Б.Ҳайдаров, Э.Сариқов, А.Қӯчқоров

ГЕОМЕТРИЯ 9

Китоби дарсӣ барои донишомӯзони синфҳои
9-уми мактабҳои миёнаи таълими умумӣ
Нашри сеюм
Вазорати таълими халқи Республикаи
Ӯзбекистон ба сифати китоби дарсӣ тавсия
намудааст

НДУ
«O‘zbekiston milliy ensiklopediyasi»

Тошканд — 2014

UO‘K 514.1(075)
KBK 22.151ya721
X-33
Дар зери таҳрири доктори илмҳои физика-математика, профессор А. Аъзамов

Муқарризон:

А. Нарманов – мудири кафедраи геометрия ва математикаи амалии Донишгоҳи миллии Ўзбекистон, доктори илмҳои физика-математика;

Г. Юсупова – коркуни калони илмии Пажўҳишгоҳи математикаи ФУ Ўзбекистон, номзади илмҳои физика-математика;

М.Акрамов – муаллими тоифаи олии математикаи мактаби рақами 5-уми ноҳияи Паркенти вилояти Тошканд.

М. Шониёзова – муаллими математикаи мактаби рақами 300-и ноҳияи Сирғали шаҳри Тошкент.

Дар синфи 9-ум қисми планиметрияи геометрия — омўзиши хосиятҳои шаклҳои геометрии ҳамвор давом дода мешавад. Дар он Шумо бо монандии шаклҳои геометрӣ муносибатҳои байни тарафҳо ва кунҷҳои секунҷаҳо, дарозии давра ва масоҳати доира, муносибатҳои метрикӣ дар секунҷа ва давра шинос мешавед.

Мазмуни китоби дарсии мазкури «Геометрия»-ро асоси низоми аксиоматикии қатъӣ ташкил медиҳад. Дар он баёни маводи назарияви бо забони содда ва равон ифода гардидааст. Барои ба воситаи мисолҳои ҳаётии гуногун фаҳмонда додани тамоми мавзўву мафҳумҳо саъю кўшиш зоҳир гаштааст. Саволҳое, ки пас аз ҳар як мавзўъ дода шудаанд, исботҳои зиёд, масъала ва мисолҳое, ки доири сохтан ва ҳисобкуниҳо оварда шудаанд, донишомўзонро ба фикррониии эҷодӣ водор месозад, барои амиқ гардидан ва мустаҳкамкунии донишҳои андўхта ёрӣ мерасонад. Китоби дарсӣ бо ороиши ба худ хос ва тақдим гардидани маводҳои дарсӣ бо айёният фарқ мекунад. Барои беҳтар аз худ намудани маводи таълимӣ расму нақшаҳое, ки дар он оварда шудаанд, хизмат мерасонад.

«Аз ҳисоби маблағҳои Бунёди мақсаднoки китоби республика ба иҷора чоп шудааст».

ISBN 978-9943-07-307-4

МУНДАРИҶА

Такрори мавзӯъҳо аз синфҳои 7—8

Боби I. Шаклҳои геометрии монанд

Боби II. Муносибатҳои байни тарафҳо ва кунҷҳои секунҷаҳо

Боби III. Дарозии давра ва масоҳати доира

Боби IV. Муносибатҳои метрикӣ дар секунҷа ва давра

Боби V. Такрори курси планиметрия

САРСУХАН

Донишомӯзони гиромӣ!

Мо дар асри технологияҳои иттилоотӣ зиндагонӣ мекунем. Дар замири тағйиротҳои оламшумуле, ки дар тараққиёти замонавӣ рух медиҳанд, албатта, ривоҷу равнақи илму фан ва техника хоб меравад. Дар ин гуна шароит вазифаи асосии Шумо, ҷавонон, аз авлоди муносиб будан ба аҷдодони бузурги худ, ҳамнафас ва баробари замон қадам задан ва фатҳи қуллаҳои баланди илму фан иборат аст. Дар ин бобат мавқеи математика беқиёс мебошад.

Маълум аст, ки барои ба камол расондани шумоён, ҷавонон, математика ба сифати фанни таълимӣ дорои имкониятҳои калон мебошад. Он тафакурро инкишоф дода, ақлатонро тез мекунад, фикррониии мантиқӣ, хислатҳои тезфикркуниро ташаккул медиҳад ва дар ҳисси ҳосил кардани малака оид ба дар вазъиятҳои гуногун қабул намудани қарорҳои оқилона, таҳлилу баровардани хулоса тарбия менамояд.

Вазифаи асосии китоби дарсии «Геометрия»-и синфи 9-ум, ки дар даст доред, баробари омӯзиши хосиятҳои асосии шаклҳои геометрии ҳамвор аз болоравии ақлиатон оиди собитқадамона пеш рафтани фикррониии мантиқӣ иборат аст. Он барои ба ҳаёт татбиқ намудани дониш, маҳорат ва малакаи андӯхташуда кӯмак мерасонад.

Ҳангоми таълифи китоби дарсӣ аз намунаҳои таҷрибаҳои пешқадаме, ки дар дунё гирд омадаанд, истифода бурдем. Баробари ин ҳаракат кардем, ки ба арзишҳои ҷовидона ва шарқонаи ба сарзаминамон хос, ҳамчунин ба мероси аҷдодони бузургамон муроҷиат намоем.

Ба Шумоён ҳангоми таълим аз ин китоби дарсӣ, ки аз роҳи масъулиятноку баро бари ин шавқангез иборат аст, субот ва таҳаммулро таманно дорем. Донише, ки аз асосҳои геометрия мегиред, Шуморо ба сӯи баркамолӣ мебарад. Умедворем, ки дар бобати хизмат дар роҳи тараққиёти Ватанамон кӯмакрасонатон мегардад.

Аломатҳое, ки дар китоби дарсӣ истифода гардидаанд

✓ — таърифи мафҳумҳои наве, ки дохил мегарданд

— тавсифи теорема

— масъалае, ки ба таври намунавӣ ҳалли он нишон дода шудааст

? — савол, масъала ва супориш

— супоришҳое, ки фаъолнокии донишомӯзонро пурзӯр мегардонад ё ки дар гурӯҳҳо муҳокима мегарданд

— кори амалие, ки бо тартиби инфиродӣ ё гурӯҳӣ ба иҷро мерасанд

— маълумотҳои таърихӣ ва масъалаҳо

— масъалаҳои шавқовар ва муаммоҳо (кроссворд)

— манбаи маълумотҳое, ки аз Интернет тавсия мегарданд

8. — масъалаҳое, ки ҳалли онҳо ба сифати вазифаи хонагӣ тавсия гардидаанд

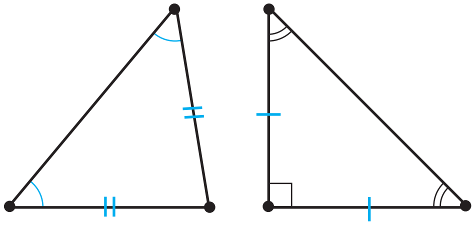
Тавзеҳоти схематикии теорема ё ки масъала

Маълумотҳое, ки бо шарти теорема ё ки масъала дода шудаанд

⇒

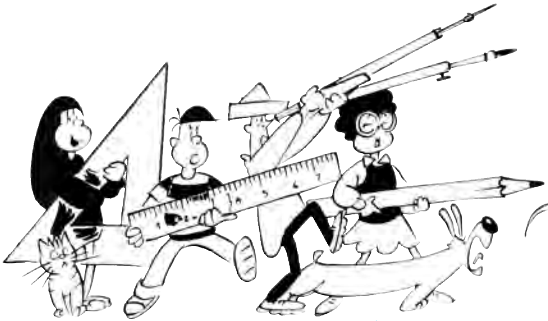
Хосиятҳои исботталаб лозим ё ки элементҳое, ки ёфтанашон талаб карда мешавад.

Аломатҳои алоҳидае, ки дар нақшаҳо қабул карда шудаанд



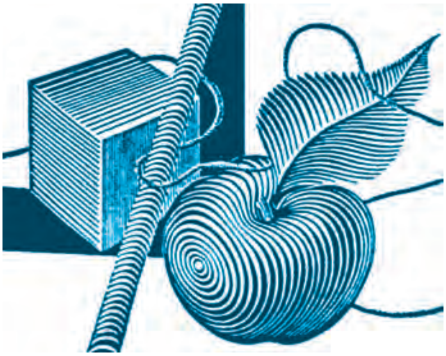
Кунҷҳои баробар дар нақшаҳо бо рангҳои якхела ё ки бо камончаҳои ададашон якхела ҷудо карда мешаванд

Порчаҳои дарозиашон баробар, ки бо хатчаҳои ададашон якхела нишон дода мешаванд.



Барои фатҳи геометрия ба пеш!

ТАКРОРӢ



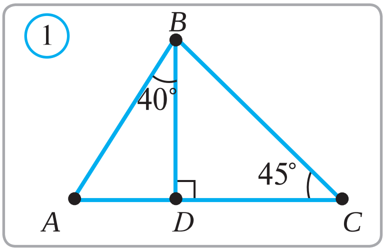
ТАКРОРИ МАВЗӮЪҲО АЗ СИНФҲОИ 7—8

√ *Аз геометрияи синфҳои 7—8-ум мавзӯъҳои гузаштаро такрор намуда донишҳои гирифтаатонро ба хотир меоваред ва малакаҳоятонро мустаҳкам мекунед.*

√ *Ин ба Шумо барои бомуваффақият давом додани омӯзиши геометрия дар синфи 9-ум замина мегузорад.*

1 СЕКУНҶАҲО

Масъалаҳои боби мазкур барои ба хотир овардани шаклҳои геометрӣ ва хосиятҳои онҳо, ки дар синфҳои 7-8-ум омўзонида шудаанд пешниҳод карда мешавад. Барои ҳалли масъалаҳо аз маълумотҳо дар бораи шаклҳо ва формулаҳои ифодакунандаи хосиятҳои онҳо, ки дар охири китоби дарсӣ оварда шудаанд, истифода бурдан мумкин аст.



Масъалаи 1. Дар баландии BD-и секунҷаи ABC гузаронида шудааст *(расми 1)*. Агар $\angle ABD = 40^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$ бошад, кунҷҳои назди қуллаҳои A ва B-и секунҷаро ёбед.

Ҳалли он. 1) Дар секунҷаи росткунҷаи ABD $\angle ABD = 40^\circ$ ва аз ба 180° баробар будани суммаи кунҷҳои дохилии секунҷа

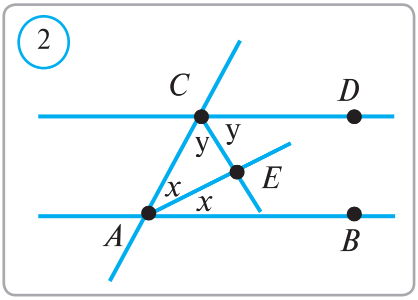
$$\angle A = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ.$$

2) Ҳангоми дар секунҷаи росткунҷаи BCD кунҷи $\angle BCD = 45^\circ$ будан

$$\angle DBC = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ.$$

Ҳангоми $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ будан $\angle B = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ$.

Ҷавоб: 50°, 85°.



Масъалаи 2. Кунҷи байни биссектирисаҳои кунҷҳои дарунии яктарафаи дар натиҷаи буриши ду хати рости параллел бо буранда ҳосил шударо ёбед.

Ҳалли он. Бигузор хати рости AC хатҳои рости параллели AB ва CD-ро чун дар расми 2-юм тасвиршуда бурида бошад. Кунҷҳои дарунии яктарафаи BAC ва ACD дар нуқтаи E бурида $\angle EAC = x$, $\angle ECA = y$ бошад, онгоҳ мувофиқи таърифи биссектрисаҳои кунҷ

$$\angle BAC = x + x = 2x, \qquad \angle ACD = y + y = 2y.$$

Азбаски $AB || CD$ аст, мувофиқи хосияти кунҷҳои дарунии яктарафа

$$2x + 2y = 180^\circ, \qquad x + y = 90^\circ.$$

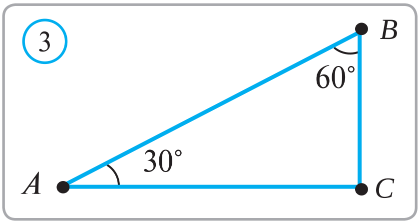
Акнун, аз ба 180° баробар будани суммаи кунҷҳои дохилии секунҷаи ACE

$$\angle AEC = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Ҷавоб: 90°.

Масъалаи 3. Агар дар секунҷаи ABC тарафи AB 6 *см*, кунҷҳои A ва B мувофиқи 30° ва 60° бошад, масоҳати секунҷаи ABC-ро ёбед.

Ҳалли он. Кунҷи С-и секунҷаро меёбем:
$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$.



Аз ин ҷо, дар секунҷаи росткунҷаи ABC гипотенузаи AB 6 см ва кунҷи A 30° будааст. Дар секунҷа катети муқобили кунҷи 30° ба нисфи гипотенуза баробар аст, пас $BC = 3$ *см (расми 3)*.

Аз теоремаи Пифагор истифода бурда, катети AC-ро меёбем::

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 6^2 - 3^2 = 27,\ AC = 3\sqrt{3}\ см.$$

Акнун масоҳати секунҷаро меёбем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ (см^2).$$

Ҷавоб: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ $см^2$.

? *Савол, масъала ва супориш*

1. Дар секунҷаи ABC $\angle A = 47^\circ$, $\angle C = 83^\circ$ бошад, кунҷи сеюми дарунии секунҷа ва кунҷҳои берунии онро ёбед.

2. Баландии ба гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 15 *см* ва 20 *см* буда фаровarda шударо ёбед.

3. Хати рости ба тарафи AC-и секунҷаи ABC параллел тарафҳои AB ва BC-ро бо равиши мувофиқ дар нуқтаҳои E ва F бурида мегузарад. Агар $\angle BEF = 65^\circ$, $\angle EFC = 135^\circ$ бошад, кунҷҳои секунҷаи ABC-ро ёбед.

4. Биссектрисаҳои секунҷаи ABC дар нуқтаи I якдигарро мебуранд. Агар $\angle A = 80^\circ$ ва $\angle B = 70^\circ$ бошад, кунҷҳои AIB, BIC ва CIA -ро ёбед.

5. Якто кунҷи берунии секунҷаи баробарпаҳлӯ ба 70° баробар аст. Кунҷҳои секунҷаро ёбед.

6. Биссектрисаи AK-и секунҷаи ABC гузаронида шудааст. Агар $\angle BAK = 47^\circ$ ва $\angle AKC = 103^\circ$ бошад, кунҷҳои секунҷаро ёбед.

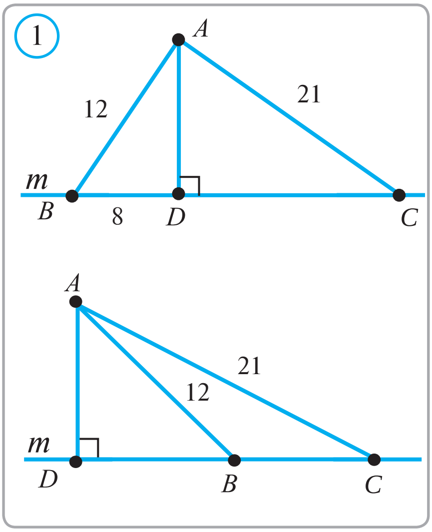
7*. Баландиҳои секунҷаи ABC дар нуқтаи H якдигарро мебуранд. Агар $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ бошад, кунҷҳои AHB, BHC ва CHA-ро ёбед.

8. Исбот кунед, ки хатҳои миёнаи секунҷа онро ба чорто секунҷаи баробар тақсим мекунад.

9*. Дар секунҷаи ABC ба давоми медианаи CD порчаи DE-и ба ин медиана баробар гузошта шудааст. Ба давоми медианаи AF порчаи ба он баробари FH гузошта шудааст. Исбот кунед, ки нуқтаҳои B, H, E дар як хати рост мехобад.

10. Дар секунҷаи баробарпаҳлӯи ABC $(AB = BC)$ биссектрисаҳои AN ва CK гузаронида шудааст.
а) Нишон диҳед, ки порчаи KN ба тарафи AC параллел аст.
б) Исбот кунед, ки баробарии зерин ҷой дорад: $AK = KN = NC$.

2 СЕКУНҶАҲО (ДАВОМАШ)



Масъалаи 1. Аз нуқтаи *A* ба хати рости *m* дуто моили дарозиҳояш 12 *см* ва 21 *см* буда фароварда шудааст. Агар проексияи моили якум дар хати рости m 8 *см* бошад, проексияи моили дуюмро ёбед.

Ҳалли он. Ба хати рости m аз нуқтаи берунии *A* ба ин хати рост моилҳои *AB* ва *AC,* инчунин перпендикуляри *AD* фароворда шуда, *AB*=12 *см* ва *AC*=21 *см* бошад *(расми 1).* Онгоҳ мувофиқи шарти масъала *BD*=8 *см* мешавад ва дарозии порчаи *CD*-ро ёфтан лозим аст.

1) Аз теоремаи Пифагор истифода бурда катети *AD*-и секунҷаи росткунҷаи *ABD*-ро меёбем. $AD^2=AB^2-BD^2=12^2-8^2=80$, $AD=\sqrt{80}$ *см*.

2) Аз секунҷаи росткунҷаи *ACD* аз теоремаи Пифагор истифода бурда дарозии порчаи *CD*- ро меёбем

$$CD^2=AC^2-AD^2=21^2-(\sqrt{80})^2=441-80=361,\ CD=19\ \textit{см}.$$

Ҷавоб: 19 *см*.

Масъалаи 2. Агар тарафҳои секунҷа ба 13, 14 ва 15 баробар бошад, масоҳат ва баландиҳои онро ёбед.

Ҳалли он. Аз формулаи Герон истифода бурда, масоҳати секунҷаи тарафҳояш $a=13$, $b=14$, $c=15$ бударо меёбем:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13+14+15}{2}=\frac{42}{2}=21,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)}=$$

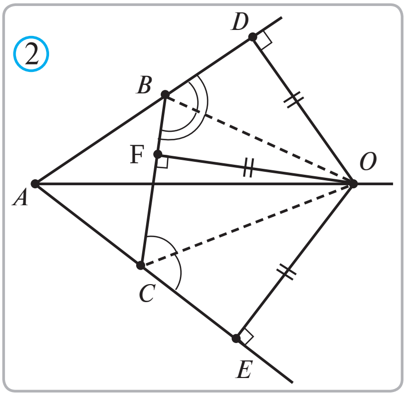
$$=\sqrt{21\cdot8\cdot7\cdot6}=\sqrt{7\cdot3\cdot8\cdot7\cdot2\cdot3}=3\cdot4\cdot7=84.$$

Акнун, аз формулаи ҳисоб кардани масоҳати секунҷа $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$ истифода бурда, баландии h_a-и секунҷаро меёбем:

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\cdot84}{13}=\frac{168}{13}=12\frac{12}{13}.$$

Ба монанди ҳамин баландиҳои h_b ва h_c -ро меёбем.

Ҷавоб: 84; $12\frac{12}{13}$; 12; $11\frac{1}{5}$.



Масъалаи 3. Биссектриссаҳои кунҷҳои берунии секунҷаи ABC-и қуллаҳои B ва C дар нуқтаи O бурида мешаванд. Исбот кунед, ки нуқтаи O дар биссектрисаи кунҷи BAC мехобад.

Исбот. Проексияҳои нуқтаи O дар хатҳои рости AB, AC ва BC бо равиши мувофиқ нуқтаҳои D, E ва F бошад *(расми 2)*. Дар ин ҷо якумин аз барои нуқтаи O ба биссектрисаш кунҷи DBC хобиданаш $OD=OF$ мешавад. Дуюмин аз барои нуқтаи O ба биссектрисаи кунҷи BCE хобиданаш $OF=OE$ мешавад. Ҳамин тавр, $OD=OF=OE$. Пас, нуқтаи O аз тарафҳои кунҷи BAC дар як хел масофа воқеъ будааст. Бинобар ин нуқтаи O дар биссектрисаи кунҷи BAC мехобад.

Савол, масъала ва супориш

1. Масоҳати секунҷаи тарафҳояш 5, 6 ва 7 бударо ёбед.

2. Аз нуқтаи додашуда ба хати рости а ду моили фарқи дарозиашон ба 6 баробар буда фаровarda шудааст. Проексияҳои дар хати рости a будаи моилҳо ба 27 ва 15 баробар аст. Масофаи аз нуқтаи додашуда то хати рости a бударо ёбед.

3*. Биссектрисаҳои кунҷҳои берунии қуллаҳои A ва B-и секунҷаи ABC дар нуқтаи D якдигарро мебуранд. Агар $ADB=75^\circ$ бошад, кунҷи ACB-и секунҷаро ёбед.

4. Дар секунҷаи баробарпаҳлӯи ABC-и асосаш AC биссектрисаи CD гузаронида шудааст. Кунҷи ADC ба: а) 60°; б) 75° баробар бошад, кунҷҳои секунҷаро ёбед.

5. Баландии ба гипотенуза фаровардашудаи секунҷаи росткунҷаи як катеташ ба 7 *см*, гипотенузааш бошад, ба 25 *см* баробар бударо ёбед.

6. Баландии BD-и секунҷаи ABC гузаронида шудааст (нуқтаи D ба порчаи AC тааллуқ дорад). Агар $BD=12$, $AD=5$ ва $DC=16$ бошад, масоҳат ва периметри секунҷаро ёбед.

7. Тарафи паҳлӯии секунҷаи баробарпаҳлӯ 10 *см*, асосаш бошад, $10\sqrt{3}$ *см*. Баландии ба асоси секунҷа фаровардашуда, масоҳат ва кунҷҳои онро ёбед.

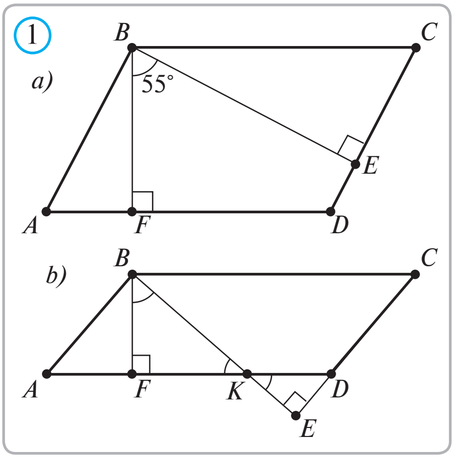
8. Дар секунҷаи тезкунҷаи ABC маркази давраи берункашидашуда дар нуқтаи O буда, $\angle AOB=120^\circ$, $\angle BOC=110^\circ$ бошад, кунҷҳои секунҷаи ABC-ро ёбед.

9. Агар медианаи CD-и секунҷаи ABC аз тарафи AB ду маротиба хурд бошад, кунҷи ACB-ро ёбед.

10. Баландиҳои секунҷаи ABC дар нуқтаи O бурида мешавад. Агар $\angle A=60^\circ$, $\angle B=80^\circ$ бошад, кунҷи AOB -ро ёбед.

11. Биссектрисаҳои кунҷҳои берунии назди қуллаҳои A ва B-и секунҷаи ABC дар нуқтаи O бурида мешаванд. Агар $\angle ACB=80^\circ$ бошад, кунҷи AOB-ро ёбед.

3 ЧОРКУНҶАҲО



Масъалаи 1. Агар кунҷи байни баландиҳои аз як қуллаи параллелограмм ба ду тарафи он гузаронида шуда ба 55° баробар бошад, кунҷҳои параллелограммро ёбед.

Ҳалли он. Бигузор кунҷи байни баландиҳои параллелограмм BF ва BE - и параллелограмм ба 55° баробар бошад *(расми 1)*. Ду ҳолати дар расм тасвир ёфта:

а) Баландии BE ба тарафи CD;

б) Баландии BE ба давоми тарафи CD гузаронида шуданаш мумкин.

Дар ҳолати а) Аз сабаби суммаи кунҷҳои чоркунҷаи $BEDF$ 360° буданаш,

$$55^\circ + 90^\circ + \angle D + 90^\circ = 360^\circ.$$

Аз ин ҷо $\angle D = 125^\circ$.

Дар ҳолати б) Бигузор буриши баландии BE бо тарафи AD нуқтаи K бошад. Он гоҳ

$$\angle DKE = \angle BKF = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

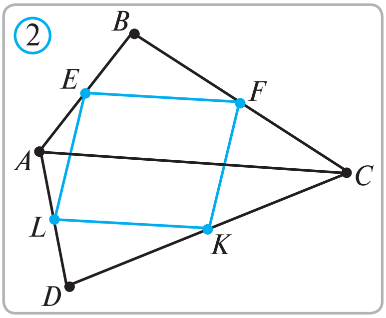
Мувофиқи хосияти кунҷи берунии секунҷа:

$$\angle ADC = \angle DKE + \angle KED = 35^\circ + 90^\circ = 125^\circ.$$

Аз ин рӯ, дар ду ҳолат ҳам $\angle D=125^\circ$ аст. Бинобар ин

$$\angle A=\angle C=180^\circ-\angle D=55^\circ, \quad \angle B=\angle D=125^\circ.$$

Ҷавоб: 55°, 125°, 55°, 125°.



Масъалаи 2. Миёнаҷои тарафҳои чоркунҷа қуллаҳои параллелограмм буданашро исбот кунед.

Ҳалли он. Нуқтаҳои E, F, K ва L мувофиқан миёнаҷои тарафҳои AB, BC, CD ва DA-и чоркунҷаи $ABCD$ бошад, диагонали AC-ро мегузаронем *(расми 2)*. $EFKL$ параллелограмм буданашро нишон медиҳем.

Порчаи EF хати миёнаи секунҷаи ABC, порчаи KL бошад, хати миёнаи секунҷаи ACD мешавад. Бинобар ин дар асоси хосиятҳои хати миёнаи секунҷа:

$$EF||AC, \ KL||AC, \qquad EF=\frac{1}{2}AC, \ KL=\frac{1}{2}AC.$$

Аз ин $EF||KL$ ва $EF=LK$. Бинобар ин дар асоси аломатҳои параллелограмм $EFKL$ — параллелограмм.

Масъалаи 3. *ABCD* росткунҷа аст. Биссектрисаҳои кунҷҳои *A* ва *D* дар тарафи *BC* ҳамдигарро мебуранд. Агар *AB*=4 см бошад, масоҳати ин росткунҷаро ёбед.

Ҳалли он. Нуқтаи буриши биссектрисаҳои кунҷҳои *A* ва *D*, бигузор, *E* бошад *(расми 3)*. Дар ин ҳол $\angle B = 90^\circ$, $\angle BAE = 45^\circ$ аст. Бинобар ин

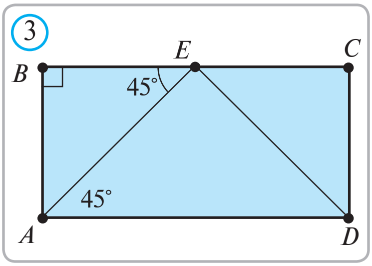
$$\angle AEB = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

мешавад. Яъне *ABF* секунҷаи баробарпаҳлӯ. Дар он $AB = BE = 4$ (*см*).

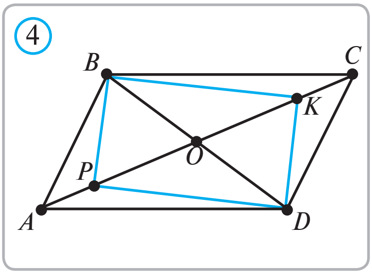
Инчунин, $EC = CD = 4$(*см*) аз ин $BC = BE + EC = 8$ (*см*) ва $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 8 = 32$ (*см*^{2}).

Ҷавоб: 32 см^2.

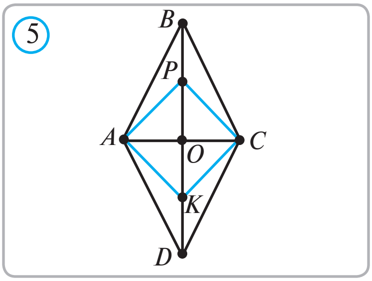
③



④



⑤



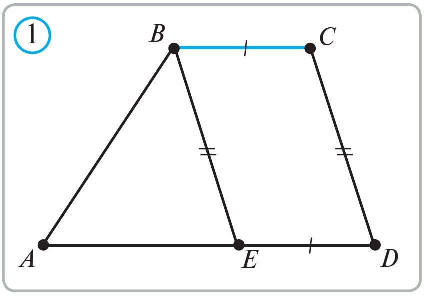
Савол, масъала ва супориш

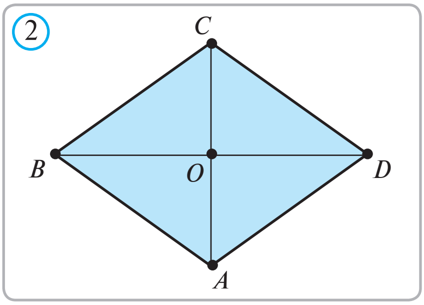
1. Се кунҷи чоркунҷа маълум: 47° 83° ва 120° Кунҷи чоруми онро ёбед.
2. Ҳосили ҷамъи ду кунҷи параллелограмм 156° аст. Кунҷҳои онро ёбед.
3. Кунҷи байни диагоналҳои росткунҷа 74°. Кунҷеро ёбед, ки яке аз диагоналҳои он бо тарафҳояш ҳосил мекунад.
4. Фарқи байни ду кунҷи трапетсияи баробарпаҳл 40° аст. Кунҷҳои онро ёбед.
5. Яке аз кунҷҳои ромб аз дигараш се баробар калон аст. Кунҷҳои ромбро муайян кунед.
6. Биссектрисаи кунҷи *A*-и росткунҷаи *ABCD* тарафи *BC*-ро ба порчаҳои ба 2 см ва 6 см баробар ҷудо мекунад. Периметри росткунҷаро ёбед.
7. Параллелограмми тарафҳояш 3 см ва 6 см, масофаи байни тарафҳои калонаш 2 см бударо созед.
8. Дар диагонали *AC*-и параллелограмми *ABCD* нуқтаҳои *P* ва *K* интихоб шудаанд (*расми 4*). Агар $OP = OB = OK$ бошад, исбот кунед, ки *BKDP* росткунҷа аст.

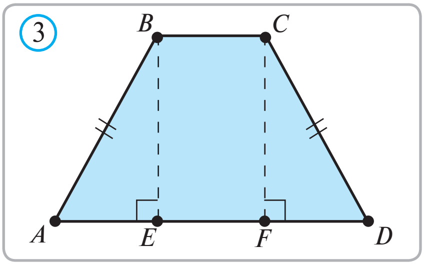
9*. Дар диагонали калони *BD*-и ромби *ABCD* нуқтаҳои *P* ва *K* интихоб шудаанд *(расми 5)*. Агар $OA = OP = OK$ бошад, исбот кунед, ки чоркунҷаи *APCK* квадрат аст.

10*. Дар диагонали *BD*-и параллелограмми *ABCD* нуқтаҳои *P* ва *K* интихоб шудаанд. Агар $BP = KD$ бошад, исбот кунед, ки чоркунҷаи *APCK* параллелограмм аст.

4 ЧОРКУНҶАҲО (давомаш)


①


②


③

Масъалаи 1. Аз қуллаи B-и асоси хурди BC-и трапетсияи $ABCD$ ба тарафи CD хати рости мувозӣ (параллел) гузаронида шудааст. Периметри секунҷаи дар натичаи он ҳосилшуда ба 24 *см* баробар аст. Агар периметри трапетсия 36 *см* бошад, дарози тарафи BC-ро ёбед.

Ҳалли он. Мувофиқи шарти масъала хати рости параллели аз қуллаи BC ба тарафи CD гузаронидашуда порчаи BE бошад, нуқтаи E ба тарафи AD мехобад *(расми 1)*. Порчаи BC трапетсияро ба секунҷаи ABE ва параллелограмми $BCDE$ ҷудо мекунад. Аз параллелограмми $BCDE$, $BC=ED$ ва $CD=BE$ мувофиқи шарти масъала,

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = AB + BC + CD + DE + EA = AB + BE + EA + 2BC = P_{ABE} + 2BC = 24 + 2BC = 36 \ (см).$$

Аз ин, $2BC = 12$ ё ки $BC = 6$ *см* буданашро меёбем. ***Ҷавоб:*** 6 *см*.

Масъалаи 2. Яке аз диагоналҳои ромб 14 *см*, тарафи он 25 *см*. Масоҳати ромбро ёбед.

ABCD — ромб
$AC = 14$ *см*, $AB = 25$ *см*.
⇒
$S_{ABCD} = ?$

Ҳалли он. Бигузор нуқтаи буриши диагоналҳои ромб O бошад *(расми 2)*. Он гоҳ мувофиқи хосияти ромб,

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 14 = 7 \ (см), \qquad \angle AOB = 90^\circ.$$

Аз теоремаи Пифагор истифода бурда, порчаи OB-ро меёбем:

$$OB^2 = AB^2 - AO^2 = 25^2 - 7^2 = 576 \text{ ё ки } OB = 24 \ см.$$

Дар ин ҷо $BD = 2\cdot OB = 2\cdot 24 = 48$ (*см*). Мувофиқи формулаи масоҳати ромб,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC\cdot BD = \frac{1}{2}\cdot 14\cdot 48 = 7\cdot 48 = 336 \ (см^2).$$

Ҷавоб: 336 *см*^{2}.

Масъалаи 3. Тарафи паҳлуии трапетсияи баробарпаҳлу 20 *см*, асосҳояш бошад, 12 *см* ва 36 *см*. Масоҳати трапетсияро ёбед.

Ҳалли он. Бигузор, дар трапетсияи $ABCD$ $AB=CD=20$ *см*, $BC=12$ см, $AD=36$ *см* бошад. Баландиҳои трапетсияи BE ва CF-ро мегузаронем *(расми 3)*.

Дар ин ҷо,

$$EF = BC = 12\ (см),$$

$$AE = FD = \frac{AD - EF}{2} = \frac{36-12}{2} = 12\ (см).$$

Ба секунҷаи росткунҷаи ABE теоремаи Пифагорро истифода намуда, баландии BE-ро меёбем:

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \quad \text{ё ки} \quad BE = 16\ см.$$

Масоҳати трапетсияро меёбем:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{12+36}{2} \cdot 16 = 24 \cdot 16 = 384\ (см^2).$$

Ҷавоб: 384 *см*^{2}.

Савол, масъала ва супориш

1. Асоси хурди BC-и трапетсияи $ABCD$ ба 7 *см* баробар аст. Аз қуллаи B ба тарафи CD хати рости параллел гузаронида шудааст. Периметри секунҷаи ҳосилшуда 16 *см* аст. Периметри трапетсияро ёбед.
2. Нӯгҳои порчае, ки хати ростро бурида намегузарад, аз хати рост дар масофаҳои 8 *см* ва 18 *см* ҷойгир аст. Масофаи байни миёнаҷои порча ва хати ростро ёбед.
3. Параллелограмми тарафҳояш 4 *см* ва 5 *см*, масоҳаташ 10 *см*^{2} бударо созед.
4. Яке аз диагоналҳои ромб 80 *см*, тарафи он бошад 81 *см*. Масоҳати ромбро ёбед.
5. Баландии аз кунҷи кунди ба 135° баробар будаи параллелограмм гузаронида 4 *см* буда, тарафи гузаронидашударо ба ду қисми баробар тақсим мекунад.
   а) Ҳамон тарафро ёбед.
   б) Кунҷҳои байни диагонали қуллаҳои кунҷҳои кунди параллелограммро пайвасткунанда ва тарафҳои онро ёбед.
   в) Периметр ва масоҳати параллелограммро ёбед.
6. Баландие, ки аз қуллаи кунҷи кунди ромб гузаронида шудааст, тарафи онро ба ду қисми баробар тақсим мекунад. Агар тарафи ромб 6 *см* бошад, масоҳати ромбро ёбед.
7. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 13 *см*, ҳосили ҷамъи (суммаи) катетҳояш 17 *см*. Масоҳати секунҷаро ёбед.
8*. Яке аз кунҷҳои трапетсияи росткунҷа 135°? хати миёнаи он бошад, 18 *см* аст. Агар асосҳои он 1:8 нисбат дошта бошанд, тарафҳои паҳлуии трапетсияро ёбед.
9*. Трапетсияи $ABCD$ $(AB||CD)$ ба давраи марказаш O берун кашида шудааст. $\angle AOD = 90^\circ$ буданашро исбот кунед.

ХАЗИНАИ МАСЪАЛАҲОИ МАТЕМАТИКӢ

Маълум аст, ки вақтҳои охир технологияҳои коммуникатсияҳои иттилоотӣ бо суръати баланд инкишоф меёбанд. Интернет бошад, торафт деҳаҳои дурдастро ҳам фаро мегирад. Дар ин рӯзҳо дар World-Wide-Web — соҳаи ахбороти ҷаҳонии Интернет манбаъҳои басо зиёди ахбор ҷойгир гаштаанд, ки истифода аз ин хазина барои ҳар як шаҳрванди замонаамон ҳам қарз ва ҳам фарз аст. Аз ҷумла, яке аз дигаре шавқовар ҳамин гуна саҳифаҳо — Web ҳастанд, ки аз онҳо фанни дилхоҳ, аз ҷумла омӯзиши геометрияро низ самаранок истифода бурдан мумкин. Дар поён овардани манзили манбаъҳои ин иттилоотро лозим донистем. Аз Web — саҳифаҳо Шумо бо забонҳои ӯзбекӣ, русӣ, англисӣ ва ғайраҳо бо навигариҳои охирини олами математика, китобҳои дарсии электроние, ки дар анбори китобхонаҳои электронӣ маҳфузанд, курсҳои гирифтани таълими математика аз масофа ва маводҳои онон, материалҳои назариявии гуногуне, ки ба саҳифаи китоби дарсии мазкур дохил шудаанд ва нашудаанд, нақшаи дарси муаллимони ботаҷрибае, ки аз фанни математика сабақ медиҳанд ва тавсияҳои методии онҳо, масъалаҳои бешумор, мисолҳо ва ҳалли онҳо, маълумотҳо дар бораи азназаргузаронӣ ва озмунҳои математикии дар давлатҳои гуногун гузаронидаистода ва масъалаҳои пешкашгардида, инчунин ҳалли онҳо, масъалаҳои шавқовари математикӣ ва ҳалли онҳо шинос шуданатон мумкин.

http://www.eduportal.uz — Портали иттилооту таълими Вазорати таълими халқ
http://www.multimedia.uz — Сайти Маркази мултимедияи назди Вазорати таълими халқ
http://www.uzedu.uz — Сайти Вазорати таълими халқ
http://www.edu.uz — Портали таълимии Вазорати маълумоти олӣ ва миёнаи махсус
http://www.pedagog.uz — Портали муассисаҳои таълими педагогӣ
http://ziyo.edu.uz — Портали муассисаҳои таълимӣ
http://www.matematika.uz — Сайти материалҳои иловагӣ аз математика
http://ziyonet.uz — Соҳаи захираҳои иттилоотӣ-таълимӣ
http://cde.sakha.ru — Сайти омӯзонидан аз масофа (бо забони русӣ)
http://www.ixl.com — Портали сайти аз масофа истода омӯзонидан (бо забони англисӣ)
http://www.iro.sakha.ru — Сайти муассисоти ривоҷдиҳии таълим (бо забони русӣ)
http://www.school.edu.ru — Портали таълими умумӣ (бо забони русӣ)
http://www.alledu.ru — Портали «Таълим аз Интернет» (бо забони русӣ)
http://www.rsl.ru — Портали Китобхонаи давлатии Россия (бо забони русӣ)
http://www.rostest.runnet.ru — Сервери маркази тест (бо забони русӣ)
http://www.allbest.ru — Китобхонаи электронии захираҳои Интернет (бо забони русӣ)
http://int-edu.ru/soft/base_geom.html — Сайти ҷонибдории барномаи «Живая геометрия»
http://matematica.mgdtd.ru/ — Озмуни ғоибона аз математика ва информатика (бо забони русӣ)
http://www.mathtype.narod.ru/ — Online — китобҳои дарсӣ (бо забони русӣ)
http://www.e-pi.narod.ru/ — Ҳамааш дар бораи ададҳои e ва π (бо забони русӣ)
http://mschool.kubsu.ru/ — Китобхонаи дастурҳои электронӣ.Олимпиадаҳои ғоибонаи математикӣ
http://matematika.agava.ru/ — Зиёда аз 2000 масъала аз математика (бо забони русӣ)
http://mat-game.narod.ru/—Гимнастикаи математикӣ.Масъалаҳои математикӣ ва муаммоҳо
http://mathc.chat.ru/ — Калейдоскопи математикӣ (бо забони русӣ)
http://mathmag.spbu.ru/ — Маҷаллаи математикӣ дар Интернет (бо забони русӣ)

БОБИ I

ШАКЛҲОИ ГЕОМЕТРИИ МОНАНД

Дар натичаи омўзиши ин боб Шумо ба дониш ва малакаи амалии зерин соҳиб мегардед:

Донишҳо:

√ *донистани таърифи шаклҳои монанд ва ишора кардани онҳо;*

√ *донистани аломатҳои монандии секунҷаҳо;*

√ *донистани мафҳуми гомотетия.*

Малакаи амалӣ:

√ *аз ду секунҷаҳои монанд ёфта тавонистани элементҳои мувофиқ;*

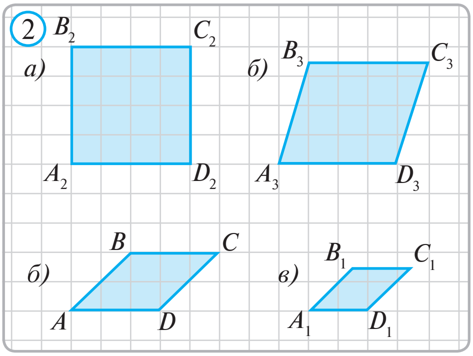
√ *татбиқ карда тавонистани аломатҳои монандии секунҷаҳо ҳангоми исботкунӣ ва ҳисобкунии ҳалли масъалаҳо;*

√ *аз гомотетия истифода бурда, сохта тавонистани бисёркунҷаҳои монанд.*

5 МОНАНДИИ БИСЁРКУНҶАҲО


①

Дар ҳаёти ҳамарӯза нафақат бо шаклҳои (намудҳои) якхела, балки андозаҳояш гуногун ҳам дучор меоем. Дар фанҳои таърих ва ҷуғрофия аз харитаҳои масштабҳояшон гуногун истифода бурдаед. Харитаҳои республикаамон, ки дар китобҳои дарсӣ тасвир ёфтаанду ба тахтаи синф овехта мешаванд, дар андозаҳои гуногунанд, лекин онҳо шаклҳои якхела доранд. Аз як фототасма фотосуратҳои андозаҳояш гуногун тайёр карда мешавад. Андозаи ин суратҳо ҳар хел бошад ҳам, онҳо дар як намуданд, яъне онҳо ба якдигар монанд *(расми 1)*.


②

Машқ. Дар расми 2 чор ромб тасвир ёфтааст. Аз онҳо фақат ромбҳои *б*) ва *в*) ба шакли якхела соҳибанд. Ин ромбҳо бо чияшон аз дигар ромбҳо фарқ мекунанд? Биёед, инро якҷоя аниқ менамоем.

1. Аз расм аён аст, ки $AD=3$, $A_1D_1=2$. Аз сабаби баробар будани тарафҳои ромб баробарии

$$\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

ҳосил мекунем. Дар ин ҳолат тарафҳои мувофиқи ромб мутаносиб гуфта мешавад.

2. Кунҷҳои мувофиқи ромбҳои $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ байни якдигар баробаранд. Дар ҳақиқат $\angle A=\angle A_1=45°$, $\angle B=\angle B_1=135°$, $\angle C=\angle C_1=45°$, $\angle D=\angle D_1=135°$.

Ҳамин тавр, аз сабаби ба якдигар монандии ин ромбҳо — мутаносиб будани тарафҳои мувофиқ ва баробар будани кунҷҳои мувофиқро аниқ намудем. Мафҳуми монандии бисёркунҷаи дилхоҳ ҳам дар ҳамин асос дохил карда мешавад.

Бисёркунҷаҳои миқдори кунҷҳояшон якхела (бинобар ин, миқдори тарафҳояшон ҳам якхела) **бисёркунҷаҳои ҳамном** гуфта мешавад.

Бигузор кунҷҳои мувофиқи ду бисёркунҷаҳои ҳамноми $ABCDE$ ва $A_1B_1C_1D_1E_1$ баробар бошанд: $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $\angle D=\angle D_1$,

$\angle E=\angle E_1$. Ин кунҷҳоро, кунҷҳои мувофиқ меноманд. Дар ин ҳол тарафҳои AB ва A_1B_1, BC ва B_1C_1, CD ва C_1D_1, DE ва D_1E_1, EA ва E_1A_1 **тарафҳои мувофиқ** номида мешавад.

✓ ***Таъриф.*** Кунҷҳои яке аз бисёркунҷаҳои ҳамном мувофиқан ба кунҷҳои бисёркунҷаи дуюм баробар ва тарафҳои мувофиқ мутаносиб бошад, ин гуна бисёркунҷаҳо **бисёркунҷаҳои монанд** номида мешавад *(расми 3)*.

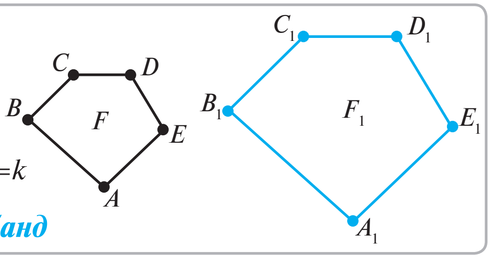
Монандии бисёркунҷаҳо бо аломати $\backsim$ ишора мегардад.

3

Кунҷҳои мувофиқ баробаранд

$$F \backsim F_1 \begin{cases} \angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1, \\ \angle D=\angle D_1,\ \angle E=\angle E_1 \\ \dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{C_1D_1}{CD}=\dfrac{D_1E_1}{DE}=\dfrac{E_1A_1}{EA}=k \end{cases}$$

Тарафҳои мувофиқ мутаносибанд



Адади ба нисбати тарафҳои мувофиқи бисёркунҷаҳои монанд баробар **коэффисиенти монандӣ** номида мешавад.

? Савол, масъала ва супориш

1. Таърифи бисёркунҷаҳои монандро гӯед.

2. Коэффисиенти монандӣ чист ва он чӣ тавр муайян карда мешавад?

3. Агар дар секунҷаҳои ABC ва DEF $\angle A=105°$, $\angle B=35°$, $\angle E=105°$, $\angle F=40°$, $AC=4{,}4$ *см*, $AB=5{,}2$ *см*, $BC=7{,}6$ *см*, $DE=15{,}6$ *см*, $DF=22{,}8$ *см*, $EF=13{,}2$ *см* бошад, оё онҳо монанданд?

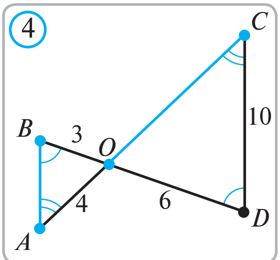
4. Аз чӣ сабаб ромбҳои а) ва б), ки дар расми 2 тасвир ёфтаанд, монанд нестанд? Ромбҳои б) ва в) -чӣ?

5. Агар секунҷаҳои дар расми 4 тасвирёфтаи ABO ва CDO монанд бошанд, дарозии порчаҳои AB, OC ва коэффисиенти монандиро ёбед.

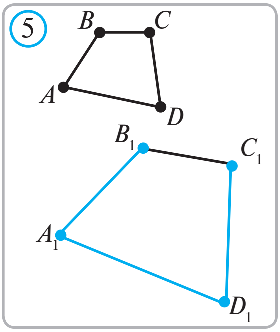
6. Дар расми 5 $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$. $AB=24$, $BC=18$, $CD=30$, $AD=54$, $B_1C_1=54$. Тарафҳои A_1B_1, D_1A_1 ва C_1D_1 -ро ёбед.

7*. Миёнаи тарафҳои AB ва AC-и секунҷаи ABC бо равиши мувофиқ нуқтаҳои P ва Q бошад. $\Delta ABC \backsim \Delta APQ$ буданашро исбот кунед.

4



5



6 СЕКУНҶАҲОИ МОНАНД ВА ХОСИЯТҲОИ ОНҲО

Монандии бисёркунҷаи аз ҳама содда буда-секунҷаро меомӯзем.

Теорема. **Нисбати периметрҳои ду секунҷаи монанд ба коэффисиенти монандӣ баробар аст.**

Ин теоремаро мустақил исбот кунед.

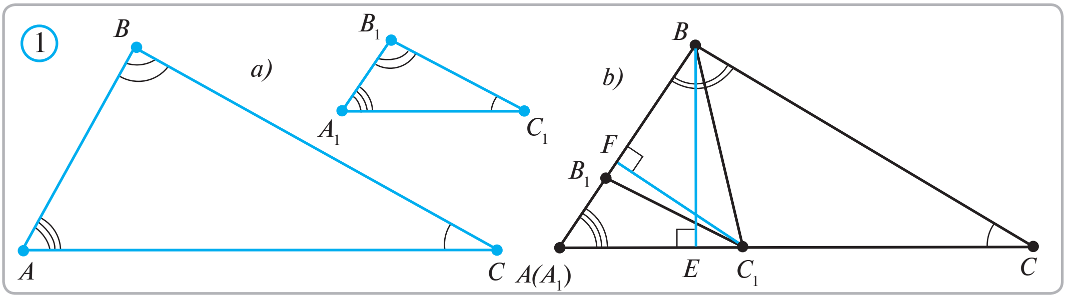
Теорема. **Нисбати масоҳатҳои ду секунҷаи монанд ба квадрати коэффисиенти монандӣ баробар аст.**

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ *(расми 1),*
k — *коэффисиенти монандӣ*

$S_{ABC}:S_{A_1B_1C_1}=k^2$

Исбот. Мувофиқи шарти теорема, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Пас, мувофиқи таърифи бисёркунҷаҳои монанд, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ ва $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k$.

①



Аз баробарии $\angle A=\angle A_1$ истифода бурда ба монанди дар *(расми 1,в)* буда, болои ҳам гузошта сохтан ва ишораҳои заруриро иҷро менамоем.

Масоҳатҳои секунҷаҳои дар зер овардашударо ёфта нисбатҳои онҳоро дида мебароем:

$$\left.\begin{aligned} S_{ABC}&=\frac{AC\cdot BE}{2};\\ S_{ABC_1}&=\frac{A_1C_1\cdot BE}{2};\end{aligned}\right] => \frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}}=\frac{AC}{A_1C_1} \qquad (1),$$

$$\left.\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1}&=\frac{A_1B_1\cdot C_1F}{2};\\ S_{ABC_1}&=\frac{AB\cdot C_1F}{2};\end{aligned}\right] => \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC_1}}=\frac{A_1B_1}{AB} \qquad (2).$$

Агар баробарии (1)-ро аъзо ба аъзо ба баробари (2) тақсим намоем, нисбати масоҳатҳои секунҷаҳои кунҷхояш баробари (3)-ро ҳосил мекунем.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1} \qquad (3)$$

Дар ин ҷо мувофи шарт, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k$ буданашро ба ҳисоб гирем, баробарои зерин ҳосил мешав0ад.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1}=k\cdot k=k^2$$

Теорема исбот шуд.

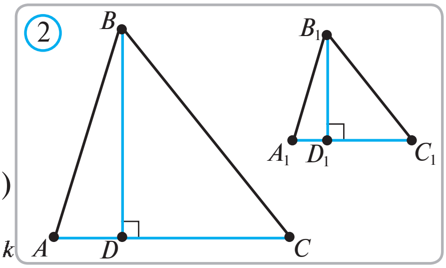
Масъалаи 1. Нисбати тарафҳои хоси секунҷаҳои монанд ба нисбати баландиҳои ба ҳамин тарафҳо гузаронидашуда баробар буданашро исбот кунед *(расми 2)*.

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, BD, B_1D_1 — *баландиҳо* ⇒ $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BD}{B_1D_1}$

Ҳалли он. Коэффисиенти монандии секунҷаҳои додашуда бигузор k бошад. Он гоҳ

$$AC : A_1C_1 = k; \quad S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2 \quad (1)$$

мешавад. Аз тарафи дуюм,



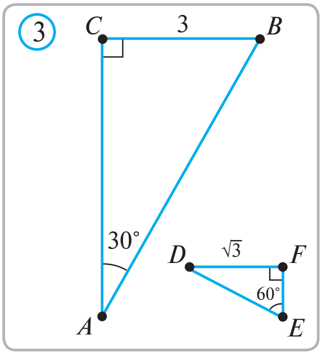
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot BD}{\frac{1}{2}A_1C_1\cdot B_1D_1}=\frac{AC}{A_1C_1}\cdot\frac{BD}{B_1D_1}=k\cdot\frac{BD}{B_1D_1}. \quad (2)$$

Аз баробариҳои (1) ва (2) $k\cdot\frac{BD}{B_1D_1}=k^2$ ё ки $\frac{BD}{B_1D_1}=k$.

