac{\pi}{27}+\frac{n\pi}{9}\right),\ n\in Z.$

IV bob

1. 7) Re(z)=–7, Im(z)=3; 8) Re(z)=8, Im(z)=5; 9) Re(z)=–0,5, Im(z)=–6; 10) Re(z)=–5,7, Im(z)=–5; 11) Re(z)=0, Im(z)=–5; 12) Re(z)=90, Im(z)=0.
6. 1) $\bar{z}=7{,}2$; 3) $\bar{z}=4+3i$. **8.** 1) 16; 3) $3+i$. **10.** 1) $8i$; 2) $-1-5i$; 3) $-3+i$. **12.** 2) $1\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i$.
14. 1) $-\frac{23}{13}-\frac{2}{13}i$; 3) $\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i$. **16.** 2) $\frac{12}{13}$. **20.** 1) 10; 2) 4; 3) 2; 4) 2. **22.** 1) 0;
2) $\frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{11\pi}{6}$. **24.** 1) $2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ va $2\cdot e^{\frac{7\pi i}{4}}$.
28. 1) $z_1\cdot z_2=\cos\frac{13\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{13\pi}{12}$. **30.** 1) $\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$. **32.** 2) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$.
34. 1) $-\frac{42}{29}$; 2) $-18i$. **36.** 1) $z_0=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$, $z_1=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{6})$.

Paydalanılǵan hám usınıs etiletuǵın ádebiyatlar

1. Alimov Sh.A., Xolmuhamedov O.R., Mirzaahmedov M.A. Algebra hám analiz tiykarları. 10-klass ushın sabaqlıq. Tashkent: "O‘qituvchi", 2004.

2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2 nd education. Haese and Harris publications. 2010.

3. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа. Часть 1, Ташкент: “O‘qituvchi”, 2016.

4. Abduhamidov A.U. hám basqalar. Algebra hám matematikalıq analiz tiykarları, 1-bólim, Tashkent: "O‘qituvchi", 2012.

5. Филичева Н.П. Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. “Рязань” 2009.

6. Исроилов М.И. Ҳисоблаш методлари. Тошкент: “Ўқитувчи” 1988.

7. Муравин Г.К. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. М., “Дрофа”, 2006.

8. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я.Виленкина. М.”Просвещение”, 2004.

9. http://www.ams.org/mathweb/ - Internetda matematika (ingliz tilinde).

10. “Математика в школе” jurnalı.

11. Fizika, matematika hám informatika. Ilimiy – metodikalıq jurnal (2001 – jıldan baslap shıǵa baslaǵan).

12. Mirzaahmedov M. A., Ismailov Sh.N. Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, "Turon-Iqbol", 2016.

13. Математикадан қўлланма, I ва II қисмлар. Ўқитувчилар учун қўлланма. Проф. Азларов Т.А. таҳрири остида. Тошкент, "Ўқитувчи", 1979.

14. Мирзааҳмедов М. А., Сотиболдиев Д. А. Ўқитувчиларни математик олимпиадаларга тайёрлаш. Тошкент, "Ўқитувчи", 1993.

15. http://www.uzedu.uz – Xalıq bilimlendiriw ministrliginiń xabar bilimlendiriw portalı.

16. http://www.eduportal.uz – Multimediya orayı xabar bilimlendiriw portalı.

17. http://www.problems.ru – Matematikadan máseleler izlew sisteması (rus tilinde).

18. http://matholymp.zn.uz – Ózbekistanda hám dúnyada matematikalıq olimpiadalar.

MAZMUNÍ

MATEMATIKA

GEOMETRIYA

10-klass

10-klasta geometriyanıń stereometriya bólegin – keńisliktegi geometriyalıq figuralardıń (denelerdiń) qásiyetlerin sistemalı úyreniwge kirisiledi. Sabaqlıqtan tiykarǵı keńisliktegi figuralar (deneler), kópjaqlılar hám aylanıw deneleri hám olardıń tiykarǵı qásiyetleri, keńislikte parallel hám perpendikulyar tuwrılar hám tegislikler hám de olardıń qásiyetlerine sáykes máseleler orın alǵan.

"Geometriya-10" sabaqlıǵında teoriyalıq materiallar ápiwayı hám anıq tilde ańlatıwǵa háreket qılınǵan. Barlıq tema hám túsinikler túrli turmıslıq mısallar arqalı ashıp berilgen. Hár bir temadan sóń berilgen sorawlar, dálillewge, esaplawǵa hám sızıwǵa say kóplep másele hám mısallar oqıwshını dóretiwshilik pikirlewge shaqıradı, ózlestirilgen bilimlerdi tereńlestiriwge hám bekkemlep barıwǵa járdem beredi.

"Geometriya-10" sabaqlıǵı ulıwma bilimlendiriw mekteplerinıń 10-klass hám orta arnawlı, kásip-óner bilimlendiriw mákemeleri oqıwshılarına mólsherlengen, onnan geometriyanı óz betinshe úyrenbekshi, tákirarlamaqshı bolǵan kitap oqıwshılar da paydalanıwı múmkin.

MAZMUNÍ

Sabaqlıqtıń "Geometriya" bóliminde qollanılǵan belgiler hám olardıń mánisi:

– teoremanıń mazmunı

– teorema dálilleniwiniń sońı

– aksiomanıń mazmunı

– ámeliy qollanıwlar

– tema boyınsha sorawlar

– tarıyxıy úzindiler

– aktivlestiriwshi shınıǵıw

– geometriyalıq basqatırmalar

IV BÓLIM

KEŃISLIKTE TUWRÍLAR HÁM TEGISLIKLERDIŃ PARALLELLIGI

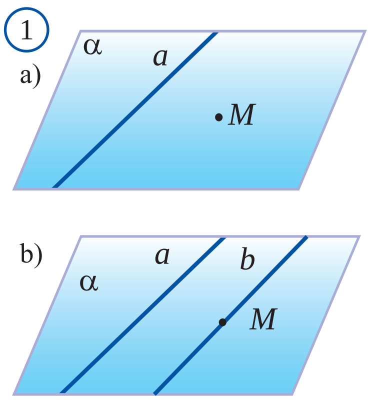
10 KEŃISLIKTE TUWRÍLARDÍŃ ÓZ ARA JAYLASÍWÍ

Keńisliktegi eki a hám b tuwrılar bir tegislikte jatsa hám kesilispese, olar *parallel tuwrılar* delinedi. a hám b tuwrılardıń parallelligi $a||b$ kórinisinde jazıladı.

Tegislikte berilgen noqat arqalı berilgen tuwrıǵa tek ǵana bir parallel tuwrı ótkiziw múmkin. Bunday qásiyet – keńislikte de orınlı boladı:

4.1-teorema. Keńislikte berilgen tuwrıda jatpaytuǵın noqattan usı tuwrıǵa tek ǵana bir parallel tuwrı ótkiziw múmkin.

Dálilleniwi. a – berilgen tuwrı hám M – bul tuwrıda jatpaytuǵın noqat bolsın (1.a-súwret). Dálillengen 2.1-teorema boyınsha, berilgen a tuwrı hám onda jatpaytuǵın M noqat arqalı tek ǵana bir α tegislik ótkiziw múmkin.



α tegislikte bolsa M noqat arqalı berilgen a tuwrıǵa parallel tek ǵana bir b tuwrını ótkiziw múmkin (1.b-súwret).

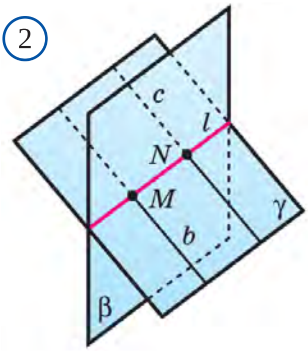
Tap usı b tuwrı izlengen tek ǵana bir tuwrı boladı. ❑

Tegislikte jatırǵan eki parallel tuwrılardan biri úshinshi tuwrını kesip ótse, olardıń ekinshisi de bul tuwrını kesip ótedi. Usıǵan uqsas qásiyet – keńislikte de orınlı boladı:

4.2-teorema. Keńislikte berilgen eki parallel tuwrılardan biri tegislikti kesip ótse, olardıń ekinshisi de bul tegislikti kesip ótedi.

Dálilleniwi. b hám c parallel tuwrılar berilgen bolıp, olardıń biri – b tuwrı berilgen β tegislikti M noqatta kesip ótsin (2.a-súwret).

2



b hám *c* tuwrılar parallel bolǵanlıǵı ushın olar bir tegislikte jatadı. Bul – γ tegislik bolsın.

β hám γ tegislikler ushın *M* ulıwma noqat. Onda S3 aksioma boyınsha, bul tegislikler bir *l* tuwrı boyınsha kesilisedi. Bul tuwrı γ tegislikte jatadı hám *b* tuwrını *M* noqatta kesip ótedi. Sonıń ushın, bul tuwrı *b* tuwrıǵa parallel bolǵan *c* tuwrını da *N* noqatta kesip ótedi.

l tuwrı β tegislikte de jatqanı ushın *N* noqat bul β tegislikke de tiyisli boladı. Demek, *N* noqat β hám γ tegislikler ushın ulıwma noqat.

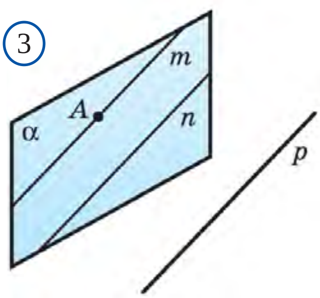
Endi *c* tuwrınıń β tegislik penen basqa ulıwma noqatı joq ekenligin kórsetemiz. Kerisinshesi bolsın dep esaplayıq. Meyli, *c* tuwrınıń β tegislik penen jáne basqa *K* ulıwma noqatı bar bolsın. Onda S2 aksioma boyınsha, *c* tuwrı β tegislikte jatadı. Onda *c* tuwrı β hám γ tegislikler ushın ulıwma boladı. Biraq *l* – bunday tuwrı edi. Bunnan *c* tuwrınıń *l* tuwrı menen ústpe-úst túsiwi kelip shıǵadı. Bunıń bolıwı múmkin emes. Sebebi, *b* tuwrı *c* tuwrıǵa parallel hám *l* tuwrını kesip ótedi. Qarama-qarsılıq kerisinshesin oylaǵanımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.❑

Eki tuwrınıń hár biri úshinshi tuwrıǵa parallel bolsa, olar óz ara parallel bolıwı, planimetriyadan sizge belgili. Bul qásiyet keńislikte de orınlı bolıp, ol tuwrılardıń parallellik teoreması dep júrgiziledi.

4.3.-teorema. Úshinshi tuwrıǵa parallel eki tuwrı óz ara parallel boladı.

Dálilleniwi. Meyli, *m* hám *n* tuwrılar *p* tuwrıǵa parallel bolsın. *m* hám *n* tuwrılardıń bir tegislikte jatıwı hám óz ara kesilispewin, yaǵnıy parallel ekenligin kórsetemiz.

3



m tuwrıda *A* noqattı alamız hám bul noqat hámde *n* tuwrı arqalı α tegislik ótkizemiz. *m* tuwrınıń α tegislikte jatıwın dálilleymiz.

Meyli, bunday bolmasın. *m* tuwrı α tegislik penen ulıwma noqatqa iye bolǵanlıǵı ushın, ol tegislikti kesip ótedi. Onda 4.2-teorema boyınsha, bul tegislikti *m* tuwrıǵa parallel bolǵan *p* tuwrı da, *p* tuwrıǵa parallel bolǵan *n* tuwrı da, kesip ótedi. Biraq bunday bolıwı múmkin emes, sebebi *n* tuwrı α tegislikte jatadı.

Demek, *m* hám *n* tuwrılar α tegislikte jatadı.

Endi bul tuwrılardıń kesilispeytuǵının dálilleymiz. Jáne kerisinshesi bolsın dep esaplayıq. *m* hám *n* tuwrılar qanday da *B* noqatta kesilissin. Onda *B* noqat arqalı p tuwrıǵa parallel eki m hám n tuwrılar ótedi. Al, bul 4.1-teorema boyınsha bolıwı múmkin emes.❑

Endi parallelepipedtiń tómendegi qásiyetlerin dálilleymiz.

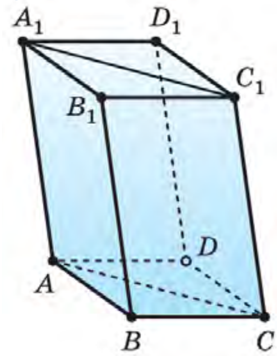
1-qásiyet. ***$ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedte (4-súwret) ultan diagonalları hám qaptal qabırǵalardan dúzilgen ACC_1A_1 tórtmúyeshlik parallelogrammnan ibarat boladı.***

Haqıyqattan da, parallelepipedtiń ABB_1A_1 hám BCC_1B_1 jaqları anıqlaması boyınsha, parallelogrammnan ibarat.

Bul parallelogrammlardıń qarama-qarsı tárepleri óz ara teń boladı. Dara jaǵdayda, $AB = A_1B_1$ hám $BC = B_1C_1$.

Parallelepiped anıqlaması boyınsha, $AA_1 \parallel BB_1$ hám $BB_1 \parallel CC_1$. Onda 3.2-teorema boyınsha, $AA_1 \parallel CC_1$ hám $AA_1 = CC_1$ boladı. Demek, ACC_1A_1 tórtmúyeshlik – parallelogramm.

4



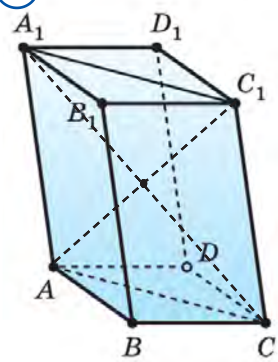
2-qásiyet. ***$ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedtiń (4-súwret) qarama-qarsı jaqları óz ara teń.***

Joqarıdaǵı qásiyet boyınsha, ACC_1A_1 – parallelogramm hám $AC = A_1C_1$. Onda ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikler úsh tárepi boyınsha teń bolıp, ABC hám $A_1B_1C_1$ múyeshler de óz ara teń boladı. Nátiyjede, $ABCD$ hám $A_1B_1C_1D_1$ parallelogrammlar da óz ara teń boladı.

Basqa qarama-qarsı jaqlardıń teńligi de usı tárizde dálillenedi.

3-qásiyet. ***Parallelepipedtiń barlıq diagonalları bir noqatta kesilisedi hám bul noqatta teń ekige bólinedi (5-súwret).***

5



1-qásiyet boyınsha, ACC_1A_1 – parallelogramm. Onda bul parallelogrammnıń diagonalları A_1C hám AC_1 bir noqatta kesilisedi hám kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi.

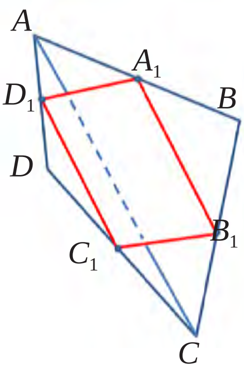
Qalǵan diagonallardıń kesilisiwi hám bul noqatta teń ekige bóliniwi usıǵan uqsas dálillenedi.

Bir tuwrı yamasa parallel tuwrınılarda jatıwshı kesindiler (nurlar) óz ara *parallel kesindiler (nurlar)* dep ataladı.

Másele. Tóbeleri bir tegislikte jatpaytuǵın keńisliktegi tórtmúyeshlik tárepleriniń ortaları parallelogrammnıń tóbeleri bolatuǵının dálilleń.

Dálilleniwi. $ABCD$ – keńisliktegi tórtmúyeshlik hám A_1, B_1, C_1 hám D_1 – tórtmúyeshlik tárepleriniń ortaları bolsın (6-súwret). Ol jaǵdayda, A_1B_1 kesindi

6



– ABC úshmúyeshliktiń AC tárepine parallel orta sızıǵı, al C_1D_1 – ACD úshmúyeshliktiń AC tárepine parallel orta sızıǵı boladı.

4.3-teorema boyınsha, A_1B_1 hám C_1D_1 tuwrılar parallel boladı. Demek, olar bir tegislikte jatadı.

A_1D_1 hám B_1C_1 tuwrılardıń parallelligi de tap usılay dálillenedi.

Sonday qılıp, $A_1B_1C_1D_1$ tórtmúyeshlik bir tegislikte jatadı hám onıń qarama-qarsı tárepleri parallel. Demek, ol parallelogramm boladı.❑

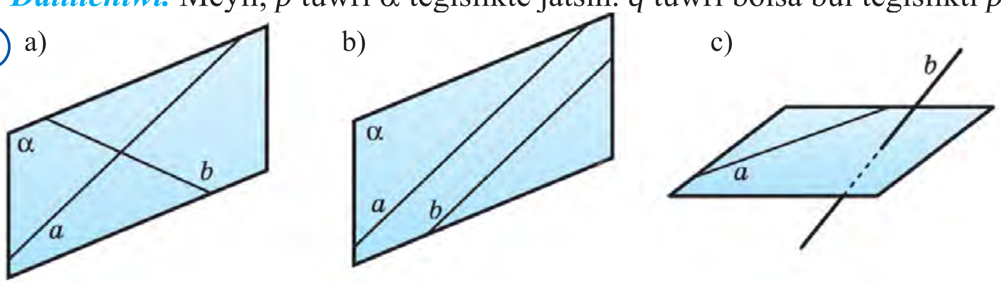
Eger keńislikte eki tuwrı óz ara kesilisse yamasa óz ara parallel bolsa, olar bir tegislikte jatadı (7.a hám 7.b-súwret). Keńislikte bir tegislikte jatpaytuǵın tuwrılar *ayqasıwshı tuwrılar* dep ataladı (7.c-súwret).

Ayqasıwshı tuwrılardı tómendegi teorema boyınsha tanıp alıw múmkin:

4.4-teorema. Eger eki tuwrıdan biri bazı bir tegislikte jatsa, al ekinshisi bul tegislikti birinshi tuwrı jatpaytuǵın noqatta kesip ótse, ol jaǵdayda bul tuwrılar ayqasıwshı boladı.

Dálilleniwi. Meyli, p tuwrı α tegislikte jatsın. q tuwrı bolsa bul tegislikti p

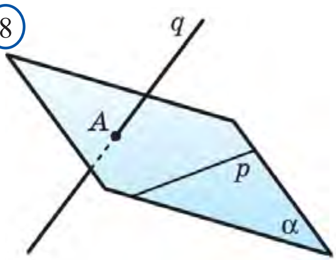
7



tuwrıǵa tiyisli bolmaǵan A noqatta kesip ótsin (8-súwret). p hám q tuwrılardıń ayqasıwshı ekenligin dálilleymiz.

Kerisi bolsın dep esaplayıq: p hám q tuwrılar qanday da bir β tegislikte jatsın. Ol jaǵdayda β tegislikke p tuwrı hám A noqat tiyisli boladı. Óz náwbetinde A noqat q tegislikke de tiyisli. Demek, α hám β tegislikler ústpe-úst túsedi. Nátiyjede,

8

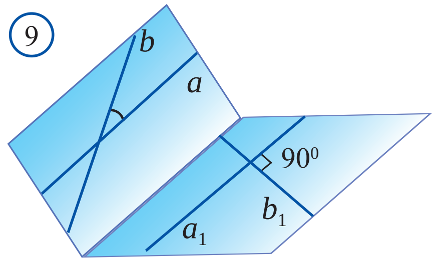


shárt boyınsha α tegislikke tiyisli bolmaǵan q tuwrı bul tegislikke tiyisli bolıp qaldı. Qarama-qarsılıq kerisinshesin oylaǵanımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.❑

Eki tuwrınıń kesilisiwinen payda bolǵan qońsılas múyeshlerdiń kishisi *eki tuwrı arasındaǵı múyesh* delinedi.

Ayqasıwshı tuwrılar arasındağı múyesh dep, bul tuwrılarğa parallel bolğan kesilisiwshi tuwrılar arasındağı múyeshke aytıladı (9-súwret).

9



Ámelde a hám b ayqasıwshı tuwrılar arasındağı múyeshti tabıw ushın (10-súwret)

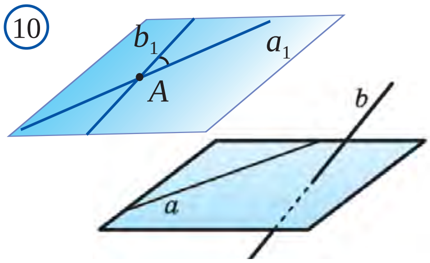
1) bazı bir A noqat tańlanadı.