Ҳамин тавр, нисбати $\frac{BD}{B_1D_1}$ ҳам, нисбати $\frac{AC}{A_1C_1}$ ҳам ба k баробар аст, яъне $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BD}{B_1D_1}$.

Савол, масъала ва супориш

1. Теорема дар бораи нисбати масоҳатҳои секунҷаҳои монандро гӯед ва исбот кунед.
2. Ду секунҷаи монанди ABC ва $A_1B_1C_1$ дода шудааст. Агар $S_{ABC}= 25\ см^2$ ва $S_{ABC}= 81\ см^2$ бошад, коэффисиенти монандиро ёбед.
3. Масоҳатҳои ду секунҷаи монанд 65 $м^2$ ва 260 $м^2$ аст. Яке аз тарафҳои секунҷаи якум 6 *м* бошад, тарафи ба он мувофиқи секунҷаи дуюмро ёбед.
4. Тарафҳои секунҷаи додашуда 15 *см*, 25 *см* ва 30 *см*. Агар ба секунҷаи додашуда секунҷаи периметраш 35 *см* монанд бошад, тарафҳои онро ёбед.
5. $ABC \backsim A_1B_1C_1$ ва нисбати тарафҳои мувофиқи ин секунҷаҳо ба 7 : 5 баробар аст. Агар масоҳати секунҷаи ABC аз масоҳати секунҷаи $A_1B_1C_1$ 36 $м^2$ зиёд бошад, масоҳати ин секунҷаҳоро ёбед.
6. Аз расми 3 истифода бурда, монанд ё ки монанд набудани секунҷаҳоро муайян кунед.

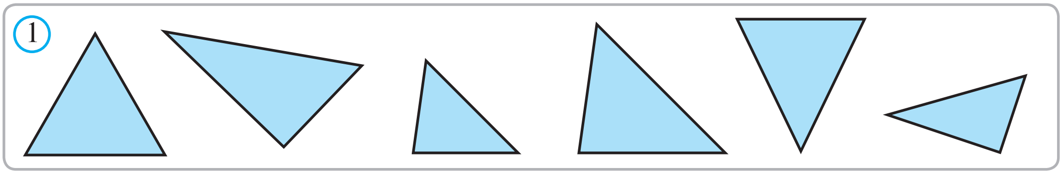


7 АЛОМАТИ ЯКУМИ МОНАНДИИ СЕКУНҶАҲО

Машқи фаъолкунанда

Аз секунҷаҳое, ки дар расми 1 тасвир ёфтаанд, монандашонро муайян намоед. Монандии онҳоро чӣ тавр муайян кардед?

①



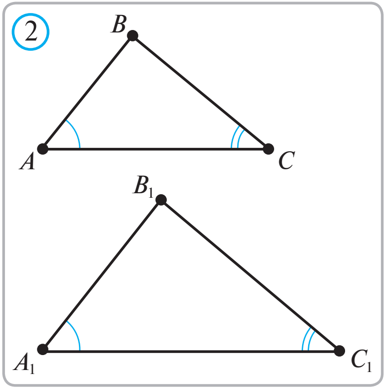
Дар асоси таъриф барои муайян кардани монандии ду секунҷа баробарии кунҷҳои онҳо ва мутаносибии тарафҳои мувофиқашон лозим меояд. Барои секунҷаҳо ин кор ниҳоят осон мекӯчад. Теоремаҳои дар поён овардашуда дорои чунин хислат аст. Онон *аломатҳои монандии секунҷаҳо* номида мешаванд.

Теорема ***(Аломати КК монандии секунҷаҳо).*** **Агар ду кунҷи як секунҷа мувофиқан ба ду кунҷи секунҷаи дигар баробар бошад, ин гуна секунҷаҳо монанд аст** (*расми 2*).

$$\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1,\ \angle A=\angle A_1,\ \angle C=\angle C_1 \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$$

Исбот. 1. Дар асоси теорема дар бораи ҳосили ҷамъи кунҷҳои дарунии секунҷа,

②



$$\left.\begin{aligned}\angle B&=180^\circ-(\angle A+\angle C),\\ \angle B_1&=180^\circ-(\angle A_1+\angle C_1)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \angle B=\angle B$$

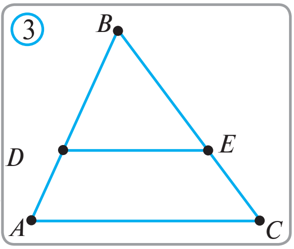
Аз ин рӯ, кунҷҳои мувофиқи секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ баробаранд.

2. Дар асоси шарт, $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$. Дар асоси теорема дар бораи нисбати масоҳати секунҷаҳои кунҷҳояшон баробар бошад,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1} \quad \text{ва} \quad \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{CA\cdot CB}{C_1A_1\cdot C_1B_1}.$$

Тарафи рости ин баробариҳоро ба ҳисоб гирифта, аъзоҳои якхела кӯтоҳ гарданд, баробарии $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$-ро ҳосил мекунем. Инчунин аз баробарии $\angle A=\angle A_1$ ва $\angle B=\angle B_1$ истифода бурда, баробарии $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}$-ро ҳосил мекунем. Ҳамин тавр, кунҷҳои секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ баробар ва тарафҳои мувофиқ мутаносиб, яъне ин секунҷаҳо монанданд. ***Теорема исбот шуд.***

Масъала. Хати рости DE- е,ки ду тарафи секунҷаи $ABCD$-ро бурида мегузарад ва ба тарафи сеюм параллел аст аз секунҷа,секунҷаи ба он монанд ҷудо мекунад. Онро исбот кунед (*расми 3*).



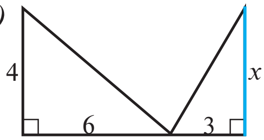
Исбот. Дар ABC ва DBE $\angle B$ — кунҷи умумӣ, $\angle CAB = \angle EDB$ (Аз сабаби кунҷҳои мувофиқи дар буриши хатҳои рости параллели AC ва DE бо буррандаи AB ҳосил шуданаш) *(расми 3)*.

Пас, дар асоси аломати *KK*-и монандии секунҷаҳо, ABC $ABC \backsim DBE$.

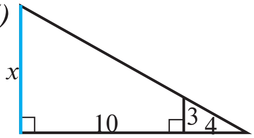
Савол, масъала ва супориш

1. Таърифи монандии секунҷаҳо ва аломатҳои *KK*-ро байни ҳам муқоиса кунед.
2. Аломати *KK* монандии секунҷаҳоро исбот кунед.
3. Дар асоси маълумотҳои расм x-ро ёбед.

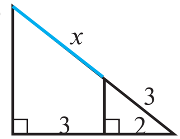
а)



б)

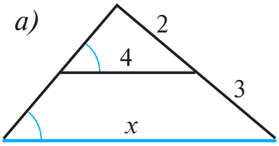


в)

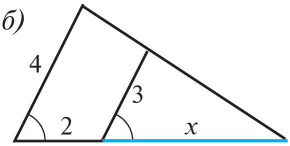


4. Дар асоси маълумотҳои расм x-ро ёбед.

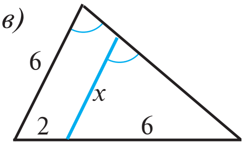
а)



б)

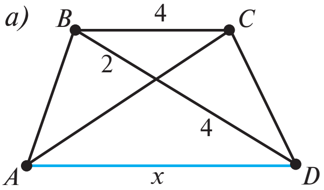


в)

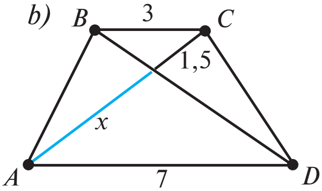


5. Дар тарафи CD-и параллелограмми $ABCD$ нуқтаи E гирифта шудааст. Нурҳои AE ва BC дар нуқтаи F бурида мешаванд.
   а) Агар $DE = 8$ *см*, $EC = 4$ *см*, $BC = 7$ *см*, $AE = 10$ *см* бошад, EF ва FC-ро;
   б) Агар $AB = 8$ *см*, $AD = 5$ *см*, $CF = 2$ *см* бошад, DE ва EC-ро ёбед.
6. Дар расм $ABCD$ — трапетсия. Дар асоси маълумотҳои расм x-ро ёбед.

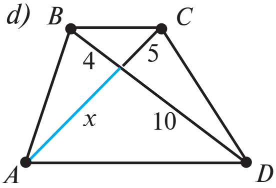
а)



b)



d)



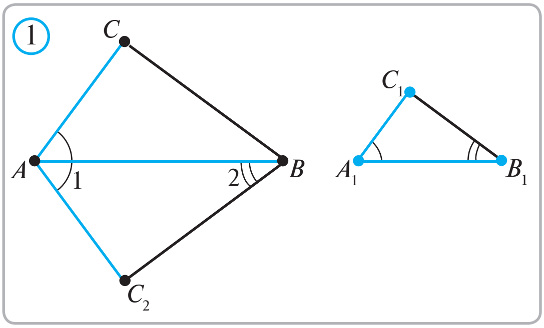
7*. Яке аз кунҷҳои тези ду секунҷаи росткунҷа ба ҳамдигар баробар бошанд, монанд будани онҳоро исбот кунед.

8*. Дар тарафи AC-и секунҷаи ABC нуқтаи D гирифта шудааст. Агар $\angle ABC = \angle BDC$ бошад, монанд будани секунҷаҳои ABC ва BDC-ро исбот кунед. Агар $3AB = 4BD$ ва $BC = 9$ *см* бошад, порчаи AC-ро ёбед.

8 АЛОМАТИ ДУЮМИ МОНАНДИИ СЕКУНҶАҲО

Теорема. (Аломати ТКТ монандии секунҷаҳо). **Агар ду тарафи як секунҷа ба ду тарафи секунҷаи дигар мутаносиб ва кунҷи ин тарафҳо ташкилнамуда баробар бошанд, ин гуна секунҷаҳо монанд мешавад** (*расми 1*).

$$\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ \angle A=\angle A_1,\ \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$$

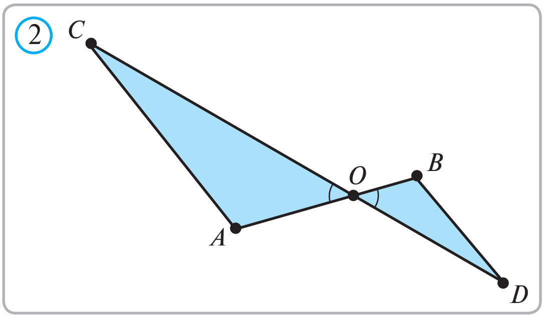


Исбот. Ба секунҷаи $A_1B_1C_1$ секунҷаи монанди (дар асоси аломати КК) ABC_2-ро дида мебароем (*расми 1*): $\angle 1=\angle A_1$, $\angle 2=\angle B_1$ он гоҳ,

$$\left.\begin{aligned} \frac{AB}{A_1B_1}&=\frac{AC_2}{A_1C_1} \\ \frac{AB}{A_1B_1}&=\frac{AC}{A_1C_1} \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &\Leftarrow \ (\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC_2) \\ &\Leftarrow \ (\text{мувофиқи шарт}). \end{aligned}$$

Аз ин ду баробарӣ, $AC_2=AC$ мешавад. Бинобар ин мувофиқи аломати якумӣ баробарии секунҷаҳо $\Delta ABC=\Delta ABC_2$. Аз баробарии охирин $\angle 2=\angle B$. Мувофиқи сохта шуданаш $\angle 2=\angle B_1$ буд. Аз ин рӯ, дар ҳолати $\angle B=\angle B_1$, аз $\angle A=\angle A_1$ ва $\angle B=\angle B_1$ буданаш, мувофиқи аломати КК-и монандии секунҷаҳо $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ***Теорема исбот шуд.***

Масъала. Порчаҳои AB ва CD дар нуқтаи O бурида мешаванд, $AO=12$ *см*, $BO=4$ *см*, $CO=30$ *см*, $DO=10$ *см* бошад, нисбати масоҳатҳои секунҷаҳои AOC ва BOD-ро ёбед.



Ҳалли он. Мувофиқи шарт.

$$\left.\begin{aligned} \frac{OA}{OB}&=\frac{12}{4}=3 \\ \frac{OC}{OD}&=\frac{30}{10}=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=3.$$

Аз ин ҷо ду тарафи секунҷаи AOC ба ду тарафи секунҷаи BOD мутаносиб ва кунҷи байни онҳо дар ҳолати шоқулӣ (вертикалӣ) баробаранд: $\angle AOC=\angle BOD$. Аз ин рӯ, дар асоси аломати ТКТ монандии секунҷаҳо $\Delta AOC \backsim \Delta BOD$ ва коэффисиенти монандӣ: $k=\frac{OA}{OB}=3$. Мувофиқи теоремаи нисбати масоҳатҳои секунҷаҳои монанд: $\frac{S_{AOC}}{S_{BOD}}=k^2=9$.   ***Ҷавоб:*** 9.

Савол, масъала ва супориш

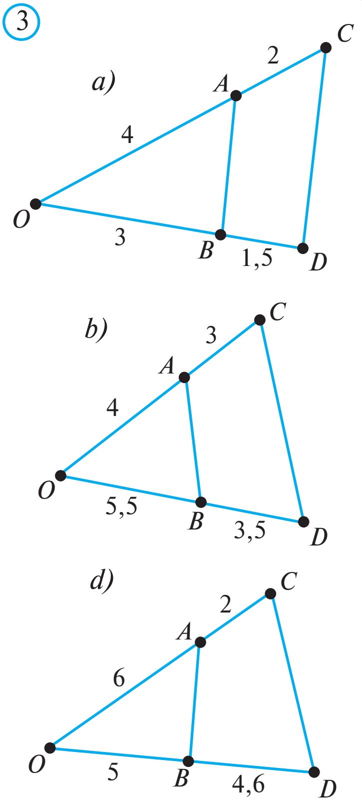
1. Таърифи монандии секунҷаҳо ва аломати ТКТ-ро муқоиса кунед.

2. Аз аломати ТКТ монандии секунҷаҳоро исбот кунед.

3. Монандии секунҷаҳои баробарпаҳлуи кунҷҳои қуллаашон баробарро аз аломати а) КК; б) ТКТ истифода бурда исбот кунед.

4. Секунҷаҳои OAB ва OCD-е, ки дар расми 3 тасвир ёфтаанд, оё монананд? Агар монанд бошанд, нисбати периметрҳои ин секунҷаҳоро ёбед.

③



5. Нурҳои AC ва BD дар нуқтаи O бурида мешаванд ва $AO:CO=BO:DO=3$, $AB=7$ *см* бошад, порчаи CD, инчунин нисбати масоҳатҳои секунҷаҳои AOB ва COD-ро ёбед.

6. Дар секунҷаи ABC ва $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $AB:A_1B_1=AC:A_1C_1=4:3$.

а) агар порчаи AB аз порчаи A_1B_1 5 *см* зиёд бошад, тарафҳои AB ва A_1B_1-ро;

б) агар порчаи A_1B_1 аз AB 6 *см* кам бошад, тарафҳои AB ва A_1B_1-ро;

в) агар ҳосили ҷамъи масоҳатҳои секунҷаҳои додашуда 400 *см*^{2} бошад, масоҳати ҳар як секунҷаро ёбед.

7. Агар катетҳои секунҷаи росткунҷам якум ба катетҳои секунҷаи росткунҷаи дуюм мутаносиб бошанд, монанд будани ин секунҷаҳоро исбот кунед.

8. Дар секунҷаи ABC $AB=15$ *м*, $AC=20$ *м*, $BC=32$ *м*. Ба тарафи AB-и секунҷа порчаи $AD=9$ *м*, ба тарафи AC порчаи $AE=12$ *м* гузошта шуд. Порчаи DE-ро ёбед.

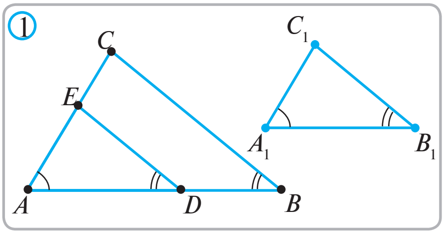
9. Монанд будани секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 3 *дм* ва 4 *дм* ва секунҷаи росткунҷаи яке аз катетҳояш 8 *дм* ва гипотенузааш 10 *дм*-ро исбот кунед.

10*. Порчаи AB ва хати рости l дар нуқтаи O бурида мешаванд. Ба хати рости l перпендикулярҳои AA_1 ва BB_1 фуроварда шудаанд. Агар $AA_1=2$ *см*, $OA_1=4$ *см* ва $OB_1=3$ *см* бошад, порчаҳои BB_1, OA ва AB-ро ёбед.

9 АЛОМАТИ СЕЮМИ МОНАНДИИ СЕКУНҶАҲО

Теорема. (Аломати ТТТ монандии секунҷаҳо). **Агар се тарафи як секунҷа ба се тарафи секунҷаи дигар бо равиши мувофиқ мутаносиб бошад, ин гуна секунҷаҳо монанд аст.**

$\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CA}{C_1A_1}$ *(расми 1)* ⇒ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$



Исбот. Дар тарафи AB секунҷаи ABC нуқтаи D-ро ҳамин тавр мегузорем, ки $AD=A_1B_1$ шавад. Хати рости параллелии ба тарафи BC аз нуқтаи D гузаронидашуда тарафи AC-ро дар нуқтаи E мебурад. Он гоҳ мувофиқи аломати KK секунҷаҳои ΔADE ва ΔABC монанд аст. Муфоқи таъриф ва шарти теорема:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1} \quad \text{ва} \quad \frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}.$$

Аммо мувофиқ сохтан $A_1B_1=AD$ буданашро ба ҳисоб гирем, $B_1C_1=DE$ ҳосил мешавад. Ҳамин тавр, мувофиқи аломати ТКТ баробарии секунҷаҳо ΔADE ва $\Delta A_1B_1C_1$ баробар аст ва $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ мебошад. Аз ин мебарояд, ки $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ***Теорема исбот шуд.***

Масъала. Агар аз ду секунҷаи баробарпаҳлу асос ва тарафи паҳлуи яке аз инҳо ба асос ва тарафи паҳлуи дуюмӣ мутаносиб бошад, монанд будани ин секунҷаҳоро исбот кунед.

$\Delta ABC,\ AB=BC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ A_1B_1=B_1C_1,\ \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$ ⇒ $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$

Исбот. Аз баробарии $AB=BC$, $A_1B_1=B_1C_1$ ва аз нисбати додашуда $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$ баробариҳои $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$ -ро ҳосил мекунем. Бинобар ин мувофиқи аломати ТТТ секунҷаҳои $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Савол, масъала ва супориш

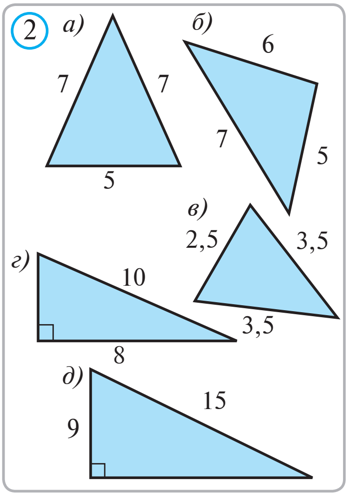
1. Аломати ТТТ-монандии секунҷаҳоро гуфта диҳед ва исбот намоед.
2. Агар $AC=14$ *см*, $AB=11$ *см*, $BC=13$ *см*, $A_1C_1=28$ *см*, $A_1B_1=22$ *см*, $B_1C_1=26$ *см* бошад, оё секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ монанд аст?
3. Ҷуфти секунҷаҳои монанди расми 2-ро нишон диҳед.

4. Монанди тарафҳои паҳлуии трапетсияи $ABCD$ AB ва CD давом дода шавад дар нуқтаи E бурида мешавад. Агар $AB=5$ *см*, $BC=10$ *см*, $CD=6$ *см*, $AD=15$ *см* бошад,масоҳати секунҷаи AED-ро ёбед.

5. Асосҳои трапетсия 6 *см* ва 9 *см*, баландиаш 10 *см*. Масофаи байни нуқтаи буриши диагоналҳо ва асосҳоро ёбед.

6. Исбот кунед,ки ду секунҷаи дилхоҳи баробартараф монанд мебошад.

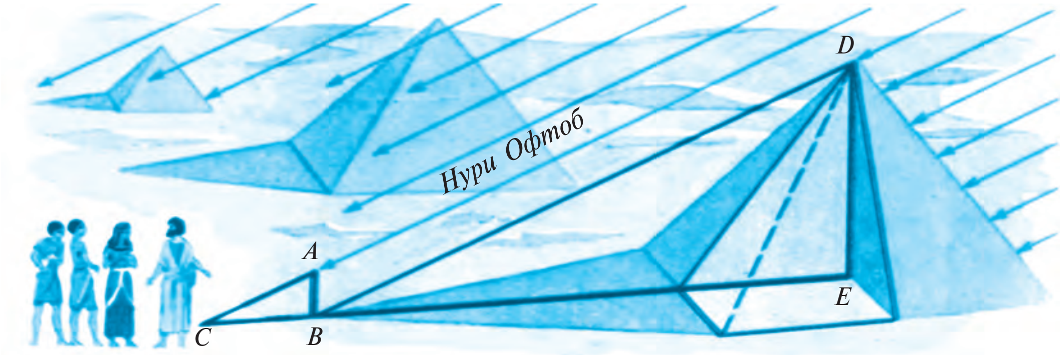
7. Ба дохили секунҷаи баробарпаҳлу, ки асосаш 12 см, баландиаш 8 см аст, квадрат ҳамин тавр кашида шудааст, ки ду қуллаи он дар асоси секунҷа, ду қуллаи боқимонда дар тарафҳои паҳлуӣ мехобад. Тарафи квадратро ёбед.



8*. Баландиҳои AA_1 ва BB_1 дар секунҷаи тезкунҷаи ABC гузаронида шудааст. Исбот кунед, ки $ABC \sim A_1B_1C$ аст.

9. Масоҳати ду секунҷаи монанд ба 6 ва 24 баробар аст. Периметри яке аз онҳо аз дуюмаш 6-то зиёд аст. Периметри секунҷаи калонро ёбед.

Лавҳаҳои таърихӣ. Ин воқеа асри VI пеш аз мелод рӯй додааст.Ҳамон вақт юнониён умуман бо геометрия машғул набуданд.Файласуфи Юнон Фалес барои шиносоӣ бо фанҳо дар Миср ба он ҷо ташриф овард.Мисриён ба ӯ масъалаи душворро доданд: баландии яке аз аҳромҳои бузургро чӣ тавр ёфтан мумкин? Фалес ҳалли содда ва ҷозибаноки ин масъаларо ёфт. Вай ба замин чӯбчае кӯфт ва гуфт: «Кадом вақте ки сояи ин чӯбча ба дарозиаш баробар мешавад, дарозии сояи аҳром ҳам ба баландии аҳром (пирамида) баробар мешавад». Барои асоснок кардани фикри Фалес ҳаракат кунед.



10 АЛОМАТҲОИ МОНАНДИИ СЕКУНҶАҲОИ РОСТКУНҶА

Маълум аст ки яке аз кунҷҳои секунҷаи росткунҷа аз кунҷи рост иборат аст. Аз ҳамин сабаб дар ин гуна секунҷаҳо аломатҳои монандӣ содда гардонда мешаванд.

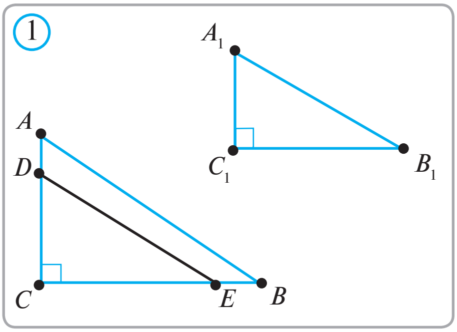
Теоремаи 1. **Яке аз кунҷҳои тези секунҷаи росткунҷа мувофиқан ба кунҷи тези секунҷаи росткунҷаи дигар баробар бошад, онҳо монанд мешаванд.**

Теоремаи 2. **Катетҳои секунҷаҳои росткунҷаҳо бо равиши мувофиқ ба якдигар мутаносиб бошанд, онҳо монанд мешаванд.**

Теоремаи 3. **Катет ва гипотенузаи яке аз секунҷаи росткунҷа ба катет ва гипотенузаи секунҷаи дигар бо равиши мувофиқ мутаносиб бошад, онҳо монанд мешаванд.**

Дуруст будани аломатҳои якуму дуюми он худ аз худ аён аст. Биёед, аломати сеюмро исбот кунем.

$$\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ \angle C=90^\circ,\ \angle C_1=90^\circ,\ \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$$



Исбот. Ба тарафи BC секунҷаи ABC порчаи C_1B_1-ро бо шарти $CE=C_1B_1$ мегузорем ва $DE \parallel AB$ -ро мегузаронем *(расми 1)*. Он гоҳ мувофиқи аломати КТК монандии секунҷаҳо, ΔDEC ва ΔABC монанд мешаванд. Тарафҳои мувофиқи секунҷаҳои монанд мутаносибанд:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{CB}{CE}.$$

Мувофиқи сохта шуданаш он $CE=C_1B_1$. Аз ин рӯ, баробарии $\frac{AB}{DE}=\frac{CB}{C_1B_1}$ (1) ҷой дорад. Аз тарафи дигар мувофиқи шарти теорема $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$ (2) аст.

Аз баробариҳои (1) ва (2) $DE=A_1B_1$ буданашро муайян мекунем. $\Delta A_1B_1C_1$ ва ΔDEC-ҳоро дида мебароем. Дар онҳо:

1. $CE=C_1B_1$ (аз рӯи сохтан), 2. $DE=A_1B_1$ (баробарии исботшуда).

Мувофиқи баробарии секунҷаҳои росткунҷа аз рӯи як катет ва гипотенузааш $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta DEC$.

Аз тарафи дуюм бошад, $\Delta ABC \backsim \Delta DEC$. Дар ин ҳолат $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ мешавад. ***Теорема исбот шуд.***

Масъала. Агар дар ду секунҷаи баробарпаҳлу баландӣ ва тарафи паҳлуии яке ба баландӣ ва тарафи паҳлуии дуюмӣ мутаносиб бошад, монанд будани ин секунҷаҳоро исбот кунед *(расми 2)*.

Исбот. Секунҷаҳои росткунҷаи ABD ва $A_1B_1D_1$-ро дида мебароем. Мувофиқи шарт яке аз катет ва гипотенузаи онҳо байни худ мутаносибанд. Бинобар ин, дар асоси теоремаи 3 $\Delta ABD \backsim \Delta A_1B_1D_1$. мешавад. Он гоҳ $\angle DBA \backsim \angle D_1B_1A_1$.

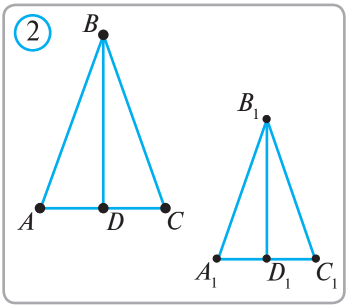
Биссектриса ҳам будани баландии ба асоси секунҷаи баробар паҳлу гузаронидашударо ба ҳисоб гирем, $\angle B = 2\angle DBA = 2\angle D_1B_1A_1 = \angle B_1$ мешавад.

Дар натиҷа, дар секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ ба баробариҳои

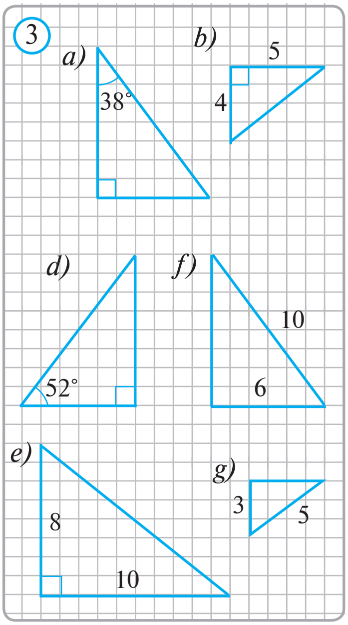
$$\angle B = \angle B_1 \text{ ва } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$ соҳиб мешавем.

Аз ин рӯ мувофиқи аломати ТКТ секунҷаҳо монанд: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ***Теорема исбот шуд.***

2



3



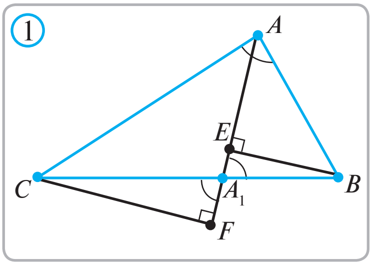
Савол, масъала ва супориш

1. Аломатҳои монандии секунҷаҳои росткунҷаро гӯед ва исбот кунед.
2. Аз расми 3 секунҷаҳои монандро ёбед.
3. Яке аз катети секунҷаи росткунҷаи ба секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 3 *м* ва 4 *м* монанд буда 27 *м* бошад, катети дуюми он чанд *м* мешавад?
4. Ду секунҷаи росткунҷаи масоҳатҳояшон 21 $м^2$ ва 84 $м^2$ монанданд. Агар яке аз катети секунҷаи якум 6 *м* бошад, катетҳои секунҷаи дуюмро ёбед.
5. Ба як давра ду секунҷаи росткунҷаи монанд дарун кашида шудааст. Баробарии ин секунҷаҳоро исбот кунед.

6*. Дар секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 10 *см* ва 12 *см* квадрати яке аз кунҷаш умумӣ дарун кашида шудааст. Агар яке аз қуллаҳои квадрат дар гипотенуза буданаш маълум бошад, тарафи квадратро ёбед.

7*. Секунҷаи ABC дода шудааст. Дар он ромби $ADEF$ чунон дарун кашида шудааст, ки нуқтаҳои D, E ва F бо равиши мувофиқ ба тарафҳои AB, BC ва CA-и секунҷа мехобад. Агар $AB=c$, $AC=b$ бошад, тарафи ромбро ёбед.

11 ТАТБИҚИ АЛОМАТҲОИ МОНАНДӢ БАРОИ ИСБОТКУНИИ МАСЪАЛАҲО


①

Масъалаи 1. Исботи кунед, ки биссектрисаи секунҷа тарафи муқобилро ба порчаҳои ба ду тарафи боқимонда мутаносиб ҷудо мекунад.

$\Delta ABC, AA_1$ — биссектриса (расми 1) ⇒ $\dfrac{AB}{A_1B}=\dfrac{AC}{A_1C}$

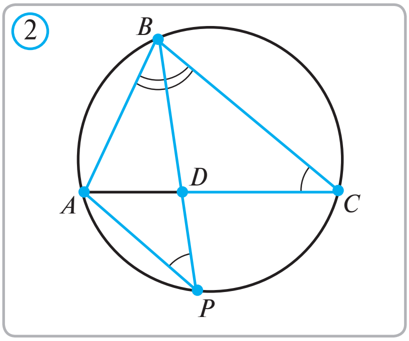
Ҳалли он. Ба хати рости AA_1 перпендикуляри BE ва CF мегузаронем. Он гоҳ аз $\angle CAF=\angle BAE$ буданаш секунҷаҳои CAF ва BAE монанд мешаванд. Тарафҳои секунҷаҳои монанд мутаносибанд:

$$\Delta CAF \backsim \Delta BAE \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{CF}{BE}. \qquad (1)$$

Ба монанди он:

$$\Delta CA_1F \backsim \Delta BA_1E \Rightarrow \frac{CA_1}{BA_1}=\frac{CF}{BE}. \qquad (2)$$

Баробариҳои 1 ва 2-ро муқоиса кунем $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CA_1}{BA_1}$, яъне $\dfrac{AB}{A_1B}=\dfrac{AC}{A_1C}$ мешавад. Ин порчаҳои BA_1 ва CA_1 бо порчаҳои AB ва AC мутаносиб буданашро мефаҳмонад.


②

Масъалаи 2. Биссектрисаи BD-и секунҷаи ABC давраи аз секунҷа берун кашидашударо дар нуқтаҳои B ва P мебурад. $\Delta ABP \backsim \Delta BDC$ буданашро исбот кунед *(расми 2)*.

Ҳалли он. Дар ΔABP ва $\angle BDC$:

1. $\angle DBC=\angle ABP \Leftarrow$ мувофиқи шарт;

2. $\angle DCB=\angle APB \Leftarrow$ як камонро дарҳам мекашанд.

Аз ин рӯ, баробариҳо мувофиқи аломати *KK* секунҷаҳои $\Delta ABP \backsim \Delta BDC$ монанд (ба як камон такя мекунад) буданашонро нишон медиҳад.

? *Савол, масъала ва супориш*

1. Порчаҳои биссектрисаи кунҷи фаромада ҷудо карда ва мутаносибии байни ду тарафи боқимондаро навишта нишон диҳед.

2. Аз росткунҷаи рости C-и секунҷаи росткунҷаи ABC баландии CD гузаронида шудааст. $\angle ACD=\angle CBD$ шуданашро исбот кунед. Аз шакли ҳосилшуда чанд секунҷаи ба ҳам монандро нишон дода метавонед?

3. Дар асоси маълумотҳои расми 3 x-ро ёбед.

4. Аз секунҷаи ABC биссектрисаи AD гузаронида шудааст. Агар CD=4,5 *м*; BD=13,5 *м* ва периметри секунҷаи ABC 42 *м* бошад, тарафҳои AB ва AC-и онро ёбед.

5. Медианаҳои секунҷаи ABC дар нуқтаи N бурида мешавад. Агар масоҳати секунҷаи ABC 87 $дм^2$ бошад, масоҳати секунҷаи ANB ба чӣ баробар аст?

6. Масофа аз нуқтаи буриши медианаҳои секунҷаи ABC нуқтаи N то тарафҳои AB ва BC мувофиқан 3 *дм* ва 4 *дм*. Агар AB=8 *дм* бошад, тарафи BC-ро ҳисоб кунед.

7*. Маълум аст, ки хати рости ба асоси трапетсия параллел яке аз тарафҳои паҳлуиро ба нисбати m:n ҷудо мекунад. Ин хати рост тарафи дуюми паҳлуи онро бо кадом нисбат ҷудо мекунад?

Масъалаҳои шавқовар

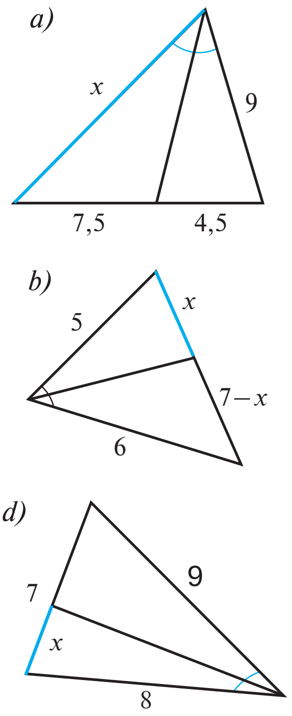
Геометрия ва забони англисӣ. Масъалаи геометрии ба забони англисӣ дар поён додашударо ҳаллу фасл карда бинед. Бо ин амал ҳам аз забони англисӣ, ҳам аз геометрия ба чӣ гуна қодир будани худро озмуда мебинед.

1) ***Dissection Puzzle:*** Let M be the midpoint of the side AB of a given triangle ABC. The triangle has been dissected into parts X, Y, Z along the lines MN and MK passing through M such that MN is parallel while MK is perpendicular to the base BC (*picture 4*). Show how the three pieces can be fitted together to make a rectangle, respectively two different parallelograms.

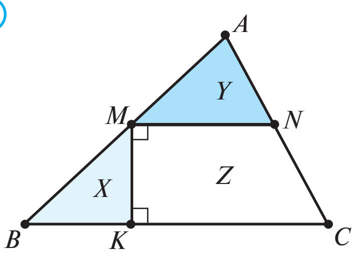
2) Look at the picture 5 and proof

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90°.$$

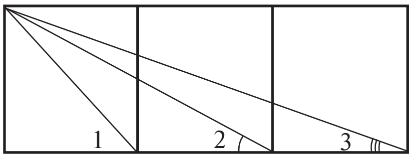
③



④



⑤



12

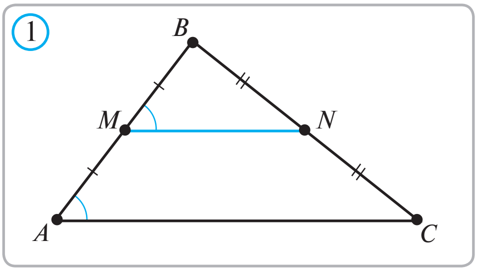
ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

Масъалаи 1. Аз монандии секунҷаҳо истифода бурда хати миёнаи секунҷа ба як тарафи секунҷа параллел ва ба нисфи ана ҳамин тараф баробар буданашро исбот кунед.

ΔABC, MN — *хати миёна (расми 1):* $MA=MB$, $NC=NB$

$\Rightarrow$

$MN \parallel AC, \quad MN=\frac{1}{2}AC$



Ҳалли он. Дар ΔABC ва ΔMBN :

$\angle B$ — кунҷи умумӣ, $\frac{BM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{1}{2}$.

Бинобар ин, мувофиқи аломати ТКТ ин ду секунҷа монанданд. Акнун мушоҳидаро ин тавр давом медиҳем:

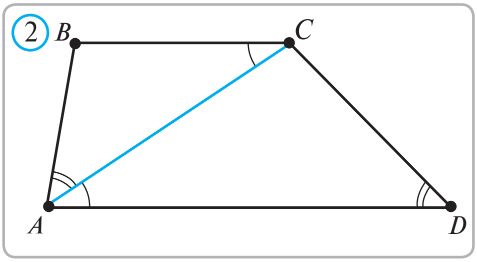
$$\Delta MBN \backsim \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \angle BMN = \angle A, \\ \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AC, \\ MN = \frac{1}{2}AC. \end{cases}$$

Масъалаи 2. Диагонали AC-и трапетсияи $ABCD$, ки асосҳояш BC ва AD аст, онро ба ду секунҷаи монанд ҷудо мекунад. $AC^2=BC\cdot AD$ буданашро исбот кунед.

$ABCD$ — *трапетсия,* $BC \parallel AD$, $\Delta ABC \backsim \Delta DCA$ *(расми 2)*

$\Rightarrow$

$AC^2=BC\cdot AD$



Ҳалли он. **Қадами 1.** Кунҷҳои баробари секунҷаҳои ABC ва ACD-ро муқоиса мекунем. $\angle ACB=\angle CAD$, чунки ин кунҷҳо — кунҷҳои дарунии ивазшаванда. $\angle B \neq \angle D$, чунки $ABCD$ — трапетсия (дар акси ҳол,

$$\angle D+\angle A=\angle B+\angle A=180^\circ,$$

яъне $AB \parallel CD$ буда, $ABCD$ трапетсия намегардад. Ҳамин тариқ, $\angle D=\angle BAC$ ва$\angle ACD=\angle B$.

Қадами 2. Нисбати тарафҳои мувофиқи секунҷаҳои ABC ва ACD-ро менависем: $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AC}$, аз ин $AC^2=BC\cdot AD$.

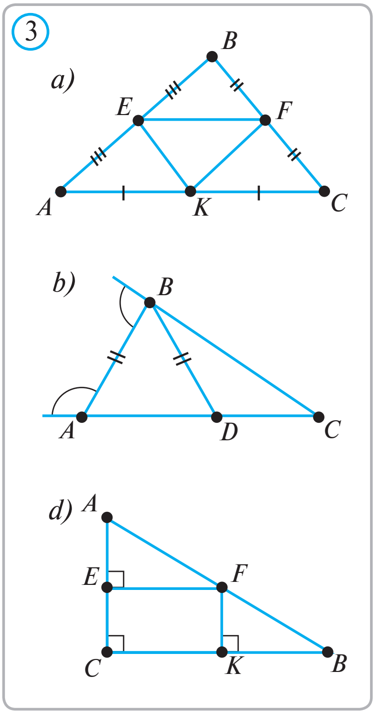
Савол, масъала ва супориш

1. а) Агар сояи одами қадаш 170 *см* 1 *м* бошад, сояи дарахти баландиаш 5, 4 *м* чӣ қадар мешавад? б) Кунҷи қуллаҳои ду секунҷаи баробарпаҳлу баробар аст. Тарафи паҳлуии секунҷаи якум 17 *см*, асосаш 10 *см*, асоси секунҷаи дуюм 8 *см* аст. Тарафи паҳлуии секунҷаи дуюмро ёбед.
2. Аз ҳар як нақшаи расми 3 секунҷаҳои монандро ёбед.
3. Исбот кунед, ки медианаи AP-и секунҷаи ABC порчаи дилхоҳи ба тарафи BCпараллел ва қуллаҳояш дар тарафҳои AB ва AC хобидаро ба ду қисми баробар тақсим мекунад.
4. Дар масофаи баробар хобидани қуллаҳои секунҷа аз хати росте, ки хати миёнаи секунҷаро дар бар мегирад, исбот кунед.
5. Диагоналҳои чоркунҷаи $ABCD$-и ба давра дарункашидашуда дар нуқтаи O бурида мешаванд. Исбот кунед, ки $AOB \sim COD$.
6. Дар соҳаи дохили секунҷа нуқтаи O ва дар нурҳои OA, OB, OC бо равиши мувофиқ нуқтаҳои E, F, K гирифта шудаанд *(расми 4)*. Агар $AB || EF$ ва $BC || FK$ бошад, исбот кунед, ки секунҷаҳои ABC ва EFK монанданд.

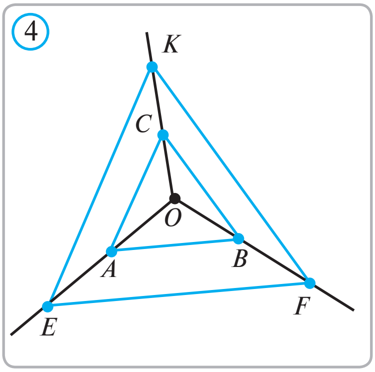
7*. Хати рости аз буриши диагоналҳои трапетсия гузаранда яке аз асосҳои трапетсияро дар нисбати $m:n$ тақсим мекунад. Ин хати рост асоси дуюмро дар кадом нисбат тақсим мекунад?

8. Агар масоҳати секунҷаи ABC ба S баробар бошад, масоҳати соҳаҳои бо x ишора кардашударо аз расми 5 ёбед.

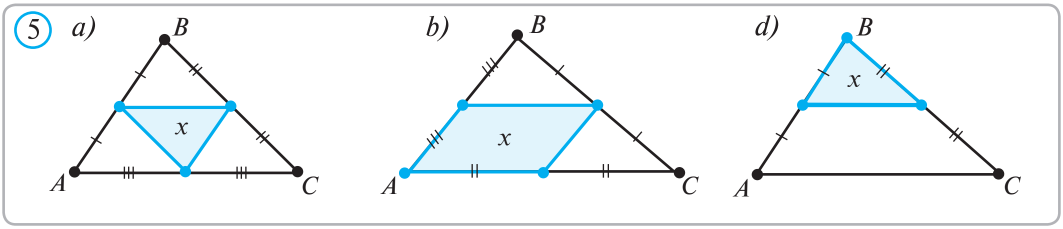
③



④



⑤



13 ДОНИШИ ХУДРО САНҶИДА БИНЕД

I. Тестҳо

1. Кадоме аз таърифҳои зерин дурустанд: ду секунҷа монанд гуфта мешавад, агар:

А) Кунҷҳои онҳо мувофиқан баробар бошанд;
Б) Тарафҳои онҳо мувофиқан баробар бошанд;
В) Тарафҳои онҳо мувофиқан мутаносиб ва кунҷҳои мувофиқ баробар бошанд;
Г) Тарафҳои мувофиқашон баробар ва кунҷҳои мувофиқ ҳам баробар бошанд.

2. Нисбати масоҳатҳои ду секунҷаи монанд ба чӣ баробар аст?

А) Ба коэффисиенти монандӣ;
Б) Ба нисбати тарафҳои мувофиқ;
В) Ба нисбати периметрҳои онҳо;
Г) Ба квадрати коэффисиенти монандӣ.

3. Кадоме аз тасдиқотҳои зерин дуруетанд: ду секунҷа монанд мешавад, агар:

А) Ду кунҷи яке ба ду кунҷи дуюм баробар бошад;
Б) Ду тарафи яке аз онҳо ба ду тарафи дуюмӣ баробар бошад;
В) Яктогӣ кунҷҳояшон баробар ва ду тарафҳояшон мутаносиб бошанд;
Г) Янтогӣ кунҳояш баробар ва янтогӣ тарафҳояш мутаносиб бошад.

4. Дурусташро ёбед: агар ду секунҷа монанд бошад,

А) Баландиҳояш баробар мешаванд;
Б) Тарафҳояшон мутаносиб мешаванд;
В) Тарафҳояшон баробар мешаванд.
Г) Масоҳатҳояшон баробар мешаванд.

5. Нисбати периметрҳои бисёркунҷаҳои монанд ба чӣ баробар аст?

А) Ба квадрати тарафҳои мувофиқ; Б) Ба коэффисиенти монандӣ;
В) Ба квадрати коэффисиенти монандӣ; Г) Ба нисбати масоҳатҳо

II. Масъалаҳо

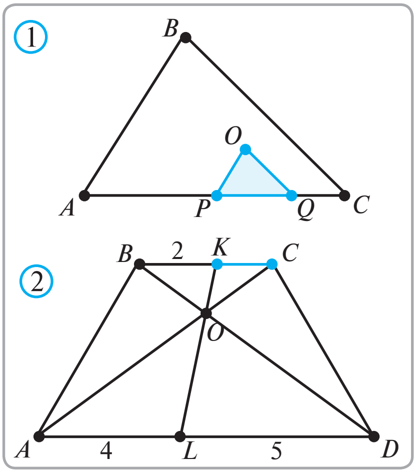
1. Миёнаҷои тарафҳои AB ва AC-и секунҷаи ABC бо равиши мувофиқ нуқтаҳои E ва F бошад. Агар масоҳати секунҷаи AEF $3\ см^2$ бошад, масоҳати секунҷаи ABC-ро ёбед.
2. Хати рости ба тарафи AC-и секунҷаи ABC параллел тарафҳои AB ва BC-ро бо равиши мувофиқ дар нуқтаҳои N ва P мебурад. Агар $AN = 4$, $NB = 3$, $BP = 3{,}6$ бошад, тарафи BC-ро ёбед.

3. Дар тарафи AB-и секунчаи тезкунчаи ABC нуқтаи K гирифта шудааст. Агар $AK=3$, $BK=2$ баробар ва баландии BD-и секунча ба 4 баробар бошад, масофаи аз нуқтаи K то порчаи AC-ро ёбед.

4. Аз нуқтаи K-и тарафи BC-и параллелограмми $ABCD$ нурҳои DK ва AB гузаронида шудааст,ки дар нуқтаи F бурида мешаванд. Агар $AD=4$, $DK=5$ ва $DC=5$ бошад, периметри секунчаи BKF-ро ёбед.

5. Аз нуқтаи O, ки дар дохили секунчаи ABC гирифта шудааст, ба тарафи AB ва BC хати рости параллел гузаронида шудааст. Ин хатҳои рост тарафи AC-ро бо равиши мувофиқ дар нуқтаҳои P ва Q мебурад. Агар $PQ=2$, $AC=7$ ва масоҳати секунчаи ABC ба 98 баробар бошад, масоҳати секунчаи POQ-ро ёбед.

6. Дар асоси BC ва AD трапетсияи $ABCD$ мувофиқан нуқтаҳои K ва L гирифта шудаанд. Порчаи KL аз нуқтаи буриши диагоналҳои трапетсия мегузарад. Агар $AL=4$, $LD=5$ ва $BK=2$ бошад, порчаи KC-ро ёбед.



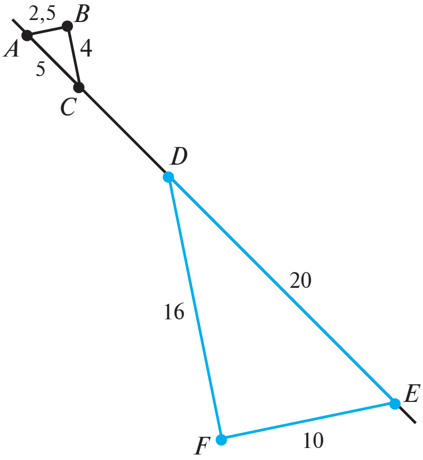
III. Худатонро озмуда бинед (Кори намунавии назоратӣ)

1. Диагонали AC-и трапетсияи $ABCD$ онро ба секунҷҳои монанди ΔABC ва ΔACD ҷудо мекунад. Агар $BC=4$ *м*, $AD=9$ *м* бошад, дарозии диоганали AC-ро ёбед..

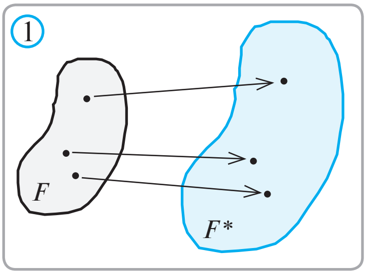
2. Масоҳатҳои ду секунчаи монанд 50 $дм^2$ ва 32 $дм^2$, ҳосили ҷамъи периметрҳои онҳо 117 *дм* бошад, периметри ҳар як секунҷаро ёбед.

3. Монандии секунҷаҳои дар расм тасвирёфтаро исбот кунед ва байни ҳам ҷойгиршавии хатҳои рости BC ва DF-ро шарҳ диҳед.

4. *(Иловагӣ)*. Баландиҳои BD ва AE-и секунчаи тезкунчаи ABC гузаронида шудааст. $DC \cdot AC = EC \cdot BC$ буданашро исбот кунед.



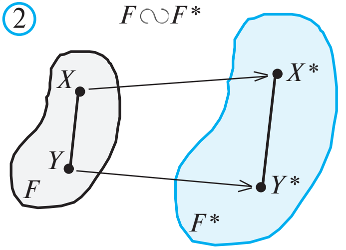
14 МОНАНДИИ ШАКЛҲОИ ГЕОМЕТРӢ



Дар дарсҳои пештара бо мафҳуми бисёркунҷаҳои монанд шинос шудем. Мафҳуми монандиро на фақат ба бисёркунҷаҳо,балки ба шаклҳои геометрии дилхоҳ дохил кардан мумкин аст.

Шаклҳои F ва F^* дода шуда бошад. Агар ба ҳар як нуқтаи шакли F ягон нуқтаи шакли F^*мувофиқ ва баръакс ҳар як нуқтаи шакли F^* ба ягон нуқтаи шакли F мувофиқ гузошта шуда бошад,шакли F ба шакли F^* табдил ёфта дониста мешавад (*расми 1*).

✓ ***Таъриф.*** Агар ҳангоми шакли F-ро ба шакли F^*табдил додан масофаҳои байни нуқтаҳо ба адади аз O фарқкунандаи муайян зиёд шавад, ин гуна табдилдиҳӣ **табдилдиҳии монандӣ** номида мешавад (*расми 2*).



$X^*Y^* = kXY$

k — коэффисиенти монандӣ

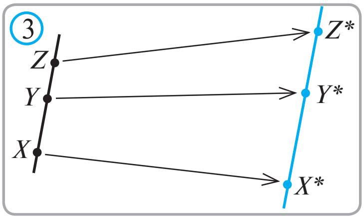
Ин таърифро дигар хел тавзеҳ додан мумкин: бигузор, дар натиҷаи ягон табдилдиҳии монандӣ ба нуқтаҳои ихтиёрии $X, У$ шакли F нуқтаҳои X^*, Y^* шакли F^* мувофиқ гузошта шуда бошад. Агар $\boldsymbol{X^*Y^* = k{\cdot}XY}$, $k>0$ бошад, ин табдилдиҳӣ **тадбилдиҳии монандӣ** номида мешавад. Дар ин чо k барои тамоми нуқтаҳои X ва Y як адад буда, он **коэффисиенти монандӣ** номида мешавад.

Агар шаклҳои F ва F^* дода шуда буда, таблдиҳиҳои монандии якеро ба дигаре гузаронанда мавҷуд бошад,шаклҳои F ва F^* байни худ **монанд** гуфта мешаванд.Монандии шаклҳо $\boldsymbol{F \backsim F^*}$ навишта мешавад. Агар коэффисиенти монандӣ k-ро ҳам нишон додан лозим бошад, $\boldsymbol{F \backsim F^*}$ навиштан мумкин.

Агар ҳангоми табдилдиҳии монандӣ нуқтаи X ба нуқтаи X^* мувофиқ гузошта шуда бошад,нуқтаи Xба нуқтаи X^*табдилёфта,ё ки гузашта мегӯянд.

Табдилдиҳии монандӣ ба хосиятҳои зерин молик аст:

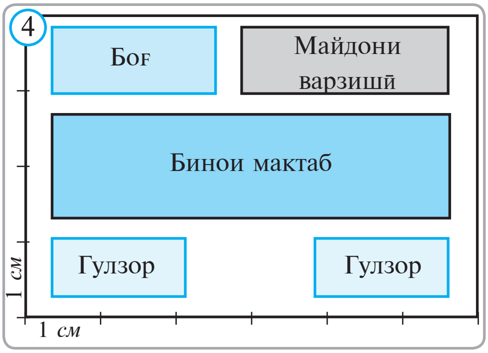
Теорема. **Табдилдиҳии монандӣ а) хати ростро ба хати рост; б) нурро ба нур; в) кунҷро дар ҳолати нигоҳ доштани бузургии он ба кунҷ; г) порчаро ба порча мегузаронад, фақат дарозии порча ба k зиёд мешавад.**

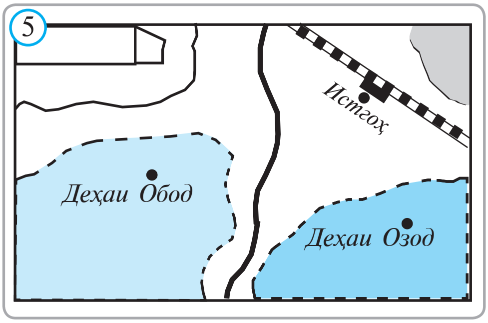


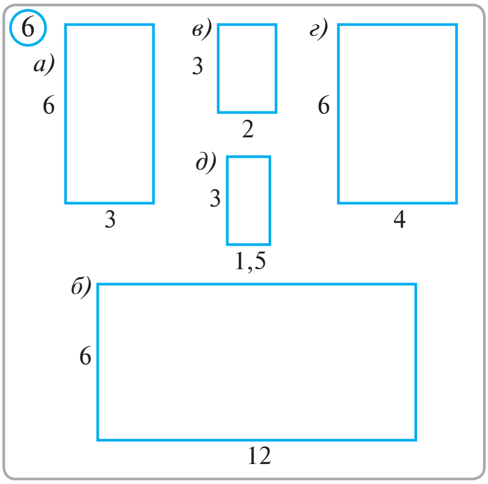
Исбот. а) Табдилдиҳии монандии коэффисиенти монандиаш k нуқтаҳои гуногун дар як хати рост хобидаи X^*, Y^* ва Z^*-ро бо равиш мувофиқ ба нуқтаҳои X^*, Y^* ва Z^* табдил диҳад (*расми 3*). Яке аз нуқтаҳои X, Y, Z, бигузор нуқтаи Y дар байни ду нуқтаи боқимонда хобад. Дар ин ҳолат $XZ=XY+YZ$. Дар асоси таърифи табдилдиҳии монандӣ:

$$X^*Z^*=k\cdot XZ=k\cdot(XY+YZ)=k\cdot XY+k\cdot YZ=X^*Y^*+Y^*Z^*.$$

Аз ин баробарии нуқтаҳои X^*, Y^* ва Z^* дар як хати рост хобиданаш бармеояд. Исботи теоремаро танҳо ба банди а) овардем. Исботи бандҳои боқимондаро ба ихтиёри Шумо чун машқ мегузорем.







? *Савол, масъала ва супориш*

1. Табдилдиҳии монандӣ чист?
2. Чӣ гуна шаклҳо шаклҳои монанд номида мешаванд?
3. Коэффисиенти монандиро баробари 2 гирифта, бо росткунҷаи бараш 3 *см* ва қадаш 4 *см* росткунҷаи монанд созед.
4. Дар расми 4 тарҳи ҳавлии мактаб дар масштаби 1:1000 тасвир ёфтааст. Андозаҳои а) ҳавлӣ; б) бинои мактаб; в) гулзорҳо; г) майдони варзишӣ; д) боғро ёбед.
5. Агар харита дар масштаби 1:50000 тасвир карда шуда бошад (расми 5), масофаи байни деҳаҳои Озод ва Ободро ёбед.
6. Дар табдилдиҳии монандӣ кунҷи байни нурҳо тағйир намеёбад, онро исбот кунед.

7*. Секунҷаи ABC ҳангоми табдилдиҳии монандӣ ба секунҷаи $A^*B^*C^*$ табдил меёбад. Агар коэффисиенти монандӣ ба 0,6 ва периметри секунҷаи ABC баробари 12 *см* бошад, периметри секунҷаи $A^*B^*C^*$-ро ёбед.

8. Аз расми 6 ҷуфти росткунҷаҳои монандро ёбед ва коэффисиенти монандиро муайян созед.

15

ХОСИЯТҲОИ БИСЁРКУНҶАҲОИ МОНАНД

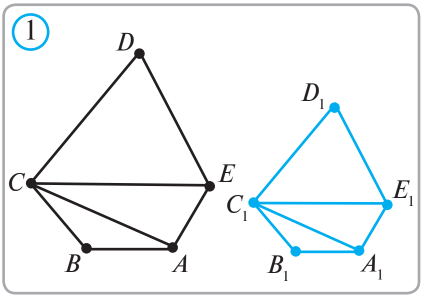
Теоремаи 1. **Нисбати периметрҳои бисёркунҷаҳои монанд ба коэффисиенти монандӣ баробар аст.**

Исбот. Дар ҳақиқат, бисёркунҷаҳои, $A_1A_2...A_n$ ва $B_1B_2...B_n$ монанд буда, коэффисиенти монандӣ k бошад, он гоҳ $B_1B_2=k\cdot A_1A_2$, $B_2B_3=k\cdot A_2A_3$, ... , $B_nB_1=k\cdot A_nA_1$ мешавад. Аз ин баробарии

$P=B_1B_2+B_2B_3+...+B_nB_1=k\cdot A_1A_2+k\cdot A_2A_3+...+k\cdot A_nA_1=k\cdot(A_1A_2+A_2A_3+...+A_nA_1)=k\cdot P_1$ -ро ҳосил мекунем. *Теорема исбот шуд.*

Теоремаи 2. **Бисёркунҷаҳои монандро ба бисёркунҷаҳои монанди миқдорашон якхела ҷудо кардан мумкин.**

①



Исбот. Бигузор бисёркунҷаҳои $ABCDE$ ва $A_1B_1C_1D_1E_1$ монанд буда, коэффисиенти монандӣ k бошад.

Аз қуллаҳои байни якдигар мувофиқи C ва C_1 диагоналҳои CA, CE ва C_1A_1, C_1E_1 -ро мегузаронем. Дар натиҷа бисёркунҷаҳо ба миқдори баробари секунҷаҳо ҷудо мешаванд. Монандии се ҷуфти секунҷаҳои мувофиқро нишон медиҳем.

1. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Чунки дар он секунҷаҳо мувофиқи шарт $\angle B=\angle B_1$, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=k$. Дар асоси аломати ТКТ-и монандии секунҷаҳо $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

2. Ҳамин тавр, $\Delta CDE \backsim \Delta C_1D_1E_1$. Ин монандиро чун банди 1 исбот кунед.

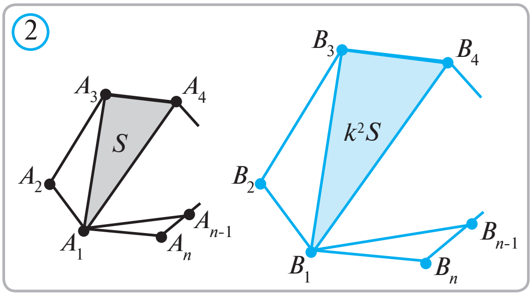
3. $\Delta ACE \backsim \Delta A_1C_1E_1$. Кунҷҳои, $\angle CAE$ ва $\angle C_1A_1E_1$ -и ин секунҷаҳоро дида мебароем: $\angle CAE=\angle BAE-\angle CAB$, $\angle C_1A_1E_1=\angle B_1A_1E_1-\angle C_1A_1B_1$.

Дар ин ҷо, $\angle BAE=\angle B_1A_1E_1$ (кунҷҳои мувофиқи панҷкунҷаи монанди додашуда). $\angle CAB=\angle C_1A_1B_1$ (кунҷҳои мувофиқи секунҷаҳои монанди ABC ва $A_1B_1C_1$). Бинобар ин, $\angle CAE=\angle C_1A_1E_1$.

Тарафҳои AC ва AE, инчунин A_1C_1 ва A_1E_1 -ро дида мебароем: $AC=kA_1C_1$, чунки онҳо тарафҳои мувофиқи секунҷаҳои байни худ монанди ABC ва $A_1B_1C_1$, $AE=kA_1E_1$, чунки онҳо ҳам тарафҳои мувофиқи панҷкунҷаҳои монанди додашуда. Аз ин рӯ, дар асоси аломати ТКТ-и секунҷаҳои монанд $\Delta ACE \backsim \Delta A_1C_1E_1$. Барои бисёркунҷаҳои монанди дилхоҳ ҳам ин гуна мушоҳидаҳо ҷой доштанаш равшан аст. *Теорема исбот шуд.*

Теоремаи 3. **Нисбати масоҳатҳои бисёркунҷаҳои монанд ба квадрати коэффисиенти монандӣ баробар аст.**

Исбот. Бигузор, бисёркунҷаҳои $A_1A_2\ldots A_n$ ва $B_1B_2\ldots B_n$ монанд ва коэффисиенти монандӣ k бошад. Дар ин ҳол масоҳати секунҷаҳои $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$,..., $A_1A_{n-1}A_n$ ба масоҳати секунҷаҳои $B_1B_2B_3$, $B_1B_3B_4$, ..., $B_1B_{n-1}B_n$ ба равиши мувофиқ монанд буда, нисбати масоҳатҳои секунҷаҳо ба k^2 баробар мешавад (*расми 2*).



$$S_{A_1A_2A_3}=k^2S_{B_1B_2B_3},\ S_{A_1A_3A_4}=k^2S_{B_1B_3B_4},\ \ldots\ ,\ S_{A_1A_{n-1}A_n}=k^2S_{B_1B_{n-1}B_n}.$$

Он гоҳ, $S_{A_1A_2\ldots A_n}=k^2\,S_{B_1B_2\ldots B_n}$. ***Теорема исбот шуд.***

Масъала. Нисбати масоҳатҳои ду бисёркунҷаи монанди периметрҳояшон 18 *см* ва 24 *см*-ро ёбед.

Ҳалли он. 1) Аз нисбати периметрҳои бисёркунҷаҳои монанд ба коэффисиенти монандӣ баробар буданаш истифода бурда, $k=24:18=4:3$ буданашро меёбем. 2) Аз сабаби нисбати масоҳати бисёркунҷаҳои монанд ба квадрати коэффисиенти монандӣ баробар буданаш ин нисбат ба $k^2=\frac{16}{9}$ баробар аст.

Ҷавоб: $\frac{16}{9}$.

Савол, масъала ва супориш

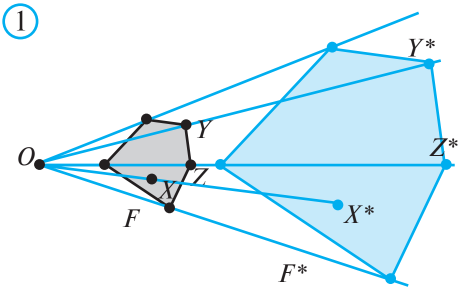
1. Нисбати периметри бисёркунҷаҳои монанд ба чӣ баробар аст?
2. Теорема дар бораи нисбати масоҳатҳои бисёркунҷаҳои монандро шарҳ диҳед.
3. Оё секунҷа бо чоркунҷа монанд шуданаш мумкин аст?
4. Ду чоркунҷае, ки масоҳатҳояшон 6 $м^2$ ва 24 $м^2$ мебошанд, монанд аст. Коэффисиенти монандиро ёбед.
5. Периметрҳои ду бисёркунҷа 18 *см* ва 36 *см*, ҳосили ҷамъи масоҳатҳои онҳо бошад, 30 $см^2$ аст. Масоҳатҳои ин бисёркунҷаҳоро ёбед.
6. Хати рости ба яке аз тарафҳои секунҷаи периметраш 84 *см* параллел гузаронидашуда аз он секунҷаи периметраш 42 *см* ва масоҳаташ 26 $см^2$-ро ҷудо кард. Масоҳати секунҷаи додашударо ёбед.
7. Шаклҳои нисбат ба нуқтаи O симметрӣ оё монанд аст? Шаклҳои нисбат ба тир симметрӣ-чӣ? Коэффисиенти монандии онҳо ба чӣ баробар аст?
8. Пахтазори шакли чоркунҷа дар харита бо чоркунҷаи масоҳаташ 12 $см^2$ тасвир ёфтааст. Агар масштаби харита 1:1000 бошад, масоҳати ҳақиқии майдонро ёбед.

9*. Ҳосили ҷамъи периметрҳои ду секунҷаи монанди масоҳатҳояшон 8 $см^2$ ва 32 $см^2$ ба 48 *см* баробар аст. Периметри секунҷаҳоро ёбед.

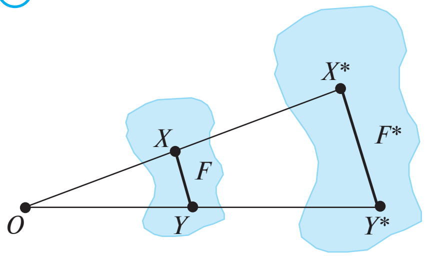
16

ГОМОТЕТИЯ ВА МОНАНДӢ

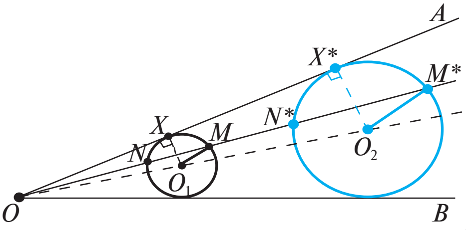
①



②



③



Яке аз табдилдиҳиҳои монанди соддатарин ин гомотетия аст. Бигузор шакли F, нуқтаи O ва адади мусбати k дода шуда бошад. Ба воситаи нуқтаи дилхоҳи X-и шакли F нури OX мегузаронем ва ба ин нур порчаи OX^*-ро, ки дарозиаш $k\cdot OX$ аст, мегузорем *(расми 1)*. Бо ҳамин усул табдилдиҳие, ки ба ҳар як нуқтаи X-и шакли F нуқтаи X^*-ро мувофиқ мегузорад, **гомотетия** номида мешавад. Дар ин нуқтаи O маркази гомотетия, адади k коэффисиенти гомотетия, шаклҳои F ва F^* **шаклҳои гомотетӣ** номида мешаванд.

Теорема. **Гомотетия табдилдиҳии монанд мешавад.**

Исбот. Гомотетияи марказаш нуқтаи дилхоҳи O, коэффисиенташ k-ро дида мебароем. Бигузор, нуқтаҳои X ва Y-и шакли F аз нуқтаҳои X^* ва Y^* гузарад *(расми 2)*. Дар ин ҳол, дар асоси таърифи гомотетия дар секунҷаҳои XOY ва X^*OY^* $\angle O$ — умумӣ ва $\frac{OX^*}{OX}=\frac{OY^*}{OY}=k$ мешавад. Бинобар ин секунҷаҳои XOY ва X^*OY^* аз рӯи ду тараф ва кунҷи байни онҳо монанд аст. Аз ин рӯ $\frac{X^*Y^*}{XY}=\frac{OX^*}{OX}=k$ ва $X^*Y^*=k\cdot XY$.

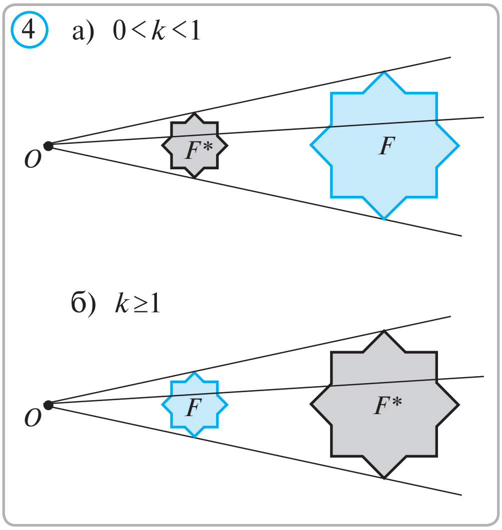
Теорема исбот шуд.

Масъала. Исбот кунед, ки ду давраи дилхоҳи ба тарафи кунҷҳои AOB расанда гомотетӣ ва нуқтаи O маркази ин гомотетия аст.

Ҳалли он. Давраҳои марказҳояшон O_1 ва O_2 буда бигузор ба тарафҳои куни AOB расанда бошад *(расми 3)*. Исбот мекунем, ки ин давраҳо гомотетӣ аст.

Давраҳо бо равиши мувофиқ ба нури OA дар нуқтаҳои X ва X^* расанда бошад *(расми 3)*. Он гоҳ $\Delta OXO_1 \backsim \Delta OX^*O_2$ (чунки $\angle XOO_1=\angle X^*OO_2$ ва $\angle OXO_1=\angle OX^*O_2=90°$). Аз ин, $\frac{OX^*}{OX}=\frac{OO_2}{OO_1}$.

Нисбати тарафи ростро бо k ишора мекунем ва гомотетияи коэффисиенташ $k = \frac{OO_2}{OO_1}$, марказаш нуқтаи O бударо дида мебароем. Бигузор дар ин гомотетия нуқтаи дилхоҳи M-и давраи марказаш O_1 ба нуқтаи M^* табдил ёфта бошад. Дар ин ҳол, $O_2M^* = k \cdot O_1M$ ё ки $O_2M^* = \frac{O_2X^*}{O_1X} \cdot O_1M$. Аз ин баробари $O_1X = O_1M$ буданаш, баробарии $O_2M^* = O_2X^*$-ро ҳосил мекунем. Ин нуқтаи M^* дар давраи марказаш O_2, радиусаш O_2X^* хобиданашро мефаҳмонад. Бинобар ин давраҳои дидашаванда байни худ гомотетӣ будаанд.



Машқи фаъолкунанда

Дар расми 4 шаклҳои гомотетие тасвир ёфтааст, ки коэффисиенти гомотеташ а) $0 < k < 1$; b) $k \geq 1$ аст. Мувофиқи қимати коэффисиенти гомотетия аз хусуси “фишурдашавӣ” ва “дарозшавӣ”-и шаклҳои гомотетӣ чӣ гуна хулоса баровардан мумкин аст?

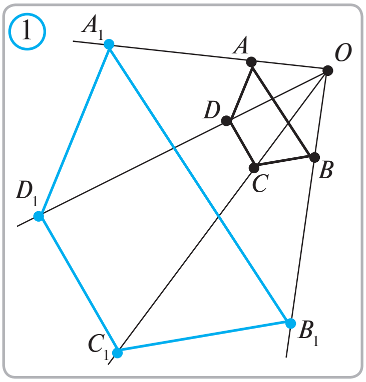
Савол, масъала ва супориш

1. Гомотетия чист? Маркази гомотетия, коэффисиенти он-чӣ?
2. Табдилдиҳии монандӣ будани геометрияро шарҳ диҳед.
3. Секунҷа кашед: а) дар даруни секунҷа; б) дар беруни секунҷа нуқтаи O-ро ишора кунед; в) ба гомотетияи марказаш O ва коэффисиенташ 2 нигоҳ карда, бо секунҷаи додашуда секунҷаи гомотетӣ созед.
4. Ду ромби периметрҳояш 18 *см* ва 27 *см* байни якдигар гомотетианд. Нисбати тарафҳо ва масоҳатҳои ин ромбҳоро ёбед.
5. Дар гомотетия нуқтаи X ба нуқтаи X^*, нуқтаи Y ба нуқтаи Y^* табдил меёбад. Агар нуқтаҳои X, X^*, Y, Y^* дар як хати рост нахобад, маркази ин гомотетияро ёбед.
6. Дар гомотетияи коэффисиенташ баробари 2 табдил ёфтани нуқтаи X ба нуқтаи X^* маълум. Маркази ин гомотетияро созед.
7. Шакли гомотетии ба давра монанд давра буданашро исбот кунед.
8. Давра кашед. Дар гомотетияи марказаш дар маркази давра ва коэффисиенташ баробари а)$\frac{1}{2}$; b) 2; d) 3; e)$\frac{1}{3}$ буда шакли гомолтетӣ созед.
9. Кунҷ ва дар соҳаи даруни он нуқтаи A дода шудааст. Даврае кашед, ки аз нуқтаи A гузашта, ба тарафҳои кунҷ расанда бошад.

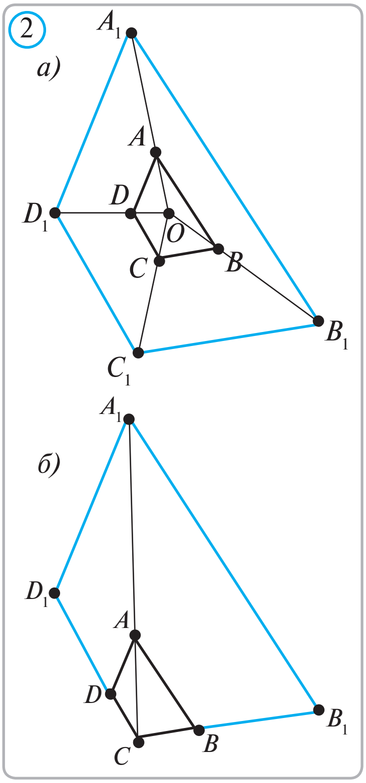
17

СОХТАНИ БИСЁРКУНҶАҲОИ МОНАНД

①



②



То ин вақт ҳангоми исботи теоремаҳо ва ҳалли масъалаҳо секунҷаҳои монанди гуногунро сохта омадем. Бисёркунҷаҳои монанд чӣ тавр сохта мешаванд? Дар поён роҳҳои сохтани бисёркунҷаҳои монандро дар асоси гомотетия меоварем.

Масъала. Ба чоркунҷаи додашудаи $ABCD$ монанд чоркунҷаи $A_1B_1C_1D_1$ -ро созед, ки коэффисиенти монандиаш ба 3 баробар аст *(расми 1)*.

Сохтани он. Дар ҳамворӣ нуқтаи дилхоҳи O мегирем. Нурҳои аз он ва қуллаҳои чоркунҷа гузарандаи OA, OB, OC ва OD -ро мегузаронем. Дар ин нурҳо порчаҳои аз нуқтаи O барояндаи $OA_1=3OA$, $OB_1=3OB$, $OC_1=3OC$ ва $OD_1=3OD$ -ро мегузорем. Чоркунҷаи ҳосилшудаи $A_1B_1C_1D_1$ чоркунҷаи ҷустуҷӯ кардашуда аст.

Асоснокkунӣ. $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$ буданашро нишон медиҳем.

1. ***Мутаносибии тарафҳои мувофиқ.***

а) $\Delta AOD \backsim \Delta A_1OD_1 \Rightarrow \boxed{\frac{A_1D_1}{AD}} = \frac{O_1D_1}{OD} = \frac{OA_1}{OA} = 3;$ (1)

б) $\Delta DOC \backsim \Delta D_1OC_1 \Rightarrow \frac{OD_1}{OD} = \boxed{\frac{D_1C_1}{DC}} = \frac{OC_1}{OC} = 3.$ (2)

Аз баробарии (1) ва (2) $\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{D_1C_1}{DC}$ буданашро ҳосил мекунем.

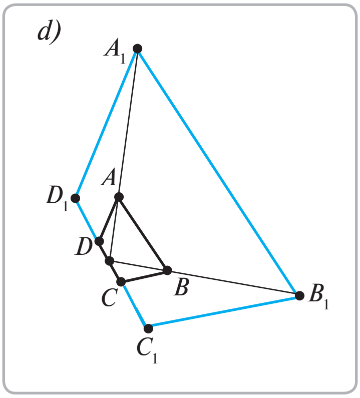
Ба ин монанд мутаносиб будани тарафҳои дигари чоркунҷаи монандро исбот кардан мумкин.

2. ***Баробарии кунҷҳои мувофиқ.***

Аз баробар будани кунҷҳои мувофиқи секунҷаҳои монанд $\angle A_1D_1O=\angle ADO$, $\angle C_1D_1O=\angle CDO$. Дар ин ҷо $\angle A_1D_1C_1=\angle A_1D_1O+\angle C_1D_1O=\angle ADO+\angle CDO=\angle ADC$, яъне кунҷҳои мувофиқи чоркунҷаҳои $A_1D_1C_1$ ва ADC баробаранд. Ба ҳамин монанд баробарии кунҷҳои мувофиқи дигари чоркунаҳои монанд исбот карда мешавад.

Аз ин рӯ, чоркунҷаҳои, $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ монанд будаанд. Бисёркунҷае, ки ба бисёркунҷаи тарафҳояш адади дилхоҳ дошта монанд аст, худи ҳамин тавр сохта мешавад.

Маркази гомотетияро дар ин масъала аз соҳаи берунии чоркунҷа интихоб кардем. Умуман маркази гомотетияро дар соҳаи дохилии чоркунҷа *(расми 2, а)*, дар ягон қуллааш *(расми 2, б)* ё ки дар ягон тарафаш (расми 2, *в)*) гирифтанамон ҳам мумкин буд. Маркази гомотетияро дар куҷое нагирем, коэффисиенти ба 3 баробари чоркунҷа ба чоркунҷаи $ABCD$ монанд аст ва монандӣ дорад, байни ҳам баробар мебошанд.



? *Савол, масъала ва супориш*

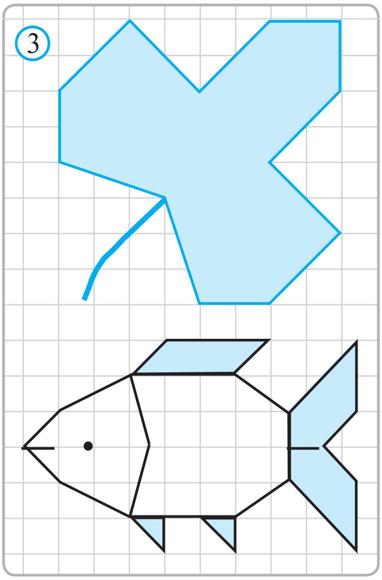
1. Сохтани бисёркунаи монанд ба бисёркунаи додашударо пай дар пай гӯед ва созед.

2. Ба дафтаратон ягон панҷкунҷаи $ABCDE$ кашед. Бо ёрии гомотетия ба ин панҷкунҷа панҷкунҷаи монанди коэффисиенти монандиаш баробари 0,5-ро созед. Маркази гомотетияро дар ҳолатҳои а) дар нуқтаи C будан; б) дар даруни панҷкунҷа будан; в) дар тарафи AB будан алоҳида дида бароед.

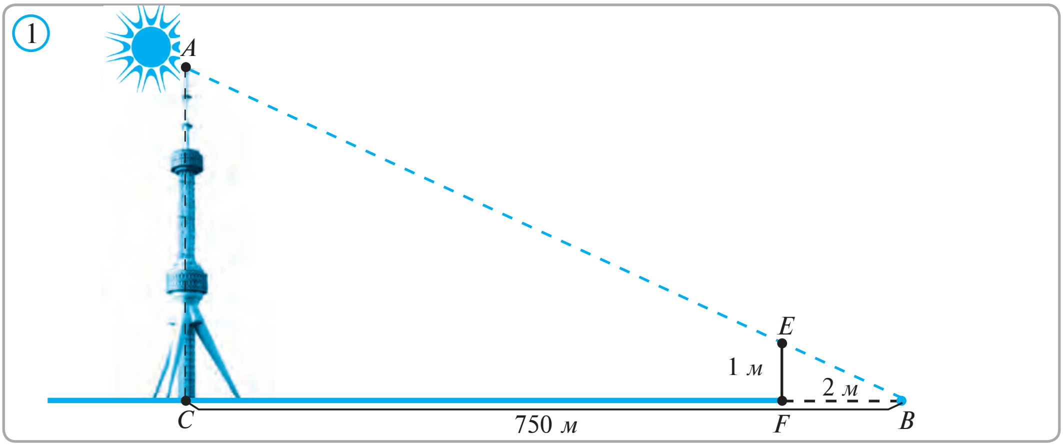
3. Дар ҳолати ба ҳисоб гирифтани катакҳо шаклҳои дар расми 3 додашударо ба дафтаратон кашед: а) барги ба барги додашуда коэффисиенти монандиаш ба 3 баробарии; б) моҳичаи ба моҳичаи додашуда коэффисиенти монандиаш ба 2 баробар бударо кашед.

4. Бисёркунҷаи F_1 ба бисёркунҷаи F_2 монанд, k — коэффисиенти монандӣ. Дар равиши мувофиқ бо ҳарфҳои P_1, P_2, S_1, S_2 периметрҳои бисёркунҷаҳо ва масоҳати онҳо ишора карда шудаанд. Ҷадвали зеринро ба дафтаратон кӯчонед ва онро пур кунед.

	P_1	P_2	S_1	S_2	k
а)	84		100	25	
б)	14	28		48	
в)		150	200	100	
г)		30	24		3



18 МАШҒУЛИЯТИ АМАЛӢ

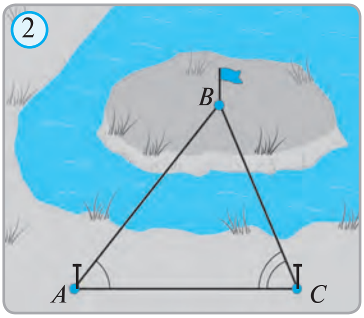


1. Муайян кардани баландӣ.

Дар Замин истода баландии телеманораи Тошкандро меёбем. Сояи қуллаи манора — *нуқтаи A* дар нуктаи *B* бошад. Ҷӯбчаи *EF* -ро ҳамин тавр шоқулӣ (вертикалӣ) ҷойгир мекунем, ки *(расми 1)* сояи қуллаи он *E* ҳам дар нуҷтаи *B* бошад. Бо *C* проексияи нуқтаи *A*-ро ифода мекунем. Дар ин ҳол, секунҷаҳои росткунҷаи *ABC* ва *EBF* монанд мешавад. Аз ин рӯ

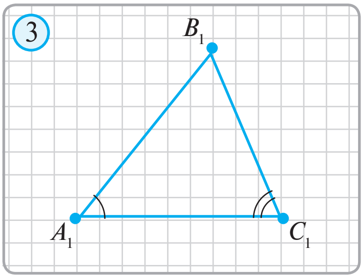
$$\frac{AC}{EF} = \frac{BC}{BF} \quad \text{ё ки} \quad AC = \frac{BC \cdot EF}{BF}.$$

Масофаи *BC*, *BF* ва дарозии *EF* -ро чен намуда, аз формулаи ҳосилшуда баландии телеманора — дарозии порчаи *AC* -ро меёбем. Масалан, $EF = 1$ *м*, $BC = 750$ *м*, $FB = 2$ *м* бошад, дар ин ҳол $AC = 375$ *м*.



2. Чен кардани масофаи дастнорас

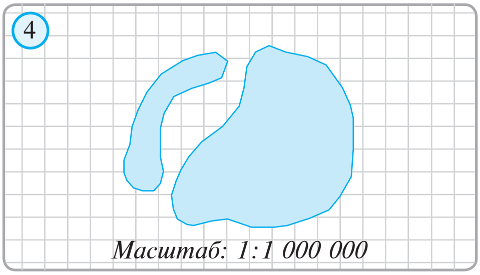
Бигузор чен кардани масофа аз нуқтаи *A* то нуқтаи *B* -и имкони рафтан надошта лозим гардид *(расми 2)*. Аз нуқтаи *A*-и имкони рафтан дошта нуқтаи *C* -ро ишорат мекунем. Дар ин ҳол ҳангоми назар аз нуқтаи *C* бояд нуқтаҳои *A* ва *B* намудор бошанд ва масофаи *AC* -ро чен кардан лозим бошад. Бо ёрии асбобҳо кунҷҳои *BAC* ва *ACB* -ро чен мекунем. Бигузор $\angle BAC = \alpha$ ва $\angle ACB = \beta$ бошад. Дар қоғаз $\angle A_1 = \alpha$, $\angle C_1 = \beta$

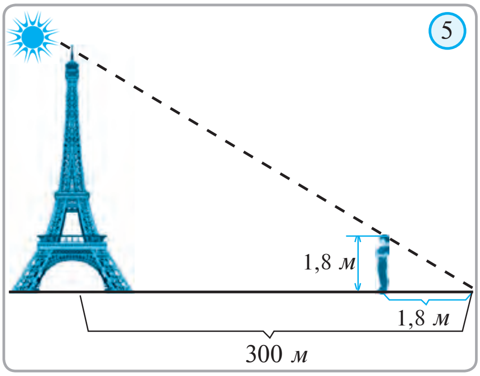


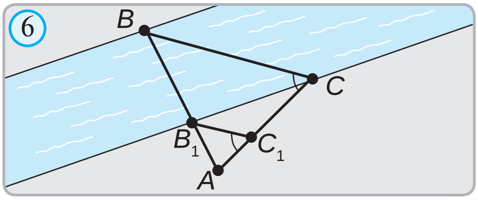
-и секунчаи $A_1B_1C_1$-ро месозем. Дар он секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ секунҷаҳои аз рӯи як тараф ва ду кунҷашон монанд мешаванд (*расмҳои 2 ва 3*).Аз ин,

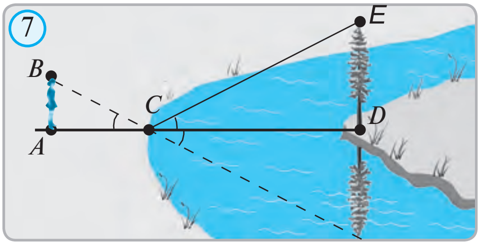
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \quad \text{ё ки} \quad AB=\frac{AC\cdot A_1B_1}{A_1C_1}.$$

Масофаи AC ва порчаҳои A_1B_1, A_1C_1-ро чен намуда, бо ёрии формулаи ҳосилшуда порчаи AB ҳисоб карда мешавад. Барои осон кардани натиҷаи ҳисобкуниҳо нисбати AC:A_1C_1-ро чун 100 : 1, 1000 : 1 гирифтан мумкин. Масалан, $AC=130$ *м*, $\angle A=73^\circ$, $\angle C=58^\circ$ бошад, дар коғаз секунҷаи $A_1B_1C_1$ $\angle A_1=73^\circ$, $\angle C_1=58^\circ$, $A_1C_1=130$ *мм* гирифта кашида мешавад. Порчаи A_1B_1-ро чен намуда, вай ба 153 *мм* баробар буданашро меёбем. Бинобар ин масофаи аниқшаванда 153 *м* мешавад.


4


5


6


7

3. Кори амалӣ оид ба баҳри Арал

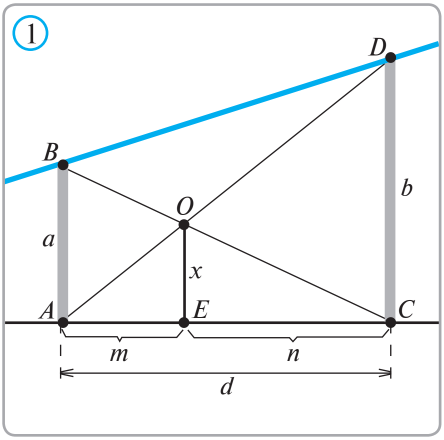
Дар расми 4 сурати аз киштии кайҳонӣ гирифташудаи баҳри Арал тасвир ёфтааст. Ҳисобкунӣ ва ченкуниҳои ба он вобастаро ичро карда, масоҳати тақрибии ҳавзаи оби ҳозираи баҳри Аралро ёбед.

? Савол, масъала ва супориш

1. Агар сояи одами қадаш 1,7 *м* буда,2,5 *м* бошад, баландии дарахти дарозии сояаш 10,2 *м* чӣ қадар мешавад?
2. Баландии монандиҳоеро, ки дар расми 5 тасвир ёфтаанд,муайян кунед.
3. Бо ёрии ду секунҷаи монанди AB_1C_1 ва ABC, ки дар расми 6 тасвир ёфтааст,васеъгии дарёро (барашро) муайян кардан лозим. Агар $AC=100$ *м*,$AC_1=32$ м ва $AB_1=34$ *m* бошад, бари дарё (BB_1)-ро ёбед.
4. Ба одами дар нуқтаи A буда, акси дарахти DE-и лаби соҳили чуйбор намудор аст. Агар $AB=165$ см, $AC=120$ см ва $CD=4{,}8$ м бошад, баландии дарахтро ёбед (*расми 7*).
5. Ягон дарахтро дар ҳавлӣ интихоб намоед ва баландии онро муайян кунед. Ҳисоботро дар хусуси чӣ тавр иҷро кардани ин кор омода созед.

19 ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

Масъалаи 1. Сутунҳои AB ва CD, ки дарозиашон бо равиши мувофиқ a ва b вертикалӣ гузошта шуддааст. Барои боз ҳам қулла(и он бо симҳои пӯлодини дар нуқтаи O буридашаванда охирҳои он A ва D, B ва C пайваст карда шудаанд *(расми 1)*. Дар асоси маълумотҳои расм а) $\frac{m}{m+n}=\frac{x}{b}$ ва $\frac{n}{m+n}=\frac{x}{a}$ -ро исбот кунед; б) дуруст будани баробарии $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$ -ро нишон диҳед ва онро шарҳ диҳед.



Ҳалли он.

а) Дар асоси шарти масъала секунҷаҳои 1. $AOE \backsim ADC$. Бинобар ин

$$\frac{AE}{AC}=\frac{OE}{DC}, \quad \text{яъне} \quad \frac{m}{m+n}=\frac{x}{b}. \qquad (1)$$

2. Боз дар асоси шарти масъала $\Delta EOC \backsim \Delta ABC$. Бинобар ин

$$\frac{EC}{AC}=\frac{OE}{AB}, \quad \text{яъне} \quad \frac{n}{m+n}=\frac{x}{a}. \qquad (2)$$

б) Баробарии (1) ва (2)-ро аъзо баъ зо ҷамъ кунем $\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}=\frac{x}{b}+\frac{x}{a}$ яъне $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$ ҳосил мешавад. Аз ин мебарояд, ки сутунҳо чӣ тавр гузошта нашаванд, нуқтаи O бо симҳои пӯлодини буридашаванда аз сатҳи замин дар як сатҳ баландӣ мешаванд.

Масъалаи 2. Дар тарафҳои паҳлуии AB ва CD-и трапетсияи $ABCD$ нуқтаҳои M ва N гирифта шудаанд. Дар ин порчаи MN ба асосҳои трапетсия мувозӣ буда, аз нуқтаи буриши диагоналҳои он O мегузарад. Агар $BC=a$, $AD=b$ бошад, парчаҳои а) MO; b) ON; c) MN -ро ёбед *(расми 2)*.

Ҳалли он. 1) Дар асоси аломати *КК* секунҷаҳои AOD ва BOC монанд, чунки $\angle BOC=\angle AOD$, $\angle OBC=\angle ADO$. Аз ин, (1)

$$\frac{OC}{OA}=\frac{BC}{AD} \quad \text{ё ки} \quad \frac{OC}{OA}=\frac{a}{b}.$$

2) Дар асоси аломати *КК* секунҷаҳои ABC ва AOM ҳам монанд, чунки $\angle AMO=\angle ABC$, $\angle ACB=\angle AOM$. Аз ин,

$$\frac{AC}{OA}=\frac{BC}{MO} \quad \text{ё ки} \quad \frac{OA+OC}{OA}=\frac{a}{MO} \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{OC}{OA}=\frac{a}{MO}, \quad \frac{OC}{OA}=\frac{a}{MO}-1. \qquad (2)$$

3) Қисмҳои рости баробариҳои (1) ва (2)-ро баробар намуда,

$\frac{a}{MO} - 1 = \frac{a}{b}$ -ро ҳосил мекунем ва аз ин

$$MO = \frac{ab}{a+b} \qquad (3)$$

буданашро меёбем.

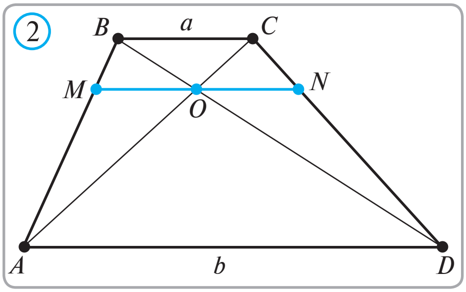
4) Чун гуфтаҳои болоӣ баробарии

$$ON = \frac{ab}{a+b} \qquad (4)$$

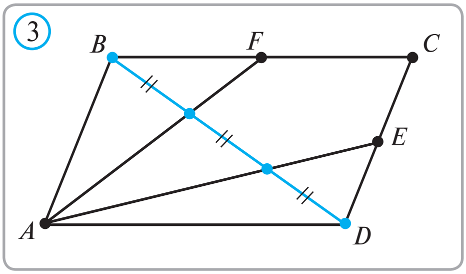
ҳосил намуда, пас аз қисмҳои мувофиқ баробариҳои (3) ва (4)-ро ҷамъ намуда, ҳосил мекунем:

$$MN = \frac{2ab}{a+b}$$

Ҷавоб: а) $\frac{ab}{a+b}$; б) $\frac{ab}{a+b}$; в) $\frac{2ab}{a+b}$.



②



③

Эзоҳ. Аз ҳалли ин масъала $MO = ON$ буданаш бармеояд.

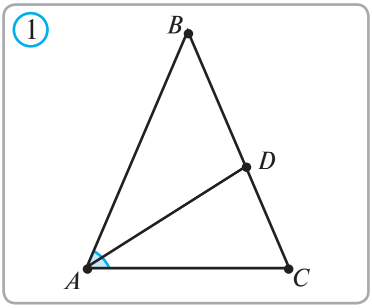
? *Савол, масъала ва супориш*

1. Аз тарафҳои паҳлуи AB ва BC-и секунҷаи ABC нуқтаҳои D ва E гирифта шудаанд. Агар $AC \| DE$, $AC = 6$, $DB = 3$ ва $DE = 2$ бошад, тарафи AB-ро ёбед.
2. Масоҳатҳои ду бисёкунҷаи монанд ба 8 *дм*^{2} ва 72 *дм*^{2} баробар аст, периметри яке аз онҳо аз дигаре 26 *дм* кам аст. Периметри секунҷаи калонро ёбед.
3. Периметри секунҷаи $A_1B_1C_1$, ки 1 *м* аст, миёнаҷои тарафҳои секунҷаи $A_2B_2C_2$, секунҷаи $A_2B_2C_2$ миёнаҷои тарафҳои секунҷаи $A_3B_3C_3$, секунҷаи $A_3B_3C_3$ бошад, миёнаҷои тарафҳои секунҷаи $A_4B_4C_4$ -ро аз пайвасткунӣ ҳосил карда бошад, периметри секунҷаи $A_4B_4C_4$ ба чӣ баробар мешавад?
4. Периметрҳои ду секунҷаи монанд 18 *дм* ва 36 *дм*, ҳосили ҷамъи масоҳатҳояшон ба 30 *дм*^{2} баробар аст. Масоҳати секунҷаи калонро ёбед.
5. Миёнаҷои тарафҳои ромб қуллаҳои росткунҷа буданашро исбот кунед.
6. Секунҷаи ABC созед. Секунҷаи $A_1B_1C_1$ -и ба ин секунҷаи ABC монанд ва масоҳаташ аз масоҳати он 9 маротиба хурдро созед.

7*. Нуқтаҳои E ва F бо равиши мувофиқ миёнаҳои тарафҳои CD ва BC-и параллелограмми $ABCD$. Исбот кунед, ки хатҳои рости AF ва AE диагонали BD-ро ба се қисми баробар тақсим мекунад *(расми 3).*

20 ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

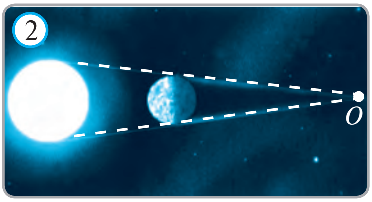
1. Биссектрисаи кунҷи назди асоси секунҷаи баробарпаҳлу аз ин секунҷа секунҷаи ба худаш монанд ҷудо мекунад. Кунҷҳои секунҷаро муайян кунед (*расми 1*, $AB=BC$, $\Delta ABC \backsim \Delta CAD$).


①

2. Давра созед ва дар он нуқтаи O -ро гиред. Дар гомотетияи марказаш дар нуқтаи O ва коэффисиенташ баробари 2 давраи ба давраи додашуда гомотетӣ созед.

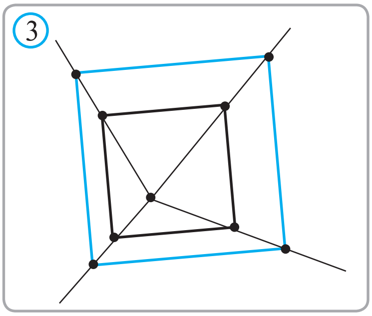
3. Нисбати периметрҳои ду бисёркунҷаи монанд 2:3 аст. Масоҳати бисёркунҷаи калон 27 бошад, масоҳати бисёркунҷаи хурдро ёбед.

4. Дар расми 2 ҳолати пурра гирифтани Офтоб тасвир ёфтааст. Агар радиуси Офтоб 686784 км, радиуси Моҳ 1760 км ва масофа аз Замин то Моҳ 384400 км бошад, масофаи байни Замину Офтобро ёбед.


②

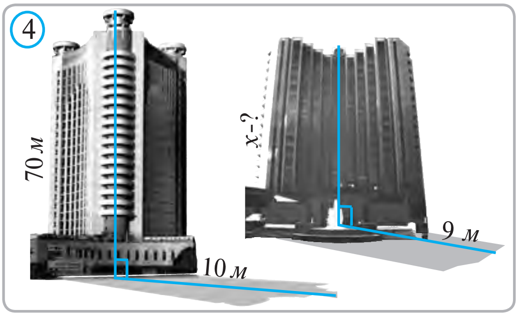
5. а) Ба як давра ду бисёркунҷаи монанд дарун кашида шудааст. Оё ин бисёркунҷаҳо баробаранд? б) Ба як давра ду бисёркунҷаи монанд берун кашида шудааст. Оё ин бисёркунҷаҳо баробаранд?

6*. Тарафҳои як квадрат ба тарафҳои квадрати дигар параллел. Агар квадратҳо ба якдигар баробар набошанд, гомотетӣ будани онҳоро исбот кунед *(расми 3)*.


③

7. Тарафҳои AB ва BC-и секунҷаи ABC ба чор порчаи баробар тақсим карда шуд ва нуқтаҳои тақсимшавӣ бо порчаҳои ба тарафи AB параллел пайваст карда шуд *(расми 4)*. Агар AC=24 *см* бошад, дарозии порчаҳои ҳосилшударо ёбед.

8. Агар расмҳо айнан дар як вақт ба навор бардошта шуда бошанд, дар асоси маълумотҳои додашуда баландии бинои дуюмро муайян кунед *(расми 5)*.


④

21 МАЪЛУМОТ ВА МАСЪАЛАҲОИ ИЛОВАГӢ ДОИР БА БОБИ I

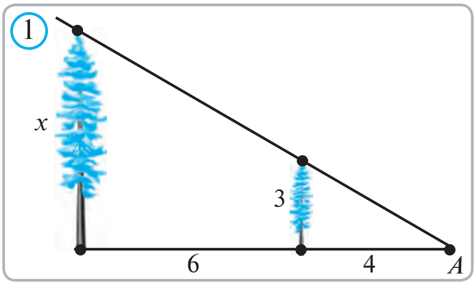
I. Тестҳо

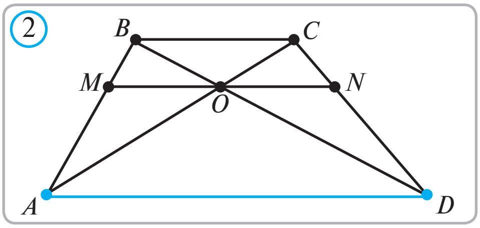
1. **Ба ду секунаи монанд тасдиқи нодурустро ёбед:**
   А. Нисбати масоҳатҳо ба коэффисиенти монандӣ баробар аст;
   Б. Нисбати медианаи мувофиқ ба коэффисиенти монандӣ баробар аст;
   В. Нисбати баландиҳои мувофиқ ба коэффисиенти монандӣ баробар аст;
   Г. Нисбати баландиҳои мувофиқ ба коэффисиенти манандӣ баробар аст.
2. **Тасдиқи дурустро ба ду бисёркунҷаи гомотетӣ ёбед:**
   А. Онҳо баробаранд; Б. Онҳо монанданд;
   В. Онҳо баробарандозанд; Г. Ҷавоби дуруст нест.
3. **Оиди медианаҳои секунҷа тасдиқи нодурустро нишон диҳед:**
   А. Дар як нуқта бурида мешаванд;
   Б. Дар нуқтаи буриш дар нисбати 2 : 1 тақсим мешавад;
   В. Ба якдигар баробаранд;
   Г. Ҳар як секунҷаро ба ду секунҷаи баробарандоза ҷудо мекунанд.
4. **Оиди биссектрисаҳои секунҷа тасдиқи нодурустро нишон диҳед:**
   А. Дар як нуқта бурида мешаванд;
   Б. Дар нуқтаи буриш дар нисбати 2:1 тақсим мешаванд;
   В. Тарафи худаш гузаронидашударо ба ду тарафи боқимонда дар ҳолати мутаносибӣ ҷудо мекунад;
   Г. Кунҷи худаш баромадаро ба ду қисми баробар тақсим мекунад.

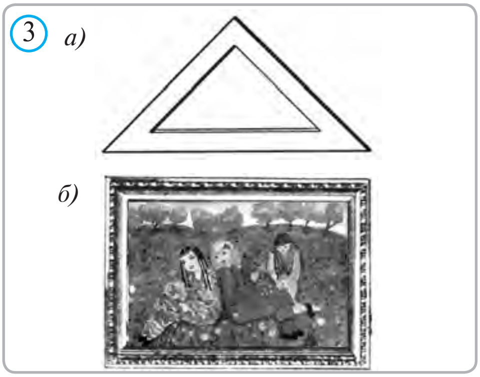
II. Масъалаҳо

1. Аз нуқтаи буриши диагоналҳои трапетсияи асосҳояш 6 *м* ва 12 *м* хати рости ба асосҳо параллел параллел гузаронида шудааст. Дарозии қисми дар дохили трапетсия будаи хати ростро ёбед.
2. Дар секунҷаи ABC $BC=BA=10$, $AC=8$. Агар AA_1 ва CC_1 биссектрисаҳои секунҷа бошад, порчаи A_1C_1 ро ёбед.
3. Барои аз нуқтаи A то нуқтаи дастнораси B масофаро муайян кардан дар ҳамворӣ нуқтаи C-ро гирифтанд.Пас масофаи AC,кунҷҳои BAC ва ACB-ро чен карданд ва бо секунҷаи ABC секунҷаи монанди $A_1B_1C_1$ -ро сохтанд. Агар $AC=42$ *м*, $A_1C_1=6{,}3$ *см*, $A_1B_1=7{,}2$ *см* бошад, масофаи AB-ро ёбед.
4. Дар гомотетияи коэффисиенташ $k=3$ бисёркунҷаи F ба бисёркунаи F_1 табдил меёбад. Агар периметри бисёркунҷаи F_1 12 *см* ва масоҳаташ 4,5 *см*^{2} бошад, периметр ва масоҳати бисёркунаи F -ро ёбед.
5. Ҳангоми дарозии сояи одами қадаш 180 *м* дар вақти 2,4 *м* будан дарозии сояи симчӯби баландиаш 4 *м* чанд метрӣ мешавад?

6. Дар харита тасвири масофаи байни шаҳрҳои Тошканд ва Урганҷ 8,67 *см* аст. Агар масштаби харита 1:100000 бошад, масофаи байни шаҳрҳои Тошканд ва Урганҷро ёбед.







III. Худатонро озмуда бинед (кори назоратии намунавӣ)

1. Дар асоси маълумотҳое, ки дар расми 1 оварда шудаанд, баландии дарахтро муайян созед.

2. Тарафҳои секунҷаи ABC $AB=5$ *см*, $AC=6$ *см*, $BC=7$ *см*, Хати рости ба тарафи AC -и ин секунҷа гузаронидашуда тарафи AB -ро дар нуқтаи P, тарафи BC-ро дар нуқтаи K мебурад. Агар $PK=2$ *см* бошад, периметри секунҷаи PBK-ро ёбед.

3. Дар расми 2 $AD||BC||MN$. Агар $BC = 6$ *см*, $AD = 10$ *см* бошад, порчаи, MN - ро ёбед.

4. Исбот кунед, ки миёнаҷои тарафҳои ромб қуллаҳои росткунҷа мебошад.

Масъалаҳои шавқовар.

1. Ҳангоми назар андохтан бо лупае, ки 4 маротиба калон карда нишон медиҳад, бузургии кунҷи 2° чӣ қадар тағйир меёбад?

2. а) Оё секунҷаҳои дарунӣ ва берунии дар расми хаткашаки секуна тасвирёфта монанданд *(расми 3, а)*? б) Оё теғаҳои дарунӣ ва берунии росткунҷаи роми дар расми 3,*б* тасвирёфта монанд аст?

3. Масъалаи зерини бо забони русӣ таълифёфтаро дида бароед. Бо ҳамин роҳ қобилиятатонро оид ба чӣ тавр донистани ҳам забони русӣ ва ҳам геометрия дониста мегиред.

На 4-рисунке ижображена русская игрушка “матрёшка”. Выполнив соответствующие измерения, найти коэффициент подобия игрушек:
a) A и B; b) A и D; d) C и F; e) B и E.