2) A noqattan ayqasıwshı tuwrılarğa parallel a_1 hám b_1 tuwrılar ótkiziledi;

3) bul tuwrılar arasındağı múyesh ólshenedi.

Bul algoritmniń nátiyjesi – A noqatqa baylanıslı emesligi haqqında oylap kóriń.

10



Arasındağı múyesh 90° qa teń tuwrılar *perpendikulyar tuwrılar* dep ataladı. Parallel tuwrılar arasındağı múyesh 0° qa teń dep esaplanadı.

? Tema boyınsha sorawlar hám shınığıwlar

1. *Parallel tuwrılardıń qanday qásiyetlerin bilesiz?*
2. *Tuwrılardıń parallellik teoremasın aytıp beriń*
3. *Parallelepipedtiń qanday qásiyetlerin bilesiz?*
4. *Tuwrılardıń ayqasıwshılıq teoremasın aytıp beriń.*
5. *Tuwrılar arasındağı múyesh qalay anıqlanadı?*
6. *Ayqasıwshı tuwrılar parallel bolıwı múmkin be?*

4.1. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedtegi; b) $ABCA_1B_1C_1$ prizmadağı parallel qabırğalar juplıqların anıqlań.

4.2. Qanday piramidalarda parallel qabırğalar boladı?

4.3. Tegislikte tuwrı parallel tuwrılardan birin kesip ótse, ekinshisin de kesip ótiwi belgili. Bul qásiyet keńislikte de orınlı bola ma?

4.4. Durıs tastıyıqlawdı tabıń:

A) Keńislikte tuwrı jatpaytuğın noqattan oğan parallel kóplep tuwrılar ótkiziw múmkin;

B) úshinshi tuwrığa parallel tuwrılar óz ara kesilisedi; *C*) eger eki tuwrı tegislikte jatsa, olar kesilisedi; *D*) tuwrıdan hám onda jatpaytuğın noqattan eki túrli tegislik ótkiziw múmkin; E) keńisliktiń tegislikte jatpaytuğın noqatınan bul tegislikti kesetuğın kóplep tuwrılar ótkiziw múmkin.

4.5. *A* ushı *α* tegislikte jatırğan *AB* kesindide *C* noqat tańlanğan. *B* hám *C* noqatlardan ótkizilgen parallel tuwrılar a tegislikti, sáykes túrde, B_1 hám C_1 noqatlarda kesip ótedi. Eger: a) C noqat B kesindiniń ortası, hám $BB_1 = 14$ sm; b) $AC : CB = 3 : 2$ hám $BB_1 = 50$ sm bolsa, CC_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

4.6. Bir tegislikte jatpaytuǵın *MNOP* parallelogramm hám *EK* ultanlı *MNEK* trapeciya berilgen. a) *PO* hám *EK* tuwrılardıń óz ara jaylasıwın anıqlań; b) trapeciyanıń ultanları $MN = 45$ sm, $EK = 55$ sm ge teń bolıp, oǵan ishley sheńber sızıw múmkin. Trapeciyanıń perimetrin tabıń.

4.7. a hám b tuwrılar bir tegislikte jatadı. Bul tuwrılardıń múmkin bolǵan óz ara jaylasıwın kórsetiń.

A) a hám b parallel; *B*) a hám b kesilisedi; *C*) a hám b kesilispeydi; *D*) a hám b ayqasıwshı; *E*) a hám b parallel emes.

4.8. a hám b tuwrılar c tuwrıǵa parallel. a hám b tuwrılar óz ara qalay jaylasıwı múmkin?

4.9. 11-súwrette α hám β tegislikler b tuwrı boylap kesilisedi. Eger $a||b$, c hám b tuwrılar parallel bolmasa, a hám c tuwrılar óz ara qalay jaylasıwı múmkin?

4.10. 12-súwrette M noqat *ABC* úshmúyeshlik tegisligine tiyisli emes. *MA, MC, MB* tuwrılarǵa ayqasıwshı tuwrılardı anıqlań.

4.11. 13-súwrette *PQ* tuwrı *ABCD* tórtmúyeshlik tegisligine tiyisli emes hám *BC* ǵa parallel. a) *PQ* hám *AB*; b) *PQ* hám *CD*; c) *PQ* hám *AD* qanday tuwrılar?

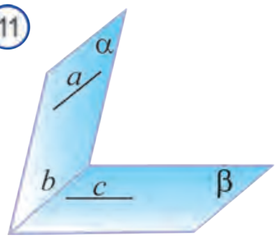
4.12. 14-súwrette M noqat *ABC* úshmúyeshlik tegisligine tiyisli emes. *MA, MB, MC* kesindilerdiń ortaları, sáykes túrde, *K, F, P* noqatlar menen belgilengen. 1) *KP*; 2) *PF*; 3) *KF*; 4) *KM*; 5) *PM*; 6) *FM*; 7) *AB*; 8) *BC*; 9) *AC* tuwrılardan qaysıları óz ara parallel?

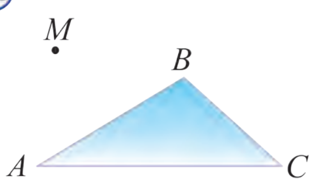
4.13. *M, N, U, V* noqatlar *ABCD* piramidanıń, sáykes túrde, *AC, AD, BD* hám *BC* qabırǵalarınıń ortaları (15-súwret). Eger $AB = 20$ sm, $CD = 30$ sm bolsa, *MNUV* tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

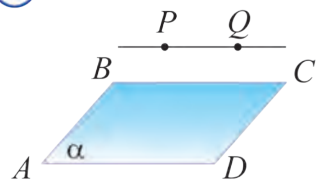
4.14. *H, G, F, S* noqatlar úshmúyeshli *KLMN* piramidanıń, sáykes túrde, *MN, ML, LK* hám *KN* qabırǵalarınıń ortaları (16-súwret). Eger $LK = 18$ mm, $MN = 22$ mm bolsa, *HGFS* tórt múyeshtiń perimetrin tabıń.

4.15. Tuwrıdan túrli eki tegislik ótkiziw múmkinligin dálilleń.

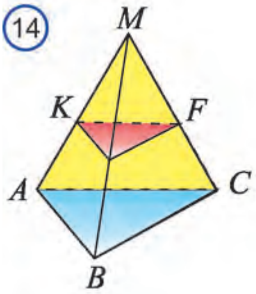
4.16. Bir tegislikte jatpaytuǵın tórt noqat berilgen. Olardıń úshewi arqalı neshe

11


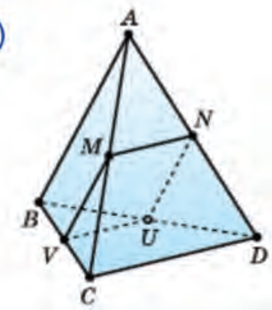
12


13


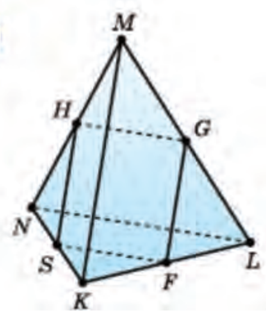
14



15



16



tegislik ótkiziw múmkin?

4.17. *A, B, C* noqatlar berilgen eki tegisliktiń hár birinde jatadı. Bul noqatlardıń bir tegislikte jatıwın dálilleń.

4.18. *a* tuwrı boylap kesilisiwshi eki tegislik berilgen. *b* tuwrı olardan birinde jatadı hám ekinshisin kesip ótedi. *a* hám *b* tuwrılardıń kesilisiwini dálilleń.

4.19. Úsh tegisliktiń hár ekeyi óz ara kesilisedi. Tegisliklerdiń kesilisiw tuwrılarınan ekeyi bazı bir noqatta kesilisse, úshinshi kesilisiw sızıǵı da bul noqattan ótiwin dálilleń.

4.20. Eger tórtmúyeshliktiń diagonalları kesilisse, onda onıń tóbeleri bir tegislikte jatıwın dálilleń.

4.21. *K, Z, M, N* noqatlar *SABC* úshmúyeshli piramidanıń, sáykes túrde, *SA, AC, BC, SB* kesindileriniń ortaları. Eger piramidanıń qaptal qabırǵaları *b*, ultanınıń tárepi *a* ǵa teń bolsa, *KZMN* tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

4.22. *XU* hám *VT* tuwrılar parallel, al *XY* hám *VT* tuwrılar ayqasıwshı. Eger: a) $\angle YXU = 40^{\circ}$; b) $\angle YXU = 135^{\circ}$; c) $\angle YXU = 90^{\circ}$ bolsa, *XY* hám *VT* tuwrılar arasındaǵı múyeshti tabıń.

4.23. *l* tuwrı *ABCD* parallelogrammnıń *BC* tárepine parallel hám onıń tegisliginde jatpaydı. *l* hám *CD* tuwrılar ayqasıwshı ekenligin dálilleń. Eger piramidanıń múyeshlerinen biri: a) 58°; b) 133° bolsa, *l* hám *CD* tuwrılar arasındaǵı múyeshti tabıń.

11 KEŃISLIKTE TUWRÍLAR HÁM TEGISLIKTIŃ ÓZ ARA JAYLASÍWÍ

Eger tuwrı menen tegislik kesilispese, *tuwrı hám tegislik parallel* delinedi. Tuwrı menen tegisliktiń parallelligi tómendegi teorema arqalı anıqlanadı.

4.5. Teorema. Eger tegislikte jatpaytuǵın tuwrı usı tegisliktegi bazı bir tuwrıǵa parallel bolsa, bul tuwrı tegisliktiń ózine de parallel boladı.

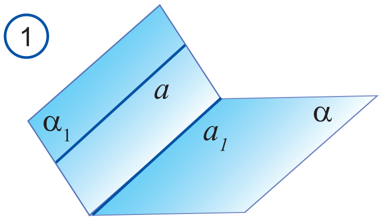
Dálilleniwi. Meyli, α – tegislik, *a* – onda jatpaytuǵın tuwrı, a_1 bolsa α tegisliktegi jatqan hám *a* ǵa parallel tuwrı bolsın.

a hám a_1 tuwrılar arqalı α_1 tegislikti ótkizemiz (1-súwret). α hám α_1 tegislikler a_1 tuwrı boyınsha kesilisedi.

Eger a tuwrı α tegislikti kesip ótse, ol jaǵdayda kesilisiw noqatı a_1 tuwrıǵa tiyisli bolar edi. Biraq, bunıń iláјı joq, sebebi a hám a_1 tuwrılar óz ara parallel. Sonday qilip, a tuwrı α tegislikti kesip óte almaydı.

Demek, a tuwrı α tegislikke parallel.❑

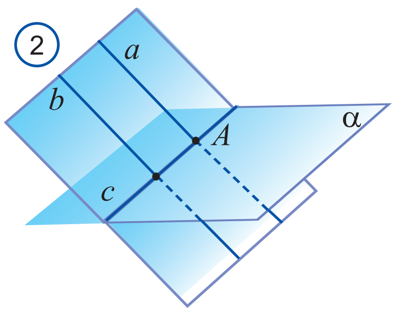
Másele. Eger tegislik eki parallel tuwrıdan birin kesip ótse, ekinshisin de kesip ótiwin dálilleń.



Dálilleniwi. a hám b – eki parallel tuwrı, α bolsa a tuwrını A noqatta kesip ótiwshi tegislik bolsın (2-súwret).

a hám b tuwrılardan tegislik ótkizemiz. Ol α tegislikti bazı bir c tuwrı boyınsha kesedi. c tuwrı a tuwrını A noqatta kesip ótedi.

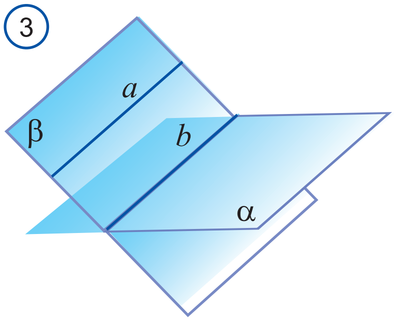
Demek oǵan parallel bolǵan b tuwrını da kesip ótedi. c tuwrı α tegislikte jatqanı ushın α tegislik b tuwrını da kesip ótedi.



4.6-teorema. Eger bir tegislik ekinshi tegislikke parallel bolǵan tuwrıdan ótse, bul tegisliklerdiń kesilisiw tuwrısı da berilgen tuwrıǵa parallel boladı.

Dálilleniwi. Meyli, a tuwrı α – tegislikke parallel hám β tegislikte jatsın. b tuwrı bolsa α hám β tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵı bolsın (3-súwret). Ol jaǵdayda, a hám b tuwrılar β tegislikte jatadı hám óz ara kesilispeydi. Keri jaǵdayda, a tuwrı β tegislikti kesip ótken bolar edi.

Demek, a hám b tuwrılar óz ara parallel.❑



Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar

1. *Tuwrı hám tegislik keńislikte óz ara qalay jaylasıwı múmkin?*
2. *Tuwrı hám tegislik qashan parallel boladı?*
3. *Tuwrınıń tegislikke parallellik teoremasın aytıp beriń .*
4. *Keńislikte tuwrı hám tegisliklerdiń jaylasıwı menen baylanıslı qanday qásiyetlerdi bilesiz?*

4.24. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń; b) $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ altımúyeshli durıs prizmanıń bir-birine parallel bolǵan qabırǵa hám jaqların anıqlań.

4.25. Durıs tastıyıqlawdı kórsetiń:

A) Keńisliktegi tuwrıda jatpaytuǵın noqattan bul tuwrıǵa parallel kóplep tuwrılar ótkiziw múmkin;

B) Úshinshi tuwrıǵa parallel tuwrılar bir noqatta kesilisedi;

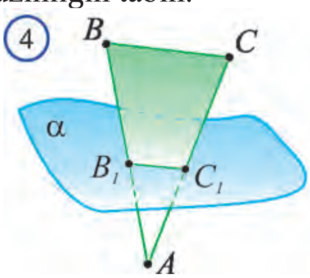
C) Eger tuwrınıń eki noqatı tegislikke tiyisli bolsa, tuwrı tegislikti kesip ótedi;

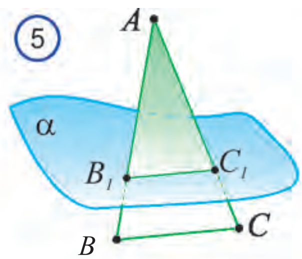
D) Tuwrı hám onda jatpaytuǵın noqattan eki hár qıylı tegislik ótkiziw múmkin;

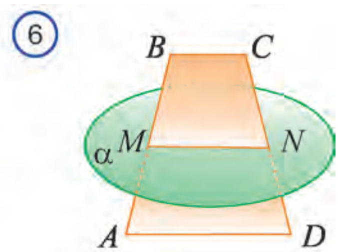
E) Keńisliktegi tegislikte jatpaytuǵın noqattan berilgen tegislikti kesip ótiwshi kóplep tuwrılar ótkiziw múmkin.

4.26. A hám C noqatlar α tegislikte jatadı. B hám D noqatlar β tegislikte jatadı. AC, CD, BD, AB, BC hám AD tuwrılardan qaysıları β tegislikti kesip ótedi?

4.27. ABC úshmúyeshlik α tegislikti B_1 hám C_1 noqatlarda kesip ótedi (4-súwret). Eger $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15$ sm, $BC || B_1C_1$ bolsa, B_1C_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń.







4.28. α tegislik ABC úshmúyeshliktiń AB hám AC táreplerin B_1 hám C_1 noqatlarda kesip ótedi (5-súwret). Eger $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1C_1 = 12$ sm, $BC || \alpha$ bolsa, BC kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

4.29. α tegislik $ABCD$ trapeciyanıń AD ultanına parallel hám qaptal táreplerin M hám N noqatlarda kesip ótedi (6-súwret). Eger $AD = 17$ sm, $BC = 9$ sm bolsa, MN kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

4.30. Tegislikke onda jatpaytuǵın noqattan neshe parallel tuwrı ótkiziw múmkin?

4.31. a tuwrı α tegislikke parallel. Durıs tastıyıqlawlardı tabıń.

A) a tuwrı α tegisliktiń tek ǵana bir tuwrıǵa parallel boladı;

B) a tuwrı α tegisliktiń bir tuwrıdan basqa barlıq tuwrılarına ayqasıwshı boladı;

C) α tegislikte a tuwrıǵa parallel hám ayqasıwshı bolǵan kóplep tuwrılar tabıladı;

D) α tegislikte tek ǵana bir a tuwrıǵa parallel hám bul tegisliktiń qálegen noqatınan ótiwshi tuwrı bar.

4.32. *A, B, C, D* noqatlar bir tegislikte jatpaydı. *M, N, K, Z* noqatlar, sáykes túrde, *AD, BD, BC, AC* kesindilerdiń ortaları. Eger *CD*=*AB* bolsa, *MK* hám *NZ* tuwrılardıń perpendikulyarlıǵın dálilleń.

4.33. *ABCD* parallelogrammnıń *AB* hám *BC* tárepleri α tegislikti kesip ótedi. *AD* hám *DC* tuwrılar ham α tegislikti kesip ótiwin dálilleń.

4.34. *ABC* hám *ABD* úshmúyeshlikler bir tegislikte jatpaydı. *CD* tuwrıǵa parallel bolǵan qálegen tuwrınıń bul úshmúyeshlikler tegisligin kesip ótiwin dálilleń.

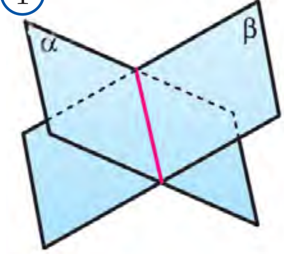
4.35. Berilgen eki tuwrını kesip ótiwshi tuwrılardıń bir tegislikte jatıwın dálilleń.

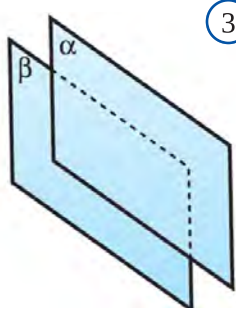
12 KEŃISLIKTE TEGISLIKLERDIŃ ÓZ ARA JAYLASÍWÍ

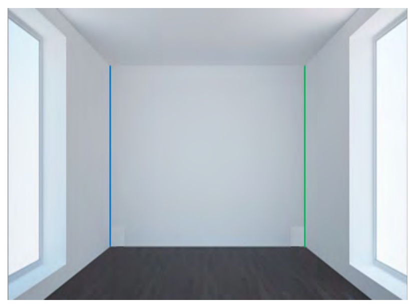
Eki tuwrı yaki ulıwma noqatqa iye, yaki ulıwma noqatqa iye bolmawı múmkin. Birinshi jaǵdayda S3 aksioma boyınsha bul tegislikler ulıwma tuwrıǵa da iye boladı, yaǵnıy tuwrı boylap kesilisedi (1-súwret). Ekinshi jaǵdayda tegislikler kesilispeydi (2-súwret).

Kesilispeytuǵın tegislikler *parallel tegislikler* dep ataladı. Parallel tegislikler haqqında bólmeniń polı hám potologı, qarama-qarsı diywalları mısal bolıwı múmkin (3-súwret).

Eki tegisliktiń paralleligi tómendegi teorema arqalı anıqlanadı.

1


2


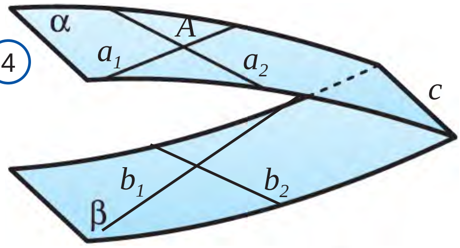
3


4.7-teorema. Eger bir tegisliktegi kesilisiwshi eki tuwrı ekinshi tegisliktegi eki tuwrıǵa sáykes túrde parallel bolsa, bul tegislikler parallel boladı.

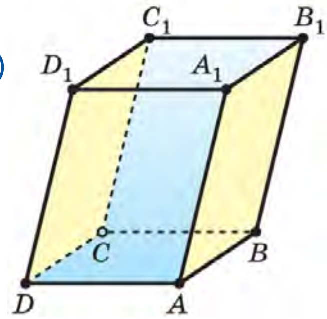
Dálilleniwi. Meyli, α hám β – berilgen tegislikler, *a* hám *b* – α tegislikte jatırǵan hám *A* noqatta kesilisiwshi tuwrılar, a_1 hám b_1 bolsa – β tegislikte jatırǵan hám sáykes túrde, *a* hám *b* tuwrılarǵa parallel tuwrılar bolsın (4-súwret).

Meyli, α hám β – tegislikler óz ara parallel bolmasın, yaǵnıy qanday da *c* tuwrı boylap kesilissin. Ol jaǵdayda 4.6-teorema boyınsha, a_1 hám a_2 tuwrılar, sáykes túrde, b_1 hám b_2 tuwrılarǵa parallel bolıp, β tegislikke de parallel boladı. Sonıń ushın olar bul tegislikte jatırǵan c tuwrını da kesip ótpeydi.

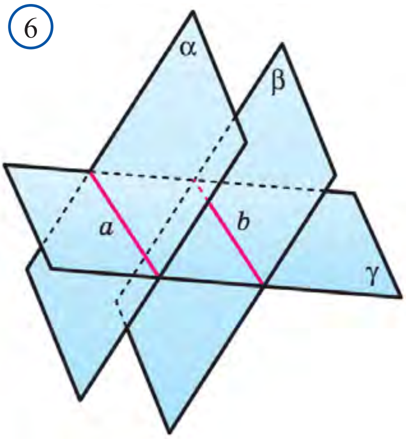
Solay etip, α tegislikte jatırǵan A noqat arqalı c tuwrıǵa parallel eki a_1 hám a_2 tuwrı ótpekte. Parallellik aksiomasına kóre, bunday bolıwı múmkin emes. Qarama-qarsılıq oylaǵanımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.❑

4


Bul teoremadan paydalanıp, parallelepipedtiń qaptal jaqları (5-súwret) parallel bolıwın óz betińizshe dálilleń.

5


4.8-teorema. Eki parallel tegisliktiń úshinshi tegislik penen kesilisiw tuwrıları óz ara parallel boladı.

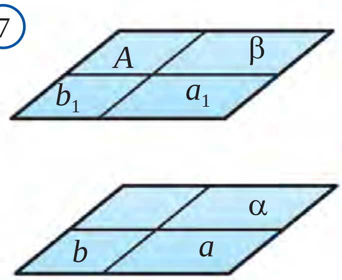
6


Dálilleniwi. Meyli, α hám β parallel tegislikler γ tegislikti, sáykes túrde, a hám b tuwrılar boylap kesip ótsin (6-súwret). a hám b tuwrılar parallel ekenligin dálilleymiz.

Meyli, a hám b tuwrılar qanday da bir Q noqatta kesilissin. Ol jaǵdayda Q noqat α tegislikte jatadı, sebebi a tuwrı α tegislikte jatadı. Sonday-aq, Q noqat β tegislikte jatadı, sebebi b tuwrı β tegislikte jatadı. Nátiyjede, α hám β tegislikler ulıwma Q noqatqa iye bolmaqta. Al, bunıń shárt boyınsha iláji joq. Qarama-qarsılıq oylaǵanımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.❑

4.9-teorema. Berilgen tegislikke oǵan tiyisli bolmaǵan noqattan jalǵız parallel tegislik ótkiziw múmkin.

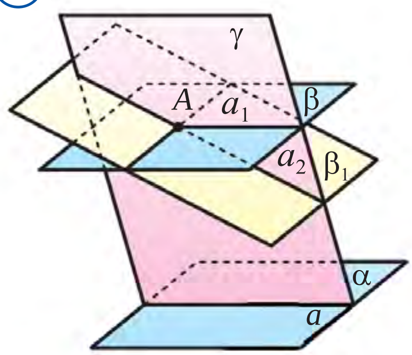
Dálilleniwi. Berilgen α tegislikte kesilisetuǵın eki a, b tuwrı ótkizemiz. Berilgen A noqattan olarǵa parallel a_1, b_1 tuwrılardı ótkizemiz (7-súwret).

7


a_1, b_1 tuwrılar arqalı β tegislik ótkizemiz. Bul tegislik 3.7-teorema boyınsha, α tegislikke parallel bolıp, izlenip atırǵan tegislik boladı.

Endi bul tegisliktiń jalǵız ekenligin kórsetemiz. Meyli, α tegislikke parallel jáne bir β_1 tegislik bar

8



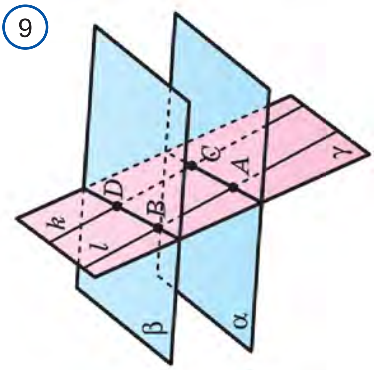
bolsın (8-súwret). A noqattan hám a tuwrıdan ótiwshi γ tegislikti ótkizemiz. Bul tegislik β tegislikti a_1 tuwrı boylap, β_1 tegislikti a_2 tuwrı boylap kesip ótedi. a_1, a_2 tuwrılar 3.6-teorema boyınsha a tuwrıǵa parallel boladı. Biraq, bunıń bolıwı múmkin emes, sebebi tegislikte onda jatpaytuǵın noqattan tek ǵana bir parallel tuwrı ótkiziw múmkin. Qarama-qarsılıq oylaǵanımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.❑

4.10-teorema. Úshinshi tegislikke parallel eki tegislik óz ara parallel boladı.

Bul teoremanı óz betińizshe dálilleń.

4.11-teorema. Parallel tegislikler arasındaǵı parallel tuwrılar kesindileri teń boladı.

9



Dálilleniwi. Meyli, α hám β tegislikler k hám l tuwrılardan AB hám CD kesindilerdi ajıratsın (9-súwret).

Bul kesindilerdiń teń ekenligin kórsetemiz.

k hám l tuwrılardan ótiwshi γ tegislik parallel tegisliklerdi AC hám BD tuwrılar boylap kesip ótedi. Nátiyjede, qarama-qarsı tárepleri parallel bolǵan $ABCD$ tórtmúyeshlikke, yaǵnıy parallelogrammǵa iye bolamız. Parallelogrammnıń qarama-qarsı tárepleri óz ara teń boladı. Dara jaǵdayda, $AB = CD$. ❑

4.12-teorema. Úsh parallel tegislikler arasındaǵı qálegen tuwrılar kesindileri óz ara proporsional boladı.

Teoremani óz betińizshe dálilleń.

1. *Tegislikler keńislikte qalay jaylasıwı múmkin?*
2. *Parallel tegislikler dep qanday tegisliklerge aytıladı?*
3. *Tegisliklerdiń parallellik teoremasın aytıp beriń.*
4. *Keńislikte tegisliklerdiń jaylasıwı menen baylanıslı qanday qásiyetlerin bilesiz?*
5. *Parallelepipedtiń qaptal jaqları parallel bolıwın tiykarlań.*

? *Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar*

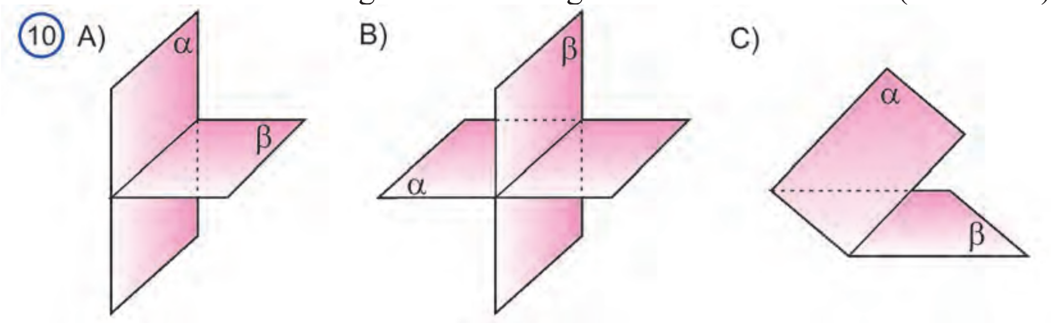
4.36. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedtiń; b) $ABCA_1B_1C_1$ prizmanıń parallel jaqların anıqlań.

4.37. Bir de ulıwma noqatı bolmaǵan α hám β tegislikler keńislikte qalay jaylasadı?

4.38. α hám β tegislikler parallel. a hám b tuwrılar α tegislikte jatadı, c hám d tuwrılar bolsa β tegislikte jatadı. Tómendegi tastıyıqlawlardan qaysıları durıs:

1) $a \parallel b$; 2) $c \parallel b$; 3) $b \parallel b$; 4) $b \parallel a$; 5) $c \parallel a$; 6) $d \parallel b$; 7) $a \parallel a$; 8) $d \parallel a$.

4.39. Kesilisiwshi eki tegislik súwretlengen úsh súwretti kórsetiń (10-súwret).



4.40. α hám β tegislikler parallel. Olardıń hesh birine tiyisli bolmaǵan noqattan γ tegislik ótkizilgen. Durıs tastıyqlardı kórsetiń.

A) γ tegislik α tegislikke parallel bolǵan jalǵız tegislik;

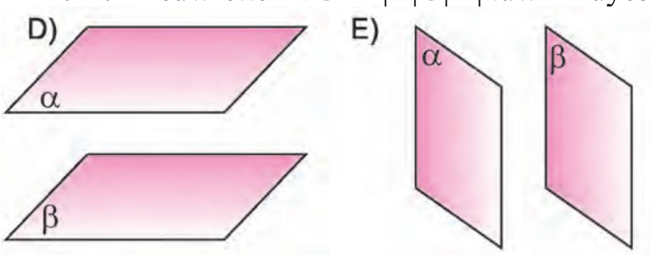
B) γ tegislik β tegislikti kesip ótiwshi jalǵız tegislik;

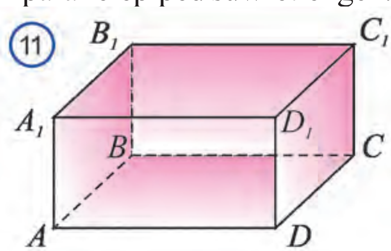
C) γ tegislik β tegislikke parallel bolǵan jalǵız tegislik;

D) γ tegislik α tegislikti kesip ótiwshi jalǵız tegislik;

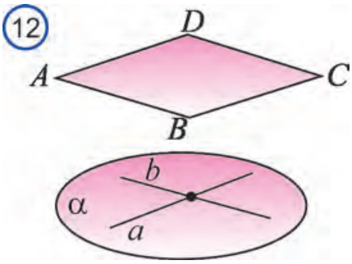
E) γ tegislik α tegislikke de, β tegislikke de parallel bolǵan jalǵız tegislik.

4.41. 11-súwrette $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped súwretlengen.





a) $A_1B_1C_1D_1$ hám B_1A_1AB; b) ADD_1A_1 hám $ABCD$; c) ABB_1A_1 hám C_1D_1DC; d) $BADC$ hám ABB_1A_1; e) CC_1B_1B hám ADD_1A_1 tegisliklerdiń óz ara jaylasıwın anıqlań.



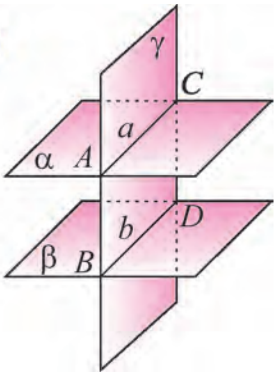
4.42. AB, BC kesindiler $ABCD$ parallelogrammnıń tárepleri bolıp, olar sáykes túrde, a hám b tuwrılarǵa parallel (12-súwret). a hám b tuwrılar óz ara kesilisedi hám α tegislikke tiyisli. $ABCD$ hám α tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

4.43. a hám b ayqasıwshı tuwrılar berilgen. a

tuwrıdan ótiwshi hám β tegislikke parallel bolǵan neshe tegislik ótkiziw múmkin?

4.44. Eki α hám β tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵı úshinshi γ tegislikke parallel. α hám β tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

13



4.45. *AB* hám *CD* parallel tuwrılar arqalı ótkizilgen γ tegislik α hám β parallel tegisliklerdi, sáykes túrde, *AC* hám *BD* tuwrılar boylap kesip ótedi (13-súwret). Eger *BD* = 15 sm bolsa, *AC* kesindi uzınlıǵın tabıń.

4.46. Qálegen eki ayqasıwshı tuwrı arqalı jalǵız parallel tegislikler juplıǵın ótkiziw múmkin ekenligin dálilleń.

4.47. α hám β tegislikler parallel. α tegislikte jatıwshı qálegen tuwrı β tegislikke parallel bolıwın dálilleń.

4.48. *O* noqat – bir tegislikte jatpaytuǵın AA_1, BB_1, CC_1 kesindilerdiń ulıwma ortası. *ABC* hám $A_1B_1C_1$ tegislikler parallel ekenligin dálilleń.

4.49. *ABCD* parallelogramm hám onı kespeytuǵın tegislik berilgen. Parallelogrammnıń *A, B, C, D* ushlarınan tegislikti, sáykes túrde, A_1, B_1, C_1, D_1 noqatlarda kesip ótetuǵın parallel tuwrılar ótkizilgen. Eger AA_1 = 4 m, BB_1 = 3 m hám CC_1 = 1 m bolsa, DD_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

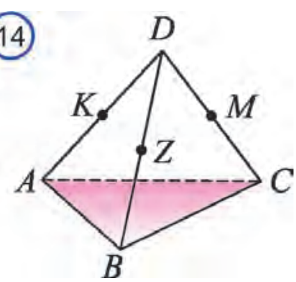
4.50. Eki parallel tegislik berilgen. Bir tegisliktiń *A* hám *B* noqatlarınan ekinshi tegislikti A_1 hám B_1 noqatlarda kesip ótiwshi parallel tuwrılar ótkizilgen. Eger *AB* = *a* bolsa, A_1B_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

4.51. α hám β tegislikler parallel. α tegisliktiń *M* hám *N* noqatlarınan β tegislikti *K* hám *L* noqatlarda kesip ótiwshi parallel tuwrılar ótkizilgen. *MNLK* parallelogramm ekenligin dálilleń. Eger *ML* = 14 sm, *NK* = 8 sm hám *MK : MN* = 9 : 7 bolsa, *MNLK* tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

4.52. *OF* hám *OP* nurlar α hám β parallel tegisliklerdi, sáykes túrde, F_1, P_1, F_2, P_2 noqatlarda kesip ótedi. Eger F_1P_1 = 3 sm, F_2P_2 = 5 sm hám P_1P_2= 4 sm bolsa, OP_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

4.53. *OA* hám *OB* nurlar α hám β parallel tegisliklerdi, sáykes túrde, A_1, B_1, A_2, B_2 noqatlarda kesip ótedi. Eger OA_1 = 16 sm, A_1A_2 = 24 sm hám A_2B_2= 50 sm bolsa, A_1B_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

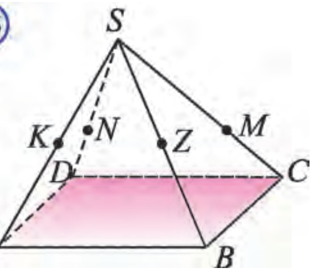
14



4.54. *D* noqat *ABC* úshmúyeshlik tegisligine tiyisli emes (14-súwret). *K, M, Z* noqatlar, sáykes túrde, *DA, DB* hám *DC* kesindilerdiń ortası. *ABC* hám *KZM* tegisliklerdiń óz ara jaylasıwın anıqlań.

4.55. *S* noqat *ABCD* parallelogramm tegisligine tiyisli emes (15-súwret). K, Z, M, N noqatlar, sáykes túrde, SA, SB, SC hám SD kesindilerge tiyisli.Eger $SK = AK$, $SZ = BZ$, $SM : MC = 2 : 1$, $SN : ND = 2 : 1$ bolsa, $ABCD$ hám $KZMN$ tegisliklerdiń óz ara jaylasıwın anıqlań.

15



Keńisliktegi figuralar túrli usıllar menen tegislikte súwretlenedi. Tómende olar menen tanısamız.

13 KEŃISLIKTE PARALLEL PROEKCIYA

Keńisliktegi figuranıń tegislikke *parallel proekciyalaw* dep sonday sáwlelendiriwge aytıladı, onda figuranıń hár bir noqatı berilgen proekciyalaw bağıtına parallel bolğan tuwrılar boylap tegislikke kóshiriledi.

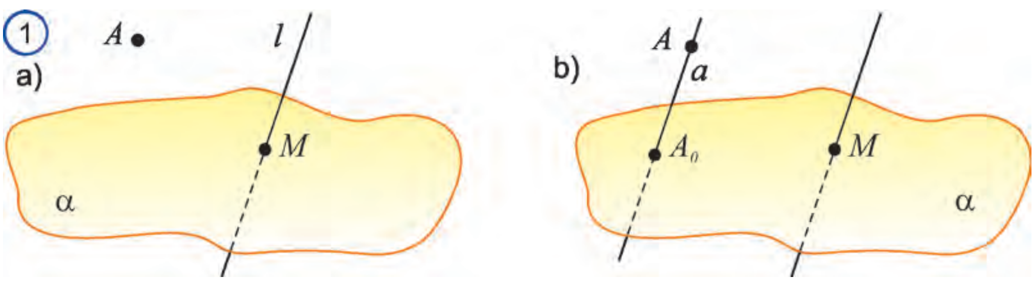
Parallel proekciyalawdı jaqtılıq nurları járdeminde bir zattıń diywal yamasa polğa túsirilgen sayasına uqsatıw múmkin.

Solay etip, parallel proekciyalawda bazı bir figura hám *proekciyalaw tegisligi* dep atalıwshı tegislik alınadı hám de *proekciyalaw bağıtı*, yağnıy bazı bir tuwrı tańlanadı. Álbette, bul tuwrı proekciya tegisligi menen kesilisiwi kerek.

Meyli, qálegen α tegislik hám proekciyalaw tuwrısı l hám tegislikte de, tuwrıda da jatpaytuğın A noqat berilgen bolsın (1.a-súwret).

A noqattan α tegislikke l tuwrığa parallel bolğan a tuwrı ótkizemiz. Bul tuwrı α tegislikti A_0 noqatta kesip ótsin (1.b-súwret).

1



Tabılğan A_0 noqat A noqattıń α tegislikke *parallel proekciyası* dep ataladı.

Meyli, bazı bir F figuranıń α tegislikke l bağıt boyınsha parallel proekciyalaw kerek bolsın. Bunıń ushın F figuranıń qálegen noqatın alamız, onnan l ge parallel tuwrı ótkizemiz hám onıń α tegislik penen kesilisiw noqatın belgileymiz. Bunday noqatlar α tegislikte qanday da F_1 figuranı payda qıladı. Tap usı F_1 figura F

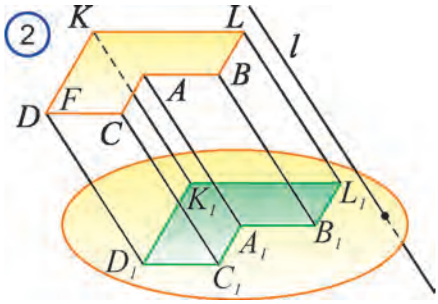
figuranıń α tegisliktegi parallel proekciyası boladı. 2-súwrette F figuranıń α tegislikke proekciyası – F_1 figura súwretlengen.

Parallel proekciyalawdıń tómendegi qásiyetlerin keltirip ótemiz. Olardı óz betińizshe dálillep kóriń.

Parallel proekciyalawda: noqat – noqatqa, kesindi – kesindige, tuwrı – tuwrıǵa ótedi.

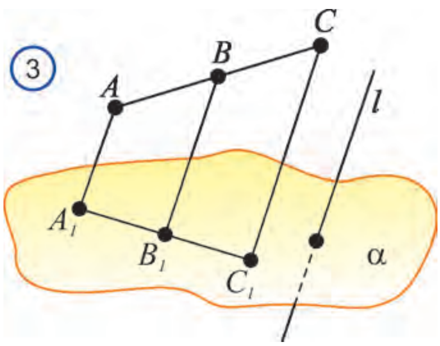
Parallel tuwrılar proekciyaları parallel boladı yamasa ústpe-úst túsedi .

Tómendegi qásiyetlerdi dálilleyik.