БОБИ II

МУНОСИБАТҲОИ БАЙНИ ТАРАФҲО ВА КУНҶҲОИ СЕКУНҶАҲО

Дар натиҷаи омӯзиши ин боб Шумо ба дониш, малакаи амалии зерин соҳиб мегардед:

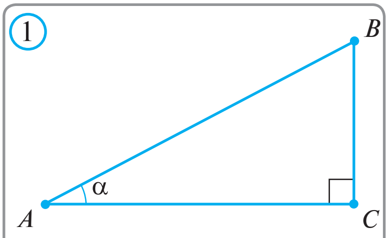
Донишҳо:

- √ *донистани таърифҳои синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи дилхоҳ;*
- √ *донистани ченаки радиании кунҷ;*
- √ *донистани айниятҳои асосии тригонометрӣ;*
- √ *донистани формулаи ҳисобкунии масоҳати секунҷа бо ёрии синуси кунҷ;*
- √ *донистани теоремаи синусҳо ва косинусҳо.*

Малакаи амалӣ:

- √ *ҳисоб карда тавонистани синус, косинус, тангенс ва котангенси баъзе кунҷҳо;*
- √ *татбиқ карда тавонистани айниятҳои асосии тригонометрӣ бо роҳи ҳал кардани мисолҳо;*
- √ *ҳисоб карда тавонистани масоҳати секунҷа дар асоси ду тараф ва кунҷи байни онҳо;*
- √ *аз теоремаҳои синусҳо, косинусҳо истифода бурда, ҳал карда тавонистани масъалаҳо оиди ҳисобкунӣ ва исботкунӣ.*

22 ТАЪРИФИ СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСИ КУНҶИ ТЕЗ



$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$; $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$;

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}$.

Дар секунҷаи росткунҷаи ABC кунҷи $\angle C=90^\circ$ бошад,ба тарафи AB— гипотенуза, тарафи BC ба катети муқобили кунҷи A, тарафи AC бошад, катети ба кунҷи A часпида гуфта мешавад *(расми 1)*.

Синуси кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта нисбати катети муқобили ин кунҷ ба гипотенузаро меноманд.

Косинуси кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта нисбати катети ба ин кунҷ часпида бар гипотенузаро меноманд.

Тангенси кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта нисбати катети муқобили ин кунҷ бар катети ба ин кунҷ часпидаро меноманд.

Котангенси кунҷи тези секунҷаи росткунҷа гуфта нисбати катети ба ин кунҷ часпида бар катети муқобили ин кунҷро меноманд.

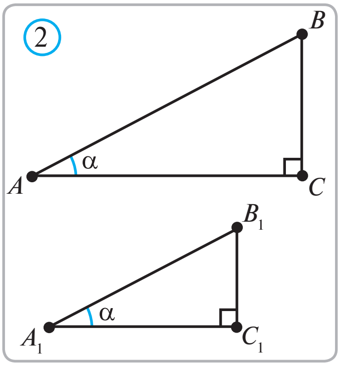
Синус,косинус,тангенс ва котангенси кунҷи α дар равиши мувофиқ дар шакли **sin**α, **cos**α, **tg**α ва **ctg**α ишорат карда мешавад (хондани он: ***«синус алфа», «косинус алфа», «тангенс алфа», «котангенс алфа»***).

Аз таърифи болоӣ формулаи зерин бармеояд:

1. $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{BC}{\cancel{AB}}\cdot\frac{\cancel{AB}}{AC}=\frac{BC}{AC}$; $\mathrm{tg}A=\frac{BC}{AC}$. $\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A}}$.

2. $\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{AC}{\cancel{AB}}\cdot\frac{\cancel{AB}}{BC}=\frac{AC}{BC}$; $\mathrm{ctg}A=\frac{AC}{BC}$. $\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{ctg}A=\frac{\cos A}{\sin A}}$.

3. $\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{ctg}A=\frac{\cancel{BC}}{\cancel{AC}}\cdot\frac{\cancel{AC}}{\cancel{BC}}=1 \Rightarrow \boxed{\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{ctg}A\ =1.}$



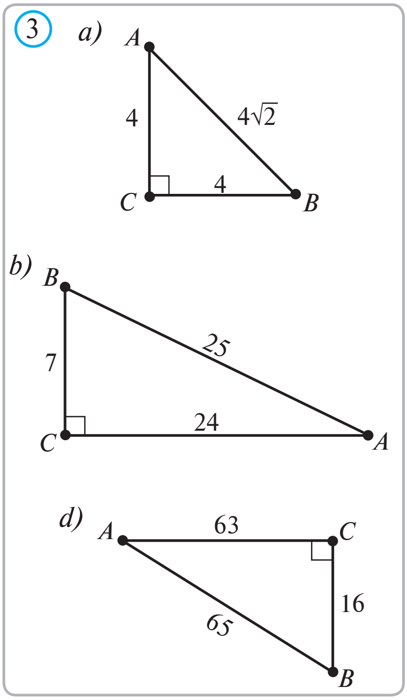
***Теорема*.** **Кунҷи тези як секунҷаи росткунҷа ба кунҷи тези секунҷаи росткунҷаи дуюм баробар бошад, синусҳои ин кунҷҳои тез (косинус, тангенс ва котангенсҳояшон ҳам) баробар мешаванд.**

Исбот. Дар ин ҳол секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ аз рӯи ду кунҷашон монанд мешаванд. Он гоҳ ($\angle C=\angle C_1=90^\circ$) $\angle A=\angle A_1$ мешавад *(расми 2)*. Дар ин ҳолат секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ мувофиқи аломати KK монанд мешаванд. Аз ҳамин сабаб $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$. Аз ин баробариҳо $\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}$ ё худ

$\sin A = \sin A_1$ буданашро меёбем.

Косинус, тангенс ва котангенси ин кунҷҳои тез ҳам ба монанди мас болоӣ исбот мегардад. ***Теорема исбот шуд.***

Масъала. Дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$ *см*, $BC = 15$ *см* бошад, синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи B-и онро ёбед.



Ҳалли он. Аз теоремаи Пифагор истифода бурда, гипотенузаи секунҷаро меёбем:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 8^2 + 15^2 = 289$, $AB = 17$ (*см*).

Катети муқобили кунҷи B AC, катети ба кунҷи B часпида бошад, BC (*расми 3*). Бинобар ин, дар асоси таъриф,

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{17}; \qquad \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{15}{17};$$

$$\mathrm{tg}B = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{15}; \qquad \mathrm{ctg}B = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{8}.$$

Ё ки

$$\mathrm{tg}B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{8}{17} \cdot \frac{17}{15} = \frac{8}{15};$$

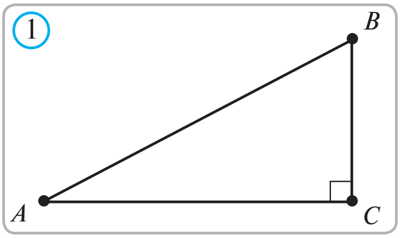
$$\mathrm{ctg}B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{15}{17} \cdot \frac{17}{8} = \frac{15}{8}.$$

Ҷавоб: $\frac{8}{17}$; $\frac{15}{17}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{15}{8}$.

Савол, масъала ва супориш

1. Синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи тез гуфта чиро мегӯянд?
2. Синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи тез ба чӣ вобаста аст ва ба чӣ вобаста нест?
3. Дар асоси маълумотҳои расми 4 $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$ -ро ёбед.
4. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи ABC AB ба 13 *см*, катети AC бошад, ба 12 *см* баробар аст. Синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи A-и секунҷаро ёбед.
5. Агар дар секунҷаи росткунҷа кунҷи рости ABC ($\angle C = 90^\circ$) а) $AB = 25$, $BC = 7$; б) $AC = 5$, $BC = 12$; в) $AB = 41$, $AC = 40$; г) $AC = 24$, $AB = 25$ бошад, синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷҳои A ва B-ро ёбед.
6. Агар дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$, $\cos A = \frac{60}{61}$ ва $AC = 3$ *см* бошад, тарафҳои боқимондаи секунҷаро ёбед.
7. Агар дар секунҷаи ABC $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{8}{17}$ ва $BC = 16$ *см* бошад, тарафҳои боқимондаи секунҷаро ёбед.

23 ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО



Дуруст будани боз як баробарии муҳимро нишон медиҳем, ки барои ҳалли масъалаҳо заруранд, Дар секунҷаи росткунҷаи ABC (расми 1) мувофиқи теоремаи Пифагор $AB^2=BC^2+AC^2$. Дар ин ҳолат

$$\sin^2A+\cos^2A=\frac{BC^2}{AB^2}+\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{BC^2+AC^2}{AB^2}=\frac{AB^2}{AB^2}=1.$$

$$\sin^2A+\cos^2A=1$$

айнияти асосии тригонометрӣ, ин баробарӣ номида мешавад (калимаи “тригонометрия” юнонӣ буда, маънои “секунҷаҳоро чен мекунам”-ро дорад).

Масъалаи 1. Агар $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ бошад, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ -ро ёбед.

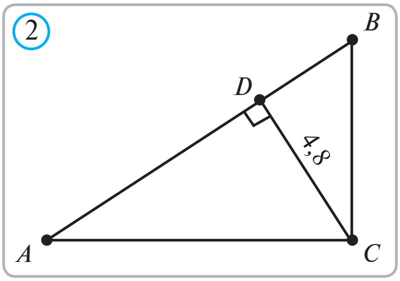
Ҳалли он. Мувофиқи айнияти асосии тригонометрӣ:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\quad\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Дар ин ҳол

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{1}=\sqrt{3},\qquad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

Масъалаи 2. Дар секунҷаи ABC $\angle C=90^\circ$ ва $\sin A=0{,}6$. Агар баландии CD-и секунҷа 4,8 *см* бошад, катети AC ва проексияи он дар гипотенузаро ёбед.

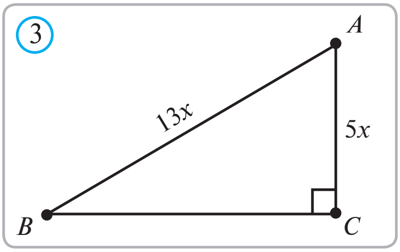


Ҳалли он. Секунҷаи росткунҷаи ADC-ро дида мебароем *(расми 1)*.Он гоҳ дар асоси таърифи синус,

$$\sin A=\frac{DC}{AC}.\quad \text{Аз ин}\quad AC=\frac{DC}{\sin A}=\frac{4{,}8}{0{,}6}=8\ (\textit{см}).$$

Аз теоремаи Пифагор истифода бурда, проексияи катети AC дар гипотенузаи AD-ро меёбем:$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{8^2-4{,}8^2}=6{,}4$ (*см*).

Ҷавоб: 8 *см*; 6,4 *см*.



Масъалаи 3. Агар дар секунҷаи ABC $\angle C=90^\circ$ ва $\cos A=\frac{5}{13}$ бошад,тарафҳои секунҷа дар чӣ гуна нисбат мешаванд (*расми 3*).

Ҳалли он. Дар асоси таърифи косинуси кунҷ $\cos A=\frac{AC}{AB}$. Бинобар ин, $\frac{AC}{AB}=\frac{5}{13}$.

Агар $AC=5x$ гӯем, он гоҳ

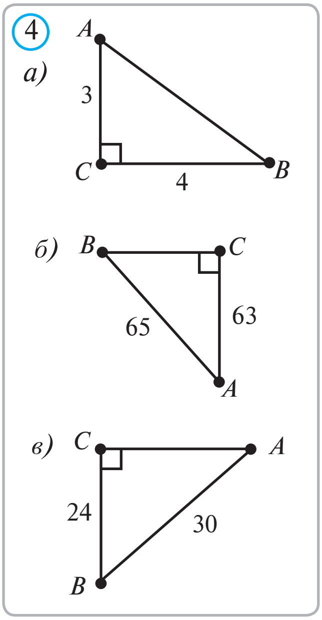
$$AB=\frac{13\cdot AC}{5}=13x.$$

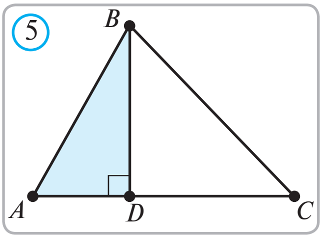
Дар асоси теоремаи Пифагор

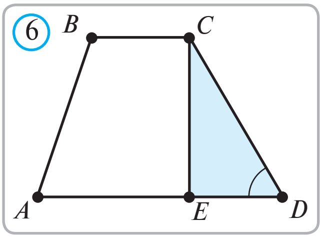
$$BC=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{169x^2-25x^2}=12x.$$

Ҳамин тавр, $AC:BC:AB=5:12:13$.

Ҷавоб: дар 5:12:13 нисбатанд.







? *Савол, масъала ва супориш*

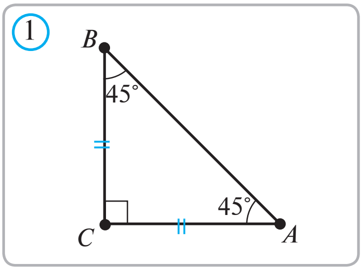
1. Дар асоси маълумотҳои расми 4 инҳоро: а) $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$; b) $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{ctg} B$ ёбед.
2. Агар $\sin\alpha=0,5$ бошад, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ -ро ёбед.
3. Агар $\cos\alpha=0,6$ бошад, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ -ро ёбед.
4. Агар дар секунҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C=90°$) $BC=17$ *см* ва $\sin B=\frac{15}{17}$ бошад: а) баландии секунҷаи CD; б) проексияи катет BC дар гипотенуза; в)гипотенуза; г) катети дуюмро ёбед.
5. Агар дар секунҷаи ABC $\angle C=90°$, $\sin A=\frac{3}{8}$ ва $BC=15$ *см* бошад, баландии ба гипотенуза гузаронидашудаи секунҷаро ёбед.
6*. Агар а) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$; б) $\cos\alpha=\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; е) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{5}$ бошад,кунҷи α-ро созед.
7. Дар секунҷаи ABC $AC=12$ *см*, $AB=10$ *см*, $\sin A=$ $=0,7$ бошад, масоҳати секунҷаро ёбед *(расми 5)*.
8. Дар секунҷаи ABC BD — баландӣ, $AC=7$ *см*, $AD=2$ *см* ва $tgA=3$ бошад, масоҳати секунҷаро ёбед *(расми 5)*.
9. Дар трапетсияи $ABCD$ ($BC\|AD$) $\sin D=0,5$; $CD=8$, $BC=6$, $AD=10$ бошад, масоҳати трапетсияро ёбед *(расми 6)*.
10. Дар ромби $ABCD$ $\sin A=0,8$ ва $AB=15$ *см* бошад, масоҳати ромбро ёбед *(расми 7)*.
11*. Баландии ба асос фаровардашудаи секунҷаи баробарпаҳлу 5 *см*, асосаш $10\sqrt{3}$ *см* бошад: а) кунҷҳои; б) тарафи паҳлуии; в) масоҳати секунҷаҳоро ёбед.
12. Дар секунҷаи расткунҷаи ABC $\sin A=\frac{3}{7}$ ва $\sin B=\frac{4}{7}$ шуданаш оё мумкин аст?

24 ҲИСОБКУНИИ СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСИ БАЪЗЕ КУНҶҲО

1. Ҳисоб кардани синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷи 45 градус.

Секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлуи ABC ($\angle C=90^\circ$)-ро дида мебароем *(расми 1)*. Дар ин секунҷа $AC=BC$, $\angle A=\angle B=45^\circ$ бошад дар асоси теоремаи Пифагор

$$AB^2=AC^2+BC^2=2AC^2 \text{ ё ки } AB=AC\sqrt{2}.$$



Аз ин $AC=BC=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}$ ҳосил мешавад.

Ҳамин тавр,

$$\sin 45^\circ=\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos 45^\circ=\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}45^\circ=\operatorname{tg}A=\frac{BC}{AC}=1;\qquad \operatorname{ctg}45^\circ=\operatorname{ctg}A=\frac{AC}{BC}=1.$$

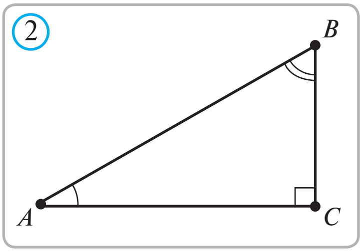
Масъалаи 1. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C=90^\circ$) $\angle A=45^\circ$ ва $BC=6$ *см*. Тарафҳои боқимондаи секунҷаро ёбед (*расми 1*).

Ҳалли он. $\dfrac{AC}{BC}=\operatorname{ctg}45^\circ$ ё ки $\dfrac{AC}{BC}=1$, $AC=BC=6$ (*см*);

$\dfrac{BC}{AB}=\sin 45^\circ$ ё ки $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $AB=BC\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ (*см*).

Ҷавоб: 6 *см*; $6\sqrt{2}$ *см*.

2. Ҳисоб кардани синус, косинус, тангенс ва котангенси кунҷҳои 30° ва 60°



Секунҷаи кунҷҳояш $\angle A=30^\circ$, $\angle B=60^\circ$ ва $\angle C=90^\circ$ будаи ABC-ро дида мебароем *(расми 2)*. Аз сабаби катети муқобили кунҷи 30 градус ба нисфи гипотенуза баробар буданаш $BC=\dfrac{1}{2}AB$ ё ки $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{2}$. Аз ин

$$\sin 30^\circ=\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2};\qquad \cos 60^\circ=\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$$

-ро меёбем. Аз айнияти асосии тригонометрӣ истифода мебарем:

$$\cos 30^\circ=\sqrt{1-\sin^2 30^\circ}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin 60^\circ=\sqrt{1-\cos^2 60^\circ}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Дар асоси қиматҳои ёфташуда $\operatorname{tg}30^\circ=\dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg}60^\circ=\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}=\sqrt{3}$;

$$\text{ctg}30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{3}; \qquad \text{ctg}60^\circ = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. Қиматҳои sinα, cosα, tgα ва ctgα ро, ки барои кунҷҳои 30°, 45°, 60° ҳосил кардем, ба ҷадвал менависем.

α	30°	45°	60°
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctgα	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

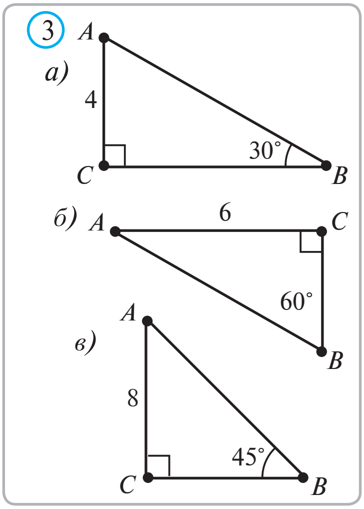
Масъалаи 2. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 10 *см* ва яке аз кунҷҳояш 60° аст. Тарафҳои боқимондаи онро ёбед.

Ҳалли он. Аз расми 2 истифода мебарем. Дар он

$$BC = AB\sin A = 10\cdot\sin 30^\circ = 10\cdot\frac{1}{2} = 5\ (см),$$

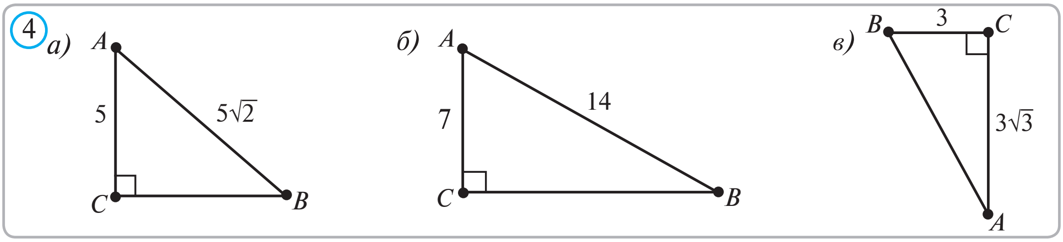
$$AC = AB\cos A = 10\cdot\cos 30^\circ = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ (см).$$

Ҷавоб: 5 *см*; $5\sqrt{3}$ *см*



Савол, масъала ва супориш

1. Агар кунҷи α ба 30°,45°, 60° баробар бошад, sinα, cosα, tgα ва ctgα ба чӣ баробар аст. Ҷавоб асоснок кунед.
2. Периметри секунҷаҳои дар расми 3 бударо ёбед.
3. Кунҷҳои секунҷаҳои дар расми 4 бударо ёбед.
4. Дар қиматҳои 30°, 45°, 60° -и барои sinα, cosα, tgα ва ctgα ҷадвали қиматҳоро аз ёд намоед.
5. Як кунҷи тези секунҷаи росткунҷа ба 30° баробар аст, катети ба он часпида 6 *дм*. Тарафҳои боқимондаи онро ёбед.
6. Асоси секунҷаи баробарпаҳлу ба 10 см, яке аз кунҷҳояш ба 120° баробар аст. Масоҳати онро ёбед.
7. Дар секунҷаи ABC $\angle C=90^\circ$, $AB=25$ *см*, $\sin A=\frac{7}{25}$.Тарафҳои боқимондаи секунҷа ва $\cos A$,$\text{tg}A$ ва $\text{ctg}A$-ро ёбед.
8. Кунҷҳои ромби диагоналҳояш $5\sqrt{3}$ *см* ва 5 *см*-ро ёбед.



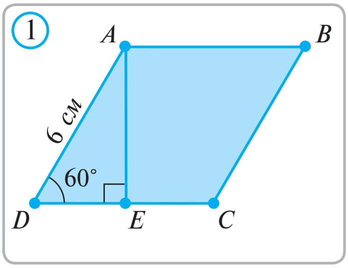
25 ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

Машқи фаъолкунанда

Хонаҳои ҳолии чадвалро пур кунед.

α	sinα	cosα	tgα	ctgα
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$			
			$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		

Масъалаи 1. Агар дар ромби $ABCD$ $\angle A=120^\circ$ ва $AB=6$ *см* бошад, баландӣ ва масоҳати ромбро ёбед (*расми 1*).


①

Ҳалли он. 1) Ҳосили чамъи кунчҳои ба як тарафи ромб часпида ба 180° баробар аст. Аз ин $\angle D=180^\circ-\angle A=60^\circ$. Баландии AE-и ромбро мегузаронем *(расми 1),* секунчаи росткунчаи AED -ро ҳосил мекунем. Дар он,

$$\frac{AE}{AD} = \sin D = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ё ки } AE = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot AD = 3\sqrt{3}\ (см).$$

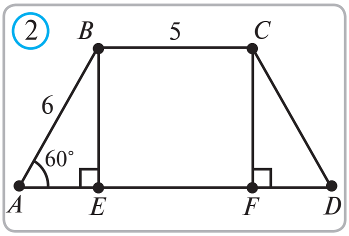
2) Акнун масоҳати ромбро меёбем:

$$S_{ABCD}=DC\cdot AE=6\cdot 3\sqrt{3}=18\sqrt{3}\ (см^2).$$

Чавоб: $h=3\sqrt{3}$ *см*; $S_{ABCD}=18\sqrt{3}$ *см*^{2}.

Масъалаи 2. Асоси хурди трапетсияи баробарпаҳлӯи $ABCD$, BC баробари 5 *см* аст. Агар $\angle A=60^\circ$, $AB=6$ *см* бошад, масоҳати трапетсияро ёбед.

Ҳалли он. Баландиҳои трапетсия BE ва CF-ро мегузаронем *(расми 2).* Он гоҳ аз секунчаи росткунчаи ABE


②

$$AE = AB\cos 60^\circ = 6\cdot\frac{1}{2} = 3\ (см),$$

$$BE = AB\sin 60^\circ = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ (см).$$

Бидуни ин $AE=FD$, $EF=BC$ буданаш,

$$AD = AE + EF + FD = 3 + 5 + 3 = 11\ (см).$$

Дар асоси формулаи ёфтани масоҳати трапетсия

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{5+11}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\ (см^2).$$

Ҷавоб: $24\sqrt{3}\ см^2$.

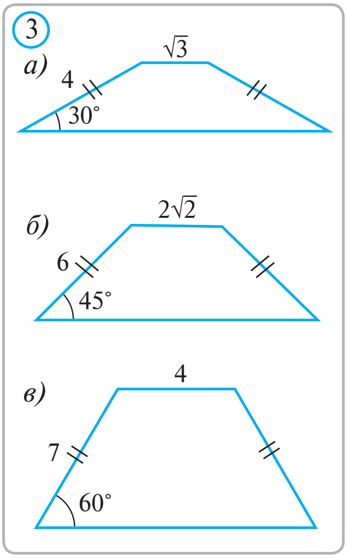
? *Савол, масъала ва супориш*

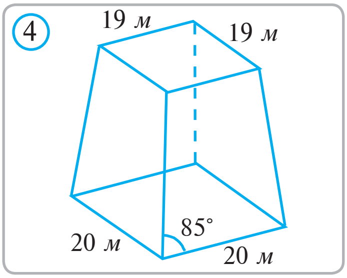
1. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлу 12 *см*. Масоҳати онро ёбед.
2. Периметри секунҷаи баробартарафи баландиаш $4\sqrt{3}$ *см* -ро ёбед.
3. Мувофиқи нишондодҳои расми 3 масоҳати трапетсияҳои баробарпаҳлуро ёбед.
4. Кунҷи тези трапетсияи росткунҷа 30°, баландиаш 4 *см* ва асоси хурдаш 6 *см* аст. Периметри трапетсия ва масоҳатро ёбед.
5. Хордаи давра камони 120 градусро дарҳам мекашад. Агар радиуси давра 10 *см* бошад, дарозии хордаро ёбед.

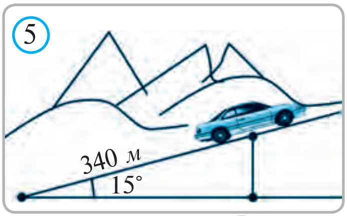
6*. Кунҷи назди қуллаи секунҷаи баробарпаҳлу а)120°; б) 90°; в) 60°. аст. Нисбати баландии секунҷаҳоро ба асос ҳисоб кунед.

7*. Рӯяҳои паҳлуии хирмани пахтаи дар расми 4 тасвирёфта трапетсияи баробарпаҳлу, рӯяи болоӣ бошад, дар шакли квадрат аст. Аз нишондодҳои расм истифода бурда, муайян кунед, ки барои пурра пӯшидани хирман чӣ қадар газвор лозим аст.

8. Мошинаи сабукрав дар қисми болоравии ағба 340 *м* роҳ тай намуд. Агар кунҷи бардошташавӣ нисбат ба уфуқ 15° бошад, мошинаи сабукрав чанд метр баланд рафтааст (*расми 5*).







Бо ёрии калкуляторҳои махсус ёфтани қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ.

Дар калкуляторҳои махсуси тугмачаҳои $\boxed{\text{sin}}$ ва $\boxed{\text{cos}}$ дошта чиматҳои функсияҳои тригонометрӣ чунин ҳисоб карда мешавад.

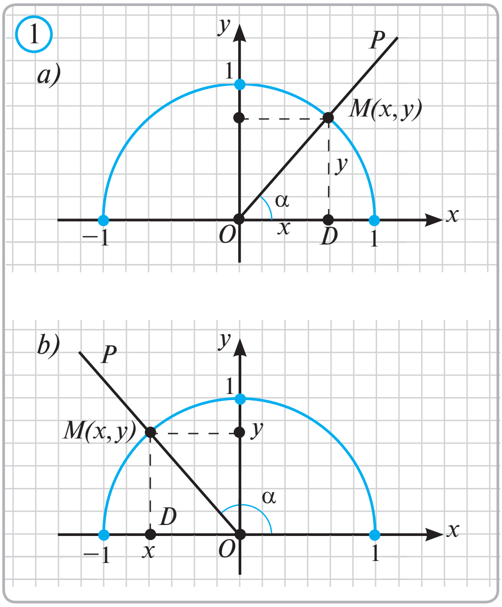
Кунч бо градусҳо дода шуда бошад: *Масалан,* sin30°:

1.Калкуляторро ба кор андохта тугмачаи $\boxed{\text{DEG}}$ (градус) пахш карда мешавад.

2.Пас аз ин тугмачаҳои $\boxed{\text{C}}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{\text{sin}}$ дар ҳамин тартиб пахш карда, чавоби даркории 0,5 гирифта мешавад sin30° = 0,5.

Агар калкулятори махсус набошад, аз чадвали қиматҳои функсияҳои тригонометрии дар иловаи охири китоб овардашуда истифода бурдан мумкин аст.

26 СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСЕ, КИ КУНҶҲОЯШОН АЗ 0° ТО 180° МЕБОШАНД



Системаи координатаҳои росткунҷаи *Oxy* ва нимдавраи марказаш дар ибтидои координатаҳо будаи радиусаш ба як порчаи воҳиди баробарӣ дар чорякҳои I ва II ҷойгиршуда месозем (*расми 1*). Нури *OP*-и давраро дар нуқтаи *M* (*x,y*) буранда мегузаронем. Кунҷи ин нур бо нури *Ox* ҳосил кардаро бо α ишорат мекунем. Кунҷи ин нурро, ки бо тири абсиссаи *Ox* ҳосил шудааст, ба сифати кунҷи ба 0° баробар қабул мекунем. Чунки нури *OP* ва *Ox* болои ҳам мехобанд.

Агар α кунҷи тез бошад (*расми 1-а*), аз секунҷаи росткунҷаи *ODM* баробариҳои

$$\sin\alpha=\frac{DM}{MO}; \qquad \cos\alpha=\frac{OD}{MO};$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{DM}{OD}; \qquad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{OD}{DM}.$$

меёбем. Агар $MO=1$, $DM=y$, $OD=x$ буданашро ба ҳисоб гирем, баробариҳои $\sin\alpha=y$, $\cos\alpha=x$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$ соҳиб (1) мешавем. Дар ҳолати умумӣ синус, косинус, тангенс ва котангенси ҳамаи қиматҳои куни α -ро аз 0° то180° ҳам бо формулаи (1) муайян мекунем:

Синуси кунҷи дилхоҳи α ($0^\circ\le\alpha\le180^\circ$) гуфта ординатаи нуқтаи *M y*-ро, **косинусаш** гуфта абсиссаи нуқтаи *M x*-ро меноманд. **Тангенси** кунҷи дилхоҳи α ($0^\circ\le\alpha\le180^\circ$, $\alpha\ne90^\circ$) гуфта нисбати ординатаи нуқтаи *M* бар нисбати абсиссаашро меноманд. **Котангенси** кунҷи дилхоҳи α ($0^\circ\le\alpha\le180^\circ$) гуфта нисбати абсиссаи нуқтаи *M* бар ординатаашро мегӯянд.

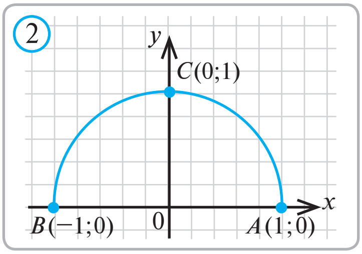
Дар секунҷаи *OMD*, $OD^2+DM^2=MO^2$ ё худ $x^2+y^2=1$. $\sin\alpha=y$ ва $\cos\alpha=x$ буданашро ба ҳисоб гирем, барои кунҷи дилхоҳи α ($0^\circ\le\alpha\le180^\circ$) баробарии

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad (2)$$

ҳосил мекунем. Ин баробарӣ **айнияти асосии тригонометрӣ** номида шуда, он дар дарсҳои гузашта барои кунҷҳои тез исбот гардида буд.

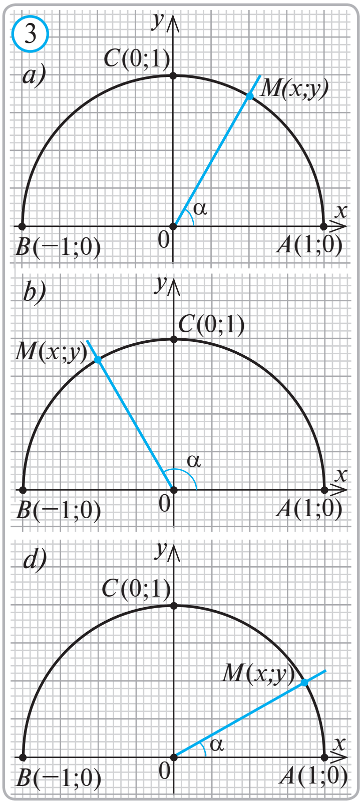
Супориши амалӣ.

1. Порчаи воҳидиро ба 5 *см* баробар гуфта, системаи координатаҳои росткунҷаро кашед.
2. Нимдаврае кашед, ки марказаш дар ибтидои координата, радиусаш баробари порчаи воҳидӣ ва дар чорякҳои I ва II ҷойгир шуда бошад.
3. Нури *OM* -ро созед, ки он нимдавраро дар нуқтаи *M* бурида, бо нури *Ox* а) $\alpha=67^\circ$; б) $\alpha=118^\circ$; в) $\alpha=150^\circ$ кунҷҳои баробар ташкил кунад.
4. Бо ёрии ченакҳо координатаи нуқтаи *M*, ҳамчунин қимати $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$-ро ёбед.



Масъала. Синуси кунҷҳои 0°, 90° ва 180° -ро ёбед.

Ҳалли он. Кунҷи 0° бо воситаи нури *OA*, кунҷи 90° бо кӯмаки нури *OC*, кунҷи 180° бо кӯмаки нури *OB* муайян мегардад *(расми 2)*. Мувофиқи таъриф $\sin 0^\circ$ ба сифати ординатаи нуқтаи *A* (1;0) ба 0, $\sin 90^\circ$ ба сифати ординатаи нуқтаи *C* (0;1) ба 1, $\sin 180^\circ$ бошад, ба сифати ординатаи нуқтаи *B* (−1;0) ба 0 баробар мешавад. ***Ҷавоб:*** $\sin 0^\circ=0$, $\sin 90^\circ=1$, $\sin 180^\circ=0$.



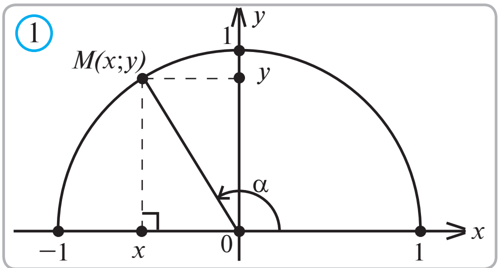
Савол, масъала ва супориш

1. Синус ва косинуси кунҷҳои аз 0° то 180° гуфта чиро мефаҳмед. Онро маънидод созед.
2. Тангенс ва котангенси кунҷи α чист? Тангенс ва котангенси кунҷи α дар кадом қиматҳои α аниқ нагардидаанд?
3. Агар $90^\circ<\alpha<180^\circ$ бошад, ишораи қимати $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ -ро муайян кунед.
4. Агар $0^\circ\le\alpha\le180^\circ$ бошад, нобаробариҳои $0\le\sin\alpha\le1$ ва $-1\le\cos\alpha\le1$ ҷоиз буданашро маънидод созед.
5. Кунҷи α -и расми 3-ро чен кунед ва бо кӯмаки ченакҳои зарурӣ синус, косинус, тангенс ва котангенси онро муайян созед.

6*. Нимдоираро кашед, ки дар расми 1 а тасвир ёфтааст. Бо кӯмаки нури *Ox* нурҳоеро созед, ки кунҷҳои 45° ва 135° -ро ҳосил менамоянд. Аз расми кашидашуда истифода бурда, $\sin 45^\circ$ ni $\sin 135^\circ$ -ро бо $\cos 45^\circ$ -ро бо $\cos 135^\circ$ муқоиса кунед.

27 АЙНИЯТҲОИ АСОСИИ ТРИГОНОМЕТРӢ

①



Машқи фаъолкунанда

Аз расми 1 истифода бурда, ҷои нуқтаҳоро пур кунед:

$\sin\alpha = \dots;\qquad \cos\alpha = \dots;$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\dots}{\dots};\qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\dots}{\dots}.$

Дар асоси таърифҳо ба ҳар як кунҷи тез як қимати синуси (косинуси, тангенси, котангенси) ин кунҷ мувофиқ гузошта шудааст. Ин мувофиқоӣ функсияҳои тригонометрии кунҷи тез: функсияҳои синус, косинус, тангенс ва котангенсро муайян мекунад. Аз сабаби ин функсияҳо ҳангоми ҳалли секунаҳо зиёдтар истифода гардидан онҳо функсияҳои тригонометрӣ номида мешаванд.

Калимаи “Тригонометрия” аз юнонӣ гирифта шуда, маънои “ҳалли секунҷаҳо”-ро дорад.

Акнун муносибатҳои байни синус,косинус,тангенс ва котангенси кунҷи α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$) -ро муайян мекунем.

1. Дар дарсҳои пештара бо формулаи

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{1}$$

ки **айнияти асосии тригонометрӣ** ҳисоб ёфта, дар қиматҳои $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$-и α ҷой дорад, шинос шуда будем.

2. Дар асоси таъриф $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$, $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ буданаш, айниятҳои

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\alpha \ne 90^\circ),\quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\alpha \ne 0,\ \alpha \ne 180^\circ),$$

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1\ (\alpha \ne 0,\ \alpha \ne 90^\circ,\ \alpha \ne 180^\circ) \tag{2}$$

ҷой дорад.

3. Ҳар ду қисми баробарии (1)-ро аввал ба $\cos^2\alpha$, баъд ба $\sin^2\alpha$ тақсим намуда, айниятҳои

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\ (\alpha \ne 90^\circ),\qquad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ ,\ (\alpha \ne 0,\ \alpha \ne 180^\circ) \tag{3}$$

-ро ҳосил мекунем.

Масъала. Агар $\sin\alpha = 0{,}6$ ва $90^\circ \ne \alpha \ne 180^\circ$ бошад, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ -ро ёбед.

Ҳалли он. Аз айнияти асосии тригонометрӣ истифода бурда, $\cos\alpha$ -ро ҳисоб мекунем:

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}6^2}=-\sqrt{1-0{,}36}=-\sqrt{0{,}64}=-0{,}8$.

$90°\leq\alpha\leq180°$, яъне α дар чоряки II бошад, $\cos\alpha\leq0$. Аз ин рӯ, реша бо ишораи “–” гирифта шуд.

Мувофиқи формулаи(2)

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{0{,}6}{0{,}8}=-\frac{3}{4};\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=-\frac{4}{3}.$$

Ҷавоб: $\cos\alpha=-0{,}8$; $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$; $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$.

? *Савол, масъала ва супориш*

1. $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$ барои кадом қиматҳо дурустанд?

2. Ифодаҳоро содда кунед:

1) $1-\cos^2\alpha$;
2) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$;
3) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;
4) $1-\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;
5) $\mathrm{ctg}^2\alpha(2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1)$;
6) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\alpha$.

3. Агар а) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ва $90°<\alpha<180°$ бошад, ба чӣ баробар будани $\cos\alpha$ cos -ро ёбед; б) $\cos\beta=-\frac{2}{3}$ ва $90°<\beta<180°$ бошад, $\sin\beta$ ба чӣ баробар аст; в) $\cos\alpha=1$ бошад, қимати $\sin\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

4. Масоҳати ромби кунчи тезаш 60° баландиаш 3 *см* бударо ёбед.

5. Асоси секунчаи баробарпаҳлӯ 4,8 *см*, кунҷи назди асос бошад 30°. Баландӣ ва тарафи паҳлуии секунчаро ёбед.

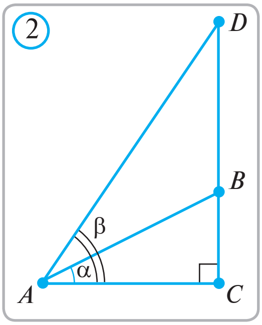
6. Агар а) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$; в) $\cos\alpha=-1$ бошад, $\sin\alpha$ ба чӣ баробар аст?

7. а) $\sin A=\frac{2}{3}$; б) $\cos A=\frac{3}{4}$; в) $\cos\alpha=\frac{2}{5}$ буданаш маълум. Кунҷи A-ро созед.

8*. Кунҷҳои α ва β шарти $0°<\alpha<\beta<90°$ -ро қаноат мекунонад. Аз расми 2 истифода бурда, исбот кунед:

а) $\sin\alpha<\sin\beta$; б) $\cos\alpha>\cos\beta$;
в) $\mathrm{tg}\alpha<\mathrm{tg}\beta$; г) $\mathrm{ctg}\alpha>\mathrm{ctg}\beta$.

9*. Кунҷи байни нури OA ва нури Ox баробари α аст. Агар а) $OA=3$, $\alpha=45°$; б) $OA=1{,}5$, $\alpha=90°$; в) $OA=5$, $\alpha=150°$; в) $OA=2$, $\alpha=180°$; г) $OA=4$, $\alpha=30°$ бошад, координатаҳои нуқтаи A-ро ёбед.

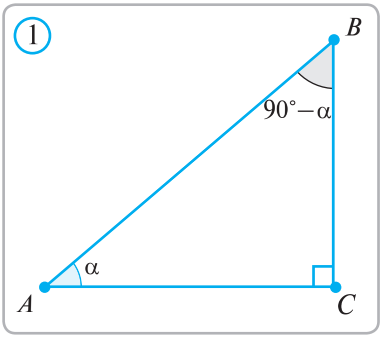


28

АЙНИЯТҲОИ АСОСИИ ТРИГОНОМЕТРӢ (давомаш)

Теоремаи 1. **Барои ҳар гуна кунҷи тез:**

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha, \qquad \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha. \qquad (1)$$



Исбот. Кунҷи тези қуллаи A -и секунҷаи росткунҷаи ABC -ро, ки баробари α аст, дида мебароем (*расми 1*). Дар ин ҳол кунҷи тези қуллаи $\beta=90^\circ-\alpha$ – баробар мешавад. Дар асоси таъриф

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\sin\beta=\frac{AC}{AB}=\cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\cos\beta=\frac{BC}{AB}=\sin\alpha.$$

Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Аз байни ададҳои зерини додашуда ададҳои баробарро ёбед: $\sin10^\circ$, $\cos10^\circ$, $\sin80^\circ$, $\cos80^\circ$.

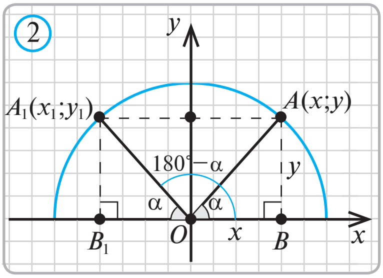
Ҳалли он. $80^\circ=90^\circ-10^\circ$ $(\alpha=10^\circ)$ ва $50^\circ=90^\circ-40^\circ$ $(\alpha=40^\circ)$ буданаш дар асоси теоремаи 1.

$$\sin80^\circ=\sin(90^\circ-10^\circ)=\cos10^\circ, \qquad \cos80^\circ=\cos(90^\circ-10^\circ)=\sin10^\circ.$$

Ҷавоб: $\sin80^\circ=\cos10^\circ$, $\cos80^\circ=\sin10^\circ$.

Теоремаи 2. **Барои ҳар гуна кунҷи** α $(0\le\alpha\le180^\circ)$ **:**

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha, \qquad \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha. \qquad (2)$$



Исбот. Дар системаи координатаҳои росткунҷаи Oxy давраи марказаш дар нуқтаи O буда ва радиусаш баробари 1-ро месозем (*расми 2*). Кунҷи байни нури Ox ва радиуси давра OA бигузор α бошад. Радиуси OA_1-ро, ки бо нури Ox кунҷи $180^\circ-\alpha$ -ро ташкил мекунад, мегузаронем. Секунҷаҳои росткунҷаи OAA_1 ва OBB_1 баробаранд. Хусусан, баробарии $OB=OB_1$ ва $AB=A_1B_1$ ё ки $x_1=x$ ва $y_1=y$ соҳиб мешавем. Ҳамин тавр,

$$\sin(180^\circ-\alpha)=y_1=y=\sin\alpha; \qquad \cos(180^\circ-\alpha)=x_1=-x=-\cos\alpha.$$

Теорема исбот шуд.

Формулаҳои (1) ва (2) **формулаҳои мувофиқоварӣ** номида мешаванд.

Масъалаи 2. Агар $\alpha=120^\circ$ бошад, қиматҳои $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\,\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

Ҳалли он. а) дар асоси формулаи (2)

$$\sin120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos60^\circ=-\frac{1}{2}.$$

Он гоҳ

$$\mathrm{tg}\,120^\circ=\frac{\sin120^\circ}{\cos120^\circ}=-\sqrt{3};\ \ \mathrm{ctg}\,120^\circ=\frac{\cos120^\circ}{\sin120^\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ҷаваб: $\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos120^\circ=-\frac{1}{2}$; $\mathrm{tg}\,120^\circ=-\sqrt{3}$; $\mathrm{ctg}\,120^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Савол, масъала ва супориш.

1. Айниятҳои $\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha$ $(\alpha\neq0^\circ)$ ва $\mathrm{ctg}(90^\circ-\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$ $(\alpha\neq0^\circ)$ -ро исбот кунед.
2. $\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$ $(\alpha\neq90^\circ)$ ва $\mathrm{ctg}(180^\circ-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$ $(\alpha\neq0^\circ$ ва $\alpha\neq180^\circ)$ ин айниятҳоро исбот намоед.
3. Ҷадвалро пур кунед.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\mathrm{tg}\,\alpha$									
$\mathrm{ctg}\,\alpha$									

4. Агар $90^\circ<\alpha<180^\circ$ ва а) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\mathrm{tg}\,\alpha=-1$; г) $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\sqrt{3}$ бошад, бузургии кунҷи α -ро ёбед.
5. Ҳисоб намоед:
   а) $\sin180^\circ+2\cos90^\circ$;
   б) $4\sin150^\circ+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,150^\circ$;
   в) $\cos40^\circ+\cos50^\circ-\sin40^\circ-\sin50^\circ$;
   г) $3\cos120^\circ-2\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,60^\circ$.
6. Содда намоед:
   а) $\cos^2(180^\circ-\alpha)+\cos^2(90^\circ-\alpha)$;
   б) $\sin^2(180^\circ-\alpha)+\sin^2(90^\circ-\alpha)$;
   в) $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)$;
   г) $\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}(90^\circ-\alpha)$.
7. Дар секунҷаи ABC $\angle A=150^\circ$ ва $AC=7$ *см* бошад,баландии аз қуллаи C гузаронидашударо ёбед.
8. Диагонали росткунҷае,ки 12 *см* аст,бо як тарафаш кунҷи 30° -ро ташкил медиҳад. Масоҳати росткунҷаро ёбед.
9. Агар а) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ; б) $\sin\alpha=\frac{1}{4}$; в) $\sin\alpha=1$ бошад, $\cos\alpha$ -ро ёбед.

10*. Агар а) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; б) $\mathrm{tg}\,\alpha=-1$; в) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ бошад, α -ро ёбед.

29 ДОНИШИ ХУДРО САНҶИДА БИНЕД

I. Ба мафҳумҳои сутуни чап аз таърифҳои сутуни рост мувофиқашро гузоред.

1. Синуси кунчи α
2. Косинуси кунчи α
3. Тангенси кунчи α
4. Котангенси кунчи α

а) нисбати катети муқобили кунҷи α бар гипотенуза

б) нисбати катети ба кунҷи α часпида бар гипотенуза

в) нисбати катети муқобили кунҷи α ба катети дуюм

г) нисбати катети ба кунҷи α часпида ба катети дуюм.

II. Тестҳо

1. Формулаи нодурустро ёбед.

A. $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$; B. $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$;
C. $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$; D. $\cos(180°-\alpha)=\cos\alpha$.

2. Агар $90°<\alpha<180°$ бошад, кадоме аз зайл мусбат?

A. $\sin\alpha$; B. $\cos\alpha$; C. $\mathrm{tg}\alpha$; D. $\mathrm{ctg}\alpha$.

3. Баробарии дурустро ёбед.

A. $\sin^2\alpha=1+\cos^2\alpha$; B. $\mathrm{tg}^2\alpha=1+\cos^2\alpha$;
C. $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\mathrm{tg}^2\alpha\ (\alpha\neq 90°)$; D. $\sin^2x\cdot\cos^2x=1$.

4. $\sin 70°$ ба чӣ баробар аст?

A. $\sin 20°$; B. $-\sin 20°$; C. $\cos 70°$; D. $\cos 20°$.

5. Кунҷи тези α -ро нишон диҳед, ки дар он $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

A. 30°; B. 45°; C. 90°; D. 60°.

6. Агар $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ бошад, кунҷи тези α -ро ёбед.

A. 30°; B. 45°; C. 90°; D. 60°.

7. Агар $\mathrm{tg}\alpha=1$бошад, кунҷи тези α -ро ёбед.

A. 30°; B. 45°; C. 90°; D. 60°.

8. Агар $\mathrm{ctg}\alpha=1$ бошад, кунҷи тези α -ро ёбед.

A. 30°; B. 45°; C. 90°; D. 60°.

9. Баробарии $\sin\alpha=\cos\alpha$ барои кадом қиматҳои кунқи тези α ҷой дорад?

A. 30°; B. 45°; C. 90°; D. 60°.

10. Агар $\sin B=\frac{2}{5}$ бошад, $\cos B$ -ро ёбед.

A. $\frac{4}{25}$; B. $\frac{\sqrt{29}}{5}$; C. $\frac{\sqrt{21}}{5}$; D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

11. Агар $\cos A=0,2$ бошад, $\mathrm{tg} A$ -ро ёбед.

A. $\sqrt{96}$; B. $2\sqrt{6}$; C. $\sqrt{15}$; D. $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

12. Диагонали росткунча аз яктарафи 2-маротиба дароз аст. Кунчи байни диагоналҳои росткунчаро ёбед.

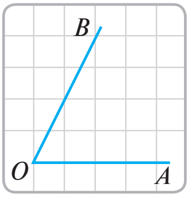
A. 30°; B. 60°; C. 90°; D. 150°.

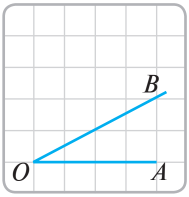
13. Баланди ба асоси баробарпаҳлӯ фароварда шуда 3 см, асосаш бошад, 8 см, синуси кунҷи ба асоси секунҷа часпидаро ёбед.

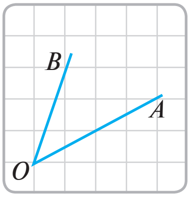
A. $\frac{3}{5}$; B. $\frac{3}{4}$; C. $\frac{\sqrt{73}}{73}$; D. $\frac{4}{5}$.

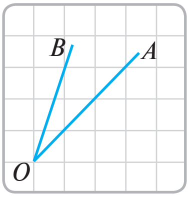
III. Масъалаҳо

1. Синус, косинус,тангенс ва котангенси кунчҳои дар расм тасвир шударо ёбед.

а)


б)


в)


г)


2. Мунучеҳр аз хонаашон 800 *м*, ба тарафи Шарқ баъд ба тарафи Шимол 600 *м* роҳ тай намуд. Ӯ аз хонаашон чанд метр ба дурӣ омад? Ӯ акнун аз рӯи хати рост барои ба хона омаданаш нисбат ба тарафи Ғарб дар таҳти кадом кунҷ ҳаракат намуданаш лозим аст?

3. Поезд дар ҳар 30 *м* роҳ рафтан 1 *м* ба баландӣ бардошта мешавад. Кунҷи нисбат ба вертикал бардоштешавии роҳи оҳанро ёбед.

4. Агар дарозии сояи бинои баландиаш 30 *м*,45 *м* бошад, кунҷи афтиши нури Офтобро дар майдони бино чойгир шударо ёбед.

5. Яке аз кунчҳои секунчаи росткунча ба 60° катети бузургаш ба 6 баробар аст. Катети хурди он ва гипотенузаашро ёбед.

6. Дар расандаи ба нуқтаи A-и давраи марказаш O гузаронидашуда нуқтаи B гирифта шудааст. Агар AB=9 *см*, $\angle ABO$=30° бошад, радиуси давра ва дарозии порчаи BC -ро ёбед.

7. Хати рости m ва порчаи AB, ки ин хати ростро бурида намегузарад, дода шудааст. Дар ин $AB = 10$, кунҷи байни AB ва хати рости m 60°аст. Аз куллаҳои порчаи AB ба хати рости m перпендикулярҳои AC ва BD гузаронида шудааст. Порчаи CD -ро ёбед.

8. Кунҷи тези ромб ба 60° баландии он бошад, ба 6 баробар аст. Масоҳати ромбро ёбед. Дарозии диагонали калон ва масоҳати ромбро ёбед.

9. Ба давраи радиусаш 5 *см* трапетсияи баробарпаҳлу берун кашида шудааст. Агар кунҷи тези трапетсия 30° бошад, тарафи паҳлуи ва масоҳати онро муайян кунед.

10. Агар дар росткунҷаи $ABCD$ $AB=4$, $\angle CAD=30°$ бошад, радиуси давраи ба он берункашидашуда ва масоҳати росткунҷаро ёбед.

11. Тарафҳои росткунҷа 3 *см* ва $\sqrt{3}$ *см*. Кунҷи ташкилкардаи яке аз диагоналҳои онро бо тарафҳояш ёбед.

12. Агар а) $\sin A=\frac{4}{7}$; б) $\cos A=\frac{4}{7}$; в) $\cos A=-\frac{4}{7}$ бошад, кунҷи A -ро созед.

13. Яке аз кунҷҳои секунҷаи росткунҷа 30°, баландии ба гипотенуза гузаронидашуда 6 *см* аст. Тарафҳои секунҷаро ёбед.

14. Масоҳати ромби кунҷи тезаш 30° ва баландиаш 4 *см* -ро ёбед.

15. Агар $\sin A=\frac{8}{17}$ ва $90°<\alpha<180°$ бошад, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ -ро ёбед.

16. Ба гипотенузаи AB-и секунҷаи росткунҷаи ABC баландии CD гузаронида шудааст. Агар $\angle A=60°$ ва $BD=2$ бошад, катети BC-ро ёбед.

17. Дар секунҷаи ABC $\angle A=30°$, $\angle C=45°$. Агар баландии секунҷаи $BD=12$ *см* бошад, тарафи AC ва масоҳаташро ёбед.

IV. Худатонро бисанҷед (кори назоратии намунавӣ)

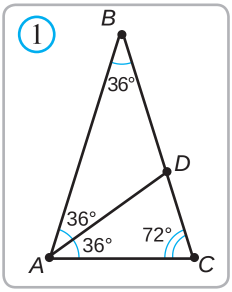
1. Агар $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$ ва $90°<\alpha<180°$ бошад, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$ ба чӣ баробар аст?

2. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа $c=18$ *см* ва катети он $a=4$ *см* бошад, катети дуюм ва кунҷҳои тези онро муайян кунед.

3. Медианаи секунҷаи баробартараф аз тарафи он хурд буданашро исбот кунед.

4. *(Илова).* Ҳар як тарафи чоркунҷа аз ҳосили ҷамъи тарафҳои боқимонда хурд буданашро исбот кунед.

Лавҳаҳои таърихи. «Секунҷаи тиллоӣ».



Юнониёни қадим секунҷаи баробарпаҳлуи кунҷҳояш 36°, 72° ва 72° бударо — «секунҷаи тиллоӣ» номидаанд. Сабаби ин вай ба хосияти аҷоиби зерин соҳиб аст: биссектрисаи кунҷи AD онро ба ду секунҷаи баробарпаҳлу ҷудо мекунад (*расми 1*).

Дар ҳақиқат, аз сабаби AD биссектриса буданаш, кунҷҳои BAD ва DAC ҳам 36°. Бинобар ин секунҷаи ABD секунҷаи баробарпаҳлу Дар секунҷаи ADC кунҷи ADC $180°-36°-72°=72°$ буда ба кунҷи ACD баробар аст. Аз ин рӯ секунҷаи ADC ҳам баробарпаҳлу аст.

Натиҷа. Секунҷаи ABC ба секунҷаи ACD монанд ва $\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{AC}$. (1)

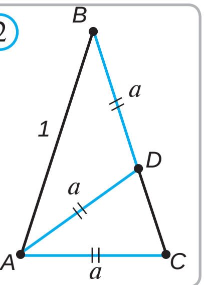
Агар тарафҳои паҳлуии секунҷаи ABC $AB=BC=1$ гуфта гирем, асоси он чунин ёфта мешавад (расми 2): $AC=a$ бошад.Дар ин ҳол

1. $AD=a$ чунки ΔACD баробарпаҳлу.
2. $BD=a$ мешавад,чунки ΔABD баробарпаҳлу.
3. $CD=BC-BD=1-a$.

дар асоси баробарии (1):

$$\frac{a}{1}=\frac{1-a}{a}$$

②



Аз ин $a^2+a-1=0$. Ин муодилаи квадратиро ҳал намуда, $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ буданашро меёбем.

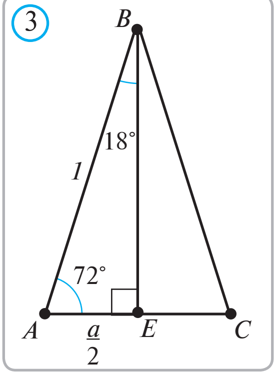
Масъала. Қиматҳои sin18°, cos18°, sin72°, cos72° -ро ҳисоб кунед.

Ҳалли он: “Секунҷаи тиллоӣ”-еро дида мебароем,ки тарафи паҳлуи $AB=BC=1$ ва асосаш $AC=a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Яъне секунҷаи ABC-ро дида мебароем (*расми 3*).Баландии он BE-ро мегузаронем.

Аз секунҷаи росткунҷаи ABE

$$\sin 18^\circ=\frac{AE}{AB}=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

③



Аз ин истифода бурда,қиматҳои дигари ёфтанашон талаб кардашударо ҳисоб мекунем:

$$\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\sin 72^\circ=\sin(90^\circ-18^\circ)=\cos 18^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\cos 72^\circ=\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ҷавоб: $\sin 18^\circ=\cos 72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18^\circ=\sin 72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Лавҳаҳои таърихи.

Улуғбек
(1394 — 1449)

Улуғбек (1394−1449)—олими бузурги ӯзбек ва арбоби давлатӣ Номи аслии он Муҳаммад Тарағай, набераи соҳибқирон Амир Темур. Падари Улуғбек Шоҳрух ҳам арбоби давлатӣ буд. Улуғбек тахминан солҳои 1425—1428 дар баландии Оби Раҳмати наздикии Самарқанд расадхонаи машҳури худро месозад. Бинои расадхона аз се ошёна иборат буда, ҷиҳозоти асосии он—квадрант 50 метр баланди дошт. Асари машҳури Улуғбек «Зичи кӯрагонӣ» ном дошта, ҷадвали астрономӣ аст ва он 1018 то ситораҳоро дар бар мегирад.

30 БО ЁРИИ СИНУСИ КУНҶ ҲИСОБ КАРДАНИ МАСОҲАТИ СЕКУНҶА

Теоремаи 1. **Масоҳати секунҷа ба нисфи ҳосили зарби ду тараф ва синуси кунҷи байни онҳо баробар аст.**

$\triangle ABC,\ BC=a,\ AC=b,\ \angle C$ *(расми 1)* ⇒ $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$

Исбот. Баландии секунҷаи ABC BD-ро мегузаронем. Дар ин ҳолат се ҳолатҳое, ки дар расми 1 нишон дода шудааст, буданаш мумкин.

Ҳолати якумро дида мебароем. Дар секунҷаи BCD $\sin C=\frac{BD}{BC}$.

Аз ин $BD=BC\cdot\sin C=a\cdot\sin C$. Ҳамин тавр,

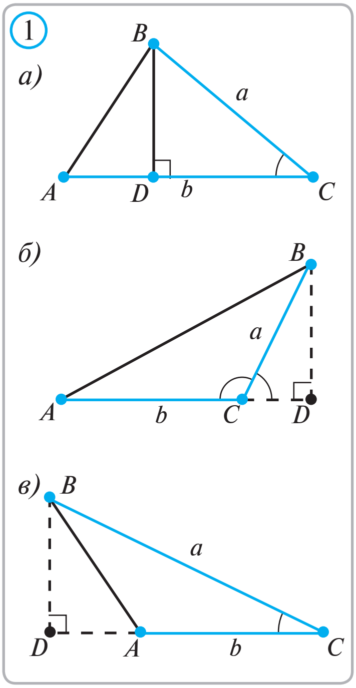
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot b\cdot a\cdot\sin C=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

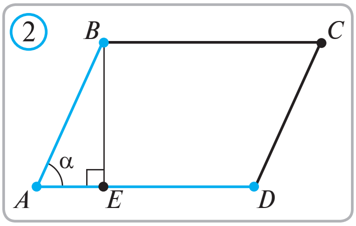
Исботи ҳолатҳои ду ва серо мустақилона исбот намоед. ***Теорема исбот шуд.***

Дар асоси теоремаи 1, барои масоҳати секунҷа формулаҳои

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A \quad \text{ва} \quad S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$$

ҳам ҷой дорад.


①


②

Масъалаи 1. Масоҳати секунҷаи ABC 24 $см^2$. Агар $AC=8$ *см* ва $\angle A=30°$ бошад, тарафи BC-ро ёбед.

Ҳалли он. Дар асоси формулаи ёфтани масоҳати секунҷа бо ёрии синуси кунҷ,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A$$

Аз ин,

$$AB=\frac{2S_{ABC}}{AC\cdot\sin A}=\frac{2\cdot 24}{8\cdot\sin 30^\circ}=\frac{2\cdot 24}{8\cdot 0,5}=12\ (см).$$

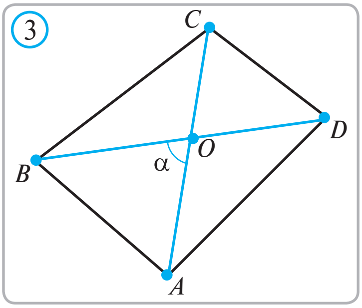
Ҷавоб: 12 *см*.

Масъалаи 2. Исбот кунед, ки масоҳати параллелограмм ба ҳосили зарби ду тарафи ҳамсоя ва синуси кунҷи байни онҳо баробар аст.

$ABCD$ параллелограмм, $AB=a,\ AD=b,\ \angle A=\alpha$ (расми 2) ⇒ $S_{ABCD}=ab\sin\alpha$

Ҳалли он. Баландии BE-ро мегузаронем. Дар секунҷаи ABE $\sin A=\frac{BE}{AB}$ ё ки $BE=AB\sin A=a\sin\alpha$. Дар ин ҳол $S_{ABCD}=AD\cdot BE=ab\sin\alpha$.

Теоремаи 2. **Масоҳати чоркунҷа ба нисфи ҳосили зарби диагоналҳои он ва синуси кунҷи байни диагоналҳо баробар аст.**



Исбот. Кунҷҳои ҳосилшударо дар буриши диагоналҳо дида мебароем (*расми 3*):

$\angle AOB=\alpha$ $\Leftarrow$ дар асоси шарт,

$\angle COD=\alpha$ $\Leftarrow$ аз ба $\angle AOB$ вертикалӣ буданаш,

$\angle BOC=180^\circ-\alpha$ $\Leftarrow$ аз ба $\angle AOB$ ҳамсоя буданаш,

$\angle DOA=180^\circ-\alpha$ $\Leftarrow$ аз ба $\angle BOC$ вертикалӣ буданаш.

Дар асоси формулаи ҳисоб кардани масоҳати секунҷа бо ёрии синуси кунҷ:

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\alpha;\qquad S_{BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot OC\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}BO\cdot OC\sin\alpha;$$

$$S_{COD}=\frac{1}{2}CO\cdot OD\sin\alpha;\qquad S_{DOA}=\frac{1}{2}DO\cdot OA\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}DO\cdot OA\sin\alpha.$$

Мувофиқи хосияти масоҳатӣ: $S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{DOA}=$

$$=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\alpha+\frac{1}{2}BO\cdot OC\sin\alpha+\frac{1}{2}CO\cdot OD\sin\alpha+\frac{1}{2}DO\cdot OA\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}(AO\cdot OB+BO\cdot OC+CO\cdot OD+DO\cdot OA)\sin\alpha==\frac{1}{2}\{(OB\cdot(AO+OC)+$$

$$+OD\cdot(CO+OA)\}\sin\alpha=\frac{1}{2}(OB\cdot AC+OD\cdot AC)\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha.$$

Теорема исбот шуд.

Савол, масъала ва супориш

1. Теоремаи 1-ро дар ҳолатҳои тасвирёфтаи расми 1-б ва расми 1-в исбот кунед.
2. Агар а) $AB=6$ *см*, $AC=4$ *см*, $\angle A=30^\circ$; б) $AC=14$ *см*, $BC=7\sqrt{3}$ *см*, $\angle C=60^\circ$; d) $BC=3$ *см*, $AB=4\sqrt{2}$ *см*, $\angle B=45^\circ$ бошад, масоҳати секунҷаи ABC-ро ёбед.
3. Масоҳати росткунҷаи диагоналаш 12 *см* ва кунҷи байни диагоналҳояш 30° -ро ёбед.
4. Масоҳати ромбе, ки тарафаш $7\sqrt{2}$ *см* ва кунҷи кунди он 135° аст, ёбед.
5. Диагонали калони ромб 18 *см* буда, кунҷи кунди он 120° аст. Масоҳати ромбро ёбед.
6. Дар секунҷаи ABC, ки масоҳаташ $6\sqrt{2}$ $см^2$ аст, $AB=9$ *см*, $\angle A=45^\circ$. Тарафи AC ва баландии ба ин тарафи секунҷа гузаронидашударо муайян кунед.

7*. Дар секунҷаи ABC $\angle A=\alpha$, баландиҳои аз қуллаҳои B ва C гузаронидашуда мувофиқан h_b ва h_c бошад, масоҳати секунҷаро ёбед.

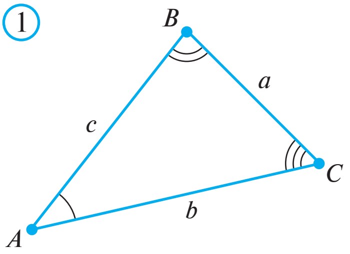
8*. Дар секунҷаи ABC $AB=8$ *см*, $AC=12$ *см* ва $\angle A=60^\circ$ бошад, биссектрисаи он AD ёфта шавад (*нишондод:* $S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC}$).

31 ТЕОРЕМАИ СИНУСҲО

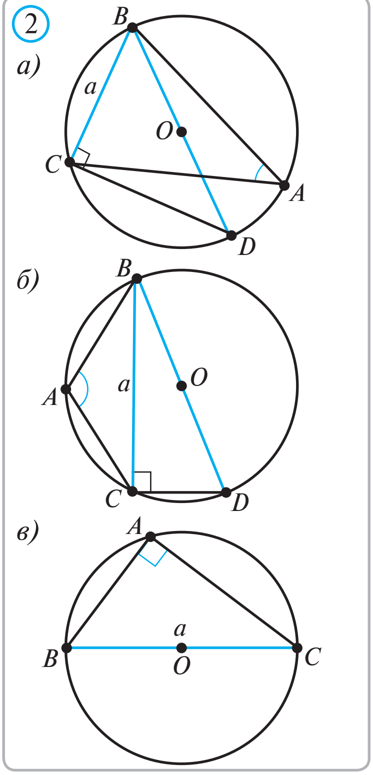
Теорема. (Теоремаи синусҳо). **Тарафҳои секунҷа ба синуси кунҷҳои муқобил мутаносибанд.**

$\Delta ABC,\ AB=c,\ BC=a,\ CA=b$ *(расми 1)* $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

①



②



Исбот. Дар асоси формулаи ёфтани масоҳати секунҷа ба воситаи синуси кунҷ

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A,\quad S=\frac{1}{2}ac\sin B.\quad (❖)$$

Аз баробарии ду формулаи аввал

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A,\ \text{аз ин рӯ,}\ \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\ .$$

Ҳамин тавр,аз баробарии якум ва сеюми(❖) $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$ -ро ҳосил мекунем.

Бинобар ин, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

Теорема исбот шуд.

Масъалаи 1. Дар секунҷа ABC $AB=14$ *дм*, $\angle A=30^\circ$, $\angle C=65^\circ$ (*расми 1*).Тарафи BC-ро ёбед.

Ҳалли он. Дар асоси теоремаи синусҳо $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$. Аз ин

$$BC=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin C}=\frac{14\cdot\sin 30^\circ}{\sin 65^\circ}\approx\frac{14\cdot 0{,}5}{0{,}9}\approx 7{,}78\ (дм).$$

Эзоҳ: Қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ бо ёрии калкулятори махсус ё ки ҷадвалҳо ёфта мешавад. Дар ин ҷо $\sin 65^\circ\approx 0{,}9$ буданашро аз рӯи ҷадвали саҳифаи 153 китоби дарсӣ муайян кардем. ***Ҷавоб:*** 7,78 дм.

Масъалаи 2. Нисбати тарафҳои секунҷа бар синуси кунҷҳои муқобили ин тарафҳо ба диаметри давраи ба ин секунҷа берункашидашуда баробар буданашро исбот кунед *(расми 1).*

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

Ҳалли он. Равшан аст, ки дар асоси теоремаи синусҳо $\frac{a}{\sin A}=2R$ -ро исбот кардан кифоя. Се ҳолат шуданаш мумкин:

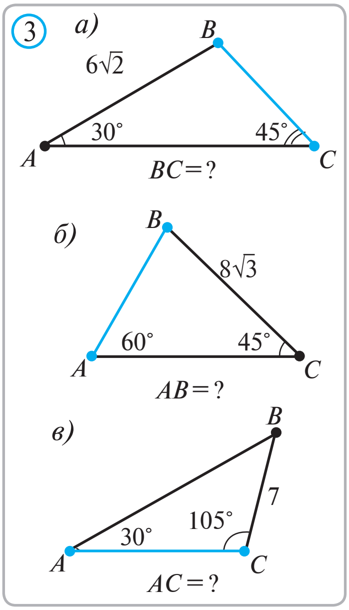
Ҳолати 1: $\angle A$ — кунҷи тез (*расми 2,а*); Ҳолати 2: $\angle A$ — кунҷи кунд (*расми 2,б*);
Ҳолати 3: $\angle A$ —кунҷи рост (*расми 2,в*).

Ҳолати 1-ро дида мебароем: нуқтаҳои C ва D-ро пайваст мекунем. BCD — секунҷаи росткунҷа, чунки кунҷи $\angle BCD$ ба диаметри BD такя мекунад. Дар секунҷаи ΔBCD $BC=BD\cdot\sin D=2R\sin D$. Лекин, $\angle D=\angle A$, чунки онҳо кунҷҳои бо як камони BC кашидашудаи дохилӣ мебошанд. Он гоҳ

$$BC=2R\sin A \quad \text{ё ки} \quad \frac{a}{\sin A}=2R.$$

Ҳолатҳои боқимондаро мустақилона исбот кунед.(*Нишондод:* Дар ҳолати 2 аз $\angle D=180°-\angle A$ буданаш, дар ҳолати 3 $a=2R$ буданаш истифода баред).

? *Савол, масъала ва супориш*



1. Нисбати тарафи дилхоҳи секунҷа бар синуси кунҷи муқобил ба диаметри давраи берункашидашуда баробар буданашро барои ҳолатҳои 2 ва 3 дар масъалаи 2 исбот намоед.

2. Дар асоси нишондодҳои расми 3 порчаҳои номаълумро ёбед.

3. Агар дар секунҷаи ABC:
а) $\sin A=0{,}4$; $BC=6$ *см* ва $AB=5$ *см* бошад, $\sin C$-ро;
б) $\sin B=\frac{3}{5}$; $AC=8$ *дм* ва $BC=7$ *дм* бошад, $\sin A$-ро;
в) $\sin C=\frac{4}{7}$; $AB=6$ *м* ва $AC=8$ *м* бошад, $\sin B$-ро ёбед.

4. Як кунҷи секунҷа 30° аст. Тарафи муқобили он 4,8 *дм*. Радиуси давраи ба секунҷа берункашидашударо ҳисоб кунед.

5. Яке аз тарафҳои секунҷа ба радиуси давраи берункашидашуда баробар аст. Кунҷи муқобили ҳамин тарафи секунҷаро ёбед. Дар ин ду ҳолат дида баромадан лозим буданашро ба эътибор гиред.

6. Ба секунҷаи ABC баробарии $AB:BC:CA=\sin C:\sin A:\sin B$ ҷой доштанашро асоснок намоед. Баробарии $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ оё дуруст аст?

7. Агар дар секунҷаи ABC $BC=20$ *м*, $AC=13$ *м* ва $\angle A=67°$ бошад, тарафи AB, кунҷҳои B ва C-и секунҷаро ёбед.

8*. Агар дар секунҷаи ABC $BC=18$ *дм*, $\angle A=42°$, $\angle B=62°$ бошад, кунҷи C, тарафҳои AB ва AC-и секунҷаро ёбед.

32 ТЕОРЕМАИ КОСИНУСҲО

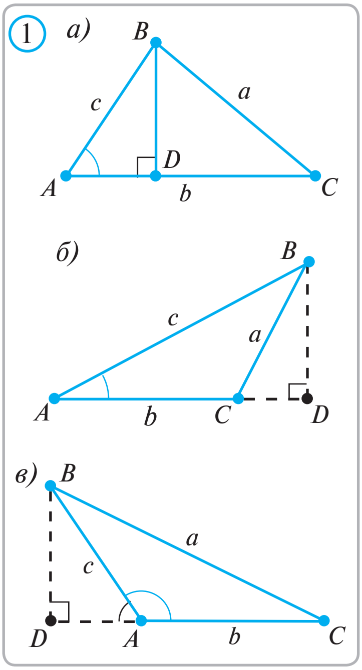
Дар секунҷаи росткунҷа квадрати тарафи муқобили кунҷи рост (гипотенуза) ба ҳосили ҷамъи квадрати тарафҳои боқимонда (катетҳо) баробар аст.

Фараз мекунем, ки кунҷи рост нест? Теоремаи зерин дар ҳамин хусус.

Теорема. (Теоремаи косинусҳо). **Квадрати тарафи дилхоҳи секунҷа ба суммаи квадратҳои ду тарафи дигари он (боқимонда) ва фарқи ҳосили зарби дучанди ин тарафҳо бар косинуси кунҷи байни онҳо баробар аст.**

$\Delta ABC,\ AB=c,\ BC=a,\ CA=b$ (*расми 1*) $\Rightarrow$ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

①



Исбот. Ба секунҷаи ABC баландии BD мегузаронем. Нуқтаи D дар тарафи AC (расми 1-а) ё ки дар давоми он (расмҳои 1-б ва 1-в) шуданаш мумкин. Ҳолати якумро дида мебароем. Дар секунҷаи росткунҷаи BCD дар асоси теоремаи Пифагор $BC^2=BD^2+DC^2$.

Аз $DC=AC-AD$ буданаш:

$$BC^2=BD^2+(AC-AD)^2=BD^2+AC^2-2\cdot AC\cdot AD+AD^2.$$

Дар секунҷаи росткунҷаи ABD $BD^2+AD^2=AB^2$ ва $AD=AB\cos A$ буданашро ба ҳисоб гирифта, аз баробарии охирин

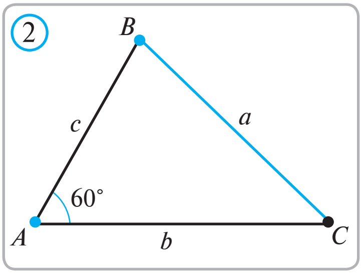
$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A,$$

яъне ба баробарии $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ соҳиб мешавем. ***Теорема исбот шуд.***

Дар ҳолати тасвир чун расми 1-б аз баробарии $DC=AD-AC$ ва тасвир чун расми 1-в аз баробарии $DC=AD+AC$ ва $\cos(180^\circ-A)=-\cos A$ истифода бурда, теоремаи косинусҳоро мустақилона исбот кунед.

Эзоҳ. Теоремаи косинусҳо теоремаи умумикардашудаи Пифагор аст. $\angle A=90^\circ$ бошад, (аз сабаби $\cos 90^\circ=0$ будан), аз теоремаи косинусҳо, теоремаи Пифагор бармеояд.

②



Масъалаи 1. Дар секунҷаи ABC $AB=6$ см, $AC=7$ см, $\angle A=60^\circ$(*расми 2*). Тарафи BC-ро ёбед.

Ҳалли он. Дар асоси теоремаи косинусҳо $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ё ки $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos A$ буданаш.

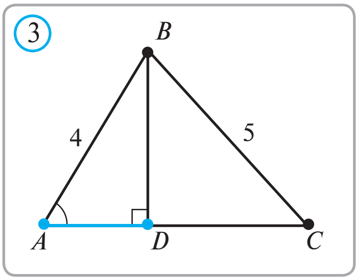
$$BC^2=7^2+6^2-2\cdot7\cdot6\cdot\cos60^\circ=49+36-84\cdot\frac{1}{2}=43,$$

яъне $BC=\sqrt{43}$ *см*. ***Ҷавоб:*** $\sqrt{43}$ *см*.

Инчунин аз теоремаи косинусҳо истифода бурда, аз маълум будани тарафҳо кунҷҳои секунҷаро ёфтан мумкин:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \qquad (1)$$

③



Масъалаи 2. Тарафҳои секунҷаи ABC $a=5$ *м*, $b=6$ *м* ва $c=4$ *м*. Проексияи тарафи хурдро дар тарафи калон ёбед (*расми 3*).

Ҳалли он. Мувофиқи формулаи 1 $\cos A$-ро меёбем:

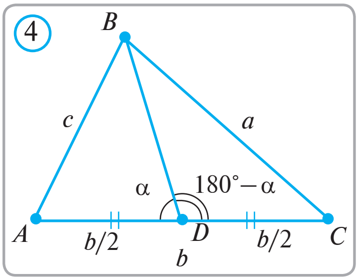
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+4^2-5^2}{2\cdot6\cdot4}=\frac{9}{16}.$$

Дар секунҷаи росткунҷаи ABD $AD=AB.\cos A$ буданаш

$$AD=4\cdot\frac{9}{16}=2,25\ (м).$$

Ҷавоб: 2,25 *м*.

④



Савол, масъала ва супориш

1. Теоремаи косинусҳоро дар ҳолатҳое, ки дар расми 1-б ва 1-в нишон дода шудаанд, исбот кунед.
2. Дар секунҷаи ABC
   а) $AC=3$ *см*, $BC=4$ *см* ва $\angle C=60^\circ$ бошад, AB -ро;
   б) $AB=4$ *м*, $BC=4\sqrt{2}$ *м* ва $\angle B=45^\circ$ бошад, AC -ро;
   в) $AB=7$ *дм*, $AC=6\sqrt{3}$ *дм* ва $\angle A=150^\circ$ бошад, BC -ро ёбед.
3. Косинуси кунҷҳои секунҷаи тарафҳояш 5 *см*, 6 *см*, 7 *см* бударо муайян кунед.
4. Дар секунҷаи ABC, $AB=10$ *см*, $BC=12$ *см* ва $\sin B=0,6$ бошад, тарафи AC-ро ёбед.
5. Диагонали параллелограмм 10 *см* ва 12 *см* буда, кунҷи байни онҳо 60° аст. Тарафҳои параллелограммро ёбед.
6. Яке аз кунҷҳои параллелограмм, ки тарафҳояш 5 *см* ва 7 *см* мебошад, ба 120° баробар аст. Диагонали онро ёбед.

7*. Исбот кунед, ки медианаи BD-и секунҷаи тарафҳояш a, b, c буда бо формулаи $BD=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ ҳисоб карда мешавад (*расми 4*).

8*. Медианаи секунҷаи тарафҳояш 6 *м*, 7 *м* ва 8 *м*-ро муайян кунед.

9. Биссектрисаи секунҷаи масъалаи 3-ро ёбед.
10. Баландии секунҷаи масъалаи 3-ро ёбед.

33 БАЪЗЕ ТАТБИҚҲОИ ТЕОРЕМАИ СИНУСҲО ВА КОСИНУСҲО

Теоремаи синусҳо ва косинусҳоро, ки дар дарсҳои гузашта исбот намудем, ҳангоми ҳалли масъалаҳои гуногун оиди секунҷаҳо самаранок истифода бурдан мумкин аст. Дар ин дарс ба татбиқи баъзеи ин теоремаҳо истода мегузарем.

1. Теоремаи косинусҳо имкон медиҳад, ки кунҷҳои секунҷаро наёфта, намуди кунҷҳои он (кунҷи тез, кунд ё ки рост буданаш) муайян карда шавад. Дар ҳақиқат, дар формулаи

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

1) агар $\boldsymbol{b^2+c^2>a^2}$ бошад, $\cos A>0$, аз ин рӯ, ***A* — кунҷи тез;**
2) агар $\boldsymbol{b^2+c^2=a^2}$ бошад, $\cos A=0$, аз ин рӯ, ***A* — кунҷи рост;**
3) агар $\boldsymbol{b^2+c^2<a^2}$ бошад, $\cos A<0$, аз ин рӯ, ***A* — кунҷи кунд.**

Баробарии $b^2+c^2=a^2$ ё ки нобаробарии $b^2+c^2<a^2$ дар ҳолати a тарафи калонтарини секунҷа будан иҷро мешавад. Аз ҳамин сабаб кунҷи рост ё ки кунди секунҷа муқобили тарафи калонтарини он мехобад.

Ба бузургии кунҷи муқобили тарафи калони секунҷа нигоҳ карда, ба чӣ гуна секунҷа (тезкунҷа, кундкунҷа, росткунҷа) будани он ба хулоса омадан мумкин.

Масъалаи 1. Кунҷҳои секунҷаи тарафҳояш 5 *м*, 6 *м* ва 7 *м*-ро наёфта, намуди онро муайян кунед.

Ҳалли он. Дар муқобили кунҷи калон тарафи калон мехобад. Бинобар ин, агар $a=7, b=6, c=5$ бошад, кунҷи аз ҳама калон $\angle A$ мешавад.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 25 - 49}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} > 0.$$

Аз ин рӯ, A кунҷи тез, секунҷаи додашуда бошад, секунҷаи тезкунҷа аст.

2. Аз формулаи ҳисоб кардани масоҳати секунҷа аз рӯи ду тараф ва кунҷи байни онҳо

$$S = \frac{1}{2} bc\sin A$$

ва аз формулаи $\sin A = \frac{a}{2R}$ барои ҳисобкунии масоҳати секунҷа аз формулаи

$S = \frac{abc}{4R}$ барои ҳисобкунии радиуси давраи дар беруни секунҷа кашида

формулаи $R = \frac{abc}{4S}$ -ро ҳосил мекунем.

Масъалаи 2. Радиуси давраи ба секунҷаи тарафҳояш $a=5, b=6, c=10$ берункашидашударо ёбед.

Ҳалли он. Аз формулаи Герон истифода бурда,масоҳати секунҷаро муайян мекунем.

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5+7+10}{2}=11,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{11(11-5)(11-7)(11-10)}=\sqrt{11\cdot6\cdot4}=\sqrt{264}\approx16{,}3.$$

Он гоҳ $R=\frac{abc}{4S}\approx\frac{5\cdot7\cdot10}{4\cdot16{,}3}\approx5{,}4.$ ***Ҷавоб:*** $R\approx5{,}4.$

Савол, масъала ва супориш

1. Агар $AB=7$ *см*, $BC=8$ *см*, $CA=9$ *см* бошад, кунҷи аз ҳама калон ва хурди секунҷаи ABC-ро ёбед.

2. Агар дар секунҷаи ABC $\angle A=47^\circ$, $\angle B=58^\circ$ бошад, тарафи аз ҳама калонтарин ва хурдтарини онро аниқ намоед.

3. Се тарафи секунҷа дода шудааст:
а) $a=5$, $b=4$, $c=4$; б) $a=17$, $b=8$, $c=15$; в) $a=9$, $b=5$, $c=6$.
Тезкунҷа, кундкунҷа ё ки росткунҷа буданашро муайян кунед.

4. Радиуси давраи ба секунҷаи тарафҳояш а) 13, 14, 15; б) 15, 13, 4; в) 35, 29, 8; г) 4, 5, 7 буда берункашидашударо ёбед.

5. Дар тарафи AB-и секунҷаи ABC нуқтаи D дода шудааст. Порчаи CD ҳеҷ набошад аз яке порчаҳои AC ва BC хурд буданашро исбот кунед.

6. Дар муқобили кунҷи калони секунҷа тарафи калон хобиданашро исбот кунед.

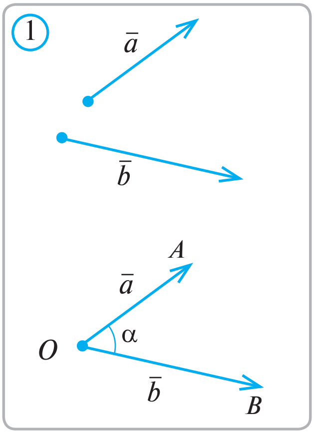
7. Дар муқобили тарафи калони секунҷа кунҷи калон хобиданашро исбот кунед.

8*. Дар секунҷаи ABC медиана CD гузаронида шудааст. Агар $AC>BC$ бошад, кунҷи ACD аз кунҷи BCD хурд буданашро исбот кунед.

9. Дар асоси расм масъалаи мувофиқ тартиб диҳед.

34 ҲИСОБ КАРДАНИ КУНҶИ БАЙНИ ДУ ВЕКТОР

Шумо дар синфи 8 ба мафҳуми зарби скалярии вектор ва хосиятҳои онҳо шинос шуда будед. Зарби скалярии ду вектор бо ёрии координатаҳои он ифода карда мешуд. Ҳоло мо аз теоремаи косинусҳо истифода бурда боз як формулаи асосиро барои зарби скалярии векторҳо ҳосил мекунем. Дар он зарби скалярии бо ёрии дарозии вектор ва кунҷи байни онҳо ифода карда мешавад.


①

Бигузор векторҳои $\bar a$ ва $\bar b$- аз вектори сифри (нули) фарқкунанда дода шуда бошад. Ба нуқтаи дилхоҳи O векторҳои $\overline{OA}=\bar a$ ва $\overline{OB}=\bar b$ -ро мегузорем. Кунҷи байни векторҳои $\bar a$ ва $\bar b$ гуфта кунҷи AOB гуфта мешавад *(расми 1)*. Кунҷи байни векторҳои самташон якхела ба 0° баробар аст.

Агар кунҷи байни ду вектор ба 90° баробар бошад, онҳоро **перпендикуляр** меноманд.

Ба ёд меорем:

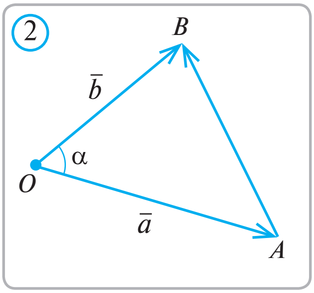
1. Дарозии вектори $\bar a(a_1;a_2)$

$$|\bar a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

2. Зарби скалярии векторҳои $\bar a(a_1;a_2)$ ва $\bar b(b_1;b_2)$

$$\bar a\bar b=a_1b_1+a_2b_2$$

бо ҳамин формулаҳо ҳисоб карда мешуд.


②

Векторҳои коллинеарии набудаи $\bar a$ ва $\bar b$ -ро дида мебароем. Ба нуқтаи дилхоҳи O векторҳои $\overline{OA}=\bar a$ ва $\overline{OB}=\bar b$-ро мегузорем *(расми 2)*. $\angle AOB=\alpha$ бошад, он гоҳ аз як тараф дар асоси теоремаи косинусҳо

$$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cos\alpha. \qquad (1)$$

Аз тарафи дуюм

$$AB^2=|\overline{AB}|^2=|\overline{OB}-\overline{OA}|^2=(\overline{OA}-\overline{OB})^2=\overline{OA}^{\,2}+\overline{OB}^{\,2}-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}. \qquad (2)$$

Бинобар ин, дар асоси баробариҳои (1) ва (2) $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=OA\cdot OB\cos\alpha$ ё ки $\bar a\bar b=|\bar a|\cdot|\bar b|\cos\alpha$.

Натиҷа. Барои а векторҳои аз сифр (нул) фарқ кунандаи $\bar a(a_1;a_2)$ ва $\bar b(b_1;b_2)$ барои кунҷи байни векторҳои

$$\cos\alpha=\frac{\bar a\bar b}{|\bar a|\cdot|\bar b|} \quad \text{ё ки} \quad \cos\alpha=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

формулаҳои зерин ҷой дорад.

Масъала. Кунҷи байни векторҳои $\bar a$ (1; 2) ва $\bar b$ (4; -2)-ро ёбед.

Ҳалли он. Фара мекунем, ки кунҷи байни векторҳо α бошад, дар асоси формула,

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{4-4}{\sqrt5\cdot\sqrt{20}}=0.$$

Пас $\alpha=90°$. ***Ҷавоб:*** 90°.

Савол, масъала ва супориш

1. Агар барои векторҳои $\bar a$ ва $\bar b$ **а)** $a=4$, $b=5$, $\alpha=30°$; **б)** $a=8$, $b=7$, $\alpha=45°$; в) $a=2{,}4$, $b=10$, $\alpha=60°$; г) $a=0{,}8$, $b=\frac{1}{4}$, $\alpha=40°$ бошад, зарби скалярии ин векторҳоро ёбед (дар ингр α — кунҷи байни векторҳои $\bar a$ ва $\bar b$).

2. Зарби скаляри векторҳои а) $\bar a(\frac{1}{4};-1)$ ва $\bar b(2;3)$; б) $\bar a(-5;6)$ ва $\bar b(6;5)$; в) $\bar a(1{,}5;2)$ ва $\bar b(4;-2)$ -ро ҳисоб намуда кунҷи байни онҳоро ёбед.

3. Диагоналҳои ромби *ABCD* дар нуқтаи *O* якдигарро мебурад ва дар он *BD*=*AB*=4 *см*. Зарби скалярии векторҳои.

а) $\overline{AB}$ ва $\overline{AD}$; б) $\overline{AB}$ ва $\overline{AC}$; в) $\overline{AD}$ ва $\overline{DC}$; г) $\overline{AC}$ ва $\overline{OD}$ ва кунҷи байни онҳоро ёбед.

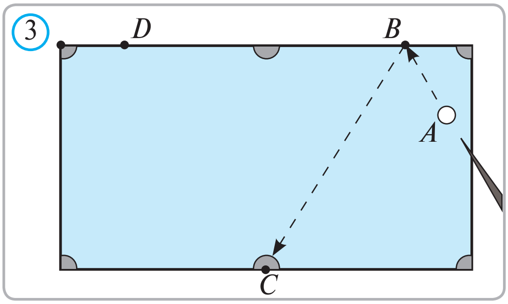
4. Бигузор вектори аз вектори сифр фарқ кунандаи $\bar a$ ва $\bar b$ дода шуда бошад. Агар $\bar a\cdot\bar b=0$ бошад, ин векторҳо перпендикуляр ва агар векторҳои $\bar a$ ва $\bar b$ перпендикуляр бошад, $\bar a\cdot\bar b=0$ буданашро исбот кунед.

5*. Ба кадом қимати *x* векторҳои: а) $\bar a(4;5)$ ва $\bar b(x;6)$; **б)** $\bar a(x;1)$ ва $\bar b(3;2)$; **в)** $\bar a(0;-3)$ ва $\bar b(5;x)$ байни худ перпендикуляранд?

6. Ҷуфти байни худ перпендикуляро аз байни векторҳои зерин ёбед. $\bar a(3;3)$, $\bar b(2;-2)$, $\bar c(-1;-4)$ ва $\bar d(-4;1)$.

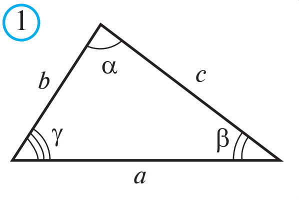
7. Баробари $a^2=|a|^2$ -ро исбот кунед.

8*. Дар бозии биллиард (билярд) тӯпчаи дар нуқтаи *A* буда баъди зарба ба нуқтаи *B* -и стол бархӯрда самташ тағйир ёфт ва ба сабадчаи дар нуқтаи *C* буда афтод (*расми 3*). *AB*=40 *см*, *BC*=150 *см* ва ∠*ABD*=120° бошад, зарби скалярии $\overline{AB}\cdot\overline{BC}$ -ро ёбед.



9. Бо таъсири қувваи *F*(-3, 4) нуқта аз ҳолати (намуди) *A*(5,-1) ба ҳолати *B*(2, 1) мегузарад. Дар ин ҷараён чӣ хел кор иҷро шуд?

35 ҲАЛЛИ СЕКУНҶАҲО



Тарафҳои секунҷаро бо *a, b, c* ва кунҷи муқобили ин тарафҳоро бо равиши мувофиқ α, β, γ ишора мекунем *(расми 1)*. 1) Тарафҳо ва кунҷҳои секунҷаро бо як ном — **элементҳои** секунҷа мегуянд.

Аз рӯи элементи додашудаи муайянкунандаи секунҷа ёфтани элементҳои боқимондаи дигар **ҳалли секунҷаҳо** номида мешавад.

Масъалаи 1. (Ҳалли секунҷа аз рӯи як тарафи додашуда ва кунҷҳои ба он часпида). Агар дар секунҷа $a=6$, $\beta=60^\circ$ ва $\gamma=45^\circ$ бошад, кунҷи сеюми он ва ду тарафи боқимондаро ёбед.

Ҳалли он. **1.** Ҳосили ҷамъи кунҷҳои дарунии секунҷа 180° буданаш

$$\alpha=180^\circ-\beta-\gamma=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ.$$

Дар ҳолати донистани як тараф ва се кунҷи он аз теоремаи синусҳо истифода бурда, ду тарафи боқимондаро меёбем:

2. $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ аз ин баробари $b=a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=6\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}\approx 6\cdot\frac{0,8660}{0,9659}\approx 5,3794\approx 5,4.$

(қиматҳои sin60° ва sin75° бо ёрии калкулятори махсус ё ки аз ҷадвали саҳифаи 153 китоби дарсӣ гирифта ҳисоб карда мешавад).

3. $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$ аз баробари $c=a\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=6\cdot\frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}\approx 6\cdot\frac{0,7071}{0,9659}\approx 4,3924\approx 4,4.$

Ҷавоб: $\alpha=75^\circ$; $\beta\approx 5,4$; $c\approx 4,4$.

Масъалаи 2. (Ҳалли секунҷа мувофиқи ду тараф ва кунҷи байни онҳо). Агар дар секунҷа $a=6$, $b=4$ ва $\gamma=120^\circ$ бошад, тарафи сеюм ва кунҷҳои боқимондаро ёбед.

Ҳалли он. **1.** Аз теоремаи косинусҳо истифода бурда, *c* тарафи сеюми онро меёбем.

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=\sqrt{36+16-2\cdot 6\cdot 4\cdot(-0,5)}=\sqrt{76}\approx 8,7.$$

2. Акнун дар ҳолати донистани се тарафи секунҷа аз теоремаи косинусҳо истифода бурда, кунҷҳои боқимондаи секунҷаро меёбем.

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4^2+76-6^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{76}}\approx 0,8046.$$

$\cos\alpha\approx 0,8046$ аз ин баробарӣ қимати кунҷи α -ро аз ҷадвал муайян мекунем (α — кунҷи тез): $\alpha\approx 36^\circ$.

3. $\beta=180^\circ-\alpha-\gamma\approx 180^\circ-(36^\circ+120^\circ)=24^\circ$. ***Ҷавоб:*** $c\approx 8,7$; $\alpha\approx 36^\circ$, $\beta\approx 24^\circ$.

Масъалаи 3. (Ҳалли секунҷа аз рӯи се тарафи додашуда). Агар дар секунҷа $a=10$, $b=6$ ва $c=13$ бошад, кунҷҳои онро ёбед.

Ҳалли он. Кунҷи кунд доштан ё надоштани секунҷаро аз рӯи ишораи косинуси кунҷи тарафи муқобил аниқ мекунем:

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{100+36-169}{2\cdot 10\cdot 6}=-\frac{33}{120}\approx-0{,}275<0.$$

Аз ин рӯ C — кунҷи кунд будааст. Инро ҳангоми муайян кардани бузургии кунҷи C аз ҷадвал ба ҳисоб мегирем. Аз ҷадвал $\angle C_1=74^\circ$ буданашро меёбем. Он гоҳ $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$.

$$\angle C=180^\circ-\angle C_1=180^\circ-74^\circ=106^\circ.$$

2. Дар асоси теоремаи синусҳо

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$. Аз он $\sin A=\dfrac{a\cdot\sin C}{c}=\dfrac{10\cdot\sin 106^\circ}{13}=\dfrac{10\cdot\sin 74^\circ}{13}\approx\dfrac{10\cdot 0{,}9615}{13}\approx 0{,}7396.$

A — аз сабаби кунҷи тез шуданаш, аз ҷадвал $\angle A\approx 47^\circ$ буданашро аниқ мекунем.

3. $\angle B\approx 180^\circ-(106^\circ+47^\circ)=26^\circ$. ***Ҷавоб:*** $\angle A\approx 47^\circ$, $\angle B\approx 26^\circ$, $\angle C\approx 106^\circ$.

Савол, масъала ва супориш

1. Як тараф ва ду кунҷи ба он часпидаи секунҷа дода шудааст:
а) $a=5$ *см*, $\beta=45^\circ$, $\gamma=45^\circ$; б) $a=20$ *см*, $\alpha=75^\circ$, $\beta=60^\circ$;
в) $a=35$ *см*, $\beta=40^\circ$, $\gamma=120^\circ$; **г)** $b=12$ *см*, $\alpha=36^\circ$, $\beta=25^\circ$.
Кунҷи сеюм ва ду тарафи боқимондаи секунҷаро ёбед.

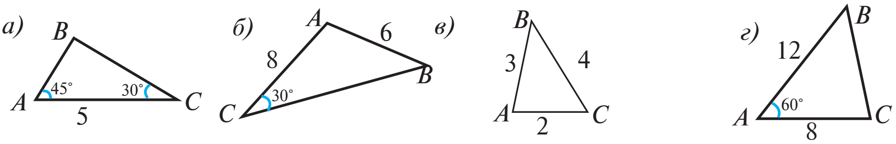
2. Ду тараф ва кунҷи байни онҳо дода шудааст:
а) $a=6$, $b=4$, $\gamma=60^\circ$; б) $a=14$, $b=43$, $\gamma=130^\circ$;
в) $b=17$, $c=9$, $\alpha=85^\circ$; **г)** $b=14$, $c=10$, $\alpha=145^\circ$.
Кунҷҳои боқимонда ва тарафи сеюми секунҷаро ёбед.

3. Се тарафи секунҷа дода шудааст:
а) $a=2$, $b=3$, $c=4$; б) $a=7$, $b=2$, $c=8$;
в) $a=4$, $b=5$, $c=7$; **г)** $a=15$, $b=24$, $c=18$.
Кунҷҳои секунҷаро ёбед.

4. Ду тарафи секунҷа ва кунҷи муқобили яке аз ин тарафҳо дода шудааст. Тарафҳо ва кунҷҳои боқимондаи секунҷаро ёбед.
а) $a=12$, $b=5$, $\alpha=120^\circ$; б) $a=27$, $b=9$, $\alpha=138^\circ$;
в) $b=2$, $c=2$, $\alpha=60^\circ$; **г)** $b=6$, $c=8$, $\alpha=30^\circ$.

5. Дар асоси маълумотҳои дар (расми 2) додашуда, секунҷаро ҳал кунед.

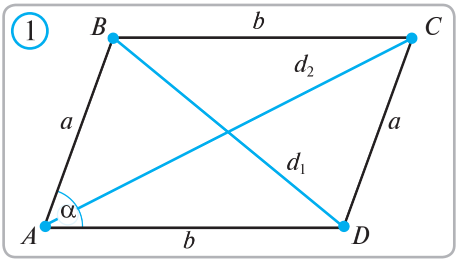
②



36 ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

Масъалаи 1. Исбот кунед, ки ҳосили ҷамъи квадрати диагоналҳои параллелограмм ба ҳосили ҷамъи квадрати тарафҳо баробар аст.

ABCD — параллелограмм, AB$=a$, $AD=b$, $BD=d_1$, $AC=d_2$ *(расми 1)* ⇒ $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$



Ҳалли он. Кунҷи A-и параллелограмми $ABCD$ бигузор баробарии α бошад. Он гоҳ $\angle B=180°-\alpha$. Ба секунҷаҳои ABD ва ABC теоремаи косинусҳоро татбиқ мекунем *(расми 1):*

$$d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha, \qquad (1)$$

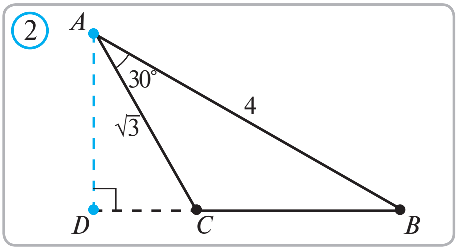
$$d_2^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\alpha).$$

$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ ин баробариро ба ҳисоб гирем,

$$d_2^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Қисмҳои мувофиқи баробариҳои (1) ва (2)-ро ҷамъ намуда, баробарии $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$ -ро ҳосил мекунем.

Масъалаи 2. Дар секунҷаи ABC $\angle A=30°$, $AB=4$, $AC=\sqrt{3}$ бошад, баландии аз қуллаи A гузаронидашуда AD ёфта шавад.



Ҳалли он. 1) Аз теоремаи косинусҳо истифода бурда, тарафи секунҷа BC-ро меёбем:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=$$
$$=4^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos30°=7, \qquad BC=\sqrt{7}.$$

2) Акнун масоҳати секунҷаро меёбем:

$$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot4\cdot\sin30°=\sqrt{3}.$$

3) Аз қиматҳои ёфташуда истифода бурда, баландии AD-ро меёбем:

$S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD$ аз ин формула $AD=\frac{2S}{BC}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. **Ҷавоб:** $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Масъалаи 3. Ронанда қоидаи ҳаракати роҳро вайрон намуда, соати 12^{00} аз нуқтаи A-и кӯча ба тарафи кӯчаи Алмазор тоб хӯрда, бо суръати 140 км/соат ҳаракати худро давом дод *(расми 3)*. Соати 12^{00} корманди НДА (назорати давлатии автомобили) аз нуқтаи B роҳи сангфарш барои бурида баромадани роҳи ронандаи қоидавайронкун бо суръати 70 *км/соат* ба ҳаракат даромад. Корманди НДА дар чорраҳа, яъне дар нуқтаи C ронандаи қоидавайронкардаро оё нигоҳ дошта метавонад?

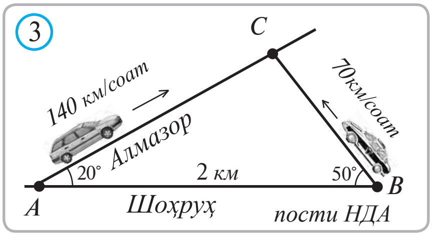
Ҳалли он: Дар секунҷаи ABC

$$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-(20^\circ+50^\circ)=180^\circ-70^\circ=110^\circ.$$

1. Дарозии қисми АС-и роҳи кӯчаи Алмазорро меёбем. Дар асоси теоремаи синусҳо $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$. Аз ин баробарии $AC=\frac{AB\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{2\cdot\sin50^\circ}{\sin110^\circ}=\frac{2\cdot\sin50^\circ}{\sin(90^\circ+20^\circ)}=$ $=\frac{2\cdot\sin50^\circ}{\cos20^\circ}\approx\frac{2\cdot0{,}766}{0{,}940}=\frac{1{,}532}{0{,}94}\approx1{,}630$ (*км*). Ин роҳро ронандаи қоидавайронкун дар $\frac{1{,}630\ \text{км}}{140\ \text{км/соат}}\approx0{,}0116$ *соат*$=0{,}012\cdot3600$ *сония*≈42 сония тай мекунад.

2. Акнун дарозии роҳи BC-и санг фаришро меёбеи: мувофиқи теоремаси синусқо, $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$. Аз ин баробарӣ $BC=\frac{AC\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{2\cdot\sin20^\circ}{\sin50^\circ}=\frac{2\cdot0{,}342}{0{,}766}\approx0{,}893$ (*км*).

Ин роҳро ходими НДА дар $\frac{0{,}893\ \text{км}}{70\ \text{км/соат}}\approx0{,}0128$ *соат*$=0{,}0128\cdot3600$ *солия*≈46 *солия тай мекунад*. Пас, корманди НДА дар чорроҳаи C баъд аз ронанда омада мерасад **Ҷавоб:** Не.



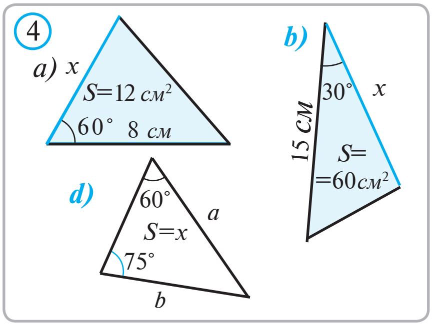
? *Савол, масъала ва супориш*

1. Дар асоси маълумотҳои расми 4 қимати x-ро ёбед.

2. Баландии секунҷаи ABC CD ба 4 *м* баробар аст. Агар $\angle A=45^\circ$, $\angle B=30^\circ$ бошад, тарафҳои секунҷаро ёбед.

3. Ба як нуқта ду қувваи бузургиашон якхела гузошта шудаанд *(расми 5)*. Агар кунҷи байни самтҳои ин қувваҳо 60° баробартаъсиркунандаи ин қувваҳо 150 *кг* бошад, бузургии қувваҳоро муайян кунед.

4. Ду тарафи секунҷа 7 *дм* ва 11 *дм*, медианаи ба тарафи сеюм гузаронидашуда 6 *дм* аст. Тарафи сеюми секунҷаро ёбед.