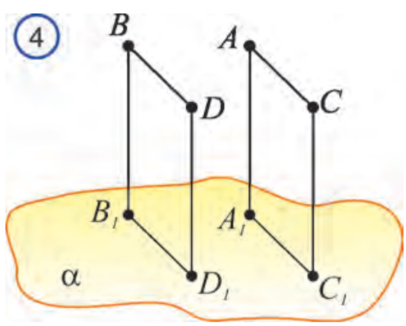
1-qásiyet. *Figuranıń tuwrı sızıqlı kesimleri proekciyası da kesindilerden ibarat boladı.*

Haqıyqattan da, AC kesindiniń noqatların proekciyalawshı barlıq tuwrılar α tegislikti A_1C_1 tuwrı boyınsha kesip ótiwshi tegislikte jatadı (3-súwret). AC kesindiniń qálegen B noqatı A_1C_1 kesindiniń B_1 noqatına ótedi.❑



2-qásiyet. *Figuranıń parallel kesimleri proekciyası da parallel kesindilerden ibarat boladı.*

Haqıyqattan da, AC hám BD birár figuranıń parallel kesindileri bolsın (4-súwret). Olardıń proekciyaları – A_1C_1 hám B_1D_1 kesindiler de parallel boladı, sebebi olardı eki parallel tegislikti α tegislik penen keskende payda qıldıq.

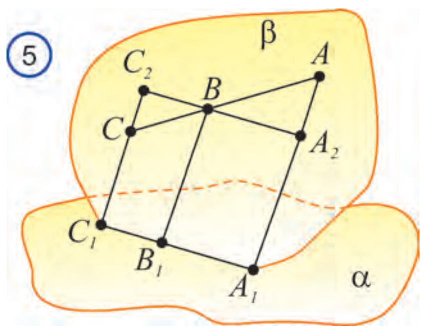


3-qásiyet. *Bir tuwrıda yamasa parallel tuwrılarda jatırǵan kesindiler uzınlıqları qatnası óz proekciyalarınıń uzınlıqları qatnasına teń.*

Haqıyqattan da, 5-súwrette AC hám A_1C_1 tuwrılar β tegislikte jatadı. AC kesindiniń B noqatınan A_1C_1 ge parallel bolǵan A_2C_2 tuwrını ótkizemiz.

Payda bolǵan BAA_2 hám BCC_2 úshmúyeshlikler uqsas boladı. Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵı hám $A_1B_1=A_2B$ hám $B_1C_1=BC_2$ teńliklerden izlenip atırǵan qatnasqa iye bolamız: $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$.❑

Solay etip, parallel proyekciyalawda tuwrıda yamasa parallel tuwrılarda



jatırǵan kesindiler uzınlıqları qatnası saqlanadı eken.

Dara jaǵdayda, kesindiniń ortası proekciya ortasına ótedi.

Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar

1. Keńisliktegi figuranı tegislikke parallel proekciyalaw dep qanday sáwlelendiriwge aytıladı ?

2. Noqattıń tegislikke parallel proekciyası qalay tabıladı?

3. Parallel proekciyalaw tegisligi hám proekciyalaw baǵıtı dep nege aytıladı ?

4. Parallel proekciyalawdıń qanday qásiyetlerin bilesiz?

5. Parallel proekciyalawdan qayerde paydalanıw múmkin?

4.56. Parallel proekciyalawda kesindiniń proekciyası: a) kesindi; b) noqat; c) eki noqat; d) nur; e) tuwrı bolıwı múmkin be?

4.57. Parallel proekciyalawda kvadrattıń proekciyası: a) kvadrat; b) parallelogramm; c) romb; d) tuwrı tórtmúyeshlik; e) trapeciya; f) kesindi bolıwı múmkin be?

4.58. Parallel tegisliklerden birinde jatırǵan úshmúyeshlik ekinshi tegislikke parallel proekciyalansa, onıń maydanı ózgermeytuǵınlıǵın dálilleń.

4.59. Parallelogrammnıń parallel proekciyası trapeciya bolıwı múmkin be? Juwabıńızdı tiykarlań.

4.60. Durıs úshmúyeshliktiń parallel proekciyası durıs úshmúyeshlik bola ma?

4.61. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń parallel proekciyası tuwrı múyeshli úshmúyeshlik bola ma?

4.62. ABC úshmúyeshliktiń parallel proekciyası $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikten ibarat. Bul proekciyalawda ABC úshmúyeshliktiń: a) medianası; b) biyikligi; c) bissektrisası. $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliktiń sáykes: a) medianası; b) biyikligi; c) bissektrisasına óte me?

4.63. ABC úshmúyeshliktiń parallel proekciyası $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikten ibarat. Eger $\angle A = 30°$, $BC = 20$ sm bolsa, $\angle A_1 = 30°$, $B_1C_1 = 20$ sm bola ma?

4.64. AB kesindiniń parallel proekciyası A_1B_1 kesindiden ibarat. AB kesindiden alınǵan C noqattıń proekciyası bolsa C_1 noqat. $AB = 48$ sm, $A_1B_1 = 36$ sm. Eger

AC kesindiniń uzınlıǵı: a) 24 sm; b) 12 sm; c) 8 sm; d) 32 sm; e) 36 sm bolsa, A_1C_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

14 ÁMELIY SHINIǴIWLAR HÁM QOLLANIWLAR

4.65. a) Eki tuwrı; b) tuwrı hám tegislik; c) eki tegislik neshe ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin?

4.66. a) Eki tuwrı; b) tuwrı hám tegislik; c) eki tegislik; d) úsh tegislik jalǵız ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin be?

4.67. Tórt noqat bir tegislikte jatpaydı. a) olardan úshewi bir tuwrıda jatıwı múmkin be? b) Olar arqalı neshe tegislik ótkiziw múmkin?

4.68. m hám n tuwrılar kesilisedi, d tuwrı bolsa n tuwrıǵa parallel. m hám d tuwrılar óz ara qalay jaylasıwı múmkin?

4.69. ABC úshmúyeshliktiń C ushınan ótiwshi hám AB tárepine parallel bolǵan neshe tegislik ótkiziw múmkin?

4.70. $ABCD$ hám $ABKZ$ parallelogrammlar túrli tegisliklerde jatadı. Parallel tuwrılardı kórsetiń:
A) *DA* hám *KB*; *B*) *CD* hám *KZ*; *C*) *BC* hám *AZ*; *D*) *DA* hám *ZA*; *E*) *CB* hám *KB*.

4.71. A hám C noqatlar α tegislikke, B hám D noqatlar β tegislikke tiyisli. AC, CD, BD, AB, BC, AD tuwrılardan qaysıları β tegislikti kesip ótedi?

4.72. AB, AC, KB, KD kesindiler α tegislikti kesip ótedi. AK, AD, BD, KC, CD tuwrılardan qaysıları α tegislikti kesip ótedi?

4.73. Bir tegislikte jatpaytuǵın AB, AC hám AD tuwrılar α tegislikti B_1, C_1 hám D_1 noqatlarda kesip ótedi. B_1, C_1 hám D_1 noqatlar izbe-iz tutastırılsa, qanday figura payda boladı?

4.74. α tegislikti kesip ótpeytuǵın MN kesindi ushlarınan hám ortasınan parallel tuwrılar ótkizilgen. Eger bul tuwrılar α tegislikti sáykes túrde M_1, N_1, hám K_1 noqatlarda kesip ótse hám $KK_1 = 9$ sm, $NN_1 = 15$ sm bolsa, MM_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

4.75. α tegisliktiń P hám Z noqatlarınan onnan sırttaǵı uzınlıqları $PK = 6$ sm hám $ZM = 9$ sm bolǵan parallel kesindiler túsirilgen. MK tuwrı α tegislikti O noqatta kesip ótedi. Eger $MK = 6$ sm bolsa, MO kesindi uzınlıǵın tabıń.

4.76. Parallelogrammdı parallel proekciyalawda kvadrat payda bolıwı múmkin be?

4.77. Úshmúyeshliktiń parallel proekciyası berilgen. Bul úshmúyeshlik medianalarınıń proekciyaları qalay jasaladı?

4.78. $ABCD$ hám $CDPZ$ (CD – ulıwma) parallelogrammlar bir tegislikte jatpaydı. Q hám R noqatlar BC hám AD kesindilerdiń ortası, M hám N bolsa DP

hám CZ kesindilerdiń ortası. MN hám QR tuwrılardıń parallel ekenligin dálilleń.

4.79. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubtıń (6-súwret) a) AA_1D_1D; b) BB_1C_1C; c) $ABCD$; d) DD_1C_1C; e) $B_1C_1D_1A_1$; f) ADD_1A_1 jaqlarınan qaysıları A_1B_1 tuwrıǵa parallel boladı?

4.80. PRT úshmúyeshlik berilgen. PT tuwrıǵa parallel α tegislik PR tárepti S noqatta, RT tárepti Q noqatta kesip ótedi (7-súwret). Eger SR = 7 sm, SQ = 3 sm hám SP= 35 sm bolsa, PT tárepti tabıń.

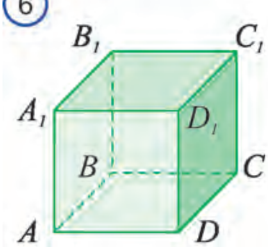
4.81. α tegislik $ABCD$ trapeciya ultanı AD ǵa parallel hám de AB hám CD tárepleri M hám N noqatlarda kesip ótedi (8-súwret). AD = 20 sm, MN = 16 sm. Eger M noqat AB kesindi ortası hám AB= 8 sm bolsa, trapeciya perimetrin tabıń.

4.82. α tegisliktiń P hám Z noqatlarına onnan sırttaǵı PK = 6 sm hám ZM = 9 sm kesindiler ótkizilgen. MK tuwrı tegislikti O noqatta kesip ótedi. Eger MK = 6 sm bolsa, MO aralıqtı tabıń.

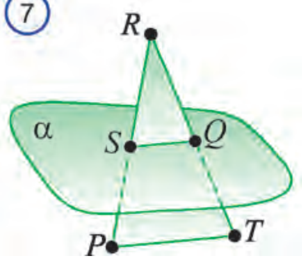
4.83. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń AB tárepi α tegislikke parallel, al AD tárepi bul tegislikke parallel emes. $ABCD$ hám α tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

4.84. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedtiń tómende berilgen jaqlarınan qaysıları $ABCD$ jaǵına parallel boladı:

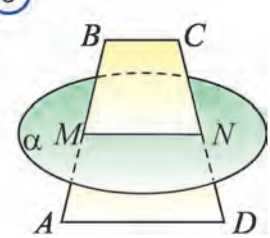
6



7



8



A) D_1A_1AD; B) $D_1A_1B_1C_1$; C) ABB_1A_1; D) D_1C_1CD; E) D_1A_1BD?

4.85. Rombtıń eki diagonalı α tegislikke parallel. Romb tegisligi hám α tegisliktiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

4.86. D noqat ABC úshmúyeshlik tegisliginde jatpaydı. K, Z hám M noqatlar, sáykes túrde, DA, DB, hám DC kesindilerdiń ortaları. ABC hám KZM tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

Qollanıwlar hám ámeliy kompetenciyalardı qáliplestiriw

1. Temir jol vagonlarınıń kósherleri bir-birine qaraǵanda qalay jaylasqan?
2. Temir jol vagonlarınıń kósherleri relslerge qaraǵanda qalay jaylasqan?
3. Jan átiraptan parallel hám ayqasıwshı tuwrılarǵa mısallar keltiriń.
4. Ne ushın jazıw stolı tartpaları geyde jaqsı ashılmaydı?

5. Ne ushın nasos porsheni onıń ishinde jaqsı háreketlenedi?
6. Tigiwshilik lentası yamasa qálegen uzınlıqtaǵı tayaq járdeminde bólme polınıń shetindegi plintus reykalarınıń parallelligin qalay tekseriwge boladı?
7. Aǵashtan islengen brus (taxta) nıń hámme jaqları tuwrı tórtmúyeshlik kórinisinde. Onı kesesine qabırǵaları boylap qalay pıshqılasańız da, payda bolǵan hámme kesimler parallelogramm bolıwın dálilleń.

? *Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar*

1. *Keńislikte qanday tuwrılar óz ara perpendikulyar boladı?*
2. *Ayqasıwshı tuwrılar perpendikulyar bolıwı múmkin be?*
3. *7-súwrette qaysı qala súwretlengen? Bunda siz qanday tuwrılardı hám tegisliklerdi kórip tursız? Súwretten parallel, perpendikulyar hám ayqasıwshı tuwrılarǵa mısallar keltiriń.*
4. *Qanday tuwrı tegislikke perpendikulyar boladı?*
5. *Bir tegislikke perpendikulyar tuwrılardıń qásiyetlerin aytıp beriń.*
6. *Tuwrı hám tegisliklerdiń perpendikulyarlıq alamatın aytıp beriń.*
7. *Parallel tegisliklerdiń birine perpendikulyar bolǵan tuwrınıń qásiyetin aytıp beriń.*
8. *Bir tuwrıǵa perpendikulyar bolǵan tegisliklerdiń qásiyetin aytıp beriń.*
9. *Ulıwmalasqan Pifagor teoreması ne haqqında?*

5.1. *SB* kesindi *ABCD* parallelogramm tegisligine perpendikulyar (8-súwret). *SB* perpendikulyar bolǵan tuwrılardı aytıp beriń.

5.2. Qanday da *l* tuwrı *ABC* úshmúyeshliktiń *AB* hám *AC* táreplerine perpendikulyar. *l* tuwrı hám *ABC* úshmúyeshlik tegisliginiń óz ara jaylasıwın anıqlań.

A) *l* tuwrı *ABC* tegislikti kesip ótedi, biraq oǵan perpendikulyar emes; B) *l* tuwrı *ABC* tegislikke tiyisli; C) *l* tuwrı *ABC* tegislikke perpendikulyar; D) *l* tuwrı *ABC* tegislikke parallel.

5.3. *KO* tuwrı *ABCD* parallelogramm tegisligine perpendikulyar (9-súwret). *KO* tuwrıǵa perpendikulyar tuwrını anıqlań

5.4. *MB* tuwrı *ABC* úshmúyeshliktiń *AB* hám *BC* táreplerine perpendikulyar (10-súwret). *X* noqat *AC* táreptiń qálegen noqatı bolsa, *MBX* úshmúyeshliktiń túrin anıqlań.

5.5 . $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedtiń AA_1C_1C hám BB_1D_1D diagonal kesimleri óz ara perpendikulyar ekenligin dálilleń.

5.6. *ABCD* tórtmúyeshliktiń tárepleri $A_1B_1C_1D_1$ tuwrı tórtmúyeshliktiń táreplerine sáykes ráwishte parallel. ABCD tuwrı tórtmúyeshlik ekenligin dálilleń.

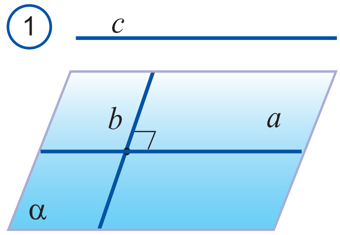
V BÓLIM

KEŃISLIKTE TUWRÍLAR HÁM TEGISLIKLERDIŃ PERPENDIKULYARLÍǴÍ

15 KEŃISLIKTE PERPENDIKULYAR TUWRÍ HÁM TEGISLIKLER

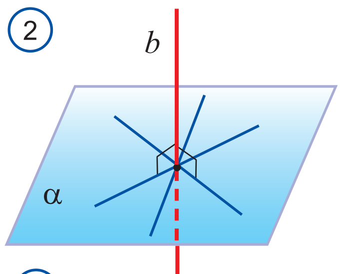
Esletip ótemiz, keńislikte berilgen eki tuwrı arasındaǵı múyesh 90° qa teń bolsa, olar óz ara *perpendikulyar tuwrılar* delinedi. Perpendikulyar tuwrılar kesilisiwshi hám ayqasıwshı bolıwı múmkin. 1-súwrette a hám b perpendikulyar tuwrılar kesilisiwshi, b hám c perpendikulyar tuwrılar bolsa ayqasıwshı. a hám b tuwrılardıń perpendikulyarlıǵı $a \perp b$ tárizde jazıladı.

1



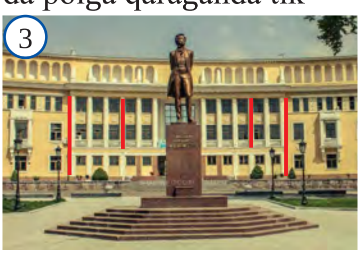
Tegisliktegi qálegen tuwrıǵa perpendikulyar tuwrı *tegislikke perpendikulyar* delinedi (2-súwret). α tegislik hám b tuwrılardıń perpendikulyarlıǵı $b \perp \alpha$ tárizde jazıladı.

2



Qorshaǵan ortalıqtan óz ara perpendikulyar figuralarǵa kóplep mısallar keltiriw múmkin. Ádette, úy diywalları hám sútinleri, mináralar, shıraq sútinleri hám sımaǵashlar jerge qaraǵanda tik, yaǵnıy perpendikulyar qılıp qurıladı. Bólmedegi shkaf, stol hám muzlatqıshlar da polǵa qaraǵanda tik

3

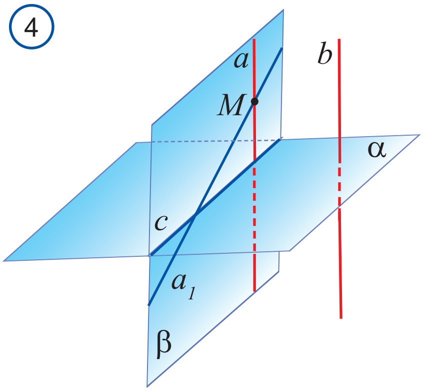


qılıp ornatıladı (3-súwret).

Endi keńisliktegi perpendikulyar tuwrılardıń bazı bir qásiyetleri haqqında toqtalamız.

Eger a tuwrı α tegislikte jatsa yamasa oǵan parallel bolsa, ol jaǵdayda α tegislikte jatırǵan hám a tuwrıǵa parallell basqa b tuwrı da tabıladı. Sonıń ushın, tegislikke perpendikulyar tuwrı, álbette, bul tegislikti kesip ótedi. Keri tastıyıqlaw da orınlı boladı.

5.1-teorema. Eger eki tuwrı tegislikke perpendikulyar bolsa, olar óz ara parallel boladı.



Dálilleniwi. a hám b tuwrılar α tegislikke perpendikulyar bolsın (4-súwret). Bul tuwrılardıń óz ara parallel ekenligin dálilleymiz.

a tuwrınıń qanday da bir M noqatınan b tuwrıǵa parallel a_1 tuwrı ótkizemiz.

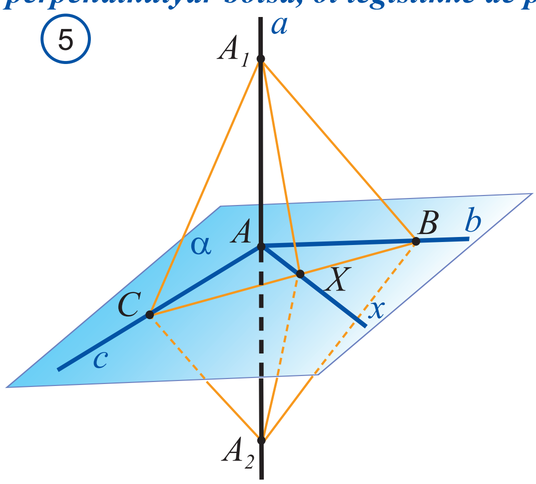
Ol jaǵdayda, $a_1 \perp \alpha$ boladı.

a hám a_1 tuwrılardıń ústpe-úst túsiwin kórsetemiz. Meyli, onday bolmasın, a hám a_1 tuwrılar ústpe-úst túspesin. Onda a hám a_1 tuwrılar jatırǵan β tegisliktegi M noqattan α hám β tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵı – c tuwrıǵa eki a hám a_1 perpendikulyar tuwrı ótedi. Al, bunıń bolıwı múmkin emes. Qarama-qarsılıq oylaǵanımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.

Demek, a hám b tuwrılar óz ara parallel.❑

Endi tuwrınıń tegislikke perpendikulyarlıq teoremasın keltiremiz.

5.2-teorema. Eger tuwrı tegislikte jatırǵan eki kesilisiwshi tuwrıǵa perpendikulyar bolsa, ol tegislikke de perpendikulyar boladı.



Dálilleniwi. a tuwrı α tegislikte jatırǵan eki b hám c tuwrıǵa perpendikulyar bolsın. Ol jaǵdayda a tuwrı b hám c tuwrılardıń kesilisiw noqatı A arqalı ótedi. a tuwrınıń α tegislikke perpendikulyar bolıwın dálilleymiz.