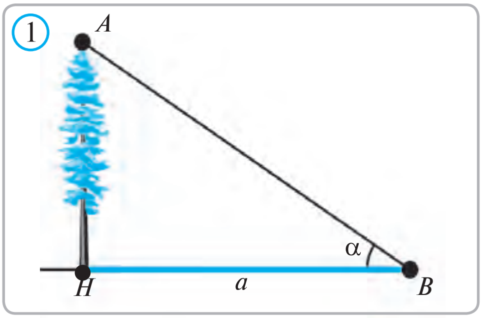


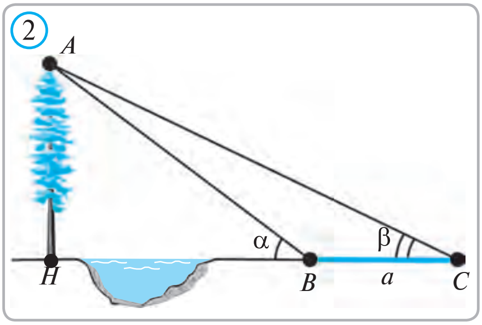
5. Яке аз диагоналҳои параллелограмми тарафҳояш 6 *см* ва 8 *см* буда 12 *см* бошад, диагонали дуюми онро ёбед.

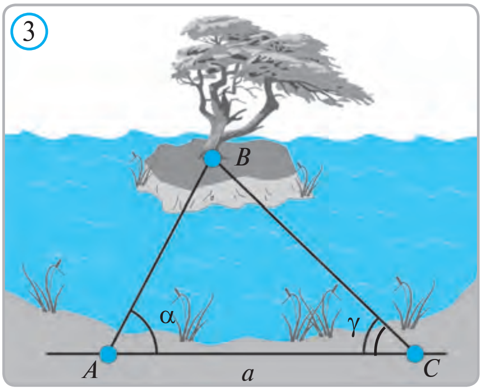
6. Муқобили тарафи 12 *см* будаи секунҷа ба кунҷи 60° баробар аст. Радиуси давраи ба секунҷа берункашидашударо ёбед.

7. Асоси хурди трапетсияи баробарпаҳлу ба тарафи паҳлуӣ баробар буда, асоси калонаш 20 *см* аст. Агар яке аз кунҷҳои трапетсия 120° бошад, периметри онро ёбед.

37 ТАТБИҚИ УСУЛҲОИ ҲАЛЛИ СЕКУНҶАҲО ДАР АМАЛ







1. Чен кардани баландӣ. Бигузор баландии ягон ашё (масалан дарахт) AH-ро чен кардан зарур бошад (*расми 1*).

а) Барои ин нуқтаи B-ро мегирем ва масофаи BH a, инчунин кунҷи HBA α -ро чен мекунем. Он гоҳ дар секунҷаи росткунҷаи

$$ABH\ AH=BH\,\mathrm{tg}\alpha=a\,\mathrm{tg}\alpha.$$

б) Агар асоси баландӣ-нуқтаи H дар масофаи дастнорас бошад *(расми 2)*, бо усули болоӣ баландии AH-ро муайян карда наметавонем. Аз ин рӯ, ин тавр рафтор мекунем.

1) Ду нуқтаи B ва C-ро, ки бо нуқтаи H дар як хати рост мехобад, мегирем.

2) Масофаи BC-ро чен карда α -ро меёбем.

3) Кунҷҳои ABH ва ACH-ро чен намуда, $\angle ABH=\alpha$ ва $\angle ACH=\beta$-ҳоро меёбем.

4) Ба секунҷаи ABC теоремаи синусҳоро татбиқ кунем ($\angle BAC=\alpha-\beta$)

$$\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin(\alpha-\beta)}, \quad \text{яъне } AB=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

5) Баландии AH-ро аз секунҷаи росткунҷаи ABH меёбем.

$$AH=AB\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

2. Ҳисобкунии масофа то нуқтаи дастнорас. Бигузор аз нуқтаи A то нуқтаи дастнорас B масофаро ҳисоб намудан лозим ояд *(расми 3)*. Ин масъаларо аз аломатҳои монандии секунҷаҳо истифода бурда, ҳал карданамонро хотиррасон мекунем. Акнун ин масъаларо аз теоремаи синусҳо истифода бурда, ҳал мекунем.

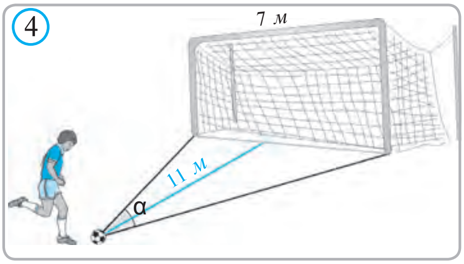
1) Дар ҷои ҳамворе, ки нуқтаҳои A ва B намудоранд, нуқтаи C-ро мегирем.
2) Масофаи AC-ро чен мекунем: $AC=a$.
3) Бо ёрии асбобҳо кунҷҳои ACB ва BAC-ро чен мекунем. $\angle BAC=\alpha$, $\angle BAC=\gamma$.
4) Дар секунҷаи ABC $\angle B=180°-\alpha-\gamma$ буданашро ба ҳисоб гирем,

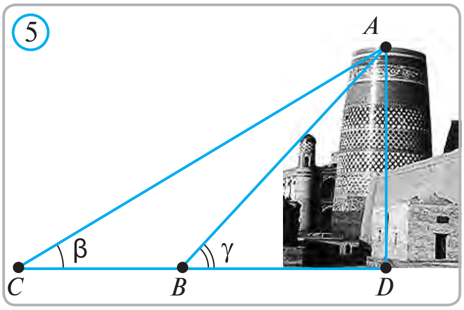
$$\sin B = \sin(180^\circ - \alpha - \gamma) = \sin(\alpha + \gamma).$$

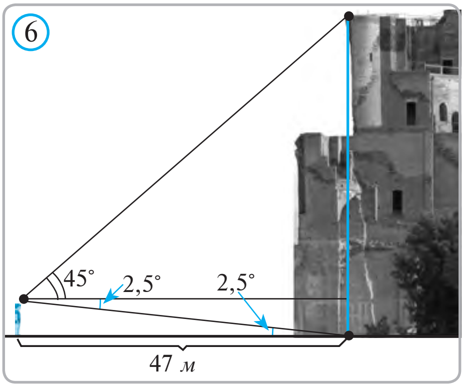
Дар асоси теоремаи синусҳо $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$ ё ки $AB = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

Савол, масъала ва супориш

1. Дар расми 1 $a=12$ *м*, $\alpha=42^\circ$ бошад, баландии дарахтро ҳисоб кунед.
2. Дар расми 2 $a=8$ *м*, $\alpha=43^\circ$, $\beta=32^\circ$ бошад, баландии дарахтро ҳисоб кунед.
3. Дар расми 3 $a=60$ *м*, $\alpha=62^\circ$, $\gamma=44^\circ$ бошад, масофаи AB-ро ёбед.
4. Дар бозии футбол тӯби ҷаримавии 11 *м*-ро бо кадом кунҷи α ба дарвоза равона кардан лозим, ёбед. Васеъгии дарвоза 7 *м* (*расми 4*).
5. Дар расми 5 Калтаманораи шаҳри Хева тасвир ёфтааст. Агар $\beta=45^\circ$, $\gamma=24^\circ$, $BC=50$ *м* бошад, баландии Калтаманораро ёбед.
6. Сайёҳ Оқсаройи шаҳри Шаҳрисабзро аз масофаи 47 *м* тамошо мекунад (*расми 6*). Агар ба он асоси Оқсарой нисбат ба горизонт (уфуқ) тахти кунҷи 2,5° баландии он бошад, тахти кунҷи 45° намуда истода бошад, баландии Оқсаройро ёбед.
7. Се роҳ секунҷаи ABC-ро ташкил мекунад. Дар ин секунҷа $\angle A=20^\circ$, $\angle B=150^\circ$. Ронандаи аз нуқтаи A ба роҳ баромада то қадри имкон ба нуқтаи C тезтар омада расиданӣ аст. Роҳҳои AC ва CB сангфарш, AB роҳи асфалтфарш буда, дар роҳи асфалт нисбат ба сангфарш ду маротиба тез ҳаракат намудан мумкин. Ба ронанда бо кадом роҳ рафтанро маслиҳат медодед?







Масъалаи шавқовар. **Боз як «исботи» нави теоремаи Пифагор**

Дар секунҷаи росткунҷаи ABC (*расми 7*) $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$. Ин ду баробариро ба квадрат бардошта, аъзо ба аъзо ҷамъ кунему $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ буданашро ба ҳисоб гирем, $a^2 + b^2 = c^2\sin^2\alpha + c^2\cos^2\alpha = c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = c^2$. Бинобар ин, $a^2 + b^2 = c^2$. Мантиқан нодуруст будани ин «исбот»-ро исбот кунед.

38–39 МАЪЛУМОТ ВА МАСЪАЛАҲОИ ИЛОВАГӢ ДОИР БА БОБИ II

I. Тестҳо

1. Ба секунҷаи тарафҳояш a, b, c, кунҷҳояш мувофиқан α, β, γ, масоҳаташ S кадоме аз формулаҳо нодуруст?

А. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$; Б. $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$;

В. $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$; Г. $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

2. Баробари нодурустро ёбед.

А. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; Б. $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$;

В. $\cos(180°-\alpha)=\cos\alpha$; Г. $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$.

3. Се тарафи секунҷа маълум бошад, аз кадом теорема истифода бурда, кунҷҳои онро ёфтан мумкин?

А. Теоремаи синусҳо; Б. Теоремаи косинусҳо;

В. Теоремаи Фалес; Г. Формулаи Герон;

4. Як кунҷи секунҷа ба $137°$ кунҷи дуюмаш ба $15°$ баробар аст. Агар тарафи калони ин секунҷа ба 22 баробар бошад, тарафи хурди онро ёбед.

А. 8,3; Б. 9,3; В. 3,8; Г. 6,5.

5. Кунҷи байни секунҷаи тарафҳояш ба 14 ва 19 баробар буда $26°$ аст. Тарафи сеюми ҳамин секунҷаро ёбед.

А. 1,2; Б. 5,4; В. 6,9; Г. 19,7.

6. Агар дарозиҳои ду вектор $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=5$ ва кунҷи байни онҳо $45°$ бошад, зарби скалярии векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$-ро ёбед.

А. 52; Б. 32 В. 102; Г. 2.

7. Зарби скалярии векторҳои $\bar{a}(4;\ -1)$ ва $\bar{b}(2;\ 3)$.

А. 5; Б. 3; В. 4; Г. 9.

8. Кунҷи байни векторҳои $a(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2})$ ва $b(\sqrt{3};\ 1)$

А. 30°; Б. 60°; В. 90°; Г. 45°.

9. Нисбати кунҷҳои секунҷа ба 3:2:1 бошад, нисбати тарафҳои онро ёбед.

А. 3:2:1; Б. 1:2:3; В. $2:\sqrt{3}:1$; Г. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$.

10. Радиуси давраи берункашидашудаи секунҷаи мунтазами тарафаш 3 см бударо ёбед.

А. $\sqrt{3}$; Б. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ В. $2\sqrt{3}$; Г. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

II. Масъалаҳо

1. Дар секунҷаи ABC $AB=6$ см; $\angle A=60°$, $\angle B=75°$. Тарафи BC ва радиуси давраи ба секунҷаи ABC берункашидашударо ёбед.

2. Косинуси кунҷҳои секунҷаи тарафҳояш 5 *м*,6 *м* ва 10 *м*-ро ҳисоб кунед.

3. Дар секунҷаи ABC $\angle B=60°$, $AB=6$ *см*, $BC=4$ *см*. Тарафи AC ва радиуси давраи берункашидашуда ба секунҷаи ABC-ро ёбед.

4. Радиуси давраи ба секунҷаи тарафҳояш 51 *см*, 52 *см* ва 53 *см* берункашидашударо ёбед.

5. Ду тарафи секунҷа 14 *см* ва 22 *см*, медианаи ба тарафи сеюм гузаронидашуда бошад 12 *см*. Тарафи сеюми секунҷаро ёбед.

6. Диагоналғои параллелограмм 4 *см* ва $4\sqrt{2}$ *см* кунҷи байни онҳо 45°. а) масоҳат; б) периметр; в) баландиҳои параллелограммро ёбед.

7. Яке аз диагоналҳои параллелограмми тарафҳояш 3 ва 5 баробари 4 аст. Диагонали дуюми онро ёбед.

8. Намуди секунҷаи тарафҳояш а) 2, 2 ва 2,5; б) 24, 7 ва 25; в) 9, 5 ва 6 будаþро муайян кунед.

9. Тарафҳои параллелограмм $7\sqrt{3}$ ва 6 *см*. Агар кунҷи кунди он 120° бошад, масоҳати онро ёбед.

10. Дар тарафҳои AB,BC секунҷаи ABC нуқтаҳои N,K гирифта шудаанд. Дар он $BN=2AN$,$3BK=2KC$.Агар $AB=3$,$BC=5$,$CA=6$ бошад, порчаи MK-ро ёбед.

11. Дар секунҷаи ABC $\angle A=30°$, $BC=7$ *см*. Радиуси давраи ба секунҷа берункашидашударо ёбед.

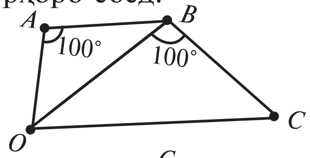
12. Дар секунҷаи ABC биссектрисаи BE гузаронида шудааст.Аз нуқтаи E ба тарафи BC перпендикуляри EF фуроварда шудааст. Агар $EF=3$, $\angle A=30°$ бошад,AE-ро ёбед.

13. Миёнаҳои тарафи AD-и росткунҷаи $ABCD$ дар нуқтаи N аст. Агар AB=3, BC=6 бошад, зарби скалярии $\overline{NB}\cdot\overline{NC}$-ро ёбед.

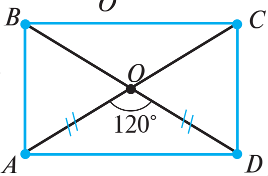
14. $\bar{a}(2;x)$, $\bar{b}(-4;1)$ буда, векторҳои $\bar{a}+\bar{b}$ ва $\bar{b}$ перпендикуляранд. x-ро ёбед.

15. $\bar{m}(7;3)$ ва $\bar{n}(-2;-5)$ бошад, кунҷи байни ин векторҳоро ёбед.

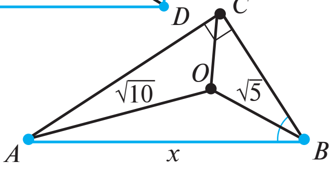
16. Аз бузургии дар расм дода шуда истифода бурда, порчаи аз ҳама калонтаринро ёбед.



17. Диагоналҳои росткунҷаи $ABCD$ ҳамдигарро дар нуқтаи O мебуранд. Агар AO=12 *см*, $\angle AOD$=120° бошад, периметри росткунҷаро ҳисоб кунед.



18. Биссектрисаҳои секунҷаи росткунҷаи ABC якдигарро дар нуқтаи O мебуранд ($\angle C=90°$). Агар $OA=\sqrt{10}$, $OB=\sqrt{5}$ бошад, гипотенузаи AB-ро ёбед.



III. Худатонро санҷида бинед (Кори назоратии намунавӣ)

1. Кунҷи аз ҳама калони секунҷаи тарафҳояш $a=45$, $b=70$, $c=95$-ро ёбед.
2. Дар секунҷа $b=5$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=50^\circ$ бошад, онро ҳал намоед.
3. Дар секунҷаи PKH $PK=6$, $KH=5$, $\angle PKH=100^\circ$. Дарозии медианаи HF ва масоҳати секунҷаи PFH-ро ёбед.
4. *(Илова)*. Дар секунҷа $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $\alpha=135^\circ$ бошад, кунҷи β -ро ёбед.

Лавҳаҳои таърихӣ. **Дар бораи синус**

Маълумотҳои аввалин оид ба синус дар асарҳои ситорашиносони асри IV–V-и ҳинд вомехӯранд. Олимони Осиёи Миёна Ал Хоразмӣ, Берунӣ, Ибни Сино, Абдураҳмон ал Ҳазинӣ (асри IX) барои синус мафҳуми «ал-ҷайб»-ро истифода бурдаанд.

Ишораи ҳозираи sin-ро Симпсон, Эйлер, Даламбер, Лагранҷ (асри XVII) ва дигарон истифода бурдаанд.

Мафҳуми «косинус» аз лотинии «kompliment sinus» кӯтоҳ карда гирифта шуда, маънои «синуси иловагӣ», аниқтараш «синуси камони иловагӣ»-ро дорад.

Теоремаи косинусҳоро юнониёни қадим ҳам медонистанд, исботи он дар асари «Решаҳо»-и Эвклид оварда шудааст. Исботи теоремаи синусҳоро Абурайҳон Берунӣ баён кардааст.

Лавҳаҳои таърихӣ. Берунӣ (номи пуррааш Абурайҳон Берунӣ Муҳаммад ибни Аҳмад) — олими бузурги қомусии асри миёна. Вай дар кишвари Хоразм, шаҳри Қиёт ба дунё омадааст. Он дар соҳили рости Амударё дар ҷои шаҳри ҳозираи Берунӣ ҷой гирифта буду то вактҳои наздик онро Шаббоз мегуфтанд. Ҳиссаи гузоштаи Беруниро ба математика ва соҳаҳои дигари фан аз зиёда аз 150 асари навиштаи он дидан мумкин. Калонтарини онҳо — «Ҳиндустон», «Ёдгориҳо», «Қонунҳои Масъуд», «Геодезия», «Минералогия» ва «Астрономия».

Берунӣ
(973 — 1048)

Шоҳасари Берунӣ «Қонунҳои Масъуд» асосан оиди астрономия бошад ҳам, кашфиётҳои зиёди он оиди математика дар ҳамин асар баён шудаанд.

Дар ин асараш Берунӣ синуси сумма ва фарқи ду кунҷ теоремаҳо дар бораи кунҷи дучанда ва нисфи кунҷ, инчунин теоремаҳо оиди хордаҳоро исбот кардааст, хордаи ду градусро ҳисоб намудааст, ҷадвали синусҳо ва тангенсҳоро сохтааст, теоремаи синусҳоро исбот намудааст.

БОБИ III

ДАРОЗИИ ДАВРА ВА МАСОҲАТИ ДОИРА

Дар натиҷаи омӯзиши ин боб Шумо ба дониш ва малакаи амалии зерин соҳиб мегардед:

Донишҳо:

- √ *донистани хосиятҳои давраи бо бисёркунҷа дарун ва берункашидашуда;*
- √ *донистани хосиятҳои бисёркунҷаҳои мунтазам;*
- √ *донистани формулаҳои ҳисоб кардани масоҳати бисёркунҷаҳои мунтазам;*
- √ *донистани формулаи ҳисоб кардани дарозии камони давра ва давра;*
- √ *донистани доира ва формулаи масоҳати қисмҳои он;*
- √ *донистани ченаки радиании кунҷ.*

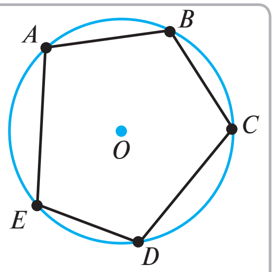
Малакаи амалӣ:

- √ *тасвир карда тавонистани бисёркунҷаи мунтазам;*
- √ *ёфта тавонистани радиусҳои давраи ба бисёркунҷа дарун ва берункашидашуда;*
- √ *ҳисоб карда тавонистани дарозии давра ва камонҳои он;*
- √ *ҳисоб карда тавонистани доира ва қисмҳои он.*

40

БИСЁРКУНҶАҲОИ АЗ ДАВРА ДАРУНКАШИДАШУДА

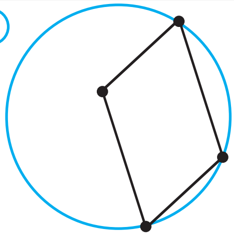
Таъриф. Агар ҳамаи қуллаҳои бисёркунҷа дар давра хобад, ин бисёркунҷа ба давра дарункашидашуда, давра бошад, ба бисёркунҷа берункашидашуда номида мешавад *(расми 1)*.

①


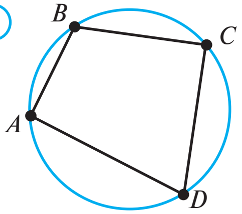
Ба давра дарункашидашуда панчкунҷаи. Панчкунҷаи ба бисёркунҷа берункашидашуда.

Бо секунҷаи дилхоҳ давраи дарункашидашуда кашидан мумкин буданаш ва маркази ин давра дар нуқтаи буриши перпендикуляри миёнаи тарафҳои секунҷа хобиданашро дар синфи 8 омӯхтед.

Агар шумораи тарафҳои бисёркунҷа аз се зиёд бошад, ҳар доим ҳам бо бисёркунҷа давраи берункашидашуда кашидан ичро намегардад. Масалан, барои параллелограмми аз росткунҷа фарққунанда давраи берункашидашуда мавҷуд нест *(расми 2)*.

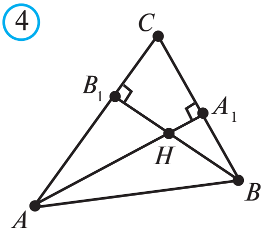
②


Аз синфи 8 маълум аст, ки ба чоркунҷа фақат дар ҳолати ҳосили ҷамъи кунҷҳои муқобил 180° будан давраи берункашидашуда кашидан мумкин *(расми 3)*.

③


$\angle A + \angle C = 180^\circ$
$\angle B + \angle D = 180^\circ$

Масъалаи 1. Баландиҳои секунҷаи тезкунҷаи ABC AA_1 ва BB_1 дар нуқтаи H бурида мешаванд. Исбот кунед, ки чоркунҷаи A_1HB_1C ба давра дарун кашида шудааст.

④


Ҳалли он. $AA_1 \perp BC$ ва $BB_1 \perp AC$ буданаш (*расми 4*).

$$\angle HB_1C = \angle HA_1C = 90^\circ.$$

Он гоҳ $\angle HB_1C + \angle HA_1C = 180^\circ$. Ҳосили ҷамъи кунҷҳои дарунии чоркунҷа 360° буданаш

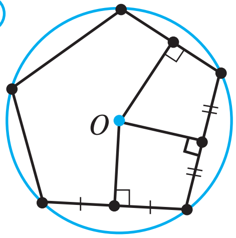
$$\angle B_1CA_1 + \angle B_1HC = 180^\circ.$$

Аз ин рӯ, бо чоркунҷаи A_1HB_1C давраи берункашидашуда кашидан мумкин.

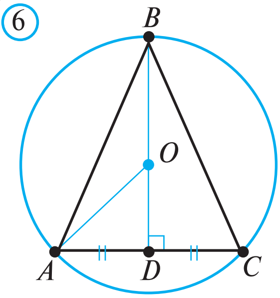
Аз сабаби қуллаҳои бисёркунҷаи ба давра дарункашидашуда аз маркази давра дар масофаи якхела хобиданаш маркази давра дар перпендикуляри миёнаи тарафҳои бисёркунҷа мехобад *(расми 5)*.Аз ин рӯ, перпендикулярҳои ба миёначои тарафҳои бисёркунҷаи ба давра дарункашидашуда гузаронида дар як нуқта бурида шуданашон шарт мебошад.

Масъалаи 2. Ба давраи радиусаш 10 *см* секунҷаи тезкунҷаи баробарпаҳлуи баландиаш 16 *см* дарун кашида шудааст. Тарафҳои онро ёбед.

⑤



⑥



Ҳалли он. Маркази давраи нуқтаи O, ки ба секунҷаи ABC берун кашида шудааст, дар перпердикуляри миёначои тарафи AC, яъне дар баландии BD мехобад (*расми 6*). Он гоҳ, $OD=BD-OB=16-10=6$ (*см*) мешавад ва дар асоси теоремаи Пифагор,

$$AD=\sqrt{OA^2-OD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8\ (см),\ AC=2AD=16(см).$$

Ҳамин тавр, дар секунҷаи росткунҷаи ABD

$$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}\ (см).$$

Ҷавоб: $8\sqrt{5}$ *см*, $8\sqrt{5}$ *см*, 16 *см*.

Савол, масъала ва супориш

1. Агар бисёркунҷа ба давра дарункашидашуда бошад, перпендикуляри миёначои тарафҳои он дар як нуқта бурида шуданашро исбот кунед.
2. Чӣ гуна секунҷа ба давра дарункашидашуда шуданаш мумкин? Чоркунҷа-чӣ?
3. Панҷкунҷаи $ABCDE$ ба давра дарункашидашуда бошад, $\angle ACB=\angle AEB$ буданашро исбот кунед.
4. Радиуси давраи берункашида шудаи секунҷаи росткунҷаи катет хояш 16 *см* ва 12 *см* бударо ёбед.
5. Ба давраи радиусаш 25 *см* росткунҷаи яке аз тарафҳояш 14 *см* дарун кашида шудааст. Масоҳати росткунҷаро ёбед.
6. Тарафҳои ба давраи радиусаш 10 *см* буда дарункашида шуда: а) секунҷаи баробартараф; б) квадрат; в) секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлуро ёбед.
7. Радиуси давраи ба секунҷаи тарафҳояш 16 *см*, 10 *см* ва 10 *см* берункашидашударо ёбед.
8. Агар дар шашкунҷаи $ABCDEF$ ба давра дарункашидашуда $\angle BAF+\angle AFB=90°$ бошад, маркази давра дар тарафи AF хобиданашро исбот кунед.
9. Трапетсияи баробарпаҳлуи дилхоҳ ба давра дарункашида шуданашро исбот кунед.

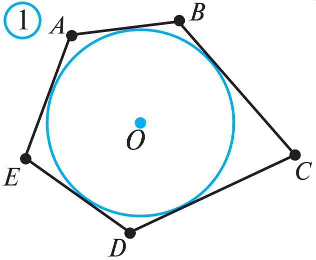
Масъалаи шавқовар.

Вақтҳои дар коллеҷ хонда истодан (математики француз,1811-1832) Галуаи 16- сола аз вай муаллим ҳал намудани се масъаларо дар бадали 1 соат дархост. Галуа ин масъалаҳои ҳаллашон душворро дар 15 дақиқа ҳал намуда,ҳамаро дар ҳайрат гузошт. Яке аз ин масъалаҳо. Онро шумо ҳам ҳал карда бинед?

Масъала. Чор тарафи чоркунҷаи ба давра дарункашидашуда ба *а*,*б*,*в* ва *г* баробар аст. Диагоналҳои онро ёбед.

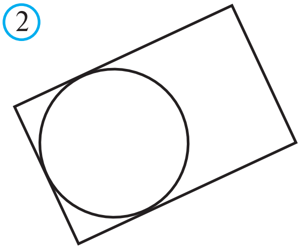
41 БИСЁРКУНҶАҲОИ АЗ ДАВРА БЕРУНКАШИДАШУДА

①

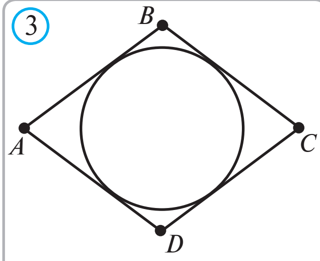


Панҷкунҷаи ба давра берункашидашудаи ABCDE.
Давраи ба панҷкунҷаи ABCDE дарункашидашуда.

②

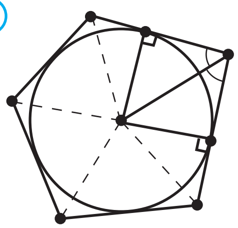


③



$AB + CD = AD + BC$

④



✓ *Таъриф.* Агар ҳамаи тарафҳои бисёркунҷа ба давра расанда бошад,дар ин ҳол бисёркунҷа ба давра **берункашидашуда**, давра бошад,ба бисёркунҷа **дарункашидашуда** номида мешавад *(расми 1)*.

Ба секунҷаи дилхоҳ давраи берункашидашуда кашидан мумкин буданаш ва маркази ин давра дар нуқтаи буриши биссектрисаҳо хобиданашро дар синфи 8 шинос шуда будед.

Агар миқдори кунҷҳои бисёркунҷа аз се зиёд бошад ба ин бисёркунҷа на ҳама вақт давраи дарункашида гузаронидан мумкин аст. Масалан, ба росткунҷаи аз квадрат фарққунанда давраи дарункашида гузаронида намешавад *(расми 2)*.

Боз аз синфи 8 маълум аст, ки ба чоркунҷа фақат ва фақат дар ҳамон вақт давраи дарункашида гузаронидан мумкин,агар ҳосили ҷамъи тарафҳои муқобил ба якдигар баробар бошанд *(расми 3)*.

Аз сабаби тарафҳои кунҷҳои бисёркунҷаи берункашидашуда ба давра расиданашон маркази давра дар худи биссектрисаи ҳамин кунҷ мехобад *(расми 4)*. Бинобар ин биссектрисаҳои кунҷҳои бисёркунҷаи ба давра берункашидашуда дар як нуқта бурида мешаванд.

Теорема. **Агар масоҳати бисёркунҷаи ба давраи радиусаш *r* берункашидашуда *S*, нимпериметри он *p* бошад, *S*=*pr* мешавад.**

Исбот. Маркази давра нуқтаи *O*-ро бо қуллаҳои бисёркунҷа пайваст намуда бисёркунҷаро ба секунҷаҳо ҷудо мекунем.Баландии ин секунҷаҳо ба *r* баробар аст *(расми 5)*.Он гоҳ,

$$S=S_{AOB}+S_{BOC}+\ldots+S_{FOA}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2}FA\cdot r=\frac{AB+BC+\ldots+FA}{2}\cdot r=pr.$$

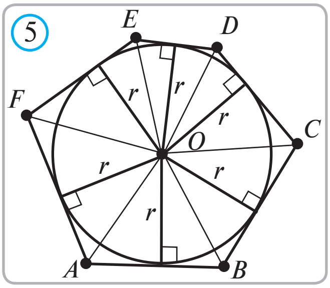
Теорема исбот шуд.

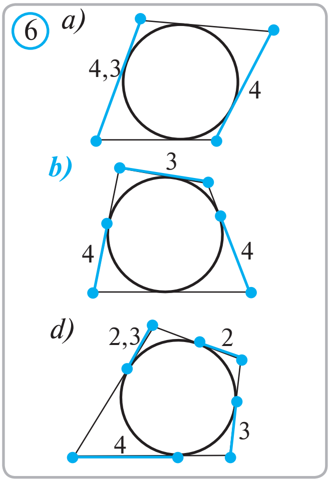
Масъала. Масоҳати чоркунҷаи ба давра берункашидашуда ба 21 *см*^{2}, периметраш бошад, ба 7 *см* баробар аст. Радиуси давраро ёбед.

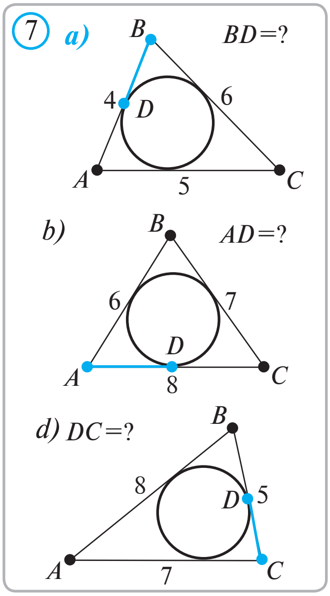
Ҳалли он. Формулаи $S=pr$-ро дар назар дошта

$$r=\frac{S}{p}=\frac{21}{3,5}=6\ (см).$$

Ҷавоб: 6 *см.*







Савол, масъала ва супориш

1. Агар тарафи а) секунҷаи баробартараф б) квадрат 6 *см* бошад, радиуси давраи дарункашидашударо ёбед.
2. Масоҳати бисёркунҷаи ба давраи радиусаш 5 *см* берункашидашуда 18 *см*^{2} аст. Периметри бисёркунҷаро ёбед.
3. Периметри чоркунҷаҳои дар расми 6 тасвирёфтаро муайян кунед.
4. Дар асоси маълумотҳои расми 7 порчаи талабкардаистодаро ёбед.
5. Ромб будани параллелограмми ба давра берункашидашударо ёбед.
6. Радиуси давраи ба секунҷаи росткунҷа дарункашидашуда ба нисфи фарқи ҳосили ҷамъи катетҳо ва гипотенуза баробар буданашро исбот кунед.
7. Хати миёнаи трапетсияи баробарпаҳлуи ба давра берункашидашуда ба тарафи паҳлуи он баробар буданашро исбот кунед.
8. Трапетсияи баробарпаҳлуи асосҳояш 9 *см* ва 16 *см* аз давра берун кашида шудааст. Радиуси давраро ёбед.

9*. Чоркунҷаи *ABCD* ба давраи марказаш *O* берун кашида шудааст. Исбот кунед, ки ҳосили ҷамъи масоҳати секунҷаҳои *AOB* ва *COD* ба нисфи масоҳати чоркунҷа баробар аст.

10*. Асосҳои трапетсияи ба давра берун кашидашуда a ва b бошад, ба $\sqrt{ab}$ баробар будани баландии онро исбот кунед.

42 БИСЁРКУНҶАҲОИ МУНТАЗАМ

Машқи фаъолкунанда

1. Чӣ гуна шаклҳо бисёркунҷа номида мешаванд?
2. Кунҷҳои бисёркунҷа,тарафҳои ҳамсоя, диагоналҳои он гуфта чиро мегӯянд?
3. Чє гуна бисёркунҷа бисёркунҷаи барчаста номида мешавад?
4. Теорема дар бораи ҳосили ҷамъи кунҷҳои дарунии бисёркунҷаи барчастаро гуфта диҳед.

Таъриф. Бисёркунҷаи барчастае, ки ҳамаи тарафҳо ва кунҷҳояш баробаранд, **бисёркунҷаи мунтазам** номида мешавад.

Секунҷаи баробартараф, квадрат ба бисёркунҷаи мунтазам мисол мешаванд. Дар расми 1 панчкунҷа, шашкунҷа ва ҳашткунҷаи мунтазам тасвир ёфтааст.

Теорема. Ҳар як кунҷи n—кунҷаи мунтазам ба $\frac{n-2}{n}\cdot180^\circ$ баробар аст.

Исбот. Ҳосили ҷамъи (суммаи) кунҷҳои n—кунҷаи мунтазам ба $(n-2)\cdot180^\circ$ баробар аст (синфи 8).

Аз ин рӯ,ҳар як кунҷи он ба $\frac{n-2}{n}\cdot180^\circ$баробар аст.

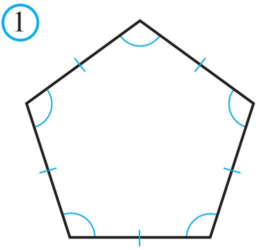
Теорема исбот шуд.

Масъала. Дар панчкунҷаи мунтазам $A_1A_2A_3A_4A_5$ диагоналҳои A_1A_3 ва A_1A_4 баробар буданашро нишон диҳед (*расми 2*).

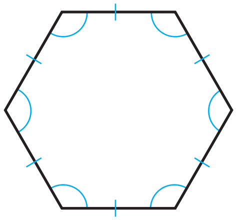
$A_1A_2A_3A_4A_5$ — панҷкунҷаи мунтазам ⇒ $A_1A_3 = A_1A_4$

Ҳалли он. Дар асоси аломати *ТКТ* баробарии секунҷаҳо секунҷаҳои $A_1A_2A_3$ ва $A_1A_5A_4$ байни худ баробаранд. Дар ҳақиқат, тарафҳои бисёркунҷаи мунтазам баробар ва ҳамчунин кунҷҳояшон ҳам баробар буданашон, $A_1A_2= A_1A_5$, $A_2A_3= A_5A_4$ ва $\angle A_1A_2A_3=\angle A_1A_5A_4$. Аз ин рӯ, $\Delta A_1A_2A_3=\Delta A_1A_5A_4$. Аз он $A_1A_3=A_1A_4$ буданаш бармеояд.

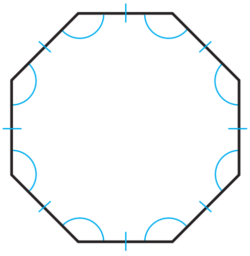
①



Панчкунҷаи мунтазам



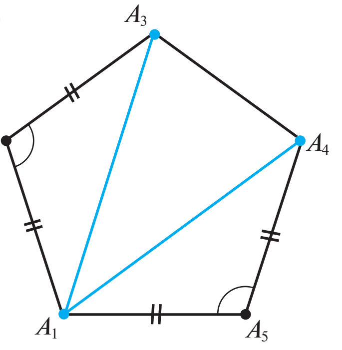
Шашкунҷаи мунтазам



Ҳашткунҷаи мунтазам

Натиҷа. ***Ҳамаи диагоналҳои панҷкунҷаи мунтазам байни худ баробаранд.***

②



❓ Савол, масъала ва супориш

1. Ба бисёркунҷаҳои номунтазам мисолҳо оред ва барои чи мунтазам набуданашонро исбот кунед.

2. Аз тасдиқоти зерин дурусташро ёбед:
а) секунҷаи ҳамаи тарафҳояш баробар мунтазам мешавад;
б) чоркунҷаи ҳамаи тарафҳояш баробар мунтазам мешавад;
в) чоркунҷаи ҳамаи кунҷҳояшон баробар мунтазам мешавад;
г) ромби ҳамаи кунҷҳояш баробар мунтазам мешавад;
д) росткунҷаи ҳамаи тарафҳояш баробар мунтазам мешавад.

3. Агар а) $n=3$; б) $n=5$; в) $n=6$; г) $n=10$; д) $n=18$ бошад, ҳамаи кунҷҳои n—кунҷаи мунтазамро ёбед.

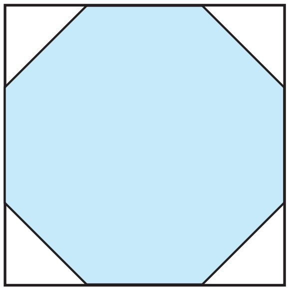
4. Кунҷи берунии n —кунҷа мунтазам ба чӣ баробар аст? Агар а) $n=3$; б) $n=5$; в) $n=6$; г) $n=10$; д) $n=12$ бошад, кунҷи берунии n —кунҷаи мунтазамро муайян кунед.

5. Ҳосили ҷамъи аз ҳар як қуллаи n —кунҷаи мунтазам яктогӣ гирифташудаи кунҷҳои берунии он ба 360° баробар буданашро исбот кунед.

6. Агар ҳар як кунҷи бисёркунҷаи мунтазам а) 60°; б) 90°; в) 135°; г) 150° бошад, миқдори тарафҳои бисёркунҷаро муайян кунед.

7. Шашкунҷаи мунтазам $ABCDEF$ дода шудааст.
а) баробарии диагоналҳо AC ва BD-ро исбот кунед.
б) секунҷаи мунтазам будани ACE -ро исбот кунед.
в) байни якдигар баробар будани диагоналҳои AD, BE ва CF -ро исбот кунед.

③



8. Диагонали хурди а) панчкунча; б) шашкунча; в) ҳашткунча; г) дувоздаҳкунча; г) ҳашдаҳкунчаи мунтазами тарафаш 10 *см*-ро ҳисоб кунед.

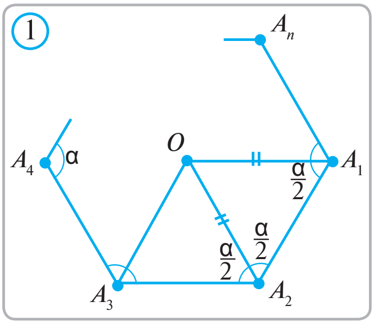
9. Исбот кунед, ки чоркунҷаи мунтазам квадрат аст.

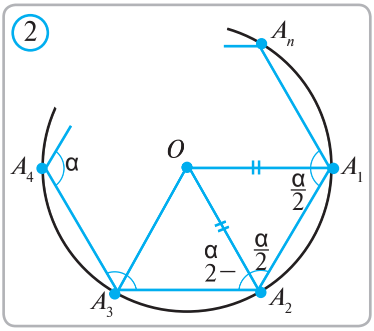
10*. Тарафи квадрат ба а баробар. Ба тарафҳои он аз ҳар қуллаи он порчаҳои ба нисфи диагонал баробар гузощта мешавад. Оқибат шакли ҳашткунча ҳосил мешавад, ки дар *расми 3* тасвир ёфтааст, навъи онро муайян намоед ва масоҳаташро ёбед.

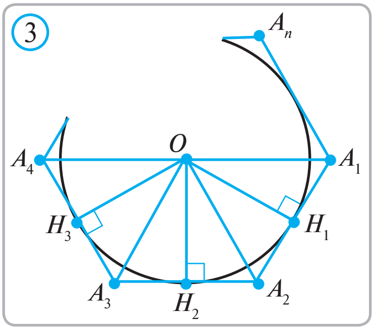
43 ДАВРАҲОИ БА БИСЁРКУНҶАИ МУНТАЗАМ ДАРУН ВА БЕРУНКАШИДАШУДА

Машқи фаъолкунанда

1. Чӣ гуна бисёркунҷа бисёркунҷаи ба давра дарункашидашуда номида мешавад?
2. Чӣ гуна бисёркунҷа бисёркунҷаи ба давра берункашидашуда номида мешавад?
3. Оё бисёркунҷаи дилхоҳ ба давра дарун (берун)кашидашуда буданаш мумкин аст? Мисолҳо оваред.







Теорема. **Ба ҳар гуна бисёркунҷаи мунтазам давраи дарун ҳам, берун ҳам кашидашуда гузаронидан мумкин.**

Исбот. Бигузор $A_1A_2 \ldots A_n$ — бисёркунҷаи мунтазам, нуқтаи O нуқтаи буриши биссектрисаҳои кунҷи A_1 ва A_2 бошад. Кунҷи ин бисёркунҷаи мунтазамро бо α ишорат мекунем.

1. $OA_1=OA_2=\ldots=OA_n$ буданашро исбот мекунем (*расми 1*). Дар асоси, таърифи биссектрисаи кунҷ,

$$\angle OA_1A_2=\angle OA_2A_1=\frac{\alpha}{2}.$$

Бинобар ин A_1OA_2—секунҷаи баробарпаҳлу. Аз ин $OA_1=OA_2$ бармеояд. Дар асоси аломати ТКТ баробарии секунҷаҳо ΔA_1A_2O ва ΔA_3A_2O баробар, чунки$A_1A_2=A_3A_2$, A_2O — тарафи умумӣ ва

$$\angle OA_1A_2=\angle OA_2A_1=\frac{\alpha}{2}.$$

Аз ин ҷо $OA_3=OA_1$. Бо ҳамин роҳ ҷой доштани $OA_4=OA_2, OA_5=OA_3$ ва дигар баробариҳо нишон дода мешавад. Ҳамин тавр, $OA_1=OA_2=\ \ldots\ OA_n$, яъне давраи марказаш O ва радиусаш OA_1 аз давраи ба бисёркунҷа берункашидашуда иборат мешавад (*расми 2*).

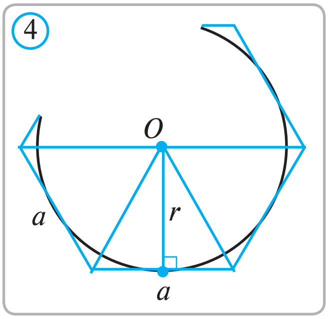
2. Дар асоси нуқтаҳои болои секунҷаҳои баробарпаҳлу A_1OA_2, A_2OA_3, … A_nOA_1 ба якдигар баробаранд. Аз ин рӯ, баландиҳои аз қуллаи O -и секунҷаҳо гузаронидашуда ҳам баробар мешавад (*расми 3*): $OH_1=OH_2=\ \ldots\ =OH_n$. Бинобар ин давраи марказаш O ва радиусаш OH_1 ба ҳамаи тарафҳои бисёркунҷа расида мегузарад. Ҳамин тавр, ин давра ба бисёркунҷа дарункашидашуда мешавад. ***Теорема исбот шуд.***

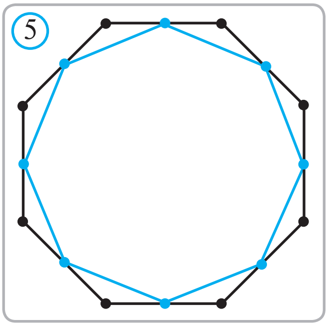
Натича. ***Маркази давраҳои ба бисёркунҷаи мунтазам дарун ва берункашидашуда дар як нуқта мешавад.***

Ин нуқта **маркази** бисёркунҷаи мунтазам номида мешавад. Кунҷе, ки бо нурҳо пайвасткунии ду қуллаи ҳамсоя бо маркази бисёркунҷа иборат аст (дар расми 1, кунҷҳои A_1OA_2, A_2OA_3 ...) кунҷи маркази он номида мешавад. Перпендикуляри аз **маркази бисёркунҷаи** мунтазам ба тарафи он гузаронидашуда (дар расми 3, порчаҳои OH_1, OH_2, ...) **апофемаи** он номида мешавад.

Масъала. Агар тарафи n —кунҷаи мунтазам a, радиуси давраи ба он дарункашидашуда r бошад, мумкин будани ҳисобкунии масоҳати он S -ро бо формулаи $S=\frac{1}{2}nar$ исбот кунед.(*расми 4*).

Ҳалли он. Аз сабаби нимпериметри бисёркунҷа $p=\frac{1}{2}na$ буданаш, дар асоси формулаи $S=pr$, $S=\frac{1}{2}nar$ мешавад.


④


⑤

Савол, масъала ва супориш

1. Радиуси давраҳои ба квадрати масоҳаташ 36 $см^2$ дарун ва берункашидашударо ёбед.
2. Радиуси давраҳои ба секунҷаи мунтазами периметраш 18 *см* дарун ва берункашидашударо ҳисоб кунед.
3. Исбот кунед,ки радиуси давраи ба шашкунҷаи мунтазам берункашидашуда ба тарафи он баробар аст.
4. Исбот кунед, ки миёначои тарафҳои бисёркунҷаи мунтазам қуллаҳои дигар бисёркунҷаи мунтазам мебошад (*расми 5*).
5. Исбот кунед, ки радиуси давраи ба секунҷаи мунтазам дарункашидашуда аз радиуси давраи берункашидашуда ду маротиба хурд аст.

6*. Исбот кунед,ки перпендикуляри миёнаҷои ду тарафи дилхоҳи бисёркунҷаи мунтазам ё дар як нуқта бурида мешавад ё ки дар як хати рост мехобад.

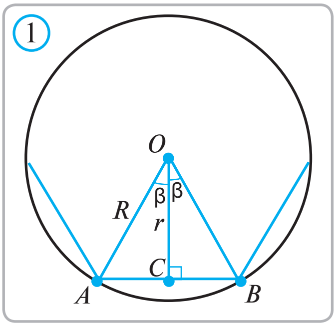
7. Як тарафи бисёркунҷаи мунтазам ба давра дарункашидашуда аз давра камони ба а) 60°; б) 30°; в) 36°; г) 18°; д) 72° баробарро ҷудо мекунад. Бисёркунҷа чандто тараф дорад?
8. Аз коғаз шашто секунҷаи мунтазами баробарро бурида гиред. Аз онҳо истифода бурда, шашкунҷаи мунтазам созед. Нисбати масоҳатҳои шашкунҷаи мунтазам ва секунҷаи тарафҳояшон баробарро ёбед.

44 ВОБАСТАГИИ БАЙНИ ТАРАФҲОИ БИСЁРКУНҶАИ МУНТАЗАМ ВА РАДИУСҲОИ ДАВРАИ ДАРУН ВА БЕРУНКАШИДАШУДА

Машқи фаъолкунанда

Чиро а) синус; б) косинус; в) тангенси; кунҷи тези секунҷаи росткунҷа меноманд?

Барои ҳисоб кардани радиусҳои давраи ба n — кунҷаи мунтазами тарафаш a_n баробар дарункашидашуда R ва берункашидашуда r формулаҳо меёбем. Барои ин аз секунҷаи росткунҷаи ACO истифода мебарем. Дар ин ҷо O — маркази бисёркунҷа, C — миёнаҷои тарафи AB -и бисёркунҷа (*расми 1*). Он гоҳ,



$$\beta=\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot\frac{360°}{n}=\frac{180°}{n};$$

$$R=OA=\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}};\quad r=OC=\frac{AC}{\mathrm{tg}\beta}=\frac{a_n}{2\mathrm{tg}\frac{180°}{n}};$$

$$r=OC=OA\cdot\cos\beta=R\cos\frac{180°}{n}.$$

Аз ин формулаҳо истифода бурда, вобастагии байни тарафи баъзе бисёркунҷаҳои мунтазам, радиусҳои давраҳои берун ва дарункашидашударо меёбем.

1. Барои секунҷаи мунтазам ($n=3$):

$$\beta=\frac{180°}{3}=60°;\quad R=\frac{a_3}{2\sin 60°}=\frac{a_3}{\sqrt{3}};\quad r=\frac{a_3}{2\mathrm{tg}60°}=\frac{a_3}{2\sqrt{3}};\quad R=2r.$$

2. Барои квадрат ($n=4$):

$$\beta=\frac{180°}{4}=45°;\quad R=\frac{a_4}{2\sin 45°}=\frac{a_4}{\sqrt{2}};\quad r=\frac{a_4}{2\mathrm{tg}45°}=\frac{a_4}{2};\quad R=r\sqrt{2}.$$

3. Барои шашкунҷаи мунтазам ($n=6$)

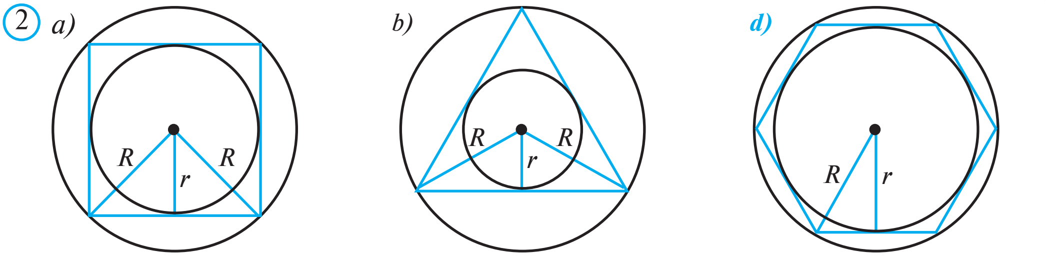
$$\beta=\frac{180°}{6}=60°;\quad R=\frac{a_6}{2\sin 30°}=a_6;\quad r=\frac{a_6}{2\mathrm{tg}30°}=\frac{a_6\sqrt{3}}{2};\quad R=\frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Масъала. Тарафи n — кунҷаи мунтазам a_n -ро бо формулаи давраи ба ҳамин бисёркунҷа берункашидашуда R ва дарункашидашуда r ифода кунед.

Ҳалли он. $R=\frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$ ва $r=\frac{a_n}{2\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}$ Аз формулаҳои $a_n=2R\sin\frac{180°}{n}$ ва $a_n=2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$ -ро ҳосил мекунем. Хусусан, $n=3$ бошад, $a_3=R\sqrt{3}=2r\sqrt{3}$.

? Савол, масъала ва супориш

1. Радиуси давраҳои ба а) чоркунҷаи мунтазам; б) секунҷаи мунтазам в) шашкунҷаи мунтазами тарафаш 15 *см* дарун ва берункашидашударо ҳисоб кунед.
2. Дар тарафи рости расми 2 квадрат, секунҷаи мунтазам ва шашкунҷаи мунтазами ба давраи радиусаш R дарункашидашуда тасвир ёфтааст. Ҷадвали додашударо ба дафтаратон кашида, хонаҳои холии онро пур кунед. (a_n—тарафи бисёркунҷа, P—периметри бисёркунҷа, S—масоҳати он, r—радиуси давраи ба он дарункашидашуда).

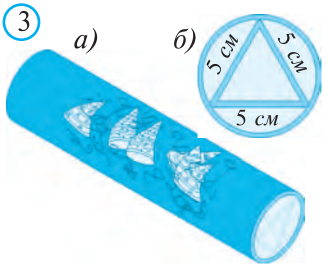
② 

	R	r	a_4	P	S
1.			6		
2.		2			
3.	4				
4.				28	
5.					16

	R	r	a_3	P	S
1.	3				
2.					10
3.		2			
4.			5		
5.				6	

	R	r	a_6	P	S
1.	4				
2.		5			
3.			6		
4.				42	
5.					48

3. Диагоналҳои аз як қуллаи дувоздаҳкунҷаи мунтазами ба давраи радиусаш 8 *см* дарункашидашуда бароянДаро ёбед.
4. Периметри секунҷаи мунтазами ба давра дарункашидашуда 24 *см* аст. Тарафи квадрати ба ҳамин давра дарункашидашударо ёбед.
5. Аз чӯби шакли силиндри дошта сутуни шакли призмаи асосаш аз а) квадрат; б) шашкунҷаи мунтазами тарафаш 20 *см* буда тайёр намудан лозим. Барои ин хурдтарин диаметри буриши арзии чӯб бояд чӣ қадар бошад?
6. Бо бозичаи калейдоскоп ном гирифтаи дар расми 3-а тасвирёфта, ки нақшҳои рангорангро тамошо кардан мумкин аст, Шумо эҳтимол шинос ҳастед. Бозича аз лӯла ва аз 3 оина иборат аст. Дар расми 3-в буриши арзӣ ва андозаҳои он тасвир ёфтааст. Радиуси буриши арзии калейдоскопро ёбед.

③ 

45

ДОНИШИ ХУДРО САНҶИДА БИНЕД

I. Тестҳо

1. Дар кадоме аз бисёркунҷаҳои додашуда давраи дарункашидашуда мавҷуд нест?