α tegisliktiń A noqatı arqalı qálegen x tuwrı ótkizemiz hám onıń a tuwrıǵa perpendikulyar bolıwın kórsetemiz. α tegislikte A noqattan ótpeytuǵın, b, c

hám x tuwrılardı kesip ótetuǵın x tuwrını ótkizemiz. Usı kesilisiw sáykes túrde B, C hám X noqatlar bolsın.

a tuwrıda A noqattıń túrli táreplerinde AA_1 hám AA_2 kesindilerdi qoyamız. Payda bolǵan A_1BA_2 hám A_1CA_2 úshmúyeshlikler teń qaptallı boladı (buni óz betińizshe tiykarlań). Bunnan A_1BC hám A_2BC úshmúyeshlikler teń bolıwı kelip shıǵadı (buni da óz betińizshe tiykarlań). Óz náwbetinde, bunnan A_1BX hám A_2BX múyeshlerdiń teń bolıwı hám de A_1BX hám A_2BX úshmúyeshliklerdiń de teń bolıwı kelip shıǵadı (buni da óz betińizshe tiykarlań).

Dara jaǵdayda, $A_1X = A_2X$ boladı. Onda A_1XA_2 úshmúyeshlik teń qaptallı boladı. Sonıń ushın, onıń XA medianası onıń biyikligi de boladı. Bul bolsa, óz náwbetinde, x tuwrınıń a tuwrıǵa perpendikulyar bolıwın kórsetedi. Demek, a tuwrı α tegislikke perpendikulyar.❑

Bul teoremadan nátiyje retinde tómendegi qásiyetler kelip shıǵadı. Olardı óz betińizshe tiykarlań.

5.3-teorema. Eger tuwrı eki parallel tegisliktiń birine perpendikulyar bolsa, ekinshisine de perpendikulyar boladı.

5.4-teorema. Eger eki tegislik bir tuwrıǵa perpendikulyar bolsa, olar parallel boladı.

Tómende “bar ekenlik hám jalǵızlıq teoremaları” dep atalıwshı qásiyetlerin de óz betińizshe dálillew ushın keltiremiz.

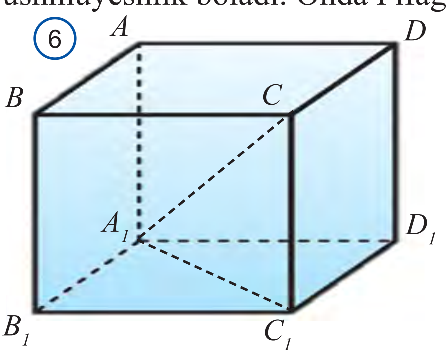
5.5-teorema. Keńisliktiń qálegen noqatınan berilgen tuwrıǵa perpendikulyar jalǵız tegislik ótkiziw múmkin.

5.6-teorema. Keńisliktiń qálegen noqatınan berilgen tegislikke perpendikulyar jalǵız tuwrı ótkiziw múmkin.

Nátiyje (ulıwmalasqan Pifagor teoreması). Tuwrı múyeshli parallelepiped diagonalınıń kvadratı onıń úsh ólshemleri kvadratları qosındısına teń.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped bolsın (6-súwret). CC_1 qabırǵa $A_1B_1C_1D_1$ jaqqa perpendikulyar bolǵanlıǵı ushın A_1C_1C tuwrı múyeshli úshmúyeshlik boladı. Onda Pifagor teoreması boyınsha,

6



$$A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 \qquad (1).$$

$A_1D_1C_1$ ham tuwrı múyeshli úshmúyeshlik. Jáne Pifagor teoreması boyınsha,

$$A_1C_1^2 = A_1D_1^2 + D_1C_1^2 \qquad (2).$$

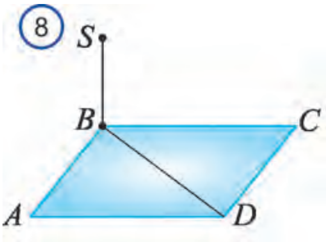
Onda, (1) hám (2) boyınsha: $A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 = CC_1^2 + A_1D_1^2 + D_1C_1^2$.

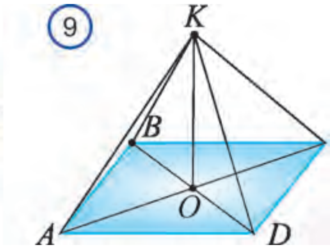
$A_1D_1 = B_1C_1$ bolǵanlıǵı ushın $A_1C^2 = CC_1^2 + B_1C_1^2 + D_1C_1^2$.❑

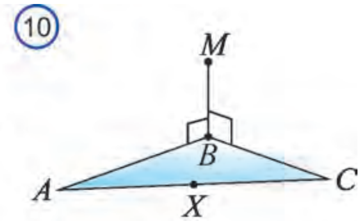
táreplerine sáykes túrde parallel. *ABCD* tuwrı tórtmúyeshlik ekenligin dálilleń.

5.7. α tegislik *m* tuwrıǵa, *m* tuwrı *n* tuwrıǵa perpendikulyar. Tegisliktiń *n* tuwrıǵa parallel bolıwın dálilleń.

5.8. *ABCD* trapeciyanıń *AB* ultanı jatırǵan tuwrı α tegislikke perpendikulyar. Bul trapeciyanıń *CD* ultanı jatırǵan tuwrı da α tegislikke perpendikulyar bolıwın dálilleń.

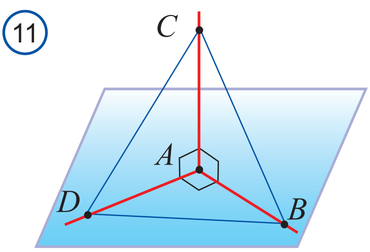






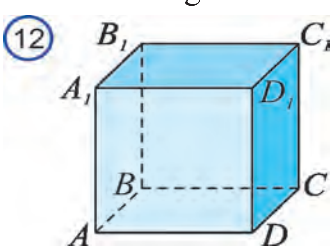
5.9. Keńisliktegi tuwrınıń qálegen noqatınan oǵan perpendikulyar tuwrı ótkiziw múmkin ekenligin dálilleń.

5.10. Keńisliktegi tuwrınıń qálegen noqatınan oǵan eki túrli perpendikulyar tuwrı ótkiziw múmkin ekenligin dálilleń.



5.11. *AB, AC, AD* tuwrılar jup-jubı menen óz ara perpendikulyar (11-súwret). Eger

1) *AB* = 3 sm, *BC* = 7 sm, *AD* = 1,5,sm;
2) *BD* = 9 sm, *BC* = 16 sm, *AD* = 5 sm;
3) *AB* = *b* sm, *BC* = *a* sm, *AD* = *d* sm;
4) *BD* = *c* sm, *BC* = *a* sm, *AD* = *d* sm bolsa, *CD* kesindi uzınlıǵın tabıń.



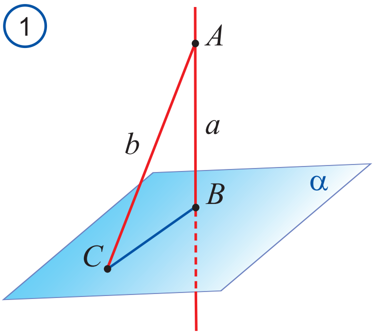
5.12. *ABCD* tuwrı tórtmúyeshliktiń *A* ushında onıń tegisligine perpendikulyar *AK* tuwrı ótkizilgen. *K* noqattan tuwrı tórtmúyeshliktiń basqa ushlarına shekemgi aralıq 6 m, 7 m, 9 m. *AK* aralıqtı tabıń.

5.13. *A* hám *B* noqatlardan α tegislikke perpendikulyar hám onı sáykes túrde *C* hám *D* noqatlarda kesip ótiwshi tuwrı ótkizilgen. Eger *AC* = 3 m, *BD* = 2 m hám *CD* = 2,4 m bolsa hám *AB* kesindi α tegislikti kesip ótpese, *A* hám *B* noqatlar arasındaǵı aralıqtı tabıń

5.14. 12-súwrette súwretlengen kubtıń qabırǵası: a) 4 sm; b) 8 sm bolsa, AB_1C úshmúyeshlik perimetrin hám DAC_1 úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

16 KEŃISLIKTE PERPENDIKULYAR, QÍYA HÁM ARALÍQ

1



α tegislikke onda jatpaytuǵın A noqattan perpendikulyar a tuwrı ótkizemiz (1-súwret). Bul tuwrı tegislikti B noqatta kesip ótsin. Sonday-aq, tegisliktiń qanday da bir C noqatın A noqat penen tutastıramız. Nátiyjede, payda bolǵan

AB kesindi – *tegislikke túsirilgen perpendikulyar;*

AC kesindi – *tegislikke túsirilgen qıya;*

BC kesindi – *qıyanıń tegisliktegi proekciyası;*

B noqat – *perpendikulyardıń ultanı;*

C noqat – *qıyanıń ultanı* dep ataladı.

2

ABC úshmúyeshlik tuwrı múyeshli hám onda AB katet, AC bolsa gipotenuza bolǵanlıǵı ushın hár dayım $AB < AC$ boladı.

Demek, qanday da bir noqattan tegislikke túsirilgen perpendikulyardıń uzınlıǵı usı noqattan ótkizilgen qálegen qıyanıń uzınlıǵınan kishi boladı.

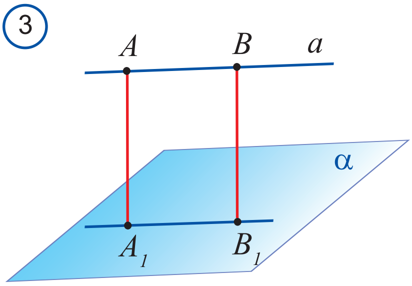
Noqattan tegislikke shekemgi aralıq dep noqattan tegislikke túsirilgen perpendikulyar uzınlıǵına aytıladı .

Tashkettegi saat minárasınıń biyikligi 30 m delingende, mináranıń ushınan onıń ultan tegisligine túsirilgen perpendikulyar uzınlıǵı túsiniledi (2-súwret).

5.7-teorema. Eger tuwrı tegislikke parallel bolsa, ol jaǵdayda onıń barlıq noqatları tegislikten teńdey aralıqta boladı.

Dálilleniwi. a – berilgen tuwrı hám α – berilgen tegislik bolsın (3-súwret).

3



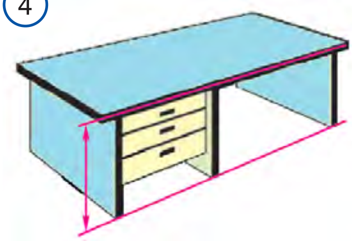
a tuwrıda eki A hám B noqattı alamız. Olardan α – tegislikke perpendikulyarlar túsiremiz. Bul perpendikulyarlardıń ultanı, sáykes túrde, A_1 hám B_1 noqatlar bolsın. Onda A hám B noqatlardan α tegislikke shekemgi aralıqlar, sáykes túrde, AA_1 hám BB_1 kesindiler boladı. 4.6-teorema boyınsha AA_1 hám BB_1 kesindiler parallel boladı.

Demek, olar bir tegislikte jatadı. Bul tegislik α tegislikti A_1B_1 tuwrı boylap kesedi. a tuwrı A_1B_1 tuwrıǵa parallel boladı, sebebi ol α tegislikti kesip ótpeydi.

Solay etip, ABA_1B_1 tórtmúyeshliktiń qarama-qarsı tárepleri parallel. Demek, ol parallelogramm. Bul parallelogrammda $AA_1 = BB_1$.❑

Tuwrıdan oǵan parallel bolǵan tegislikke shekemgi aralıq dep tuwrınıń qálegen noqatınan usı tegislikke shekemgi aralıqqa aytıladı.

4



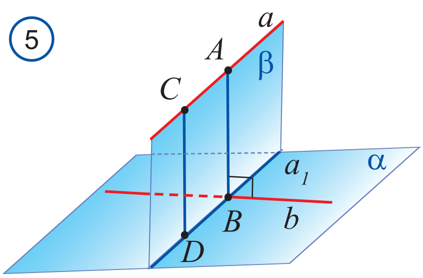
Tegisliktiń qálegen eki noqatınan oǵan parallel bolǵan tegislikke shekemgi aralıq birdey boladı. Bul qásiyet aldıńǵı teorema dálilleniwine uqsas dálillenedi.

Eki parallel tegislikler arasındaǵı aralıq dep bir tegisliktiń qálegen noqatınan ekinshi tegislikke shekemgi aralıqqa aytıladı. 4-súwrette súwretlengen stoldıń biyikligi pol hám stol tegislikleri arasındaǵı aralıqqa teń boladı.

5.8-teorema. Eki ayqasıwshı tuwrı jalǵız ulıwma perpendikulyarǵa iye boladı.

Dálilleniwi. a hám b ayqasıwshı tuwrılar bolsın (5-súwret). Bul tuwrılarda sonday A hám B noqatlardı tańlaw múmkinligin kórsetemiz, AB tuwrı a ǵa da, b ǵa da perpendikulyar boladı. α tegislik b tuwrıdan ótiwshi hám a tuwrıǵa parallel bolsın. a tuwrıda C noqattı alamız hám odan α tegislikke CD perpendikulyar túsiremiz. Kesilisiwshi a hám CD tuwrılardan β tegislikti ótkizemiz. a_1 tuwrı – α hám β tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵı bolsın.

5

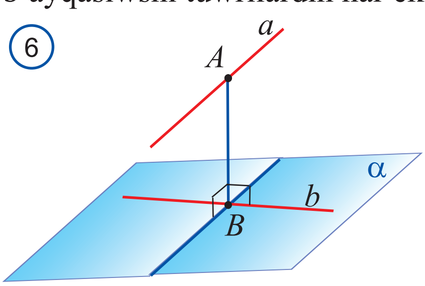


$a_1 \parallel a$ bolǵanlıǵı ushın a_1 hám b tuwrılar qanday da B noqatta kesilisedi. B noqattan β tegislikte jatıwshı, a tuwrıǵa BA perpendikulyar túsiremiz.

Nátiyjede, AB hám CD tuwrılardıń hár ekewi de β tegislikte jatadı hám a tuwrıǵa perpendikulyar boladı. Sonıń ushın, $AB \parallel CD$ hám $AB \perp \alpha$ boladı.

Demek, $AB \perp a$ hám $AB \perp b$ boladı. AB izlenip atırǵan tuwrı bolıp, ol a hám b ayqasıwshı tuwrılardıń hár ekewine de perpendikulyar boladı.

6



Ulıwma perpendikulyardıń jalǵız ekenligin óz betińizshe dálilleń.❑

Eki ayqasıwshı tuwrı arasındaǵı aralıq dep olardıń ulıwma perpendikulyarı uzınlıǵına aytıladı.

Joqarıdaǵı teoremadan tómendegi juwmaq kelip shıǵadı:

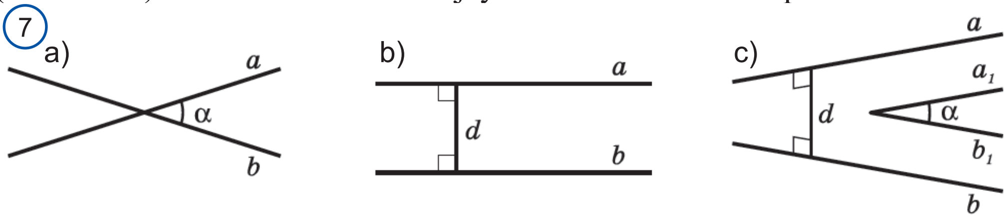
Eki ayqasıwshı a hám b tuwrı arasındaǵı aralıq (6-súwret) - a tuwrınıń qálegen noqatınan b tuwrı jatırǵan hám a tuwrıǵa parallel bolǵan α tegislikke shekemgi aralıqqa teń boladı.

Joqarıdaǵılarǵa tiykarlanıp, endi biz keńislikte eki tuwrınıń óz ara jaylasıwın sanlar járdeminde túsindirip beriwimiz múmkin.

Eger keńislikte eki tuwrı:

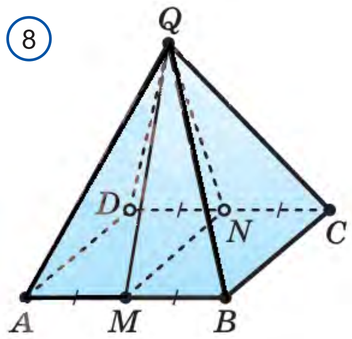
- óz ara kesilisse, olar arasındaǵı α múyesh (7.a-súwret),
- óz ara parallel bolsa, olar arasındaǵı d aralıq (7.b-súwret),
- óz ara ayqasıwshı bolsa, olar arasındaǵı α múyesh hám arasındaǵı d aralıq (7.c-súwret) usı tuwrılardıń óz ara jaylasıwın sanlı túsindirip beredi .

7



Másele. Tórtmúyeshli $SABCD$ piramidanıń barlıq qabırǵaları a ǵa teń. Onıń AB hám SC qabırǵaları arasındaǵı aralıqtı tabıń (8-súwret).

8



Sheshimi. 4.8-teorema boyınsha, AB hám SC qabırǵalarında sonday X hám Y noqatlar bar bolıp, XY tuwrı AB hám SC qabırǵalardıń hár ekewine de perpendikulyar boladı. Sonday-aq, XY tuwrı, SC tuwrı jatırǵan hám AB tuwrıǵa parallel bolǵan tegislikke de perpendikulyar boladı.

Meyli, α tegislik – S noqattan ótiwshi hám AB tuwrıǵa perpendikulyar bolǵan tegislik bolsın. Bul tegislik AB hám CD qabırǵalardıń ortaları – M hám N noqatlardan ótedi. Onda $XY \parallel \alpha$ hám XY kesindiniń α tegisliktegi proekciyası XY kesindige teń boladı.

Endi X hám Y noqatlardıń α tegisliktegi qaysı noqatlarǵa proekciyalanıwın anıqlaymız.

$AB \perp \alpha$ bolǵanlıǵı ushın AB qabırǵanıń barlıq noqatları M noqatqa proekciyalanadı. Demek, X noqat M noqatqa proekciyalanadı.

S hám C noqatlar sáykes túrde, S hám N noqatlarǵa proekciyalanǵanı ushın, SC kesindi SN kesindige ótedi. SN tuwrı AB tuwrıǵa parallel tegislikte jatqanı ushın, izlenip atırǵan XY kesindiniń proekciyası – SN tuwrıǵa M noqattan túsirilgen perpendikulyardan ibarat boladı.

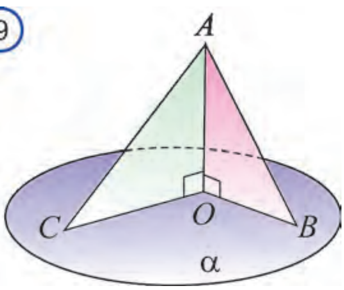
Bul perpendikulyar uzınlıǵı d nı, ultanı a hám qaptal tárepi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ge teń bolǵan SMN teń qaptallı úshmúyeshlik maydanınan paydalanıp tabamız.

Bir tárepten bul úshmúyeshliktiń maydanı: $\frac{a}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ge teń, al ekinshi tárepten bolsa $\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}d$ ǵa teń. Bul teńlikten $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

? *Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar*

1. *Tegislikke túsirilgen perpendikulyar hám qıyaǵa anıqlama beriń*
2. *Qıyanıń tegisliktegi proekciyası dep nege aytıladı?*
3. *Noqattan tegislikke shekemgi aralıq qalay anıqlanadı?*
4. *Tegislikke parallel bolǵan tuwrı hám tegislik arasındaǵı aralıq qalay tabıladı?*
5. *Eki parallel tegislikler arasındaǵı aralıq qalay anıqlanadı?*
6. *Eki ayqasıwshı tuwrılar arasındaǵı aralıq qalay anıqlanadı?*
7. *Keńislikte eki tuwrınıń óz ara jaylasıwın qaysı sanlı shamalar aniqlaydi?*

9



5.15. A, B, Q noqatlar α tegislikke tiyisli, M noqat bolsa oǵan tiyisli emes hám $MQ \perp \alpha$. MA, AQ, MQ, BQ, MB kesindilerdiń qaysı biri a) perpendikulyar; b) qıya; c) qıya proekciyası ekenligin anıqlań.

5.16. A noqattan a tegislikke AB hám AC qıyalar hám AO perpendikulyar ótkizilgen (9-súwret). Eger AB = 2,5 sm, AC = 3 sm bolsa, qıyalardıń proekciyaların óz ara salıstırıń.

5.17. Noqattan tegislikke eki qıya túsirilgen (9-súwret). Eger qıyalardıń biri ekinshisinen 26 sm uzın, al proekciyaları 12 sm hám 40 sm bolsa, bul qıyalardıń uzınlıqların tabıń.

5.18. Úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber orayınan úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar tuwrı ótkizilgen. Bul tuwrınıń hár bir noqatı úshmúyeshlik tóbelerinen teńdey uzaqlıqta jatıwın dálilleń.