А) Ба секунча; С. Ба ромби аз квадрат фарққунанда;
Б) Ба квадрат; Д. Ба росткунҷаи аз ромб фарққунанда.

2. Дар кадоме аз бисёркунҷаҳо давраи берункашидашуда мавҷуд нест?

А) Ба секунҷа; D) Ба ромби аз квадрат фарққунанда;
В) Ба квадрат; Е) Ба росткунҷаи аз ромб фарққунанда.

3. Барои ҳамаи чоркунҷаҳои *ABCD*-и дарункашидашудаи давра баробарии нодурустро ёбед.

A) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$; D) $AB+CD=BC+AD$;
B) $\angle A+\angle C=180^\circ$; E) $\angle B+\angle D=180^\circ$.

4. Барои ҳамаи чоркунҷаҳои *ABCD*-и берункашидашудаи давра баробарии нодурустро ёбед.

A) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$; D) $AB+CD=BC+AD$;
B) $\angle A+\angle C=180^\circ$; E) $AB-BC=AD-CD$.

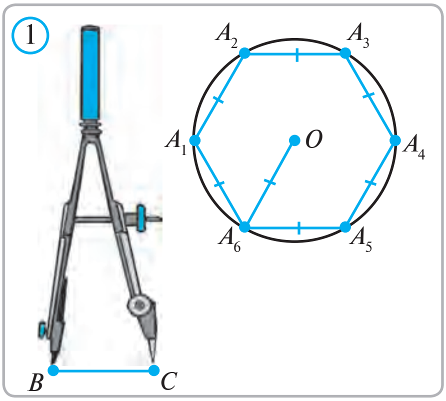
5. Радиуси давраи берункашидашудаи росткунҷаи тарафҳояш 5 см ва 12 см бударо ёбед.

A) 6 *см*; B) 6,5 *см*; D) 7 *см*; E) 7,5 *см*.

6. Кунҷи дарунии 24-кунҷаи мунтазамро ёбед.

A) 120°; B) 135°; D) 150°; E) 165°.

①



II. Машқҳо доир ба сохтан.

1. Шашкунҷаи мунтазами тарафаш ба порчаи додашудаи баробарро созед. Дар он аз радиуси давраи ба шашкунҷаи мунтазан,ки ба тарафи баробар аст, истифода баред *(расми 1)*.

2. Аз маълумотҳои расмҳои 2-4 истифода бурда, ба давраи додашуда: а) секунҷаи мунтазам; б) квадрат; в) ҳашткунҷаи мунтазами дарункашидашуда созед.

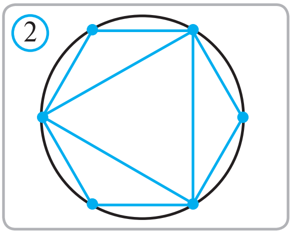
3. Аз расми 5 истифода бурда, ба давраи додашуда шашкунҷаи мунтазами берункашидашуда созед. (Тарафҳои шашкунҷаи мунтазами дар расми 5 тасвиршуда ба расандаҳои шашкунҷаи мунтазами дарункашида шудаи давра мехобад).

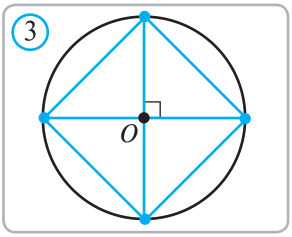
III. Масъалаҳо доир ба ҳисобкунӣ.

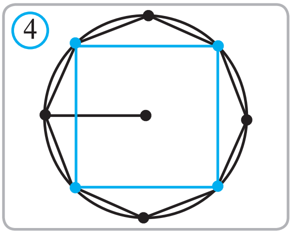
1. Тарафҳои секунҷаи мунтазам, квадрат ва шашкунҷаи мунтазам ба якдигар баробаранд. Нисбати масоҳати онҳоро ёбед.
2. Нисбати масоҳатҳои шашкунҷаи мунтазами дарункашидашуда ва берункашидашудаи давраро ёбед.
3. Масофаи байни тарафҳои параллели а) шашкунҷа; б) ҳашткунҷа; в) дувоздаҳкунҷаи мунтазам ба 10 см баробар аст. Тарафҳои бисёркунҷаро ёбед.
4. Ба давраи радиусаш R ҳашткунҷаи мунтазами A_1 A_2 ... A_8 дарункашида шудааст. Исбот кунед, ки чоркунҷаи $A_3A_4A_7A_8$ росткунҷа аст ва масоҳати онро ёбед.
5. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷаи ба давра берункашидашуда дар нуқтаи расиш ба давра ба порчаҳои дарозиашон 4 см ва 6 см тақсим мешавад. Масоҳати секунҷаро ёбед.
6. Кунҷи байни диагоналҳои аз ҳама хурд ва аз ҳама калони аз як қуллаи даҳкунҷаи мунтазам бароянддаро ёбед.

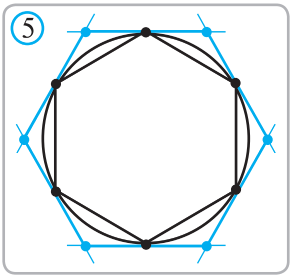
IV. Худатонро бисанҷед (кори назорати намунавӣ) .

1. Радиуси давраҳои дарун ва берункашидашудаи секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 10 *см* ва 24 *см* бударо ёбед
2. Як кунҷи ромби ба давраи радиусаш 5 *см* будаи берункашидашуда ба 150° баробар аст.
   а) Периметрӣ;
   б) Диагоналҳояш;
   в) Масоҳати ромбро ёбед.
3. Диагоналҳои аз як қулла бароянддаи шашкунҷаи мунтазами тарафаш 4 *см* бударо ёбед.







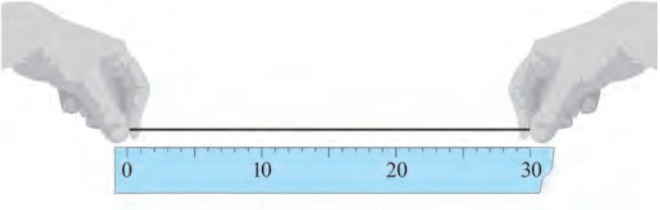


4. *(Илова)*. Фарқи масоҳатҳои шашкунҷаи мунтазам ва секунҷаи мунтазами ба давраи радиусаш *3 см* буда дарункашидашударо ёбед.

Лавҳаҳои таърихӣ Бисёркунҷаи мунтазами дилхоҳро бо ёрии паргор ва хаткашак сохтан душвор аст. Инро соли 1801 математики немис Карл Гаусс (1777-1855) бо усули алгебравӣ исбот кардааст. Ӯ адади *n*-ро дар ҳолати паҳишавии $2^m p_1 p_2 \ldots p_n$ ба p_1, p_2, … p_n ададҳои соддаи гуногун ба намуди $2^{2^k}+1$ овардан, сохтани *n*-кунҷаи мунтазамро бо ёрии паргор ва хаткашак исбот кардааст.

Дар ин ҷо *m* ва *k* ададҳои ғайриманфии бутун аст.

46 ДАРОЗИИ ДАВРА



Машқи фаъолкунанда

1. Одатан буриши арзӣ ё ки кӯндаланги порчаи лӯла аз давра иборат аст. Як нӯги риштаи борикро гирифта,ба лӯла як маротиба печонед. Риштаи ба лӯла як маротиба печонидашуда буриши арзии лӯла, яъне дарозии давра мешавад.Онро чун нишондоди расм бо хаткашак чен кунед.
2. Бо усули болоӣ диаметри буриши арзии лӯлаҳоро муайян кунед.
3. Нисбати дарозии давраи аниқ кардашударо ба диаметри он ҳисоб кунед.
4. Усули болоии ченкунӣ ва ҳисобкуниро боз барои якчанд порчаҳои лӯлаи ченакашон гуногун ҳам татбиқ намуда,нисбати дарозии давраро ба диаметраш ёбед.
5. Дар натичаи тадқиқот оиди нисбати дарозии давра ба диаметри он чӣ гуна хулоса баровардан мумкин?

Теорема. **Нисбати дарозии давра ба диаметри он ба радиуси давра вобаста нест, яъне барои ҳар гуна давра ин нисбат як хел рақам аст.**

Исбот. Ду давраи дилхоҳ мегирем.Радиуси онҳо R_1 ва R_2,дарозиашон бошад,дар ҳолати мувофиқ C_1 ва C_2 бошад. Баробарии $\frac{C_1}{2R_1}=\frac{C_2}{2R_2}$ -ро исбот намудан лозим. Ба ҳар ду давра n-кунҷаи мунтазами дарункашидашударо мекашем.Периметри онҳоро мувофиқан P_1 ва P_2 гуфта ишорат мекунем.

$P_1=n\cdot 2R_1\sin\frac{180^\circ}{n}$, $P_2=n\cdot 2R_2\sin\frac{180^\circ}{n}$ буданаш $\frac{P_1}{P_2}=\frac{2R_1}{2R_2}$ (*) мешавад.

Ин баробарӣ ба n -и дилхоҳ дуруст аст.Адади n афзудан гирад,периметри n-кунҷаки ба давра дарункашидашуда P_1 ба дарозии ҳамин давра C_1 наздик шудан мегирад. Монанди ин P_2 ҳам ба C_2 наздик шудан мегирад.

Аз ин рӯ, нисбати $\frac{P_1}{P_2}$ ба нисбати $\frac{C_1}{C_2}$ баробар мешавад (Исботи пурраи ин дар зинаҳои болоии математика омӯхта мешавад. Ҳамин тавр, аз баробарии (*) $\frac{C_1}{C_2}=\frac{2R_1}{2R_2}$, аз ин бошад, баробарии $\frac{C_1}{2R_1}=\frac{C_2}{2R_2}$ бармеояд.

Теорема исбот шуд.

Нисбати дарозии давра ба диаметри онро бо ҳарфи алифбои юнонӣ π ишораткунӣ қабул шудааст *(“пи” гуфта хонда мешавад).* Ишораткунии нисбати дарозии давра ба диаметрро бо ҳарфи “π” математики бузург Леонард Эйлер (1707—1783) ба фан дохил намудааст. Дар юнони калимаи “давра” бо ҳамин ҳарф сар мешавад. π адади ирратсионалӣ буда, дар амалиёт қимати тақрибии ба 3,1416 баробар будаи он истифода бурда мешавад.

Ҳамин тавр, $\frac{C}{2R}=\pi$. Аз ин баробарӣ барои дарозии давра формулаи $C=2\pi R$ -ро ҳосил мекунем.

Масъала. Дарозии давраи ба секунҷаи мунтазами тарафаш 6 *см* буда берункашидашударо ёбед.

Ҳалли он. Мувофиқи формулаи ёфтани радиуси давраи ба секунҷаи мунтазам берункашидашуда $R=\frac{a_3}{\sqrt{3}}$, $R=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ (*см*) мешавад. Акнун аз формулаи ёфтани дарозии давра

$$C=2\pi R=2\pi\cdot 2\sqrt{3}=4\pi\sqrt{3}\ (см).$$

Ҷавоб: $4\pi\sqrt{3}$ *см.*

Савол, масъала ва супориш

1. Чӣ гуна адад бо π ишорат мешавад? Аз формулаи ёфтани дарозии давраи радиусаш R истифода бурда, ҷадвалро пур кунед ($\pi\approx3,14$ гуфта гиред).

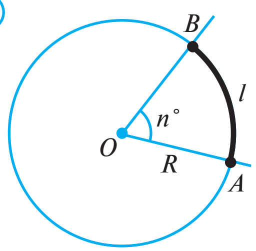
C			82	18π		6,28	
R	4	3			0,7		101,5

2. Агар радиуси давра а) 3 маротиба зиёд шавад; б) 3 *см* зиёд шавад; в) 3 маротиба кам шавад; г) 3 *см* кам шавад, дарозии давра чӣ қадар тағйир меёбад?
3. Агар аз 40 миллион як қисми экватори кураи Замин ба 1 *м* баробар бошад, радиуси кураи Заминро ёбед.
4. Дарозии давраи ба а) секунҷаи мунтазами тарафаш ба a баробар; б) секунҷаи росткунҷаи катетҳояш a ва b; в) секунҷаи баробарпаҳлуи асосаш a тарафи паҳлуиаш b буда берункашидашударо ёбед.
5. Дарозии давраи ба а) квадрати тарафаш баробари a; б) секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлуи гипотенузааш c; в) секунҷаи росткунҷаи гипотенузааш c, кунҷи тезаш α кашидашударо ёбед.
6. Тепловоз 1413 *м* роҳ рафт. Дар ин масофа чархи он 300 маротиба давр зад. Диаметри чархи тепловозро ёбед.
7. Радиуси чархи давраи автомобили “Нексия” 24 *см* аст. Автомобил 100 *км* роҳ паймояд, чархи он чанд маротиба давр мезанад (*расми 1*).


①

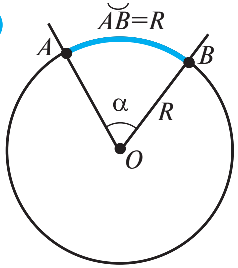
47 ДАРОЗИИ КАМОНИ ДАВРА. ЧЕНАКИ РАДИАНИИ КУНҶ

①



$l=\frac{\pi R}{180°}\cdot n°$

②



$\alpha=1$ *radian* $\approx 57°17'45''$

1. Дарозии камони кунҷи марказии n° дарҳам кашида

Бигузор дар давраи радиусаш баробарии R кунҷи марказии $n°$ AOB дода шуда бошад (*расми 1*).

Дар он ченаки градусии калони AB, ки ба кунҷи марказии AOB-и давра такя мекунад $n°$ ё ки камони $n°$-а гуфта кабул мекунем.

Давраи радиусаш R, яъне аз сабаби дарозии камони 360° ба $2\pi R$ баробар буданаш,

дарозии камони1°ба $\frac{2\pi R}{360°}=\frac{\pi R}{180°}$ мешавад.

Дар ин ҳол, дарозии камони $n°$ бо формулаи

$l=\frac{\pi R}{180°}\cdot n°$ муайян карда мешавад *(расми 1).*

2. Ченаки радиании кунҷ

Баробари ченаки градусии кунҷ дар як навбат, ченаки радиании он ҳам истифода бурда мешавад.

Дар асоси формулаи болоӣ нисбати дарозии давра ба градус ба: $\frac{l}{R}=\frac{\pi}{180°}\cdot n°$ баробар аст. Пас, нисбати дарозин давра ба градус фақат ба бузургии кунҷи марказии ба ҳанин камон такя шуда вобаста аст. Аз ин хосият истифода бурда ба сифати ченаки радиании кунҷ ҳамин нисбатро мегирен:

$$\alpha=\frac{l}{R}=\frac{\pi}{180°}\cdot n°.$$

Одатан калимаи радиан навишта намешавад. Масалан ба чои 5 рад. 5 гуфта навишта мешавад.

Ин радиан ба $\frac{180°}{\pi}$ градус баробар аст: $1\ \text{rad}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'45''$. Барои аз ченаки градуси ба ченаки радианӣ гузаштан аз формулаи $\alpha=\frac{\pi}{180°}\cdot n°$ истифода мебареи.

Ҳамин тавр, барои ёфтани ченаки кунҷи $n°$ бо радиан ченаки градуси онро ба $\frac{\pi}{180°}$ зарб кардан кифоя аст. Дар ҳолати хусусӣ ченаки радиании кунҷи 180° ба π баробар аст,кунҷи 90° яъне кунҷи рост ба $\frac{\pi}{2}$ баробар мешавад.

Дарозии камони ба кунҷи марказӣ мувофиқи баробари α радиан бо формулаи $l=\alpha R$ ҳисоб карда мешавад.

Масъала. Ченаки радиании кунҷҳои секунҷаи кунҷҳояш 30° ва 45° -ро ёбед.

Ҳалли он. Ченаки радиании кунҷи 30° ба $30^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{\pi}{6}$, ченаки радиании кунҷи 45° ба $45^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{\pi}{4}$ баробар аст. Аз теорема дар бораи ҳосили ҷамъи кунҷҳои дохилии секунҷа ба 180°, яъне ба π баробар буданаш истифода бурда, кунҷи сеюми онро меёбем.

$$\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}.$$

Ҷавоб: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$ ва $\frac{7\pi}{12}$.

Савол, масъала ва супориш

1. Дарозии камони давраи радиусаш 6 *см* ва ченаки градусии а) 30°; б) 45°; в) 90°; г) 120° бударо ёбед.

2. Ченаки радиании кунҷи а) 40°; б) 60°; в) 75° -ро ёбед.

3. Ченаки градусии кунҷи а) 1,2; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{5\pi}{6}$ радиан баробарро ёбед

4. Агар радиуси давра 5 *см* бошад, дарозии камони ба кунҷи марказӣ такякарда шуда ба а) $\frac{\pi}{8}$; б) $\frac{2\pi}{5}$; в) $\frac{3\pi}{4}$ радиан баробарро ёбед.

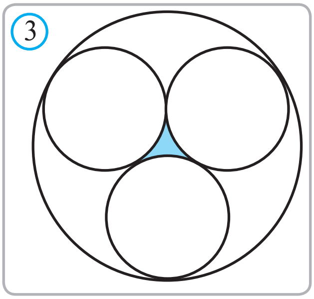
5. Секунҷаи *ABC* ба давраи радиусаш 12 *см* дарун кашида шудааст. Агар: а) $\angle A=30^\circ$; б) $\angle A=120^\circ$ бошад, дарозии камони *BC*, ки нуқтаи *A*-ро ба дохили худ намегирад, ҳисоб кунед.

6. Хордаҳои баробари давраи маълум камонҳои баробар ҷудо карданашро исбот кунед.

7*. Ду давра аз маркази якдигар мегузарад. Нисбати камонҳои дар ин давраҳо ҷудокардаи хордаи умумии онҳоро ёбед.

8*. Се давраҳои радиусҳояшон баробар ба якдигар аз берун ва бо давраи радиусаш баробари *K* аз дарун мерасанд (*расми 3*). а) радиуси давраҳоро ёбед; б) ҳосили ҷамъи дарозии камонҳои шакли ранг кардашударо ёбед.

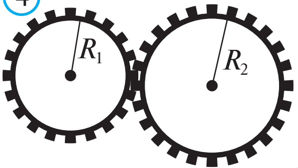
③



Масъалаи шавқовар.

Ду чархи дандонадори дар расми 4 тасвирёфта ба якдигар “газонда” шудаанд. Радиуси чархҳо R_1 ва R_2. Чархи якум *n* маротиба давр занад, чархи дуюм чанд маротиба давр мезанад?

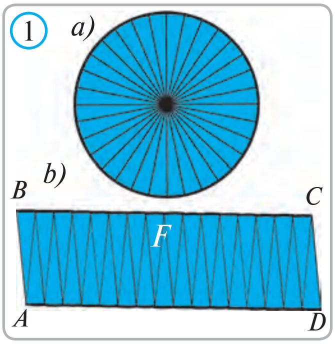
④

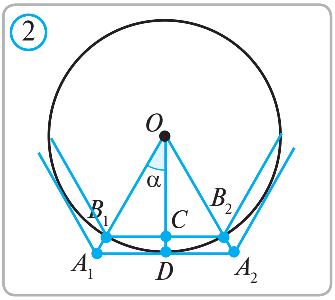


48

МАСОҲАТИ ДОИРА

✓ ***Таъриф.*** Шакле, ки аз маҷмӯи ҳамаи нуқтаҳои ҳамвории аз нуқтаи додашудаи O ва масофаи додашудаи R на зиёдтар аз масофа воқеъ (хобидааст) гардидааст, ***доира*** номида мешавад.





Дар он нуқтаи O-ро марказ ва R бошад, радиуси доира ном дорад. Ҳудуди доираи додашуда аз давраи марказаш нуқтаи O ва радиусаш R иборат мебошад.

Машқи фаъолкунанда

Ба як варақ коғаз бо хати ғафс давра кашед ва чун нишондоди расми 1-а якчанд диаметрҳои онро гузаронида, доираро ба қисмҳои баробар чудо кунед. Пас аз он ин қисмҳоро бурида гиред ва чун нишондоди расми 1-б чида, шакли F-ро ҳосил кунед. Агар доира ба қисмҳои зиёди дилхоҳ тақсим карда шуда, ин қисмҳо чун нишондоди расм ботартиб чида шавад, дар натиҷа шакли ба росткунҷа басо наздики F пайдо мешавад.

а) Басо ба шакли росткунҷа наздик будани шакли F-ро ба ҳисоб гирифта, тарафи AB-и он тахминан ба чи баробар буданашро ёбед (Нишондод: тарафи AB-ро бо радиуси доира муқоиса кунед).

б) Тарафи "BC" -и, шакли Fтахминан ба чӣ баробар мешавад? (Нишондод: тарафҳои BCва ADбо хати ғафс кашида шуданаш, яъне ба иборат будани он аз камончаҳои давра эътибор диҳед).

в) Шакли F ба шакли росткунҷаи $ABCD$ басо наздик буданашро ба ҳисоб гирифта, масоҳати онро тақрибан ҳисоб кунед. Масоҳати шакли F ба масоҳати доира басо наздик буданашро ба назар гирифта, дар бораи масоҳати доира хулоса бароред.

Теорема. **Масоҳати доираи радиусаш баробари R ба πR^2 баробар аст.**

Исбот. Давраи радиусаш R ва марказаш O -ро дида мебароем.

Масоҳати n—кунҷҳои ба давра берункашидашуда A_1A_2 ... A_n ва дарункашидашуда B_1B_2... B_n дар ҳолати мувофиқ S_n^I ва S_n^{II} бошад *(расми 2)*.

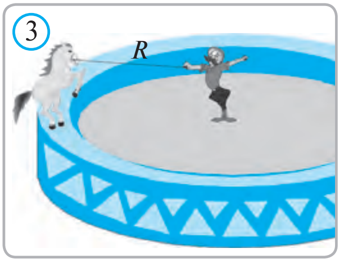
Масоҳати секунҷаҳои A_1OA_2 ваB_1OB_2 -ро меёбем.

$$S_{A_1OA_2}=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot OD=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot R;\quad S_{B_1OB_2}=\frac{1}{2}B_1B_2\cdot OC=\frac{1}{2}B_1B_2\cdot OB_1\cos\alpha=\frac{1}{2}B_1B_2\cdot R\cos\alpha.$$

Дар ин ҳолат $S_n^I=n\cdot\frac{1}{2}AA_1\cdot R=\frac{1}{2}P_n^IR,\quad S_n^{II}=n\cdot\frac{1}{2}B_1B_2\cdot R\cos\alpha=\frac{1}{2}P_n^{II}R\cos\alpha$ (1)

Дар ин ҷо, P_n^I ва P_n^{II} мувофиқан периметрҳои бисёркунҷаҳои $A_1A_2...A_n$ ва $B_1B_2...B_n$. Аз $\alpha=\frac{180°}{n}$ буданаш дар қимати калонтарини кифоягии n аз қимати $\cos\alpha$ қиматҳои P_n ва P_n аз дарозии давра, яъне аз $2\pi R$ бо қимати дилхоҳи хурд кам фарқ мекунад. Он гоҳ мувофиқи баробарии (1) дар қиматҳои калонтарини кифоягии n масоҳати бисёркунҷаҳо ба πR^2 наздик шудан мегирад. Аз ин барои масоҳати доира формулаи $S=\pi R^2$ бармеояд. ***Теорема исбот шуд.***

Масъала. Дарозии давраи саҳнаи сирк 41 *м*. Радиуси саҳна ва масоҳати онро ёбед.

③


Ҳалли он. 1) Аз формулаи дарозии давра радиуси онро меёбем *(расми 3)*:

$$R=\frac{C}{2R}\approx\frac{41}{2\cdot 3,14}\approx 6,53\ (м).$$

2) Аз формулаи ҳисоб кардани масоҳати доира масоҳати саҳнаро меёбем:

$S=\pi R^2\approx 3,14\cdot 6,53^2\approx 133,84\ (м^2)$. **Ҷавоб:** $R\approx 6,53$ *м*; $S=133,84$ *м*^{2}.

Савол, масъала ва супориш

1. Ҳисоб кардани формулаи масоҳати доираро асоснок кунед.

2. Аз формулаи ёфтани масоҳати доира S-и радиусаш ба R баробар истифода бурда, ҷадвалро пур кунед. (π–ро$=3,14$ гуфта гиред).

R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3		6,25
S			9		49π		$\sqrt{3}$	

3. Агар радиуси доира а) k маротиба зиёд шавад; б) k маротиба кам шавад, масоҳати доира чӣ қадар тағйир меёбад?

4. Масоҳати доираи ба квадрати тарафаш 5 *см* дарун ва берункашидашударо ёбед.

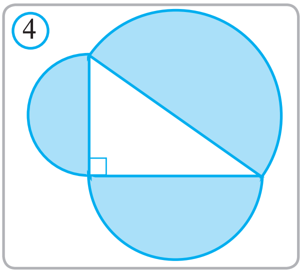
5. Масоҳати доираи ба секунҷаи мунтазами тарафаш $3\sqrt{3}$ *см* дарун ва берункашидашударо ёбед.

6. Аз доираи радиусаш R квадрати калонтарин бурида гирифтанд. Масоҳати қисми боқимондаи доираро ёбед.

7. Масоҳати доираи ба росткунҷаи тарафаш 6 *см* ва 7 *см* берункашидашударо ҳисоб кунед.

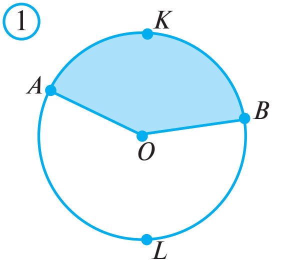
8. Масоҳати доираи ба ромби тарафаш 10 *см* ва кунҷи тезаш 60° дарункашидашударо ёбед.

9*. Тарафҳои секунҷаи росткунҷаро диаметр карда нимдоираҳо кашида шудаанд. Нишон диҳед, ки масоҳати нимдоираи ба гипотенуза кашидашуда ба ҳосили ҷамъи масоҳати нимдоираҳои ба катетҳо кашидашуда баробар аст *(расми 4)*.

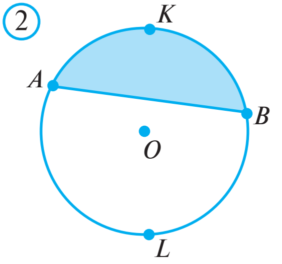
④


49 МАСОҲАТИ ҚИСМҲОИ ДОИРА

①



②



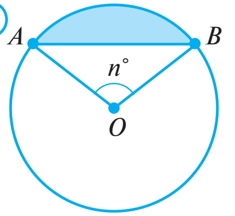
✓ ***Таъриф.*** Камони доира ва қисми бо ду радиус маҳдудкардашудаи охирҳои ин камон бо маркази доира **сектор** номида мешавад. Камони дар ҳудуди сектор буда **камони сектор** номида мешавад.

Дар расми 1 ду сектори камони *AKB* ва *BLA* дошта тасвир ёфтааст (якумаш ранг карда шудааст).

Барои ёфтани масоҳати сектори *S*-и радиусаш *R* ва ченаки градусиаш *n*° формула мебарорем. Аз сабаби масоҳати сектори камонаш баробари 1° ба $\frac{1}{360}$ қисми масоҳати доира (яъне сектори камонаш 360° буда) баробар буданаш, масоҳати сектори камонаш *n*° буда бо формулаи

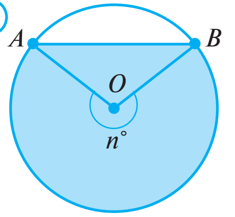
$S=\frac{\pi R^2}{360}\cdot n$ ёки $S=\frac{1}{2}Rl$ ёфта мешавад. Дар ин ҷо *l* – дарозии камони сектори *n*° мебошад.

③



$$S=\frac{\pi R^2}{360}\cdot n-S_{AOB}$$

④



$$S=\frac{\pi R^2}{360}\cdot n+S_{AOB}$$

✓ ***Таъриф.*** Қисми бо камони доира ва хордаи охирҳои ин камонро пайвасткунанда маҳдудкардашуда **сегмент** номида мешавад.

Дар расми 2 ду сегменти камонҳояш *AKB* ва *BLA* тасвир ёфтааст *(аз онҳо якумаш ранг карда шудааст)*. Масоҳати сегменти аз нимдоира фарққунанда *S* бо формулаи

$$S=S_{sektor}\pm S_{\Delta}=\frac{\pi R^2}{360}\cdot n\pm S_{AOB}$$

ҳисоб карда мешавад *(ба расмҳои 3 ва 4 нигаред)*.

Масъала. Масоҳати сектори ченаки градусаш 72° ба 45π баробар аст. Радиуси секторро ёбед.

Ҳалли он. Мувофиқи формулаи ёфтани масоҳати сектор $\frac{\pi R^2}{360}\cdot 72=45\pi.$

Аз ин, $R^2=\frac{45\pi\cdot 360}{72\pi}=225$, яъне $R=15$.

Ҷавоб: 15.

Савол, масъала ва супориш

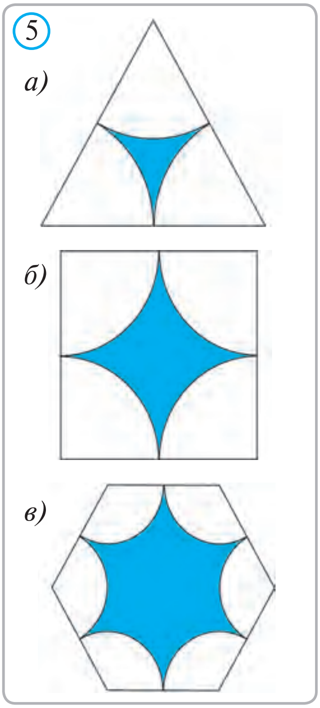
1. Формулаи ҳисоб кардани масоҳати секторро оварда бароред.
2. Формулаи ёфтани масоҳати сегментро оварда бароред.
3. Масоҳатҳои сектор ва сегменти радиусаш 7 *см*-ро ёбед. Дар ин ҷо ченаки градусии он а) 30°; б) 45°; в) 120°; г) 90°.
4. Дар расми 5 секунҷаи мунтазам, квадрат ва шашкунҷаи мунтазами тарафаш *а* тасвир ёфтааст. Масоҳати шаклҳои рангкардашударо ёбед. Дар ин ҷо радиуси секторҳо ба нисфи тарафи бисёркунҷа баробар аст.
5. Дар нишон чор давраи радиусҳояшон 1, 2, 3, 4 ҳаст. Масоҳати доираи хурдтарин ва масоҳати ҳар як ҳалқаро ёбед *(расми 6)*.
6. Дар доираи радиусаш баробари 10 *см* хордаи ба радиус баробар гузаронида шудааст. Масоҳати сегментҳои ҳосилшударо ёбед.
7. Масофаи байни марказҳои ду доираи радиусҳояшон 15 *см* ба 15 *см* баробар аст. Масоҳати қисми умумии доираҳоро ёбед.
8. Масоҳати дувоздаҳкунҷаи мунтазами ба давраи радиусаш 10 *см* дарун ва берункашидашударо ҳисоб кунед. Натиҷаҳоро бо масоҳати доира муқоиса намоед.

Масъалаи шавқовар

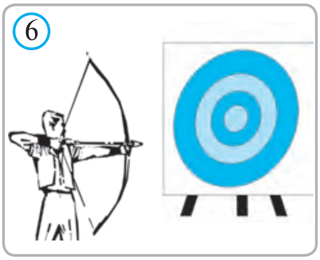
Бо се хати рост расми гулдони дар расми 7 тасвирёфтаро: а) ҳамин тавр ба чор қисм тақсим кунед, ки аз онҳо росткунҷа сохтан мумкин бошад; б) бо ду хати рост ҳамин тавр ба се қисм тақсим кунед, ки аз онҳо квадрат сохтан мумкин бошад.

Лавҳаҳои таърихи. Дар тӯли вақтҳои дуру дароз математикҳои зиёди дунё барои ҳалли масъалаи зерини номаш «квадратураи доира» ҳаракат кардаанд: бо ёрии паргор ва хаткашак сохтани квадрати масоҳаташ ба масоҳати доираи додашуда баробар. Фақат дар охири асри XIX ҳаллу фасл надоштани ин масъала исбот гардидааст.

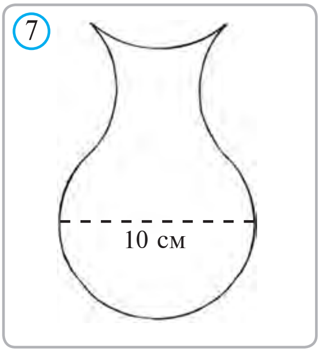
⑤



⑥

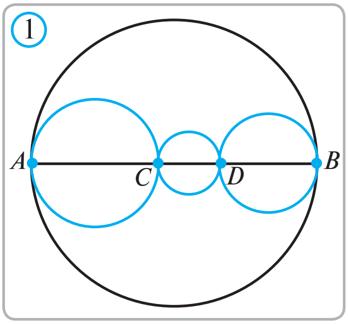


⑦



50 ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

Масъалаи 1. Нуқтаҳои C ва D диаметри давра AB-ро ба се порчаи AC, CD ва DB чудо мекунад. Исбот кунед, ки ҳосили чамъи дарозии давраҳои диаметрашон AC, CD ва DB ба дарозии давраи диаметраш AB баробар аст *(расми 1).*



Ҳалли он. Аз формулаи ёфтани дарозии давра истифода бурда, ҳосили чамъи дарозии давраҳои C_1, C_2,C_3-ро, ки диаметрашон AC,CD ва DB аст, меёбем:

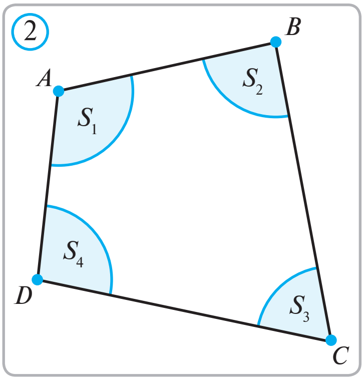
$$C_1+C_2+C_3=AC\cdot\pi+CD\cdot\pi+DB\cdot\pi=\pi(AC+CD+DB).$$

Аз сабаби дарозии давраи диаметрашон $AC+CD+DB=AB$ C буда ба $AB\cdot\pi$ баробар будан

$$C_1+C_2+C_3=C.$$

Исботи ин баробари дархост шуда буд.

Масъалаи 2. Қуллаҳои чоркунчаи $ABCD$-ро марказ гирифта, секторҳои радиусашон як хел сохта шудаанд *(расми 2)*. Аз ин секторҳо ду сектори дилхоҳ ба нуқтаи умумӣ соҳиб нест. Радиуси онҳо 1 *см*. Ҳосили чамъи масоҳати секторҳоро ёбед.



Ҳалли он. 1) Кунчҳои чоркунча A, B, C, D бо равиши мувофиқ α_1, α_2, α_3, α_4 бошанд. Он гоҳ дар асоси теорема дар бораи ҳосили чамъи кунчҳои дарунии бисёркунча

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=360^\circ.$$

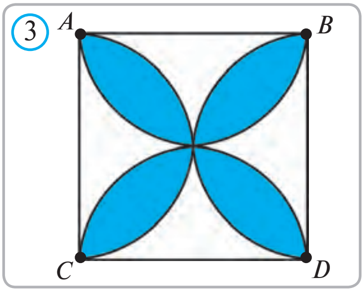
2) Дар асоси формулаи ёфтани масоҳати сектор ($R=1$ *см*),

$$S_1=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_1,\quad S_2=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_2,\quad S_3=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_3,\quad S_4=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_4. \quad (1)$$

3) Қисмҳои мувофиқи баробарии (1)-ро чамъ мекунем. Он гоҳ,

$$S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{\pi}{360^\circ}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot 360^\circ=$$

$=\pi$ (*см*^{2}) мешавад. ***Ҷавоб:*** π *см*^{2}.



Савол, масъала ва супориш

1. Квадрати периметраш 1 *м* ва давраи дарозиаш 1 *м* дода шудааст. Масоҳати бо давра маҳдудкардашударо бо масоҳати квадрат муқоиса кунед.

2. Аз доираи радиусаш 8 *см* сектори 60° бурида гирифта шудааст. Масоҳати боқимондаи қисми доираро ёбед.

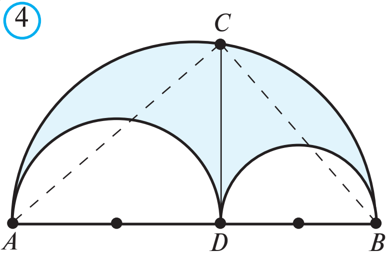
3. Масоҳати доираи бо ромби диагоналҳояш 6 *см* ва 8 *см* дарункашидашударо ҳисоб кунед.

4. Масоҳати шакли дар расми 3 ранг кардашударо ёбед. Дар он *ABCD* — квадрат, *AB*=4 *см*.

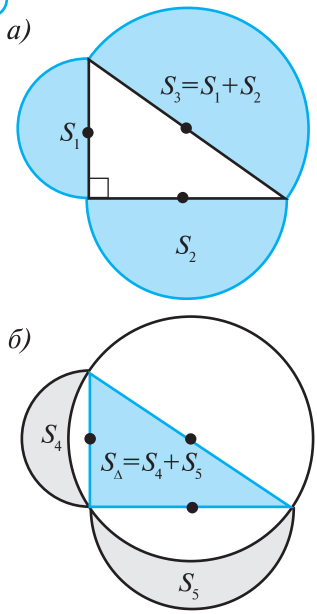
5*. Дар расми 4 шакли номаш “Корди Архимед” ранг карда нишон дода шудааст. Масоҳати он бо формулаи $\frac{\pi \cdot CD^2}{4}$ ҳисоб карда шуданашро исбот кунед. (Дар ин ҷо аз $\angle ACB=90°$ ва $CD^2=AD\cdot DB$ буданаш истифода баред).

6. Агар *AD*=6 *см*, *BD*=4 *см* бошад, масоҳат ва периметри шакли рангкардашудаи дар расми 4 нишондодашударо ёбед.(сумма ва дарозии камони ҳосилкардаи онро)

④



⑤



Лавҳаҳои таърихӣ. **Моҳчаҳои Гиппократ**

Моҳчаҳои Гиппократ — шакли бо ду давра маҳдуд кардашуда ва дорои хосиятҳои зайл аст: бо ёрии хордаҳои ин камонҳо ва радиуси давраҳо (моҳчаҳо) квадрати ба ин моҳчаҳо баробарбузург сохтан мумкин.

Теоремаи Пифагор татбиқ карда шавад, масоҳати нимдоираи ба гиппотенузаи тасвирёфта сохташуда ба ҳосили ҷамъи масоҳатҳои нимдоираи дар катетҳо сохташуда баробар мешавад (*расми 5-а*). (ба масъалаи 9*-саҳ оғнигаред). Бинобар ин, ҳосили чамъи масоҳати моҳчаҳои дар расми 5-б тасвирёфта ба масоҳати секунҷа баробар аст (мушоҳида карда бинед). Агар ба ҷои секунҷаи дар расм тасвирёфта секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлу гирем, аз ду моҳчаи ҳосилшуда масоҳати ҳар яки моҳчаҳо ба нисфи масоҳати секунҷа баробар мешавад. Математики юнони қадим Гиппократ (асри V, пеш аз эраи мо) барои ҳаллу фасли масъала дар бораи квадратураи доира кӯшиш карда, якчанд моҳчаҳои бо бисёркунҷа баробарбузургро ихтироъ кардааст.

Ҷадвали пурраи моҳчаҳои Гиппократ фақат дар асрҳои XIX—XX тартиб дода шудаанд.

51 МАЪЛУМОТ ВА МАСЪАЛАҲОИ ИЛОВАГӢ ДОИР БА БОБИ III

I. Тестҳо

1. Ченаки радиании кунҷи бузургиаш 45 градус ба чӣ баробар аст.

A. Ба 1 баробар аст; B. Ба $\frac{\pi}{2}$ баробар аст;

D. Ба $\frac{\pi}{4}$ баробар аст; E. Ба $\sqrt{2}$ баробар аст.

2. Дарозии камони ба давраи радиусаш 3 *см*-и бузургии кунҷи марказиаш ба 150° баробарбуда такякардаро ёбед.

A. $\frac{5\pi}{2}$ *см*; B. $\frac{5\pi}{3}$ *см*; D. $\frac{10\pi}{3}$ *см*; E. $\frac{5\pi}{4}$ *см*.

3. Дарозии камони кунҷи марказии бузургиаш ба $\frac{5\pi}{4}$ баробари ба давраи радиусаш 6 *см* такякунандаро ёбед.

A. $\frac{15\pi}{2}$ *см*; B. $\frac{5\pi}{6}$ *см*; D. $\frac{4\pi}{3}$ *см*; E. $\frac{5\pi}{2}$ *см*.

4. Ба квадрати тарафаш 5 см давра берункашида шудааст. Дарозии ин давраро ёбед.

A. $5\sqrt{2}\pi$; B. $\sqrt{2}\pi$; D. $3\sqrt{2}\pi$; E. 5π.

5. Масоҳати доираи диаметраш ба 6 *см* баробарро ёбед.

A. 9π; B. 6π; D. $3\sqrt{2}\pi$; E. 12π.

6. Ченаки градусии камон 150°, масоҳати сектори доиравии радиусаш 6 см бударо ёбед.

A. 15π *см*^{2}; B. 6π *см*^{2}; D. $30\sqrt{2}\pi$ *см*^{2}; E. 24π *см*^{2}.

7. Масоҳати сектори доиравии радиусаш 6 *см* ва дарозии камонаш 12 *см* бударо ёбед.

A. 15π *см*^{2}; B. 6π *см*^{2}; D. $30\sqrt{2}\pi$ *см*^{2}; E. 24π *см*^{2}.

8. Масоҳати сегменти доиравии радиусаш 3 см ва ченаки градусии камонаш ба 120° баробар бударо ёбед.

A. $6\pi - 4\sqrt{3}$; B. $6\pi + 4\sqrt{3}$; D. $3\pi - 4\sqrt{3}$; E. $3\pi + 4\sqrt{3}$.

II. Масъалаҳо

1. Тарафи ҳашткунҷаи мунтазами *ABCDEFKL* 6 *см*. Диагонали *AC*-и онро ёбед.

2. Квадрат ба давраи радиусаш 4 *дм* дарун кашида шудааст. Дарозии камони хордаи аз миёнаҷои тарафҳои ҳамсояи квадрат гузашта аз давра ҷудокардаро ёбед.

3. Дарозии камони 90° -и давра 15π *см*. Радиуси давраро ёбед.

4. Аз давраи радиусаш 20 камони дарозиаш 10π ҷудо карда шуд. Кунҷи марказии ба ин камон мувофиқро ёбед.

5. Хордаи умумии ду доира аз давраи ин доираҳоро маҳдудкунанда камонҳои 60° ва 120° -ро ҷудо мекунад. Нисбати масоҳати доираҳоро ёбед.

6. Масоҳати доираҳои ба секунҷаи тарафҳояш 3,4,5 дарун ва берункашидашударо ёбед.

7. Хордаи доира камони 60° -ро дарҳам мекашад. Нисбати масоҳати сегментҳои ин хорда ҷудокардаро ёбед.

8. Нисбати масоҳати шашкунҷаи мунтазам бар масоҳати доираи ба он дарункашидашударо ёбед.

9. Шашкунҷаи мунтазами $ABCDEF$ -и тарафаш баробари a дода шудааст. Давраи марказаш нуқтаи A ва радиусаш ин шашкунҷаро ба ду қисм ҷудо мекунад. Масоҳати ҳар як қисмро ёбед.

10. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC $\angle A=72^\circ$, $\angle C=90^\circ$, $BC=15$ *см.* Дарозии камони диаметраш BC-и дар дохили секунҷа хобидаро муайян кунед.

11. Ҳашткунҷаи мунтазами ба доира дарункашидашуда дода шудааст. Радиусҳои ба ду қуллаи ҳамсоя гузаронидашуда доираро ба ду сектор чудо мекунад. Нисбати масоҳатҳои ин секторҳоро ёбед.

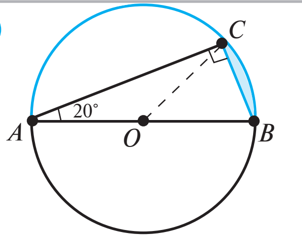
12. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC $\angle A=20^\circ$, $\angle C=90^\circ$, $AB=18$ *см.* Порчаи BC доираи ба секунҷа берункашидашударо ба ду сегмент ҷудо мекунад. Масоҳати сегменти ранг кардашударо ёбед (*расми 1*).

13. Давраи хурд ба давраи калон ва диаметри он AB расида мегузарад. Агар нуқтаи расиш ба диаметр маркази даврзанӣ ва $AB=4$ бошад, шакли дар расм ранг кардашударо ёбед (*расми 2*).

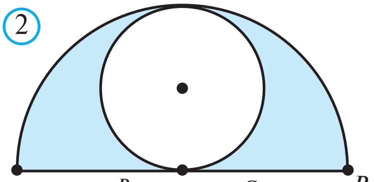
14. Тарафи шашкунҷаи мунтазами $ABCDEF$ ба 6 баробар буда, марказаш дар нуқтаи O аст. Дар нуқтаи O давраҳои марказашон дар нуқтаи A ва D будаи радиусҳояшон баробар ба якдигар расида мегузарад. Масоҳати соҳаи рангкардашударо ёбед (*расми 3*).

15. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC $\angle C=90^\circ$, $AC=4$, $CB=2$. Давраи марказаш дар гипотенуза буда ба катетҳои секунҷа расида мегузарад. Дарозии ин давраро ёбед.

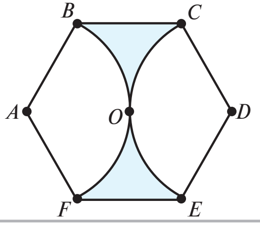
①



②



③



III. Худатонро санҷида бинед (кори назоратии намунавӣ)

1. Ба квадрати 6 *см* дарозии давраи берункашидашуда ва масоҳати доираи дарун кашидашударо ёбед.

2. Радиуси давраи ба бисёркунҷаи мунтазами тарафаш 24 *см* дарункашидашуда $4\sqrt{3}$ *см* бошад, радиуси давраи ба он берункашидашударо ёбед.

3. Дарозии камони давраи 240° баробари 24 *см* бошад,
а) радиуси давра; б) масоҳати сектори камонаш 240°; в)масоҳати сегменти камонаш 240° -ро муайян кунед.

Масъалаи шавқовар

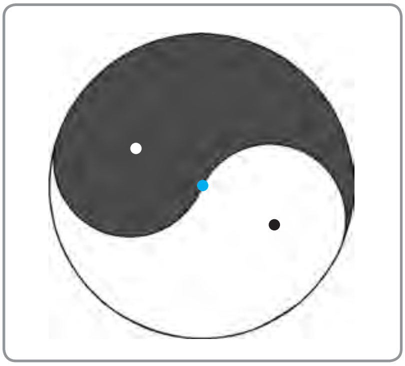
Ин ва Ян

Дар расм ифодакунандаи зиддиятҳои табиати рамзи Чин бо номи “Ин ва Ян” тасвир ёфтааст.

а) Нишон диҳед, ки масоҳати рамзҳои Ин ва Ян баробаранд.

б) Бо як хати рост ин рамзҳоро бо ду қисми масоҳати ҳар яки он баробар ҷудо намоед.

с) Периметри рамзҳои Ин ва Янро ёбед. (сумаи дарозии камонҳои хосил кардом онҳоро ёбед).



Лавҳаҳои таърихӣ. Ҳисоб кардани дарозии давра аз замонҳои қадим муаммои асосӣ ба ҳисоб мерафт. Усули дарозии давраро ба периметри бисёркунҷаи ба он дарункашидашуда иваз кардан васеъ паҳн шудааст.

Риёзидонони Осиёи Миёна ҳам бо масъалаҳои сохтани бисёркунҷаҳои мунтазами ба давра дарункашидашуда, ифода кардани тарафҳои онҳо ба воситаи радиуси доира машғул шудаанд. Абӯрайҳон Берунӣ дар асари худ «Қонуни Масъуд» бо муайян кардани тарафи бисёркунҷаи мунтазами ба доира дарункашидашуда машғул шуда, усулҳои амиқ кардани тарафҳои панҷкунча,шашкунча,ҳафткунча,.........,даҳкунҷаро нишон дод. Дар натиҷаи ин ҳисобкуни ба қимати $\pi \approx 3{,}14$ соҳиб шуд.

Дар дастнавис ва меххатҳои Бобил ва Мисри қадим π баробарии се гуфта гирифта шудааст. Ин ба талаби саҳеҳии он давр кифоя шуданаш мумкин. Сонитар римиҳо ба π қимати 3,12-ро кор фармудаанд. Қимати ба адади π гирифтаи Архимед 3,14 буда, он дар ҳалли масъалаҳои амалӣ мақбул аст.

Дар рисолаи яке аз намояндагони «мактаби астрономия»-и Улуғбек Ал-Кошӣ, ки соли 1424 бо номи «Китоб дар бораи дарозии давра» таълиф шудааст, адади тарафҳои бисёркунҷаи мунтазами дарун ва берункашидашударо бо роҳи дучанд зиёдкунӣ $3 \cdot 2^{28} = 800\ 335\ 168$ гирифта, периметри бисёркунҷаи мунтазамро ҳисоб намуд ва барои π қимати $\pi = 3{,}1\ 415\ 826\ 535\ 897\ 932$ -ро ҳосил намуд. Ин то 16 рақами даҳи амиқ аст.

Лекин асари Ал-Коши муддати дуру дароз ба Аврупо номаълум буд. Аз аврупоиҳо Ван Ромени белгиягӣ соли 1597 ба бисёркунҷаи мунтазами тарафҳояш 2^{30} усули Архимедро татбиқ намуда, барои π қимати то 17 адади сахеҳи даҳиро муайян намуд. Олими голландиягӣ Рудолф ван Сеймон (1540-1610) ин саҳеҳиро то 38 рақами даҳӣ расонидааст. Ҳоли ҳозир бо ёрии мошинаи ҳисобкунии электронӣ барои π то саҳеҳии аз миллион зиёдтар қимати даҳии он ёфта шудааст. Барои ҳисобкуниҳои ҳаррӯза 3,1416, барои ҳисобкуниҳои математикӣ 3,1416, барои ҳисобкуниҳои астрономӣ ва кайҳонӣ қимати 3,1415826 кифоя аст.

БОБИ IV

МУНОСИБАТҲОИ МЕТРИКӢ ДАР СЕКУНЧА ВА ДАВРА

Шумо дар натичаи омӯзиши ин боб ба дониш ва малакаи амалии зерин соҳиб мешавад:

Донишҳо:

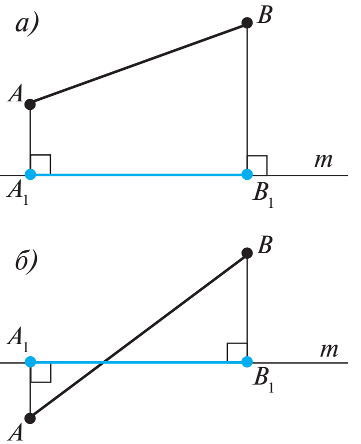
- √ *Донистани хосиятҳои парчаҳои мутаносиб;*
- √ *донистани хосиятҳои баландии ба гипотенуза гузаронидашуда дар секунҷаи росткунҷа;*
- √ *Донистани хосиятҳои хордаҳои якдигарро бурандаи парчаҳо ва ингунин парчаҳои хати рости бурандаи давра.*

Малакаи амалӣ:

- √ *ҳал карда тавонистани масъалаҳо оиди нисбати порчаҳо ва порчаҳои мутаносиб;*
- √ *аз хосиятҳои баландии ба гипотенуза гузаронидашуда дар секунҷаи росткунҷа истифода бурда ҳал карда тавонистани масъалаҳо;*
- √ *аз хосиятҳои порчаҳои хордаҳои буранда ва порчаҳои хати рости буранда истифода бурда ҳал кардани масъалаҳо.*

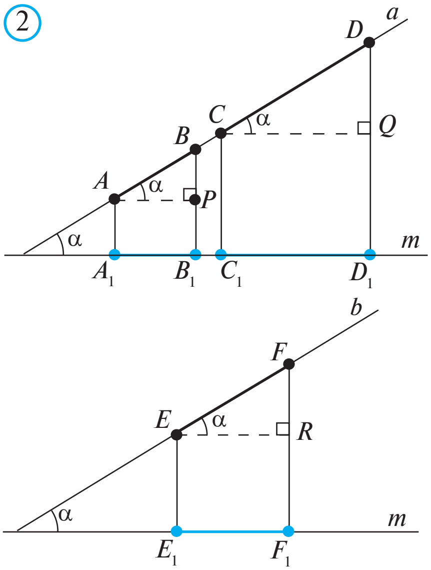
52 ПРОЕКСИЯИ ПОРЧАҲО ВА МУТАНОСИБӢ

①



проексияи нуқтаи **A_1** — A,
нуқтаи **B_1** — B,
порчаи **A_1B_1** — AB дар **тири m**

②



Машқи фаъолкунанда

1. Нисбати порчаҳо чиро мефаҳмонад?
2. Чӣ гуна порчаҳоро мутаносиб мегӯянд.
3. Теоремаи Фалесро гӯед.