5.19. Maydanı a) 21 sm^2; b) 96 sm^2; c) 44 sm^2; d) 69 sm^2; e) 156 sm^2 bolǵan $ABCD$ kvadrat tegisligine uzınlıǵı 10 sm bolǵan DM perpendikulyar túsirilgen. MA qıyanıń uzınlıǵın tabıń.

5.20. Tuwrı múyeshi C bolǵan ABC úshmúyeshliktiń súyir múyeshi ushınan úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar AD tuwrı ótkizilgen. Eger $AC = c, BC = b$ hám $AD = c$ bolsa, D noqattan B hám C tóbelerine shekemgi aralıqlardı tabıń.

5.21. Bir-birinen 3,4 m uzaqlıqta bolǵan vertikal sútinlerdiń joqarı ushları tosın menen tutastırılǵan. Sútinlerdi kóp qabatlı biyiklikleri 5,8 m hám 3,9 m bolsa, tosın uzınlıǵın tabıń.

5.22. 15 m uzınlıqtaǵı telefon sımı sımaǵashqa jer betinen 8 m biyiklikte bekkemlengen hám onnan biyikligi 20 m bolǵan kópqabatlı úydiń tóbesine tarttırıp baylanǵan. Úy menen sútin arasındaǵı aralıqtı tabıń.

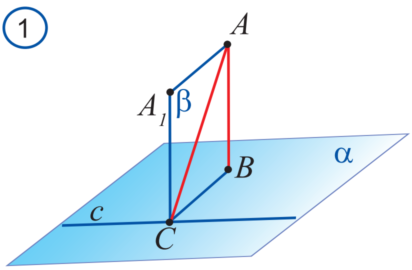
5.23. Tegislikke P noqattan túsirilgen PQ perpendikulyar uzınlıǵı 1 ge, al PA hám PB qıyalar uzınlıqları 2 ge teń. C noqat AB kesindi ortası. Eger a) $\angle APB = 90^0$; b) $\angle APB = \beta$ bolsa, QC kesindi uzınlıǵın tabıń.

5.24. $ABCD$ parallelogrammnıń doǵal B múyeshi ushınan onıń tegisligine perpendikulyar bolǵan BH kesindi tiklengen. Eger $AH = 5$ sm, $HD = HC = 8{,}5$ sm, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$ bolsa, parallelogramm táreplerin tabıń.

5.25. M noqat tárepi 60 sm bolǵan durıs ABC úshmúyeshliktiń hár bir tóbesinen 40 sm aralıqta jaylasqan. ABC úshmúyeshlik tegisliginen M noqatqa shekemgi aralıqtı tabıń.

17 ÚSH PERPENDIKULYAR HAQQÍNDAǴÍ TEOREMA

5.9-teorema. Eger tegislikke túsirilgen qıyanıń ultanınan ótiwshi tuwrı qıyanıń proekciyasına perpendikulyar bolsa, ol jaǵdayda ol qıyanıń ózine de perpendikulyar boladı.



Dálilleniwi. Meyli, AB kesindi α tegislikke túsirilgen perpendikulyar, AC kesindi bolsa qıya bolsın. c tuwrı α tegislikte jatıwshı, C noqattan ótiwshi hám qıya proekciyasına perpendikulyar bolǵan tuwrı bolsın (1-súwret). AB ǵa parallel A_1C tuwrını ótkizemiz. Bul tuwrı α tegislikke perpendikulyar boladı.

AB hám AC_1 tuwrılar arqalı β tegislikti ótkizemiz. c tuwrı CA_1 tuwrıǵa perpendikulyar boladı. Ol shárt boyınsha, CB tuwrıǵa da perpendikulyar edi. Onda c tuwrı β tegislikke de perpendikulyar boladı.

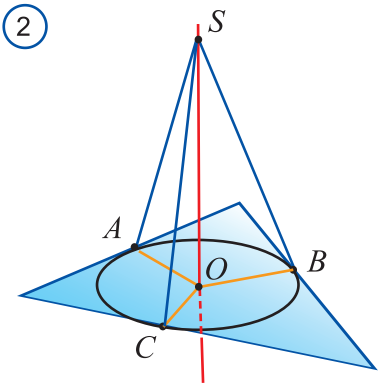
Demek, c tuwrı β tegislikte jatırǵan AC qıyaǵa da perpendikulyar boladı.❑

Usı teoremada úsh perpendikulyarlar haqqında gáp baratırǵanlıǵı ushın ol “Úsh perpendikulyarlar haqqındaǵı teorema” atın alǵan. Bul teoremaǵa keri bolǵan teorema da orınlı boladı. Onı óz betińizshe dálilleń.

5.10-teorema. Eger tegislikke túsirilgen qıyanıń ultanınan ótiwshi tuwrı qıyaǵa perpendikulyar bolsa, ol jaǵdayda ol qıyanıń proekciyasına da perpendikulyar boladı.

1- másele. Úshmúyeshlikke ishley sızılǵan sheńber orayınan úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar tuwrı ótkizilgen (2-súwret). Bul tuwrınıń qálegen noqatı úshmúyeshlik táreplerinen teńdey uzaqlıqta jatıwın dálilleń.

2



Dálilleniwi. Meyli, A,B,C – úshmúyeshlik tárepleriniń sheńber menen kesilisiw noqatları, O – sheńber orayı, al S bolsa perpendikulyardağı qálegen noqat bolsın.

OA úshmúyeshlik tárepine perpendikulyar bolğanlığı ushın, úsh perpendikulyarlar haqqındağı teorema boyınsha, OA da bul tárepke perpendikulyar boladı. Onda SAO tuwrı múyeshli úshmúyeshlik boladı. Bul úshmúyeshlikte Pifagor teoreması boyınsha,

$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2}$,

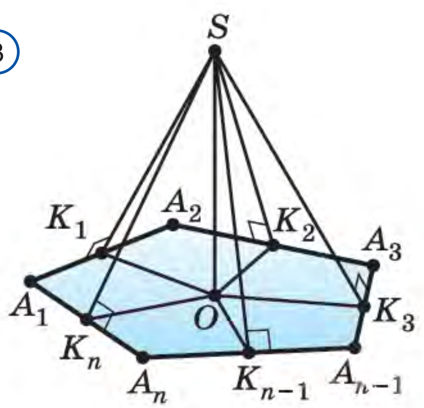
bul jerde r – sheńber radiusi.

Tap usığan uqsas, SBO tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$ hám SCO tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten bolsa $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$ ekenligin tabamız.

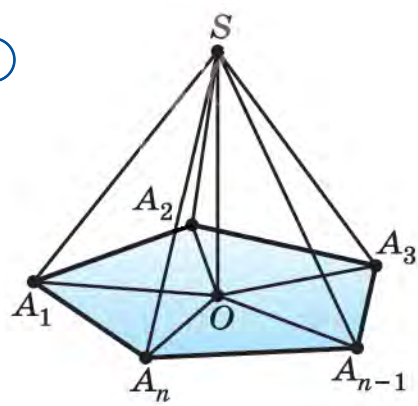
Demek, $SA = SB = SC$.❑

Joqarıda keltirilgen 3–4-súwretler ultanında 1-máselege uqsas hám qálegen kópmúyeshlik ushın ulıwmalıraq jağdaylardı óz betińizshe dálillew ushın keltiremiz.

3



4

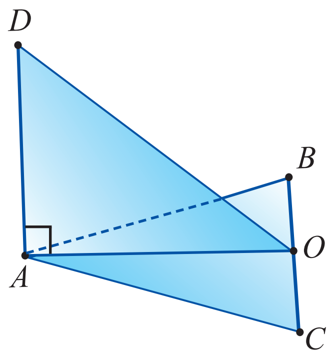


2- másele. Keńisliktegi noqat kópmúyeshliktiń táreplerinen teńdey uzaqlıqta jaylasqan bolıp, onnan kópmúyeshlik tegisligine perpendikulyar túsirilgen. Bul perpendikulyar ultanı kópmúyeshlikke ishley sızılğan sheńber orayı menen ústpe-úst túsiwin dálilleń (3-súwret).

3- másele. Keńisliktegi noqat kópmúyeshliktiń ushlarınan teńdey uzaqlıqta jaylasqan bolıp, onnan kópmúyeshlik tegisligine perpendikulyar túsirilgen. Bul perpendikulyar ultanı kópmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńber orayı menen ústpe-úst túsiwin dálilleń (4-súwret).

4-másele. ABC úshmúyeshlik tegisligine onıń A noqatınan perpendikulyar túsirilgen (5-súwret). Eger $AB = c = 13$, $BC = a = 20$, $AC = b = 11$ hám $AD = 36$ ǵa teń bolsa, D noqattan BC tuwrıǵa shekemgi aralıqtı tabıń.

5



Sheshimi. Izlenip atırǵan aralıq D noqattan BC tárepke túsirilgen perpendikulyar uzınlıǵına teń boladı. Bul kesindini túsiriw ushın onıń BC táreptegi ultanın tabıw kerek boladı. Bunıń ushın ABC úshmúyeshliktiń A ushınan BC tárepine AO biyiklikti túsiremiz: $AO \perp BC$.

Onda úsh perpendikulyar haqqındaǵı teorema boyınsha, $BC \perp DO$ boladı. Demek, DO izlenip atırǵan kesindi eken.

Endi DO kesindiniń uzınlıǵın tabamız. Bunıń ushın, aldın ABC úshmúyeshlik maydanın Geron formulasınan paydalanıp tabamız:

$p = (a + b + c) : 2 = (20 + 11 + 13) : 2 = 22;$

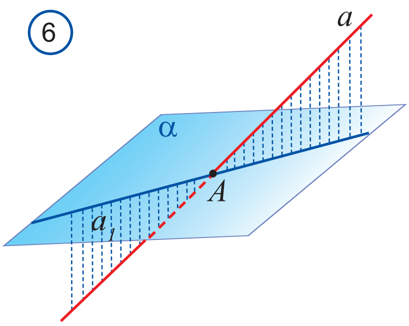
$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} = \sqrt{22 \cdot (22 - 20) \cdot (22 - 11) \cdot (22 - 13)} = 66.$

$AO = 2\,S / a = (2 \cdot 66) : 20 = 6{,}6.$

ADO tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte, Pifagor teoreması boyınsha

$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6{,}6^2} = 36{,}6.$

6

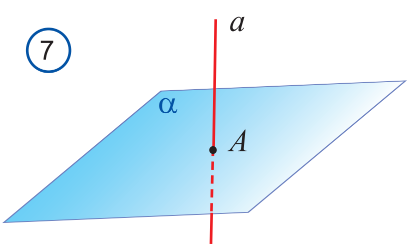


Meyli, α tegislik hám onı kesip ótiwshi hám bul tegislikke perpendikulyar bolmaǵan a tuwrı berilgen bolsın (6-súwret). a tuwrınıń hár bir noqatınan perpendikulyarlar túsiremiz. Bul perpendikulyarlardıń ultanları a_1 tuwrını payda qıladı.

a_1 tuwrı a tuwrınıń α tegisliktegi *proekciyası* dep ataladı.

a tuwrı hám α tegislik arasındaǵı múyesh dep, tuwrı menen onıń bul tegisliktegi proekciyası arasındaǵı múyeshke aytıladı.

7



Eger tuwrı tegislikke perpendikulyar bolsa (7-súwret), onıń menen tegislik arasındaǵı múyesh 90° qa, eger parallel bolsa, bul tuwrı menen tegislik arasındaǵı múyesh 0° qa teń dep alınadı.

Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar

1. *Úsh perpendikulyar haqqındaǵı teoremanı túsindiriń. Ne sebepten ol solay atalǵan?*
2. *Úsh perpendikulyar haqqındaǵı teoremaǵa keri teoremanı aytıp hám túsindirip beriń.*
3. *Tuwrı hám tegislik arasındaǵı múyesh qalay anıqlanadı?*
4. *Tegislik hám oǵan perpendikulyar tuwrı arasındaǵı múyesh neshe gradus?*

5.26. A noqat tárepi a ǵa teń bolǵan teń tárepli úshmúyeshliktiń ushlarınan a aralıqta jatadı. A noqattan úshmúyeshlik tegisligine shekemgi aralıqtı tabıń.

5.27. α tegisliktiń sırtındaǵı S noqattan oǵan úsh teń SA, SB, SC qıya hám SO perpendikulyar ótkizilgen. Perpendikulyardıń O ultanı ABC úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń orayı bolıwın dálilleń.

5.28. Teń tárepli úshmúyeshliktiń tárepleri 3 m ge teń. Úshmúyeshliktiń hár bir tóbesinen 2 m aralıqta bolǵan noqattan úshmúyeshlik tegisligine shekemgi aralıqtı tabıń.

5.29. Teń qaptallı úshmúyeshlikte ultanı hám biyikligi 4 m ge teń. Berilgen noqat úshmúyeshlik tegisliginen 6 m aralıqta hám onıń ushlarınan birdey aralıqta jatadı. Usı aralıqtı tabıń.

5.30. A noqattan kvadrattıń ushlarına shekemgi aralıq a ǵa teń. Kvadrattıń tárepi b ǵa teń bolsa, A noqattan kvadrat tegisligine shekemgi aralıqtı tabıń.

5.31. Berilgen noqattan tegislikke ótkizilgen berilgen uzınlıqtaǵı qıyalar ultanlarınıń geometriyalıq ornın tabıń.

5.32. Berilgen noqattan tegislikke uzınlıqları 10 sm hám 17 sm bolǵan eki qıya ótkizilgen. Bul qıyalarlar proekciyasınıń ayirmasi 9 sm ge teń. Qıyalardıń proekciyaların tabıń.

5.33. Noqattan tegislikke eki qıya ótkizilgen. Eger: 1) olardan biri ekinshisinen 26 sm uzın, qıyalardıń proekciyaları 12 sm hám 40 sm bolsa; 2) qıyalardıń uzınlıqları 1 : 2 qatnasta bolıp, olardıń proekciyaları 1 sm hám 7 sm ge teń bolsa, qıyalardıń uzınlıqların tabıń.

5.34. α tegislikten d aralıqta jatırǵan A noqattan tegislik penen 30° múyesh payda etiwshi AB hám AC qıyalar ótkizilgen. Olardıń α tegislikke proekciyaları óz ara 120° lı múyesh payda etedi. BC kesindi uzınlıǵın tabıń.

5.35. Eger tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetlerinen biri tegislikke tiyisli, al ekinshisi onıń menen 45° lı múyesh payda qılsa, gipotenuza bul tegislik penen 30° lı múyesh payda qılıwın dálilleń.

5.36. a qıya α tegislik penen 45° lı múyesh payda qıladı, al tegisliktiń b tuwrısı qıya proekciyası menen 45° lı múyesh payda qıladı. a hám b tuwrılar arasındaǵı múyeshtiń 30° qa teń ekenligin dálilleń.

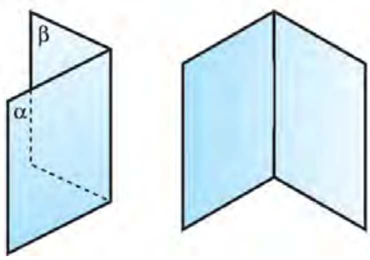
5.37. P noqat tárepi a ǵa teń $ABCD$ kvadrattıń hár bir tóbesinen a aralıqta jatadı. Kvadrat tegisligi hám AP tuwrı arasındaǵı múyeshti tabıń.

5.38. Úshmúyeshli piramidanıń hámme qabırǵaları óz ara teń. Piramidanıń qabırǵası hám bul qabırǵa tiyisli bolmaǵan jaǵı arasındaǵı múyeshti tabıń.

5.39. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń ólshemleri a, b hám c ǵa teń. Parallelepiped diagonalı menen onıń jaqları diagonalları arasındaǵı aralıqtı tabıń.

18 KEŃISLIKTE TEGISLIKLERDIŃ PERPENDIKULYARLIǴI

1

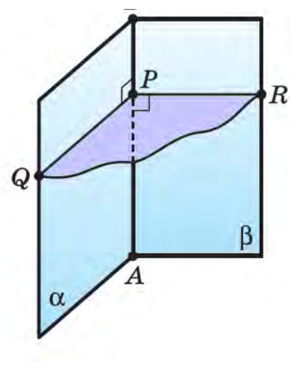


Eki yarimtegislik hám olardı shegaralap turǵan ulıwma tuwrıdan ibarat geometriyalıq figura *eki jaqlı múyesh* dep ataladı (1-súwret). Yarimtegislikler eki jaqlı múyeshtiń *jaqları*, al olardı shegaralawshı tuwrı eki jaqlı múyeshtiń *qabırǵa*sı dep ataladı.

Eki jaqlı múyeshler haqqında qorshaǵan ortalıqtaǵı tómendegi zatlar mısal bola aladı (2-súwret): kitap, notebook (noutbuk), ashıq esik hám imárat tóbesi.

2

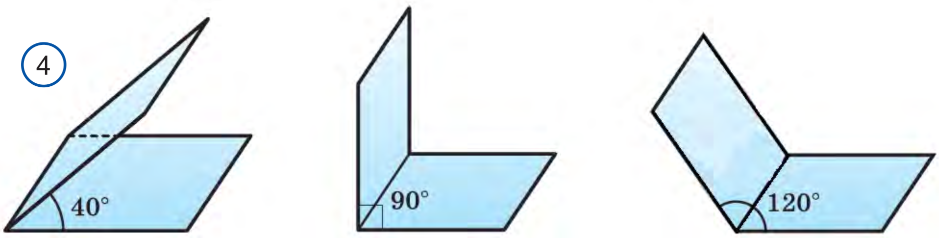
3



Eki jaqlı múyesh qabırǵasınıń qálegen noqatınan onıń jaqlarında jatıwshı hám bul qabırǵaǵa perpendikulyar bolǵan nurlardı shıǵaramız. Bul nurlar payda qılǵan múyesh eki jaqlı múyeshtiń *sızıqlı múyeshi* dep ataladı (3-súwret).

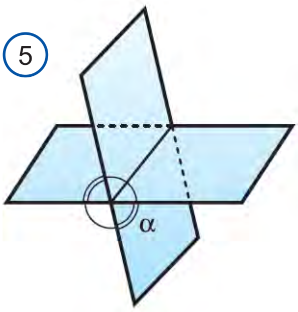
Eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi qabırǵada tańlanǵan noqat penen anıqlanadı hám sheksiz kóp bolıwı, anıqlamadan kórinedi. Solay bolsa da, eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi ólshemi qabırǵada tańlanǵan noqatqa baylanıslı emes, yaǵnıy olardıń hámmesi óz ara teń boladı.

4



Eki jaqlı múyeshler ólshemi onıń sızıqlı múyeshi ólshemi menen anıqlanadı. Sızıqlı múyeshlerdiń súyir, tuwrı, doǵal hám jayıq bolıwına qarap, eki jaqlı múyeshler de, sáykes túrde, súyir, tuwrı, doǵal hám jayıq eki jaqlı múyeshlerge ajıratıladı. 4-súwrette hár túrli eki jaqlı múyeshler súwretlengen.

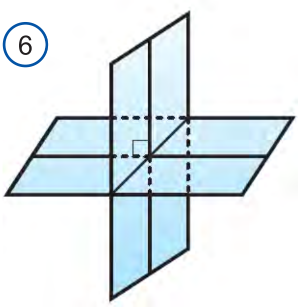
5



Eki kesilisiwshi tegislik pútin keńislikti ulıwma qabırǵaǵa iye bolǵan tórt eki jaqlı múyeshke ajıratadı (5-súwret). Bul eki jaqlı múyeshlerdiń biri α ǵa teń bolsa, olardan jáne birewiniń mánisi de α ǵa teń boladı. Al, qalǵan ekewiniń mánisi 180° – α ǵa teń boladı.

Usı eki jaqlı múyeshler ishinde 90° tan kishisi de boladı. Usı múyeshtiń mánisi kesilisiwshi *tegislikler arasındaǵı múyesh* dep alınadı.

6

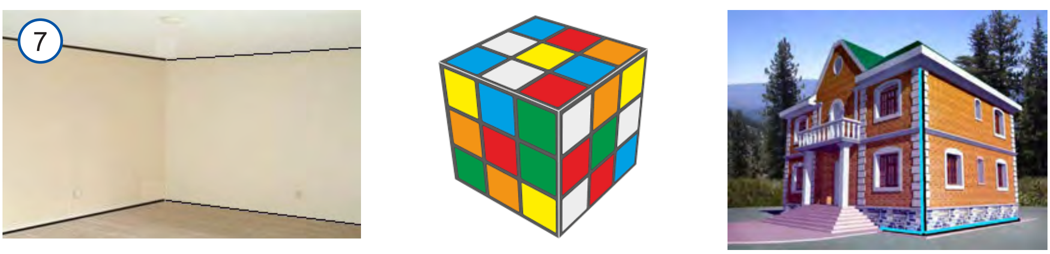


Eger eki jaqlı múyeshlerdiń biri tuwrı, yaǵnıy 90° qa teń bolsa, qalǵan úshewi de tuwrı boladı (6-súwret).

Tuwrı múyesh astında kesilisiwshi tegislikler – *perpendikulyar tegislikler* dep ataladı.

Perpendikulyar tegisliklerge qorshaǵan ortalıqtan bólmeniń polı hám diywalların, ulıwma qabırǵaǵa iye bólmeniń diywalları, ulıwma qabırǵaǵa iye Rubik kubigi jaqları, jer beti hám úy diywalları hám de úydiń bir-birine tutasqan diywalların mısal retinde keltiriw múmkin (7-súwret).

7

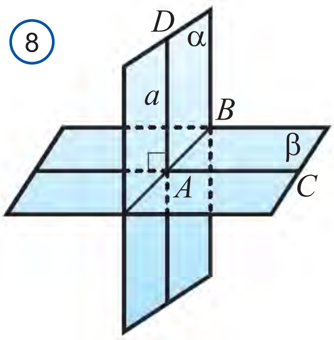


α hám β tegisliklerdiń perpendikulyarlıǵı tuwrılardaǵı kibi “⊥” belgi járdeminde, $\alpha \perp \beta$ tárizde jazıladı.

Endi perpendikulyar tegisliklerdiń qásiyetleri haqqında toqtalamız. Tómendegi teorema – “tegisliklerdiń perpendikulyarlıq teoreması” dep ataladı.

5.11-teorema. Eger tegisliklerden biri ekinshisine perpendikulyar bolǵan tuwrıdan ótse, bunday tegislikler óz ara perpendikulyar boladı.

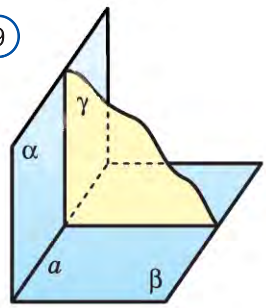
8



Dálilleniwi. Meyli, α hám β tegislikler berilgen bolıp, α tegislik β tegislikke perpendikulyar bolǵan *a* tuwrıdan ótsin (8-súwret). β tegislik penen *a* tuwrınıń kesilisiw noqatı *A* bolsın. a⊥b ekenligin dálilleymiz.

α hám β tegislikler *AB* tuwrı boylap kesilisedi. Onda, $AB \perp a$ boladı, sebebi shárt boyınsha $\beta \perp a$. β tegislikte jatırǵan hám *AB* tuwrıǵa perpendikulyar bolǵan *AC* tuwrını ótkizemiz. Nátiyjede, payda bolǵan *DAC* múyesh αβ eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi boladı. Shárt boyınsha, $a \perp \beta$. Onda, *DAC* tuwrı múyesh. Demek, $\alpha \perp \beta$.❑

9

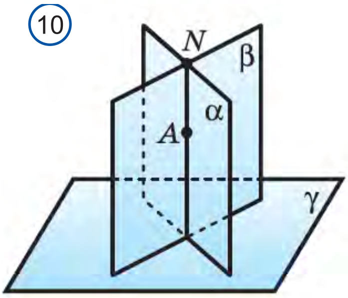


Bul teoremadan tómendegi nátiyje kelip shıǵadı.

Nátiyje. Eger tegislikler eki tegisliktiń kesilisiw sızıǵına perpendikulyar bolsa, bul tegisliklerdiń hár birine de perpendikulyar boladı (9-súwret).

4.11 teoremaǵa keri teorema da orınlı boladı. Onı dálilleniwisiz keltiremiz.

10



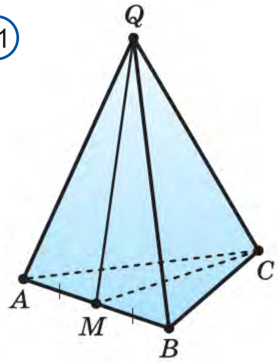
5.12-teorema. Eger eki perpendikulyar tegisliklerden biriniń bazı bir noqatınan ekinshisine perpendikulyar tuwrı ótkizilse, bul tuwrı birinshi tegislikte jatadı.

Nátiyje. Eger eki perpendikulyar tegislik úshinshi tegislikke perpendikulyar bolsa, olardıń kesilisiw sızıǵı da bul tegislikke perpendikulyar boladı (10-súwret).

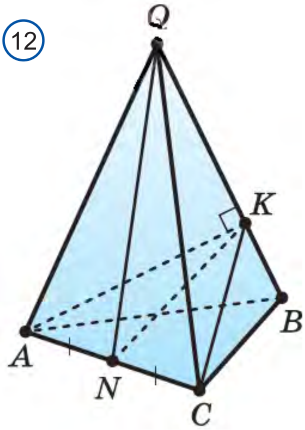
1-másele. *M* noqat *QABC* durıs piramida ultanındaǵı qabırǵasınıń ortası bolsa (11-súwret), *QCM* tegislik piramida ultanı tegisligi *ABC* ǵa perpendikulyar ekenligin dálilleń.

Dálilleniwi. *AB* kesindi teń qaptallı *AQB* hám *ACB* úshmúyeshliklerdiń ultanı bolǵanlıǵı ushın bul úshmúyeshlikler medianaları *QM* hám *CM* ga ham perpendikulyar boladı. Sonıń menen birge, *AB* kesindi *QCM* tegislikke de

11



12



perpendikulyar boladı. Onda 5.12-teorema boyınsha, *ABC* tegislik *QCM* tegislikke perpendikulyar boladı. ❑

2- másele. *QABC* durıs piramidanıń tóbesindegi tegis *AQB* múyeshi α ǵa teń. Onıń qaptal qabırǵasındaǵı eki jaqlı múyeshin tabıń (12-súwret).

Sheshimi. Meyli, *N* noqat *AC* qabırǵanıń ortası, *AK* bolsa *A* noqattan *BQ* qabırǵaǵa túsirilgen perpendikulyar bolsın.

ABQ hám *CBQ* úshmúyeshliklerdiń teńliginen $CK \perp BQ$ boladı. Sonıń ushın, *AKC* múyesh *BQ* eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi boladı.

AKQ hám *ANQ* tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten $AK = \sin\alpha$, $AN = AQ \sin(\alpha/2)$ ekenligin tabamız.

AKN tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten bolsa $\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$ ge iye bolamız.

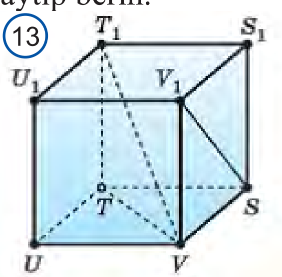
Bunnan, $\angle AKC = 2 \arcsin \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$. ❑

? *Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar*

1. *Eki jaqlı múyesh dep nege aytıladı?*
2. *Qanday múyesh tegislikler arasındaǵı múyesh dep ataladı?*
3. *Tuwrı múyesh astında kesilisiwshi tegislikler qalay ataladı?*
4. *Tegisliklerdiń perpendikulyarlıq teoremasın aytıp beriń.*
5. *Perpendikulyar tegisliklerdiń qásiyetlerin aytıp beriń hám túsindiriń.*

5.40. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedtiń; b) $ABCA_1B_1C_1$ tuwrı prizmanıń perpendikulyar jaqların anıqlań hám tuwrı eki jaqlı múyeshlerin aytıp beriń.

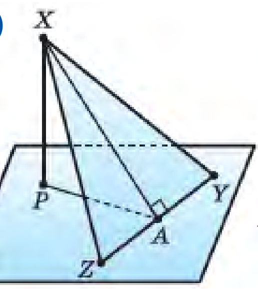
13



5.41. $STUVS_1T_1U_1V_1$ kubta (13-súwret): a) TVT_1 múyesh; b) T_1ST múyesh T_1SVT eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi bola ma? V_1UTS eki jaqlı múyeshtiń mánisin tabıń.

5.42. Eki jaqlı múyeshtiń birewden jaǵı ulıwma, qalǵan jaqları birgelikte tegislikti payda qıladı. Bul eki jaqlı múyeshlerdiń qosındısı 180° qa teń ekenligin dálilleń.

14

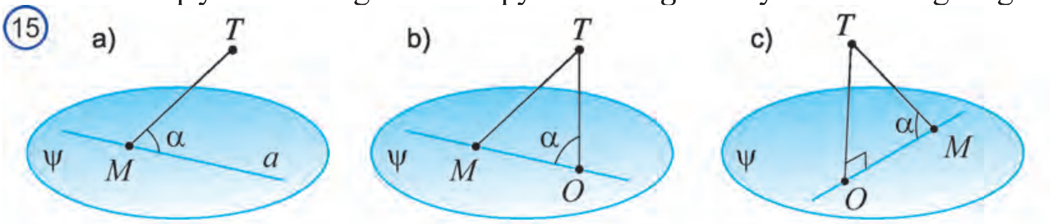


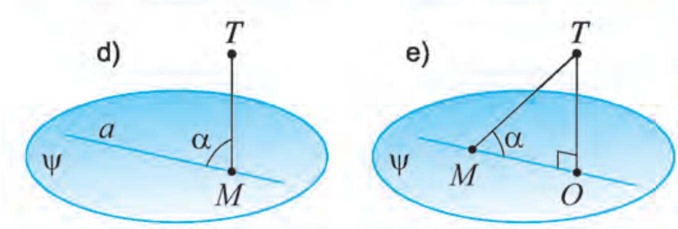
5.43. *XYZ* úshmúyeshliktiń *YZ* tárepi β tegislikte jatadı. Onıń *X* ushınan *XA* biyiklik hám β tegislikke *XP* perpendikulyar túsirilgen (14-súwret). *XAP* múyesh *XYZP* eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi ekenligin dálilleń.

5.44. Úshmúyeshli *ABCD* piramidanıń *CD* qabırǵası *ABC* tegislikke perpendikulyar. $AB = BC = AC = 6$ hám $BD = 3\sqrt{7}$ bolsa, *DACB, DABC, BDCA* eki jaqlı múyeshlerdi tabıń.

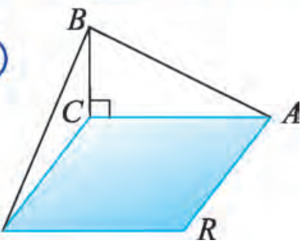
5.45. *T* noqattan ψ tegislikke qıya túsirilgen (15-súwret). Tómendegi súwretlerdiń qaysılarında tegislik hám qıya arasındaǵı α múyesh durıs belgilengen?

15





16



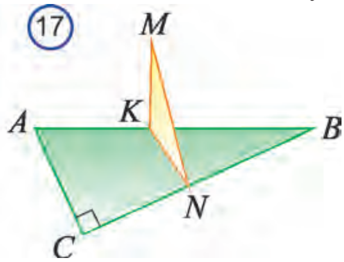
5.46. Úshmúyeshli *ABCD* piramidada *DAB, DAC, ACB* múyeshler tuwrı, $AC = CB = 5$ hám $DB = 5\sqrt{5}$ bolsa, *ABCD* eki jaqlı múyeshin tabıń.

5.47. Eki jaqlı múyesh sızıqlı múyeshiniń tegisligi onıń hár bir jaǵında perpendikulyar ekenligin dálilleń.

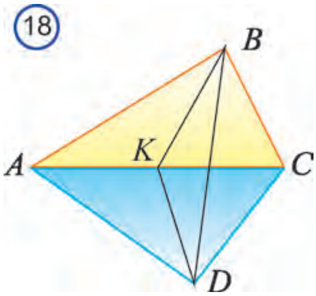
5.48. Eki jaqlı múyeshtiń bir jaǵında jatırǵan eki noqat onıń qabırǵasınan, sáykes túrde, 51 sm hám 34 sm uzaqlıqta jatır. Bul noqatlardıń birinshisi basqa jaǵınan 15 sm uzaqlıqta jatırǵanlıǵı belgili bolsa, usı jaǵınan ekinshi noqatqa shekemgi aralıqtı tabıń.

5.49. *ABC* tuwrı múyeshli úshmúyeshlik ($\angle C = 90°$) hám *ACPR* kvadrat tegislikleri óz ara perpendikulyar (16-súwret). Kvadrat tárepi 6 sm, úshmúyeshlik gipotenuzası 10 sm. *BP* kesindi uzınlıǵın tabıń.

17



5.50. *MK* kesindi tuwrı múyeshli *ABC* úshmúyeshlik ($\angle C = 90°$) tegisligine perpendikulyar (17-súwret). $KN \| AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ sm, $MK = 8$ sm bolsa,



MN kesindi uzınlıǵın tabıń.

5.51. ABC hám ADC teń qaptallı úshmúyeshlikler tegislikleri perpendikulyar (18-súwret). AC olardıń ulıwma ultanı. BK kesindi ABC úshmúyeshliktiń medianası.

Eger $BK = 8$ sm, $DK = 15$ sm bolsa, BD kesindi uzınlıǵın tabıń.

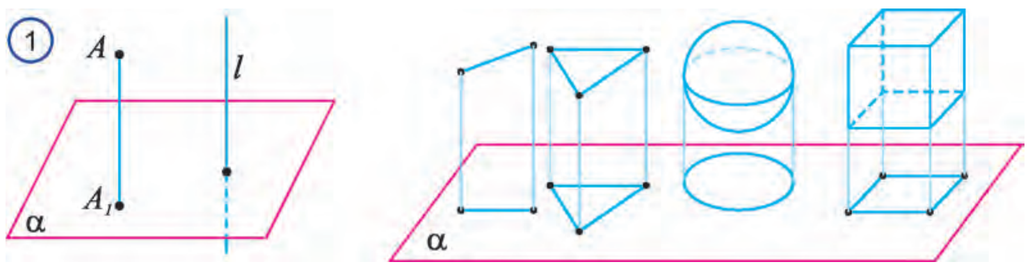
19 KEŃISLIKTE ORTOGONAL PROEKCIYA HÁM ONNAN TEXNIKADA PAYDALANÍW

Eger proekciya baǵıtı l proekciyalaw tegisligi α ǵa perpendikulyar bolsa, bunday parallel proekciyalaw *ortogonal proekciyalaw* dep ataladı.

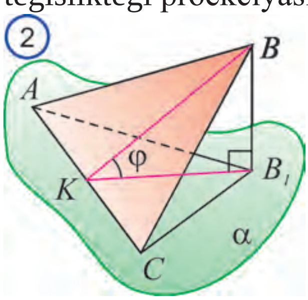
Ortogonal proekciyalawda payda bolgan figura berilgen figuranıń *ortogonal proekciyası* yamasa qısqasha *proekciyası* dep aytıladı.

Parallel proekciyalawdıń hámme qásiyetleri ortogonal proekciyalawda da orınlı boladı. Tómende tek ǵana ortogonal proekciyaǵa tiyisli bolǵan áhmiyetli qásiyetti dálilleymiz.

5.13-teorema.* *Kópmúyeshliktiń tegisliktegi ortogonal proekciyasınıń maydanı kópmúyeshlik maydanın onıń tegisligi menen proekciya tegisligi arasındaǵı múyesh kosinusı kóbeymesine teń.



Dálilleniwi. 1) Aldın úshmúyeshlik hám onıń bazı bir tárepinen ótiwshi tegisliktegi proekciyası ushın qarap shıǵamız.



Meyli, ABC úshmúyeshliktiń α tegisliktegi proekciyası AB_1C úshmúyeshlik bolsın.

ABC úshmúyeshliktiń BK biyikligin túsiremiz. Úsh perpendikulyar haqqındaǵı teorema boyınsha, B_1K kesindi KBB_1 úshmúyeshliktiń biyikligi boladı.

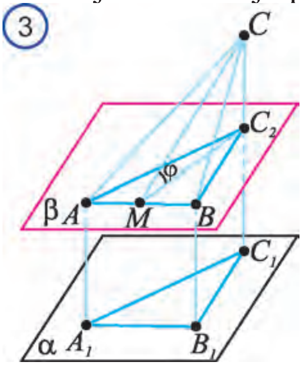
BKB_1 múyesh – úshmúyeshlik tegisligi menen proekciya tegisligi arasındaǵı φ múyeshten ibarat boladı. BKB_1 úshmúyeshlikte: $KB_1 = KB \cdot \cos\varphi$.

Ol jağdayda, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot KB,\ S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot KB_1.$

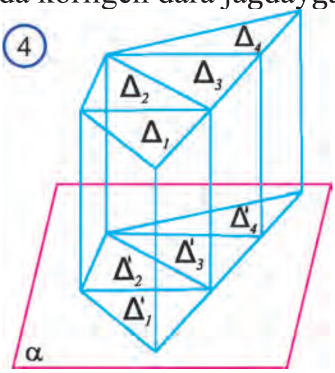
Bulardan, $S_{AB_1C} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$ di payda qılamız. 1-jağdayda teorema dálillendi. 2) α tegislik ornına oğan parallel bolğan basqa β tegislik alınğanda da teorema orınlı boladı (3-súwret). Bul parallel proekciyalaw qásiyetinen paydalanıp dálillenedi.

3) Endi ulıwma, kópmúyeshlik kórinisine keletuğın bolsaq (4-súwret) bul jağdayda teorema kópmúyeshlikti diagonalları járdeminde úshmúyeshliklerge bóliw járdeminde joqarıda kórilgen dara jağdayğa keltirip dálillenedi.❑

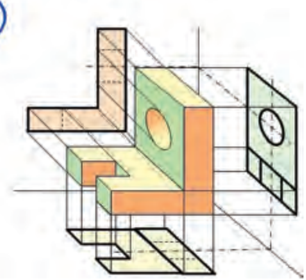
3



4



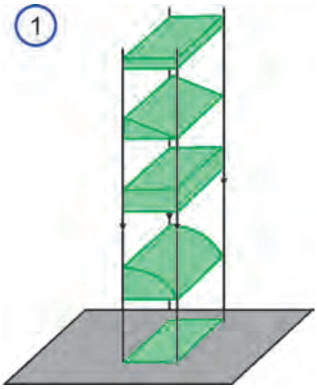
5



Ortogonal proekciyadan texnikalıq sızılmada hár túrli detallardı proektlestiriwde paydalanıladı. Túrli mashina detalları sızılmaları bir, eki yamasa úsh óz ara perpendikulyar proekciyalar tegisliklerine ortogonal proekciyalaw jolı menen payda qılınadı (5-súwretler). Bul proekciyalar qaysı bağıtlarda proekciyalanğanlığına qarap, vertikal (tik), gorizontal hám frontal proekciyalar dep te ataladı.

? *Tema boyınsha sorawlar hám shınığıwlar*

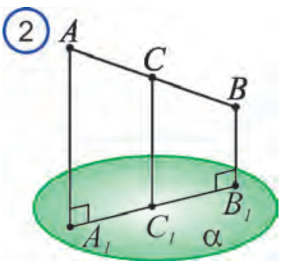
1. *Ortogonal proekciyalaw dep nege aytıladı?*
2. *Ortogonal proekciyalaw qásiyetlerin sanap beriń.*
3. *Ortogonal proekciyalawdan texnikada qalay paydalanıladı?*
4. *Bir tuwrığa perpendikulyar bolğan tegisliktiń qásiyetin aytıp beriń.*
5. *Ulıwmalasqan Pifagor teoreması ne haqqında?*
6. *Úshinshi tegislikke prependikular eki tuwrı óz ara parallel bola ma?*
7. *Ekinshi tegislikke perpendikulyar tegislik hám tuwrı óz ara parallel bola ma?*
8. *Berilgen tuwrıdan berilgen tegislikke perpendikulyar bolğan neshe tegislik ótkiziw múmkin?*
9. *α tegislik β tegislikke perpendikulyar. α tegisliktegi hár qanday tuwrı β tegislikke perpendikulyar bola ma?*
10. *Birinshi tegislikke qıya bolğan kesindiden ótiwshi ekinshi tegislik birinshisine perpendikulyar bola ma?*
11. *Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń kesilisiwshi jaqları óz ara perpendikulyar bola ma?*



5.52. Trapeciyanıń ortogonal proekciyası: a) kvadrat; b) kesindi; c) tuwrı tórtmúyeshlik; d) parallelogramm; e) trapeciyalardan biri bolıwı múmkin be?

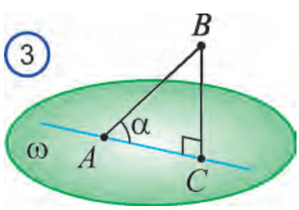
5.53. 6-súwretke qarap ortogonal proekciyası tuwrı tórtmúyeshlik bolǵan geometriyalıq figuralardı aytıp beriń.

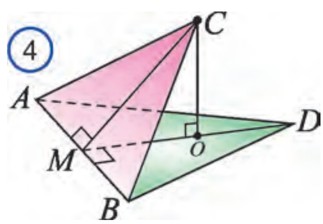
5.54. A_1B_1 kesindi AB kesindiniń α tegislikke ortogonal proekciyası (7-súwret). Eger $AB = 20$ sm, $AC = 10$ sm, $A_1B_1 = 12$ sm bolsa, B_1C_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

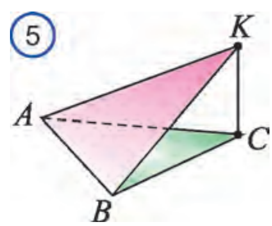


5.55. Uzınlıǵı 5 sm bolǵan AB kesindiniń ω tegislikke ortogonal proekciyası uzınlıǵı 3 sm bolǵan AC kesindiden ibarat (8-súwret). AB kesindiniń ω tegislikke qıyalıq múyeshi kosinusın tabıń.

5.56. Eger AB tuwrıdan C noqatqa shekemgi aralıq (9-súwret) C noqattan ABD tegislikke shekemgi aralıqtan eki márte úlken bolsa, ABC hám ABD tegislikler arasındaǵı múyeshti tabıń.







5.57. ABC úshmúyeshliktiń maydanı 18 sm^2 qa teń. $KC \perp (ABC)$. Eger ABK hám ABC úshmúyeshlikler tegislikleri arasındaǵı múyesh: a) $\alpha = 30°$; b) $\alpha = 45°$; a) $\alpha = 60°$ bolsa, ABK úshmúyeshlik maydanın tabıń.

5.58. ABC hám ABD úshmúyeshlikler tegislikleri arasındaǵı múyesh 60° qa teń. Eger $AB = 4\sqrt{3}$ bolsa, CD aralıqtı tabıń.

5.59. Maydanı 48 sm^2 qa teń bolǵan úshmúyeshliktiń ortogonal proekciyası tárepleri 14 sm, 16 sm hám 6 sm bolǵan úshmúyeshlikten ibarat. Bul úshmúyeshlik tegisligi hám onıń proekciyası arasındaǵı múyeshti esaplań.

5.60. Maydanı 12 sm^2 qa teń bolǵan úshmúyeshliktiń ortogonal proekciyası – tárepleri 13 sm, 14 sm hám 15 sm bolǵan úshmúyeshlikten ibarat. Bul úshmúyeshlik tegisligi hám onıń proekciyası arasındaǵı múyeshti esaplań.

20 ÁMELIY SHÍNÍĞÍWLAR HÁM QOLLANÍWLAR

Qollanıwlar hám ámeliy kompetenciyalardı qáliplestiriw

1. Eki qońsı bólmeniń diywalları tutasqan sızıqtıń polǵa perpendikulyarlıǵın qanday qılıp ólshewler járdeminde tekseriwge boladı?

2. Uzınlıq ólshew ásbabı – ruletka járdeminde sútinniń tik ekenligin qalay tekseriwge boladı?

3. Dóńgelektiń (kolesonıń) kósheri tegisliginiń ol dóńgelep atırǵan tegislikke perpendikulyarlıǵın qalay tekseriwge boladı?

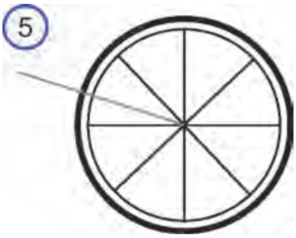
4. Ne sebepten qısta tamnıń tóbesinen salbırap turǵan súmeleklerdi, olardıń qalıńlıǵın esapqa almastan, óz ara parallel dew mumkin?

5. Oqıwshı ámeliy jumıs orınlap atır. Ornatılǵan bir neshe sútinlerdiń Jerge qaraǵanda tik ekenligin tekseriw ushın olardan tek ǵana birewin tekserdi. Qalǵan sútinlerdiń tik ekenligin tómendegishe tekserdi: hámme ústinlerdiń biyikligin, olardıń tómengi ultanları hám joqarı ushları arasındaǵı aralıqlardı ólshep qarar qabıl qıldı. Ol bul jumıstı durıs orınladı ma ?

6. Ne sebepten esik, ol ashıq pa yamasa jabıq pa hár sapar polǵa qaraǵanda perpendikulyar boladı?

7. Tuwrınıń tegislikke perpendikulyarlıǵına anıq mısal retinde dóńgelektiń (kolesonıń) sımları jatırǵan tegisliktiń dóńgelektiń (kolesonıń) kósherine qaraǵanda jaylasıwın keltiriw múmkin (11-súwret). Kósher dóńgelektiń (kolesonıń) hár bir sımına perpendikulyar. Háreket dawamında dóńgelektiń (kolesonıń) sımları hár biri bir noqatta kesilisetuǵın kesindilerden ibarat dóńgelek tegisligin payda qıladı. Eger kósher gorizontal jaylasqan bolsa, dóńgelek (koleso) qanday tegislikte aylanadi? Nege?

5

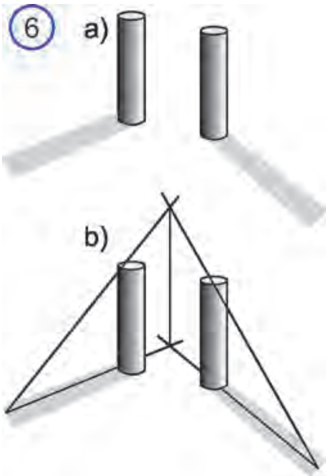


Kórsetpe: dóńgelektiń (kolesonıń) kósherine perpendikulyar tegislikke perpendikulyar boladı.

8. Biyiklikke sekiriw shınıǵıwı orınlanbaqta. Tosıq tayaqtı qoyıw ushın qabırǵası 25 m bolǵan kub hám ólshemleri 25×25×50 bolǵan tuwrı múyeshli parallelepipedlerden paydalanılmaqta.

1) 125 sm; 2)150 sm; 3) 175 sm biyiklikke sekiriw shınıǵıwların qalay payda qılıwǵa boladı?

9. 6-súwrette eki vertikal sútin hám olardıń sayası súwretlengen. Usı maǵlıwmatlardan paydalanıp, jaqtılıq deregi jaylasqan noqattı hám onıń gorizontal tegislikke proekciyasın tabıń hám tómendegi sorawlarǵa juwap beriń.



a) Sútinlerdiń vertikallıǵınıń áhmiyeti bar ma?
b) Saya túsip atırǵan tegisliktiń gorizontallıǵınıń áhmiyeti bar ma?
c) Súwrette berilgen maǵlıwmatlardıń hámmesi de áhmiyetli me ?

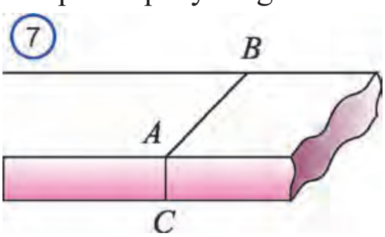
Sheshimi. 12-*súwrette tiyisli jasawlar keltirilgen. Jaqtılıq dereginiń ornın tabıwda sútinlerdiń baǵıtı áhmiyetke iye emes, biraq olardıń vertikal ekenligi áhmiyetli esaplanadı. Eger ústinler vertikal hám saya gorizontal tegislikke túsip atırǵan bolsa, máseleni sheshiw ushın súwrettegi bir sútinniń sayasın hám ekinshi sútinnen túsip atırǵan sayanıń baǵıtın biliw jeterli* (12.*b-súwret*).

10. Domalaq stolǵa tárepi a ǵa teń bolǵan kvadrat kórinisindegi dasturxan salınǵan. Dóńgelek orayı kvadrat orayı menenústpe-úst túsedi. Dasturxannıń ushları onıń tárepleri ortalarına qaraǵanda qansha polǵa jaqınıraq?

Juwap: $a(\sqrt{2}-1)/2= 0{,}207\, a$.

11. Diywallardıń tikligin otves (bir ushına tas baylanǵan jip) penen tekseriledi. Eger otvestiń jibi diywalǵa qanshalıq jabısıp tursa, diywal sonshalıq tik degen qararǵa kelinedi. Bul qarar qanshalıq tuwrı? Bul tekseriw usılı nege tiykarlanǵan?

12. Pıshqılaw beti (sırtı pıshqılanıp atırǵan taxtanıń hámme qabırǵalarına perpendikulyar bolıwın táminlew ushın (13-súwret) taxta sırtında pıshqılaw sızıqların qalay belgilew kerek?



13. Bólmeniń qońsı diywallarınıń óz ara perpendikulyarlıǵın tekseriw ushın Pifagor teoremasinan qalay paydalanıwǵa boladı?

14. Sútinniń tikligin tekseriw ushın sútin ultanı menen bir tuwrıda jatpaytuǵın eki noqattan baqlanadı. Bunday tekseriw usılın tiykarlań.

Kórsetpe: Tuwrı hám tegisliktiń perpendikulyarlıq teoremasınan paydalanıń.

15. Barıp bolmaytuǵın tóbeliktegi noqatta biyik sútin ornatılǵan. Otves járdeminde onıń tikligin qalay tekseriwge boladı?

Sheshimi: Sútinniń bazı bir vertikal tuwrı menen bir tegislikte jatıwın hám jáne basqa vertikal tuwrı menen bir (*basqa*) *tegislikte jatıwın kórsetiw jeterli boladı. Otvesti aldımızǵa sonday etip qoyamız, onıń hám sútinniń joqarı ushları hám de kózimiz bir tuwrıda jatırǵanda, otves jibi hám sútin bir tuwrıda jatsın. Bul usıl tómendegilerge tiykarlanǵan:* 1) *vertikal sútin qálegen vertikal tuwrı menen bir* *tegislikte jatıwı kerek*; 2) *eger eki parallel tuwrı eki kesilisiwshi tegislikte jatsa, bul tuwrılar tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵına da parallel boladı.*

16. Eki vertikal jaylasqan tegis ayna berilgen. Bul aynalardan biriniń sırtına parallel bolǵan, gorizontal nur ekinshi aynadan birinshi ayna sırtına perpendikulyar bolǵan tuwrı boyınsha qaytadı. Aynalar arasındaǵı múyeshti tabıń.

Kórsetpe: Jaqtılıqtıń qaytıw nızamınan paydalanıń. Juwap: 45^0.

17. Gorizontal nur vertikal jaylasqan eki tegis aynadan qaytpaqta. Dáslep nur birinshi ayna sırtına parallel bolǵan bolsa, eki márte sáwlelendiriw nátiyjesinde ekinshi ayna tekisligine parallel bolıp qalmaqta. Aynalar arasındaǵı múyeshti tabıń.

Juwap: 60°.

18. Qalıńlıǵı 5 m, maydanı 4 m^2 bolǵan, kvadrat kórinisindegi polat platforma tórt ushınan tros sım menen gorizontal ildirilgen. Hár bir tros sım uzınlıǵı 2m. Tros sımlardıń platformaǵa qaraǵanda qıyalıq múyeshin tabıń. Biyikligi 0,9 m, ultanınıń diametri 0,6 m bolǵan silindr kórinisindegi bakti bul platformaǵa jaylastırıwǵa bola ma?

Juwap: 45°, *bakti jaylastırıwǵa boladı.*

19. Suw tórt tárepinen aǵıp túsetuǵın tamnıń tóbesi ultanına ortogonal proekciyalanǵan. Tamnıń tóbesi qabırǵalarınıń proekciyası tuwrı tórtmúyeshlik kórinisindegi tam ultanı múyeshiniń bissektrisası bolıwın dálilleń.

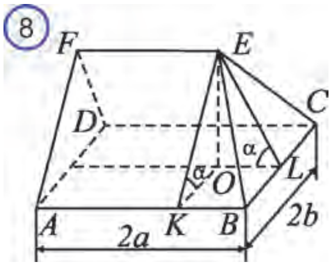
20. Ultanı *ABCD* tuwrı tórtmúyeshlikten ibarat úyge jawın suwı tórt tárepinen aǵıp túsetuǵın tamnıń tóbesin ornatıw kerek (8-súwret). $AB = 2a$ m, $BC = 2b$ m. Tamnıń hámme jaqları ultan tegisligi menen α múyesh payda qıladı. Bul tamdı jabıw ushın qansha qańıltır kerek boladı. Bunda tam tóbesi bet maydanınıń k procenti muǵdarındaǵı qańıltır shıǵındıǵa ketiwin esapqa alıń.

Juwap: $4ab\,(1 + 0{,}01k\,) / \cos\alpha$.

21. Samalsız hawada jawın "qiyalap" jawmaqta. Tuwrı tórtmúyeshlik kórinisindegi faner bólegi járdeminde jawınnıń gorizontal tegisligine qaraǵanda qıyalıǵın qalay anıqlawǵa boladı? Tiyisli sızılmanı sızıń .

Kórsetpe: Faner bólegin sonday jaylastırıw kerek, onıń tegisligi jawın tamshıları háreket trayektoriyası hám olardıń gorizontal tegislikke proekciyası anıqlaǵan tegislikke shama menen perpendikulyar bolsın. Sonda, gorizontal tegislikte jawın túspeytuǵın tuwrı tórtmúyeshlik payda boladı. Soń tiyisli kesindilerdiń uzınlıqları ólshenedi hám olar arasındaǵı múyeshtiń tangensi esaplanadı.

22. Maydanı S_1 ge, uzınlıǵı n ge teń bolǵan balalar krovatı sútini eki birdey tuwrı tórtmúyeshlik kórinisindegi perdeler menen jabıw kerek. Hár bir perdeniń



maydanı S_2 ge, al uzınlıǵı krovat uzınlıǵına teń. Hár eki perdeniń joqarı sheti krovat ústinde parallel ornatılǵan hám krovat uzınlıǵına teń sımǵa bekkemlengen. Sımnıń krovattan qanday biyiklikte ornatılǵanlıǵın tabıń. Máseleni tómendegi sanlı shártlerde sheshiń: n = 1 m 20 sm, S_1= 6000 sm², S_2=7800 sm². Tiyisli sızılmanı sızıń.

Kórsetpe: $\sqrt{4S_2^2 - S_1^2} / 2n$.

Juwap: 0,5 m.

23. Ultanı *ABCD* tuwrı tórtmúyeshlikten ibarat úyge jamǵır suwı tórt tárepinen aǵıp túsetuǵın tamnıń tóbesin ornatıw kerek (14-súwret). AB= 18 m, BC= 12 m. Tamnıń hámme jaqları ultan tegisligi menen 40^0 lı múyesh payda qıladı. Eger 1 m² maydandı jabıw ushın 15 dana cherepica paydalanılsa, bul tamdı jabıw ushın neshe dana cherepica kerek boladı?

24. Altıjaqlı qálem hám ashılǵan kitap járdeminde tuwrılar arasındaǵı, tuwrı hám tegislik arasındaǵı, tegislikler arasındaǵı múyeshlerdiń tımsalların kórsetiń.

25. Eki simmertiya kósherine iye, 14-súwrette súwretlengen tamnıń tóbesinen jawın suwı qaysı baǵıtlarda aǵıp túsiwin anıqlań.

26. Ultanına barıp bolmaytuǵın mináranıń biyikligin anıqlaw ushın qanday ólshewlerdi ámelge asırıw kerek?

27. Biyikligi belgili, biraq jaqınına barıp bolmaytuǵın imáratqa shekemgi aralıqtı tabıw ushın qanday ólshewlerdi ámelge asırıw kerek?

28. Nege sayalar tal túste joǵaladı?

29. Terektiń tóbesine shıqpastan onıń biyikligin qalay ólshewge boladı?

Juwaplar hám kórsetpeler

4.5. a) 7 sm; b) 30 sm; **4.6.** b) 200 mm; **4.13.** 50 sm; **4.14.** 40 mm; **4.21.** $a + b$; **4.22.** a) 40°; b) 45°; c) 90°; **4.23.** a)58°; b) 47°; **4.40.** 32 sm; **4.41.** 6 sm; **4.42.** 20 sm; **5.11.** 1) 6,5 sm; 2) 15 sm; 3) $\sqrt{2a^2 - b^2 + d^2}$; 3) $\sqrt{2a^2 - c^2 + 2d^2}$; **5.12.** 2 m; **5.17.** 15 sm hám 41 sm; **5.20.** $BD = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2}$; $CD = \sqrt{a^2 + c^2}$; **5.21.** 3,9 m; **5.22.** 9 m; **5.23.** a) $\sqrt{2/2}$; b) $\sqrt{(5 + 3 \cos} b)/ 2$; **5.24.** 3 sm; 7,5 sm; **5.25.** 20 sm; **5.34.** $3d$; **5.37.** 45°; **5.38.** arccos$\sqrt{}$ 3/3; **5.44.** 90°; **5.46.** 60°;

Sabaqlıqtı dúziwde paydalanılǵan hám qosımsha úyreniw ushın usınıs etilip atırǵan oqıw-metodikalıq ádebiyatları hám elektron resurslar

1. A'zamov A., B. Haydarov. Matematika sayyorasi. Toshkent. "O'qituvchi", 1993.
2. Afonina S.I. Matematika va go'zallik, Toshkent, O'qituvchi, 1986.
3. Norjigitov X., Mirzayev Ch. Stereometrik masalalarni yechish. Akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma.-T., 2004 y.
4. Israilov I., Pashayev Z. Geometriya. Akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma. II qism. -T.: O'qituvchi, 2005 y.
5. Погорелов А.В. "Геометрия 10-11", учебник, Москва. Просвещение", 2009.
6. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. "Математика 10", учебник, Минск, 2013.
7. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 класс. учебник, Москва, 2008
8. Билянина О.Я. и др. "Геометрия 10" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
9. Daniel C.Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
10. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
11. http:||www.uzedu.uz - Xalıq bilimlendiriw ministrliginiń xabar bilimlendiriw portalı.
12. http:||www.eduportal.uz - Multimedia orayı xabar bilimlendiriw portalı.
13. http:||www.school.edu.ru - Ulıwma bilimlendiriw portalı (rus tilinde).
14. http:||www.problems.ru/ Matematikadan máseleler izlew системасы (rus tilinde).
15. http:||geometry.net/ - Algebra hám geometriyadan oqıw materialları (inglis tilinde).
16. http:||mathproblem.narod.ru/ - Matematikalıq krujoklar hám olimpiadalar (rus tilinde);
17. http:||www.ixl.com - Aralıqtan turıp oqıtıw saytı (ingliz tilinde).
18. http:||www.mathkang.ru - "Kenguru" xalıqaralıq matematikalıq tańlaw saytı (rus tilinde).
19. http:||www.khanakademy.org -"Xan akademiyası" Aralıqtan turıp bilimlendiriw saytı (ingliz tilinde).

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov, B.Q. Haydarov

MATEMATIKA 10
ALGEBRA HÁM ANALIZ TIYKARLARÍ
GEOMETRIYA
II BÓLIM

(Qoraqalpoq tilida)

Orta bilimlendiriw mákemeleriniń 10-klası hám orta arnawlı,
kásip-óner bilimlendiriw mákemeleri oqıwshıları ushın sabaqlıq
1-basılımı

Redaktor:	R.Abbazov
Awdarǵan:	K.Sagidullaev
Texn. redaktor:	K. Madiarov
Kompyuterte teriwshi:	F. Qudratillayev

Baspaxana licenziyasi AI № 296. 22.05.2017
Basıwǵa ruqsat etildi 25.01.2018. Pishimi $70\times100^{1}/_{16}$
«TimesNewRoman» garniturası.
Kólemi: 9,0 baspa tab. Esap.b.t. 9,0.
Tirajı 10 444 dana
Original-maket «Extremum-press» JShJ de
tayarlandı. 100053, Tashkent q.
Baǵıshamal kóshesi, 3. Tel: 234-44-05
Ózbekistan Baspasóz hám xabar agentliginiń «O‘qituvchi»
baspa-poligrafiya dóretiwshilik úyi baspaxanasında basıp shıǵarıldı.
100206, Tashkent q. Yunusabad rayonı,
Yangishahar kóshesi, 1- úy.
Buyurtpa № .