Дар ҳамворӣ хати рости m ва порчаи AB дода шуда бошад. Аз нуқтаҳои A ва B то хати рости m перпендикулярҳои AA_1 ва BB_1 мефурорем (*расми 1*).Порчаи A_1B_1 проексияи (сояи) порчаи AB дар тири m номида мешавад.

Сохтаии амали проексияи порчаи AB дар хати рости m A_1A_1-ро проексиякунонии AB дар хати рости m меноманд.

Теорема. **Порчаҳои дар як хати рост ё ки хатҳои рости параллел хобанда дода шуда бошад. Проексияҳои онҳо айнан ба як хати рост ба порчаҳои додашуда мутаносиб мешавад.**

$a||b$, проексияҳои A_1B_1 — AB, C_1D_1 — CD, E_1F_1 — EF дар хати рости m (*расми 2*).

$$\Rightarrow \quad \frac{A_1B_1}{AB}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{E_1F_1}{EF} \quad (1)$$

Исбот. а) Агар хатҳои рости a ва b ба хати рости m параллел бошад, $AB=A_1B_1$, $CD=C_1D_1$, $EF=E_1F$ буданаш ва баробарии (1) ҷой доштанаш равшан аст.

б) Агар хати рости a ва b ба хати рости m перпендикуляр бошад, нуқтаҳои A_1 ва B_1, C_1 ва D_1, E_1 ва F_1 болои ҳам мехобанд. Аз ин рӯ, дарозиҳои порчаҳои A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1 ба сифр баробаршуда баробарии (1) иҷро мешавад.

в) Акнун ҳолатҳои дигарро дида мебароем. Секунҷаҳои росткунҷаи ABP, CDQ, EFR-ро месозем. Дар он $a||b$ буданаш $\angle BAP=\angle DCQ=\angle FER$. Аз ин рӯ, секунҷаҳои росткунҷаи, *ABP, CDQ* ва *EFR* секунҷаи монанд аст. Аз ин $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{E_1F_1}{EF}$ -ро ҳосил мекунем. ***Теорема исбот шуд.***

Масъала. Порчаҳои *AB* ва *CD* дар хатҳои рости параллел мехобанд. Агар $AB=12$ *см*, $CD=15$ *см* ва проексияи порчаи *AB* дар ягон хати рости *m* 8 *см* бошад, проексияи порчаи *CD* дар хати рости *m*-ро ёбед.

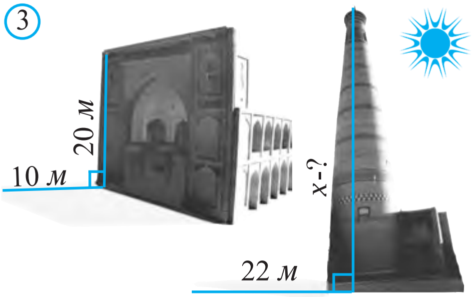
Ҳалли он. Проексияи порчаи *CD* дар хати рости *m* *x* бошад. Он гоҳ аз теоремаи исботкардашуда ва шарти масъала истифода бурда, таносуб тартиб медиҳем:

$$\frac{x}{15}=\frac{8}{12}.$$

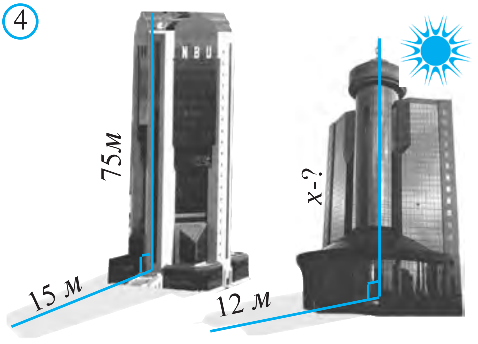
Аз ин баробарӣ $x=10$ буданашро меёбем.

Ҷавоб: 10 *см*.

③



④



Савол, масъала ва супориш

1. Проексияи порча дар хати рости додашуда чист?
2. Проексияҳои порчаҳои дар як хати рост ё ки хатҳои рости параллел хобида айнан ба як хати рост мутаносиб буданашонро исбот кунед.
3. Кунҷи байни хатҳои рости *a* ва *b* ба 45° баробар аст. Дар хати рости *a* порчаи дарозиаш 10 *см* буда *AB* гирифта шудааст. Проексияи порчаи *AB* -ро дар хати рости *b* ёбед.
4. Қуллаи порчаи *AB* аз хати рости *l* дар масофаҳои 9 *см* ва 14 *см* мехобад. Агар порчаи *AB* хати рости *l* -ро бурида нагузарад ва *AB*=13 *см* бошад, проексияи *AB* дар хати рости *l* ёфта шавад.
5. Баландии биноҳои дар расми 3 ва 4 тасвирёфтаро дар асоси маълумотҳои додашуда ёбед.
6. Хати рост ва порчаи ба он параллел набуда кашед. Проексияи порчаро дар хати рост созед.
7. Дар ҳамвории координати нуқтаҳои $A(2;3)$ ва $B(3;-4)$ дода шудаанд. Дарозии проексияи порчаи *AB* дар тирҳои координатӣ ёфта шавад.
8. Кунҷи байни хатҳои рости *a* ва *b* α буданаш маълум, дар хати рости *a* порчаи *AB* гирифта шудааст. Проексияи порчаи *AB* дар хати рости *b* ёфта шавад.

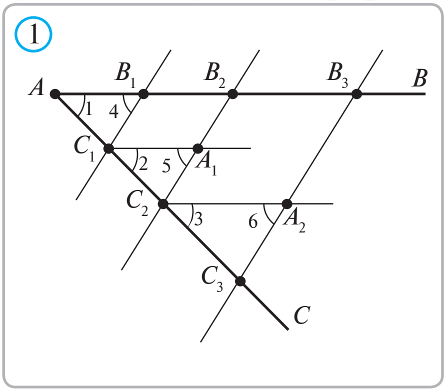
53 ХОСИЯТҲОИ ПОРЧАҲОИ МУТАНОСИБ

Хосияти асосии гардонидашудаи теоремаи Фалесро исбот мекунем.

Теорема. **Хатҳои рости параллели (мувозии) ҳар ду тарафи кунҷро бурида гузашта, дар тарафҳои он порчаҳои мутаносиб ҷудо мекунад.**

$\angle BAC,\ B_1C_1||B_2C_2||B_3C_3$ (*расми 1*) ⇨ $\dfrac{AB_1}{AC_1}=\dfrac{B_1B_2}{C_1C_2}=\dfrac{B_2B_3}{C_2C_3}$

Исбот. Аз нуқтаҳои C_1 ва C_2 хатҳои рости C_1A_1 ва C_2A_2 - и ба AB параллел мегузаронем.Дар ин ҳолат аз тарафи якум $\angle 1=\angle 2=\angle 3$ мешавад,чунки онҳо кунҷҳои мувофиқи ҳангоми хати рости AC бурида гузаштани хатҳои рости параллели AB, C_1A_1 ва C_2A_2 ҳосил шудаанд. Аз тарафи дуюм $\angle 4=\angle 5=\angle 6$, чунки онҳо кунҷҳои тарафҳояшон параллел.


①

Бинобар ин дар асоси аломати *КК*-и монандии секунҷаҳо $\Delta AB_1C_1 \backsim \Delta C_1A_1C_2 \backsim \Delta C_2A_2C_3$ мешавад.

Дар ин ҳол $\dfrac{AB_1}{AC_1}=\dfrac{C_1A_1}{C_1C_2}=\dfrac{C_2A_2}{C_2C_3}$ (1) ҳосил мекунем.

Бидуни ин чоркунҷаҳои $B_1C_1A_1B_2$ ва $B_2C_2A_2B_3$ — параллелограмм,чунки:

$B_1C_1||B_2C_2||B_3C_3$ — дар асоси шарт;

$AB||C_1A_1||C_2A_2$ — мувофиқи сохтан.

Аз ҳамин сабаб тарафҳои муқобили ин параллелограммҳо баробаранд:

$$C_1A_1=B_1B_2 \text{ ва } C_2A_2=B_2B_3. \qquad (2)$$

аз баробариҳои (1) ва (2) $\dfrac{AB_1}{AC_1}=\dfrac{B_1B_2}{C_1C_2}=\dfrac{B_2B_3}{C_2C_3}$ буданаш бармеояд.

Теорема исбот шуд.

Машқҳои амалӣ. **Тақсим кардани порча ба нисбати додашуда**

Порчаи додашуда a-ро ҳамин тавр ба чор қисм тақсим кунед, ки нисбати порчаҳо байни якдигар $m:n:k:l$ шавад.

Барои ин қадам ба қадам инҳоро иҷро мекунем:

Қадами 1. Кунҷи дилхоҳи тез кашида, ба як тарафи он порчаҳои дарозиашон $OA=m$, $AB=n$, $BC=l$ ва $CD=k$ -ро чун нишондоди расми 2 пай дар ҳам гузошта мебароем.

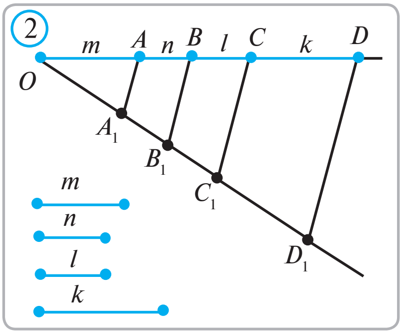
Қадами 2. Ба тарафи дуюми кунҷ ба порчаи додашудаи $a=OD_1$ -ро мегузорем.

Қадами 3. Нуқтаҳои D ва D_1 -ро пайваст мекунем.

Қадами 4. Аз нуқтаҳои A, B, C порчаҳои AA_1, BB_1 ва CC_1 -ро ба DD_1 параллел мегузаронем.

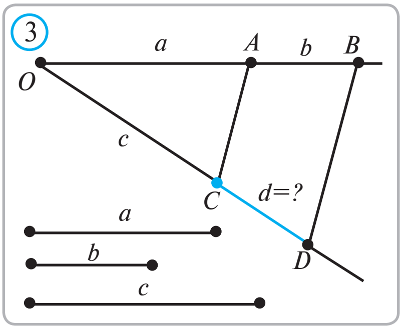
Дар асоси теоремаи болоӣ порчаи додашудаи $a=OD_1$ бо нуқтаҳои A_1, B_1, C_1 ва D_1 дар нисбати $m:n:l:k$ тақсим мешавад.

Супориш: Ин тасдиқотро мустақилона асоснок кунед.



Супориши амалӣ. Сохтани порчаи чоруми мутаносиб.

Порчаҳои *a, b* ва *c* дода шудаанд, порчаҳои *a* ва *b*, *c* ва *d* мутаносиб буданашон маълум аст, яъне $a:b=c:d$ порчаи *d*-ро созед *(расми 3)*.



Қадами 1. Кунҷи тези ихтиёрӣ кашида,дар як тарафи вай порчаҳои $OA=a$ ва $AB=b$ -ро чун нишондоди расми 3 мегузорем.

Қадами 2. Ба тарафи дуюмаш бошад,порчаи $OC=c$ -ро мегузорем.

Қадами 3. Нуқтаҳои *A* ва *C* -ро мепайвандем.

Қадами 4. Аз нуқтаи *B* ба *AC* хати рости параллели *BD*-ро мегузаронем.

Супориш: *CD* порчаи талабкардашудаи *d* буданашро асоснок кунед.

Савол, масъала ва супориш

1. Порчаи дарозиаш 42 *см* дода шудааст.Онро бо қисмҳои дар нисбати а) 5:2; **б)** 3:4:7; в) 1:5:1:7 буда тақсим кунед.

2. Дар расм ҳар як қисм аз порчаи воҳидӣ иборат бошад,нисбати порчаҳои *AB* ва *CD*, *EF* ва *MN*, *AC* ва *DF*, *AN* ва *CE*, *EN* ва *BM* -ро ёбед.

3. Агар **а)** $m=4$ *см*, $n=3$ *см* ва $l=8$ *см*; б) $m=2$ *см*,$n=3$ *см* ва $l=7$ *см* бошад, порчаи чоруми мутаносибро созед ва дарозии онро ёбед. Порчаи *m, n* ба порчаи *l* ва *k* мутаносиб.

4. Периметри чоркунҷа 54 *см* ва тарафҳояш дар нисбати 3 : 4 : 5 : 6 бошад, ҳар як тарафи онро ёбед.

5. Кунҷҳои чоркунҷа байни якдигар дар нисбати 3 : 4 : 5 : 6 бошад, ба чӣ баробар будани кунҷи хурди онро ёбед.

6. Порчаҳои дарозиаш ба 4,5 ва 6 баробар дода шудааст. Порчаи дарозиаш ба 4,8 баробар созед.

7*. Яке аз тарафҳои чоркунҷаи периметраш 60 *см* буда 15 *см*, тарафҳои боқимонда чун 2:3:4 нисбат доштанаш маълум. Тарафи калони онро ёбед.

54

ПОРЧАҲОИ МУТАНОСИБ ДАР СЕКУНҶАИ РОСТКУНҶА

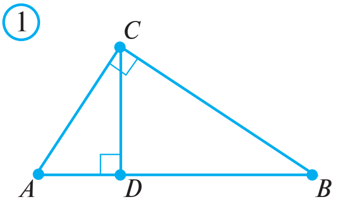
Хосият. Баландии аз қуллаи кунҷи рости секунҷаи росткунҷа гузаронидашуда онро ба ду секунҷаи монанд ҷудо мекунад.

ΔABC, $\angle C=90°$,
CD — *баланди (расми 1)*

⇒

$\Delta ABC \backsim \Delta ACD$, $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$

①



Исбот. Секунҷаи ABC ва ACD секунҷаҳои росткунҷа буда, A ба онҳо кунҷи умумӣ аст. Бинобар ин $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$. Ҳамин тавр, ΔABC ва ΔCBD ҳам секунҷаи росткунҷа буда, барои онҳо кунҷи $\angle B$ умуми аст. Аз ин ҷо, $\Delta ABC \backsim \Delta CBD$.

Порчаҳои AD ва DC-и дар расми 1 тасвиршуда бо равиши мувофиқ проексияи дар гипотенуза будаи катетҳои AC ва BC мебошад.

Таъриф. Агар барои порчаҳои a, b ва c $a:b=b:c$ бошад, **порчаи мутаносиби** миёна байни порчаҳои a ва b меноманд.

Шарти мутаносибии миёнаро дар намуди $b^2=ac$ ё ки $b=\sqrt{ac}$ ҳам навиштан мумкин. Ба хосияти дар боло исбот кардашуда асоснок кардани шавем, теоремаи зерини дар бораи порчаҳои мутаносибӣ буда бо осонӣ исбот карда мешавад:

Теоремаи 1. Баландии аз куллаи кунҷи рости секунҷаи росткунҷа гузаронидашуда байни проексияи катетҳо дар гипотенуза мутаносиби миёна мешавад.

Дар ҳақиқат, дар асоси хосияти исбот кардашуда: $\Delta ACD \backsim \Delta CBD$. Аз ин

$$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2=AD\cdot BD \Rightarrow CD=\sqrt{AD\cdot BD}.$$

Теоремаи 2. Катети секунҷаи росткунҷа байни гипотенуза ва проексияи ҳамин катет дар гипотенуза мутаносиби миёна аст (*расми 1*).

Дар ҳақиқат, дар асоси хосияти исбот кардашуда: $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$. Аз ин

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2=AB\cdot AD \Rightarrow AC=\sqrt{AB\cdot AD}.$$ монандӣ

Ҳамин $BC=\sqrt{BD\cdot AB}$ буданашро исбот кардан мумкин.

Масъала. Проексияи катети хурди секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 15 *см* ва 20 *см*-ро дар гипотенуза ёбед.

ΔABC, $\angle C=90°$, CD — *баландӣ*, $AC=15$ *см*,
$BC=20$ *см* (*расми 1*)

⇒

$AD=?$

Ҳалли он. 1) Аз теоремаи Пифагор истифода бурда гипотенузаи секунҷаи росткунҷаро меёбем: $AC^2=AC^2+BC^2=15^2+20^2=625$, яъне $AB=25$ *см*.

2) Аз теоремаи дуюм истифода бурда AD -ро меёбем:

$$AC^2=AB\cdot AD \Rightarrow AD=\frac{AC^2}{AB}=\frac{15^2}{25}=9\ (см).$$

Ҷавоб: 9 *см*.

Аз ин ду теорема ба сифати натиҷа **исботи худи Пифагор навишта монда,** аз теоремаи Пифагор бармеояд (*расми 1*). Дар ҳақиқат, дар асоси теоремаи 2

$$\left.\begin{aligned} AC^2&=AD\cdot AB\\ BC^2&=BD\cdot AB \end{aligned}\right\} \Rightarrow AC^2+BC^2=AD\cdot AB+BD\cdot AB=AB\cdot(\underbrace{AD+BD}_{AB})=AB\cdot AB=AB^2.$$

Ҳамин тавр, $AC^2+BC^2=AB^2$.

Савол, масъала ва супориш

1. Исбот кунед (*расми 2*):
а) $\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC$;
б) $b^2=b_c\cdot c$, $a^2=a_c\cdot c$; **в)** $h_c^{\,2}=a_c\cdot b_c$.

2. Баландии ба гипотенузаи секунҷаи росткунҷа гузаронидашуда онро ба порчаҳои 9 *см* ва 16 *см* ҷудо мекунад. Тарафҳои секунҷаро ёбед.

3. Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 15 *см*, яке аз катетҳояш ба 9 *см* баробар аст. Проексияи катети дуюм дар гипотенузаро ёбед.

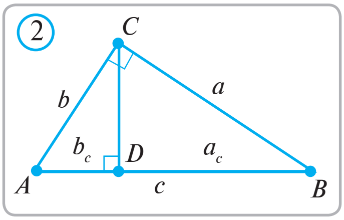
4. Дар асоси маълумотҳои расми 3 тарафҳои секунҷаи ABC-ро ёбед.

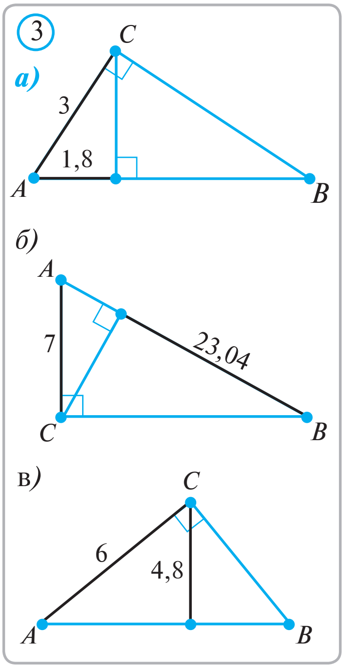
5*. Нисбати проексияҳои катетҳои секунҷаи росткунҷа дар гипотенузаро ёбед, агар катетҳо чун 4:5 нисбат дошта бошанд.

6*. Секунҷаи росткунҷаи нисбати катетҳояш 3:2 буда дода шудааст. Проексияҳои катетҳо дар гипотенуза яке аз дигаре 6 *см* зиёд аст. Масоҳати секунҷаро ёбед.

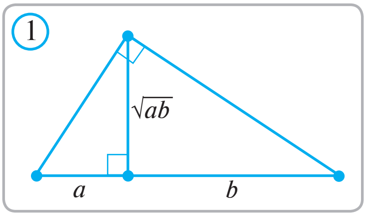
7. Масоҳати секунҷаи росткунҷаи проексияи катетҳояш дар гипотенуза 2 *см* ва 18 *см* буда ёфта шавад.

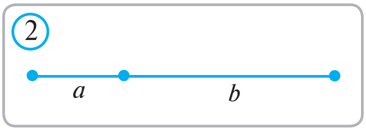
8*. Дар секунҷаи ABC $\angle C=90°$, CD — баландӣ, CE — биссектриса ва $AE:EB=2:3$ нисбатҳои а) $AC:BC$; б) $S_{ACE}:S_{BCE}$; в) $AD:BD$ ёфта шавад.

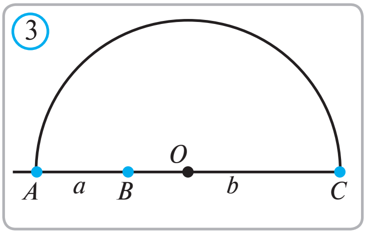


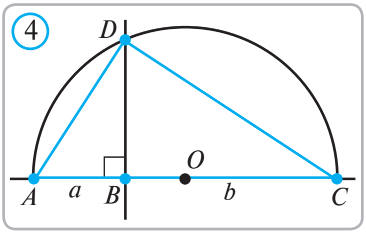


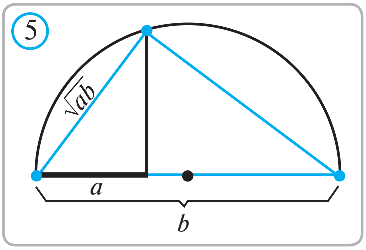
55 БО ДУ ПОРЧАИ ДОДАШУДА СОХТАНИ ПОРЧАИ МУТАНОСИБИ МИЁНА











Дида будем, ки дар секунҷаи росткунҷа баландии аз кунҷи рост гузаронида шуда гипотенузаро ба ду қисмҳои a ва b чудо кунад, баландӣ ба $\sqrt{ab}$ баробар мешавад (*расми 1*).

Пас, Барои ду порчаи додашуда сохтани порчаи мутаносиби миёна:

1) дарозии гипотенуза ба $a+b$ баробар (*расми 2*);

2) сохтани секунҷаи росткунҷаи баландии аз кунҷи росташ гузаронидашуда, ки гипотенузаро ба қисмҳои a ва b тақсим мекунад, кифоя аст.

Барои ин аз маркази давраи ба секунҷаи росткунҷа берун кашидашуда дар миёначои гипотенуза буданаш истифода мебарем (*расми 3*).

Сохтан:

1) Хати росте кашида, дар он $AB=a$ ва $BC=b$ карда нуқтаҳои A, B ва C-ро ишорат мекунем (*расми 3*).

2) Миёначои порчаи AC нуқтаи O-ро меёбем. Нимдавраи диаметраш AC ва марказаш нуқтаи O-ро месозем (*расми 3*).

3) Аз нуқтаи B ба хати рости AC хати рости перпендикуляр мегузаронем (*расми 4*). Ин хати рост нимдавраро дар нуқтаи D бурида гузашта бошад. Он гоҳ ΔADC — секунҷаи росткунҷа, $BD=\sqrt{ab}$ — порчае сохтанамон лозим буд, мешавад. ***Сохтан иҷро карда шуд.***

Ҳангоми сохтани порчаи мутаносиби миёна аз катети секунҷаи росткунҷа, ки бо гипотенуза ва байни проексияи ҳамин катет дар гипотенуза мутаносиби миёна аст, истифода бурдан мумкин (*расми 5*).

? *Савол, масъала ва супориш*

1. Порчаҳои дарозиашон a ва b дода шудаанд. Порчаи дарозиаш $\sqrt{ab}$ -ро созед.

2. Порчаҳои дарозиашон баробарии a ва b дода шудаанд. Аз теоремаи Пифагор истифода бурда, порчаҳои дарозиаш а) $\sqrt{a^2+b^2}$; б) $\sqrt{a^2-b^2}$ бударо созед.

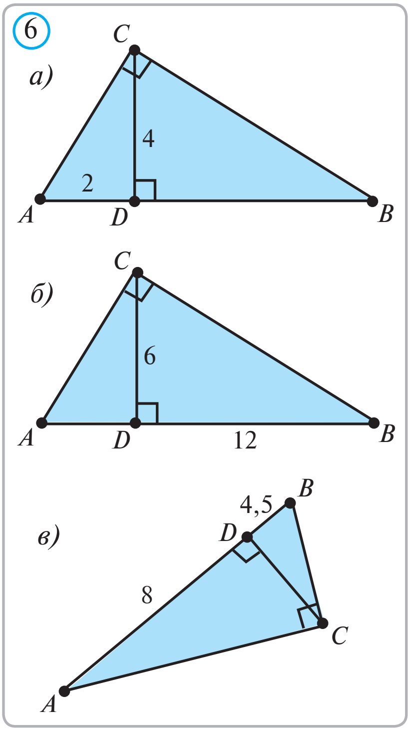
3. Порчаи дарозиаш баробарии 1 дода шудааст. Порчаҳои дарозиаш а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}$; д) $\sqrt{18}$; е) $\sqrt{30}$ -ро созед.

4. Дар асоси маълумотҳои расми 6 масоҳати секунҷаи ABC ёфта шавад.

5. Аз нуқтаи C-и давра ба диаметри AB перпендикуляри CD фуроварда шудааст. Агар $CD=12$ *см*, $AD=24$ *см* бошад, масоҳати доираро ёбед.

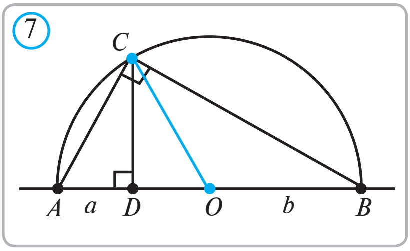
6. Масоҳати секунҷаи дар масъалаи болоӣ гирифташудаи ABC -ро ёбед.

7. Биссектрисаи кунҷи рости секунҷаи росткунҷа гипотенузаро дар нисбати 5:3 тақсим мекунад. Нисбати порчаҳои дар гипотенуза ҷудо кардани баландии аз кунҷи рост ба гипотенуза гузаронидашударо ёбед.


⑥

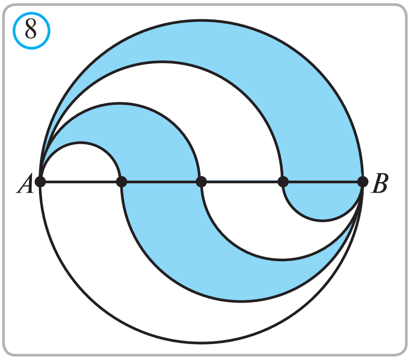
8. Ба доираи радиусаш 8 *см* секунҷаи росткунҷаи яке аз кунҷаш 30° буда дарун кашида шудааст. Қисми аз секунҷа берунии доира аз 3 сегмент иборат аст. Масоҳати ин сегментҳоро ёбед.

9*. Дар расми 7 $AD=a$, $DB=b$, бинобар ин $OC=\frac{a+b}{2}$ (O— маркази давра). Аз расм истифода бурда, нобаробарии $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ -ро исбот кунед.


⑦

Масъалаи шавқовар

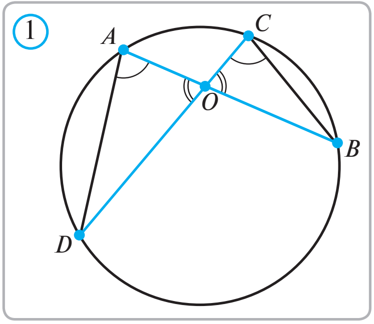
Диаметри давра AB ба чор қисми баробар тақсим карда ва чун нишондоди расми 8 нимдавраҳо сохта шуд. Агар $AB=d$ бошад, масоҳати ҳар як шакли дар расм ранг карда нишон додашударо ҳисоб кунед.


⑧

56

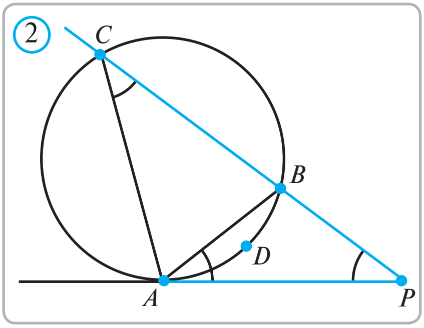
ПОРЧАҲОИ МУТАНОСИБ ДАР ДАВРА

Теоремаи 1. **Хордаҳои давра AB ва CD дар нуқтаи O бурида шаванд, баробарии $AO\cdot OB= CO\cdot OD$ чой дорад.**



Исбот. Хордаҳои AB ва CD дар тартиби нишон додашуда чойгир шуда бошанд (*расми 1*). Нӯгҳои онҳоро бо хордаҳои AD ва BC пайваст мекунем. Он гоҳ кунҷҳои BAD ва BCD ба як камон такя мекунанд, бинобар ин $\angle BAD=\angle BCD$. Боз равшан аст, ки $\angle AOD=\angle BOC$. Аз ин ду баробарӣ дар асоси аломати КК монандии секунҷаҳои AOD ва COB бармеояд. Тарафҳои мувофиқи секунҷаҳои монанд бошад, мутаносибанд: $\frac{OD}{OB}=\frac{AO}{CO}$ ё ки $AO\cdot OB=CO\cdot OD$. ***Теорема исбот шуд.***

Теоремаи 2. **Агар аз нуқтаи соҳаи берунии давра P ба давра расандаи PA (A-нуқтаи расиш) ва хати рости давраро дар ду нуқтаи B ва C бурида гузаронида шуда бошад, $PA^2=PB\cdot PC$ мешавад.**



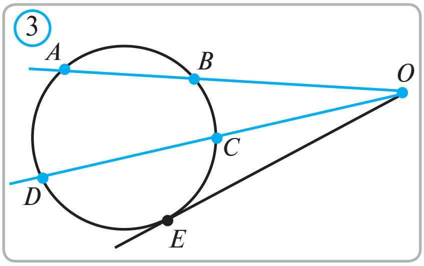
Исбот. Секунҷаҳои ABP ва CPA-ро дида мебароем (*расми 2)*.Дар он,

$\angle C=\frac{ADB}{2}=\angle BAP$ ва $\angle P$ — барои ин секунҷаҳои кунҷи умуми. Бинобар ин, секунҷаҳои ABP ва CPA аз рӯи ду кунҷашон монанд аст.

$$\frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PA} \quad \text{ё ки} \quad PA^2=PB\cdot PC.$$

Теорема исбот шуд.

Масъала. Нуқтаҳои A, B, C ва D давраро ба камонҳои AB, BC, CD ва AD тақсим мекунад. Агар нурҳои AB ва DC дар нуқтаи O бурида шавад, дар ин ҳол $OA\cdot OB=OC\cdot OD$ чой доштанашро исбот кунед.



Ҳалли он. Ба шарти масъала нақшаи мувофиқ мекашем (*расми 3)* ва аз нуқтаи O расандаи OE мегузаронем. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 2,

$$\left.\begin{aligned} OB\cdot OA=OE^2 \\ OC\cdot OD=OE^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow OA\cdot OB=OC\cdot OD.$$

? *Савол, масъала ва супориш*

1. Порчаи номаълуми бо *x* ишорат кардашудаи расми 4-ро ёбед.

2. Аз нуқтаи *A* ба давра расандаи *AB* (*B* — нуқтаи расиш) ва бурандаи давра дар нуқтаҳои *C* ва *D* гузаронида шудааст. Агар
а) $AB=4$ *см*, $AC=2$ *см*, бошад, порчаи *AD*;
б) $AB=5$ *см*, $AD=10$ *см* бошад, порчаи *AC*;
в) $AC=3$ *см*, $AD=2{,}7$ *см* бошад, порчаи *AB*-ро ёбед.

3. Ба давра чоркунҷаи *ABCD* дарун кашида шудааст. Нурҳои *AB* ва *CD* дар нуқтаи *O* бурида мешаванд. Агар
а) $AO=10$ *дм*, $BO=6$ *дм*, $DO=15$ *дм* бошад, порчаи *OC*;
б) $CD=10$ *дм*, $OD=8$ *дм*, $AB=4$ *дм* бошад, порчаи *OB* -ро ёбед.

4. Диаметри давра *AB* ва хордаи *CD* ба ин диаметр перпендикуляр дар нуқтаи *E* бурида мешаванд. Агар $AE=2$ *см*, $EB=8$ *см* бошад, хордаи *CD*-ро ёбед.

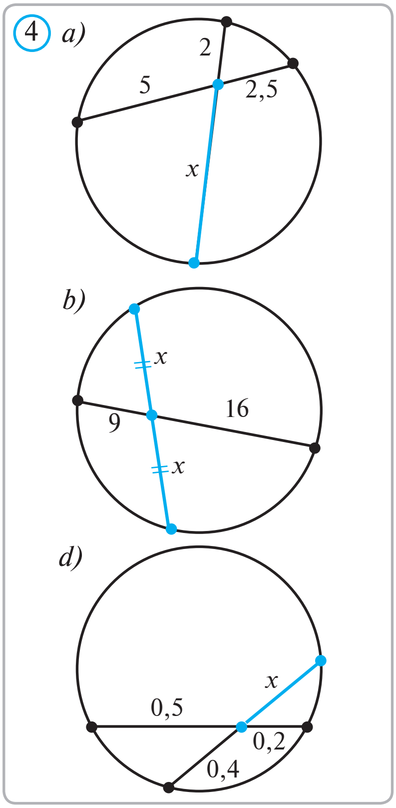
5. Порчаҳои *AB* ва *CD* дар нуқтаи *O* бурида мешаванд. Агар $AO\cdot OB=BO\cdot OD$ бошад, исбот кунед, ки нуқтаҳои *A, B, C* ва *D* дар як давра мехобанд.

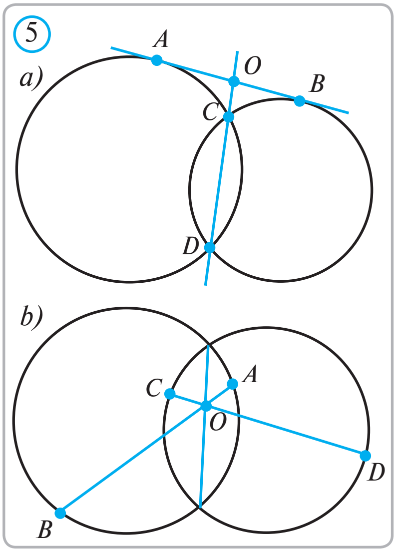
6. Аз маркази давраи радиусаш 13 *дм* дар дурии 5 *дм* нуқтаи *P* гирифта шудааст. Аз нуқтаи *P* хордаи $AB=25$ *дм* гузаронида шудааст. Порчаи *AP* ва *PB* -ро ёбед.

7. Аз монанд будани секунҷаҳои *AOD* ва *BOC* - и дар расми 3 тасвирёфта истифода бурда, баробарии $AO\cdot OB=CO\cdot OD$ -ро исбот кунед.

8*. Дар асоси маълумотҳои расми 5 баробарии $AO\cdot OB= =CO\cdot OD$ -ро исбот кунед.

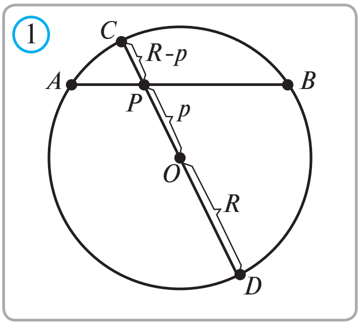
9*. Ду давра дар нуқтаи *C* расанда мебошад. Хати рости *AB* ба давраи якум дар нуқтаи *A* ва ба давраи дуюм дар нуқтаи *B* расанда мебошад. $\angle ACB=90^\circ$ буданашро исбот кунед.


④


⑤

57 ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

Дар дарсҳои пешина хосиятҳои бурандаҳо ва хордаҳои давраро исбот карда будем. Акнун бо баъзе ҳолатҳои хусусии ин хосиятҳо шинос мешавем.



Масъалаи 1. Нуқтаи P аз маркази давраи радиусаш R, дар масофаи p дар соҳаи дохилии он ҷойгир шуда бошад. Он гоҳ барои хордаи дилхоҳи AB -и аз нуқтаи P гузаранда баробарии

$$AP \cdot PB = R^2 - p^2 \qquad (1)$$

ҷой доштанашро исбот кунед.

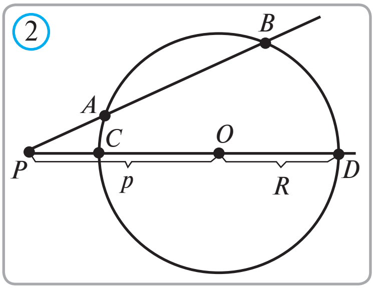
Ҳалли он. Аз нуқтаи P диаметри давра CD -ро мегузаронем.Он гоҳ, $PC = R - p$, $PD = R + p$ (*расми 1*). Дар асоси теорема дар бораи хордаҳои буранда

$AP \cdot PB = CP \cdot PD = (R-p)(R+p) = R^2 - p^2$. Баробарӣ исбот шуд. (1)

Масъалаи 2. Аз маркази O-и давраи радиусаш 6 *см* дар масофаи 4 *см* нуқтаи P гирифта шуд. Аз нуқтаи P хордаи AB гузаронида шуд. Агар AP=2 *см* бошад, порчаи PB-ро ёбед.

Ҳалли он. Мувофиқи шарти масъала $R=6$ *см*, $d=4$ *см*, $AP=2$ *см*. Дар ин ҳол мувофиқи баробарии (1) $2 \cdot PB = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$.

Аз ин, $PB = 10$ *см*. ***Ҷавоб:*** $PB = 10$ *см*.



Масъалаи 3. Нуқтаи P дар соҳаи берунии давраи радиусаш R аз маркази он дар масофаи p ҷойгир шуда бошад. Он гоҳ барои хати рости дилхоҳи бурандаи давра дар нуқтаҳои A ва B ва аз нуқтаи P гузаранда баробарии

$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 \qquad (2)$$

ҷой доштанашро исбот кунед.

Ҳалли он. Хати рости аз маркази давра O гузарандаи PO бо давра дар нуқтаҳои C ва D (*расми 2*) бурида шавад.Он гоҳ,дар асоси шарт $PC = p - R$, $PD = p + R$. аст.Дар асоси теоремаи бурандаҳои аз нуқтаҳои беруни соҳаи давра гузаранда

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (p-R)(p+R) = p^2 - R^2.$$

Ҳамин тавр,баробарии (2) исбот шуд.

Масъалаи 4. Хати рости аз нуқтаи P гузаранда, ки аз маркази давраи радиусаш 7 *см* дар масофаи 13 *см* воқеъ аст, давраро дар нуқтаҳои A ва B

мебурад. Агар $PA=10$ *см* бошад, хордаи AB -ро ёбед.

Ҳалли он. Мувофиқи шарт $R=7$ *см*, $d=13$ см. Дар ин ҳол мувофиқи формулаи (2).

$$PA\cdot PB=p^2-R^2=13^2-7^2=169-49=120.$$

Аз ин, $PB=\dfrac{120}{PA}=\dfrac{120}{10}=12$ (*см*). Бинобар ин,

$AB=PB-PA=12-10=2$ (*см*). ***Ҷавоб:*** 2 *см*.

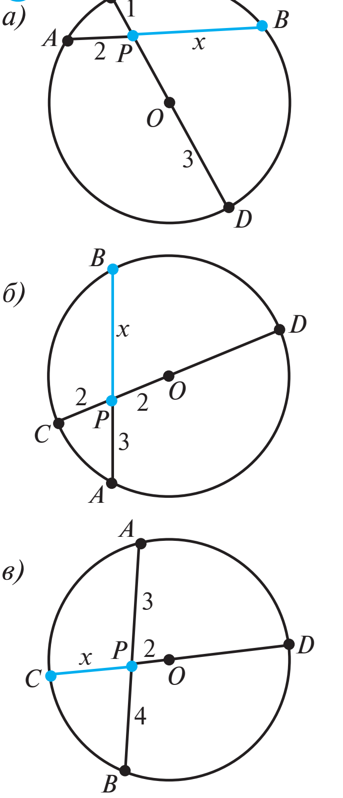
? *Савол, масъала ва супориш*

1. Аз маркази давраи радиусаш 5 *см* дар дурии 3 *см* нуқтаи P гирифта шудааст. Хордаи AB аз нуқтаи P мегузарад. Агар $PA=2$ *см* бошад, дарозии хордаи AB ёфта шавад.
2. Аз маркази давраи радиусаш 5 *м* буда дар дурии 7 *м* нуқтаи P гирифта шудааст. Хати рости аз нуқтаи P гузаранда давраро дар нуқтаи A ва B мебуранд. Агар $PA=4$ *м* бошад, дарозии хордаи AB-ро ёбед.
3. Дар асоси маълумотҳои расми 3 порчаи бо x ишорат кардашударо ёбед (O — маркази давра).
4. Аз расми 4 истифода бурда, масъаларо ҳал намоед. Дар ин ҷо
   а) $PC=5$ *дм*, $OD=7$ *дм*, $AB=2$ *дм*, $PA=?$
   б) $PA=5$ *дм*, $AB=4$ *дм*, $PC=3$ *дм*, $OD=?$
5. Хордаҳои давра $AB=7$ *см* ва $CD=5$ *см* дар нуқтаи P бурида мешаванд. Агар $CP:PD=2:3$ бошад, нуқтаи P хордаи AB-ро дар кадом нисбат мебурад?
6. Аз нуқтаи C-и давра ба диаметр AB перпендикуляри CD гузаронида шудааст. Агар $AD=2$ *см*, $DB=18$ *см* бошад, порчаи CD-ро ёбед.

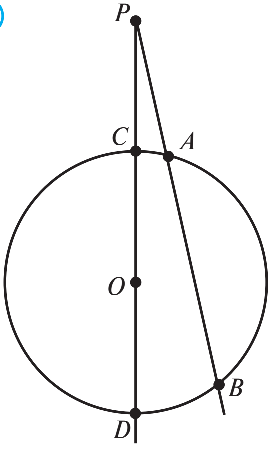
7*. Диагоналҳои чоркунҷаи ба давра дарункашидашудаи $ABCD$ дар нуқтаи K якдигарро мебуранд. Агар $AB=2$, $BC=1$, $CD=3$ ва $CK:KA=1:2$ бошад, порчаи AD-ро ёбед.

8*. Дар чоркунҷаи ба давра дарункашидаи $ABCD$ $AB:DC=1:2$ ва $BD:AC=2:3$ бошад, нисбати $DA:BC$-ро ёбед.

③



④



58 МАЪЛУМОТ ВА МАСЪАЛАҲОИ ИЛОВАГӢ ДОИР БА БОБИ IV

I. Тестҳо

1. **Тасдиқоти нодурустро дар бораи баландии секунҷаи росткунҷаи ба гипотенуза гузаронидашуда нишон диҳед.**
   А. Аз катетҳо хурд;
   Б. Секунҷаро ба ду секунҷаи монанд ҷудо мекунад;
   В. Дар байни проексияи катетҳо дар гипотенуза мутаносиби миёна;
   Г. Ба нисфи гипотенуза баробар аст.
2. **Хордаҳои *AB* ва *CD* дар нуқтаи *O* бурида мешаванд. Тасдиқоти нодурустро нишон диҳед.**
   А. $\angle DAB = \angle DCB$; Б. Секунҷаҳои *AOD* ва *COB* монанд;
   В. $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; Г. $AO = CO$.
3. **Тасдиқоти дурустро ёбед:**
   А. Проексияи порчаҳои баробар ҳам баробаранд;
   Б. Проексияи порчаи калон аст;
   В. Проексияи порчаҳои баробари як хати рост баробаранд;
   Г. Дарозии проексия ба дарозии порчаи проексияшаванда баробар аст.
4. **Баландии секунҷаи росткунҷаи ба гипотенуза гузаронидашуда онро ба ду секунҷа ҷудо мекунад. Ин секунҷаҳо:**
   А. Баробар; Б. Баробарандоза; В. Монанд; Г. Баробарпаҳлу.
5. **Мутаносиби миёнаи порчаҳои дарозиашон *a* ва *b* ба чӣ баробар аст?**
   А. $a+b$; Б. $\sqrt{ab}$; В. $\frac{a+b}{2}$; Г. $a:b$.
6. **Чоркунҷаи *ABCD* ба давраи марказаш *O* дарун кашида шудааст. Тасдиқоти нодурустро нишон диҳед:**
   А. $\Delta AOB \sim \Delta COD$; Б. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$;
   В. $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; Г. $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

II. Масъалаҳо

1. Нисбати катетҳои секунҷаи росткунҷа ба 3:4 баробар аст. Гипотенузаи ин секунҷа 50 *см* баландии аз кунҷи рости секунҷаи росткунҷа гузаронидашуда гипотенузаро ба порчаҳои дарозиашон чӣ гуна буда ҷудо мекунад?
2. Хордаҳои давра *AB* ва *CD* дар нуқтаи *E* бурида мешаванд. Агар $AE=5$ *см*, $BE=2$ *см* ва $EC=2{,}5$ *см* бошад, *ED* -ро ёбед.
3. Нуқтаи *K* аз Маркази давраи радиусаш 6 *м* дар масофаи 10 *м* дурӣ гирифта ва аз нуқтаи *K* ба давра расанда гузаронида шуд. Масофаи байни нуқтаи расиши расанда *P* ва нуқтаи *K*-ро ёбед.
4. Дар секунҷаи *ABC* $\angle C=90^\circ$ ва баландии $CD = 4{,}8$ *дм*. Агар $AD=3{,}6$ *дм* бошад, тарафи *AB*-ро ёбед.

5. Хордаҳои давра AB ва CD дар нуқтаи O бурида мешаванд. Агар $AO=6$, $OB=4$ ва $CO=3$ бошад, порчаи OD-ро ёбед.

6. Дар давра нуқтаҳои A, B, C, D дода шудаанд. Нурҳои BA ва CD дар нуқтаи O бурида мешаванд. Агар $OA=5$, $AB=4$, $OD=6$ бошад, хордаи DC-ро ёбед.

7. Дар хати рости ба давра дар нуқтаи B расанда нуқтаи A гирифта шуд. Агар $AB=12$ ва масофаи кӯтоҳтарин аз нуқтаи A то давра 8 бошад, радиуси давраро ёбед.

8. Дар нимдавра аз нуқтаи C перпендикуляри ба диаметр AB гузаронида CD порчаи AB-ро ба қисмҳои баробари 4 ва 9 ҷудо мекунад. Порчаи CD-ро ёбед.

9. Баландии секунҷаи росткунҷа гипотенузаро ба порчаҳои баробари 3 *дм* ва 12 *дм* ҷудо мекунад. Масоҳати секунҷаро ёбед.

10. Дар хордаи AB-и давраи марказаш O ва радиусаш 5 *см* нуқтаи D гирифта шудааст. Агар $AD=2$ *см*, $DB=4{,}5$ *см* бошад, порчаи OD -ро сбед.

11. Дар хати рости давраи марказаш O ва радиусаш 5 *м*-ро дар нуқтаҳои A ва B буридагузаранда нуқтаи P гирифта шудааст. Агар $PA=5$ *м*, $AB=2{,}8$ *м* бошад, масофаи OP-ро ёбед.

12. Чор хати рости параллел дода шудаанд. Онҳо тарафҳои кунҷро дар нуқтаҳои A ва A_1, B ва B_1, C ва C_1 инчунин D ва D_1 мебуранд. Дар он нуқтаҳои A, B, C, D дар як тарафи кунҷ мехобад. Агар $AB=8$, $CD=12$ ва $C_1D_1=9$ бошад, порчаи A_1B_1 ёфта шавад.

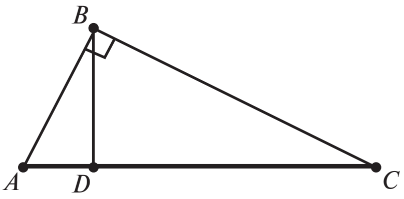
13. Давра ба кунҷ дарункашида шудааст. Агар масофаи аз қуллаи кунҷ то давра ба радиус баробар бошад, бузургии кунҷро ёбед.

14. Аз нӯги B диаметри AB -и давра расандаи BC ва бурандаи AC гузаронида шудааст. AC бо давра дар нуқтаи D бурида мешавад. Агар $AD=DC$ бошад, кунҷи CBD -ро ёбед.

15. Нисбати катетҳои секунҷаи росткунҷа 2:3 аст. Баландии ба гипотенуза гузаронидашуда онро ба ду секунҷа ҷудо мекунад. Нисбати масоҳатҳои онҳоро ёбед.

III. Худатонро санҷида бинед (кори намунавии назоратӣ)

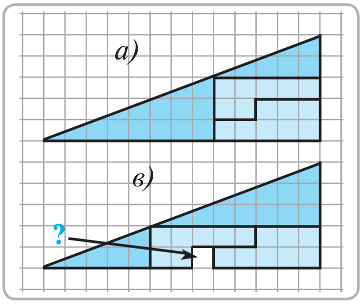
1. Аз нуқтаи берунии давра ба давра расанда гузаронида шудааст. Аз нуқтаи берун аз давра масофаи кӯтоҳтарин то давра 2 *см*, масофа то нуқтаи расиш 6 *см* аст. Радиуси давраро ёбед.



2. ΔABC секунҷаи росткунҷа, $AD=9$ *дм*, $DC=16$ *дм* бошад, радиуси ба ин секунҷа давраи дарун кашидашударо ёбед.

3. Аз нуқта ба хати рост ду моил гузаронида шудааст. Агар моилҳо дар нисбати 1:2 буда, проексияи онҳо 1 *м* ва 7 *м* бошад, дарозии моилҳоро ёбед.

4.* *(Машқи иловагӣ)* Порчаҳои PQ ва аз он дарозии ET дода шудаанд. Ҳамин гуна чоркунҷаи $ABCD$ созед, ки, $AB=BC=PQ$; $BD=ET$ шуда, дар буриши диагоналҳо барои нуқтаи O $AO \cdot OC=BO \cdot OD$ ҷой дошта бошад.



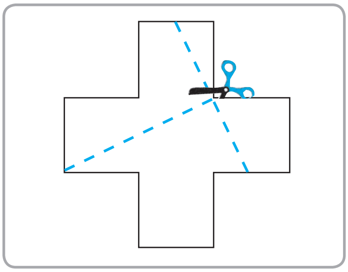
Масъалаи шавқовар

Секунҷа чун дар расми *а* нишон додашуда ба чор ҳисса ҷудо карда шуда ва чун дар расми *в* нишон додашуда аз дигар ин ҳиссаҳоро ҷамъ намуданд. Гӯед, ки, ин квадрати зиёдатӣ аз куҷо пайдо шуд?

Хочи Юнон

Пеш аз эраи мо дар солҳои 500-ум шакли дар расми 4 тасвир ёфта, ба сифати рамзи ҳаёт ба рӯи нон кашида шудааст.

Ин шаклро ба коғази ғафс кашида, онро аз рӯи хатҳои дар расм нишондодашуда буред. Аз қисмҳои ҳосилшуда ба сохта шудани квадрат боварӣ ҳосил кунед.



БОБИ V

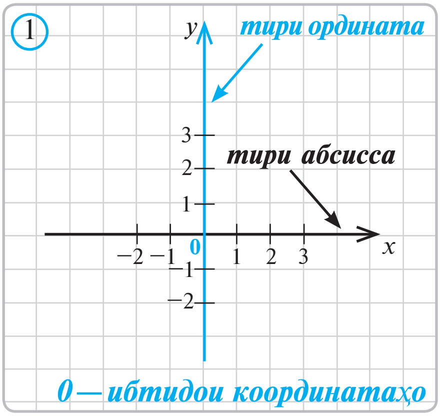
ТАКРОР КУРСИ ПЛАНИМЕТРИЯ

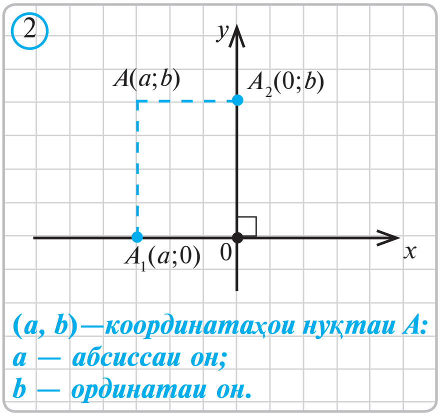
Дар натичаи омӯзиши ин боб Шумо ба дониш ва малакаи амалии зерин соҳиб мешавед:

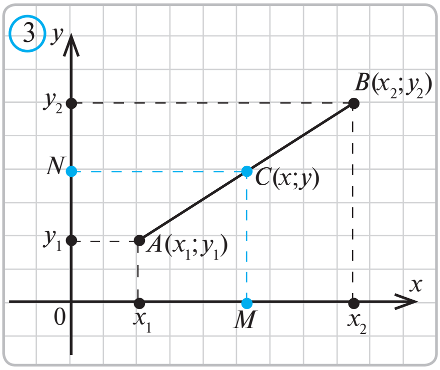
- √ *ба хотир овардани мавзӯъҳои гузашта доир ба қисми планиметрияи геометрия;*
- √ *мустаҳкам намудани дониш, маҳорат ва малакаґо доир ба курси планиметрияи азхудкардашуда;*
- √ *тайёрӣ дидан ба кори назоратии ҷамъбастӣ.*

59 УСУЛИ КООРДИНАТАҲО

Дар бораи системаи координатаҳои росткунҷа дар ҳамворӣ номгузории тирҳо, ишораи координатаҳои нуқта дар курси «Алгебра» барои синфи 7-ум ҳам маълумотҳо дода шудаанд *(расмҳои 1 ва 2)*. Дар поён масъалаҳои геометрикии доири ҳамин мавзӯъро баррасӣ мекунем.







Масъалаи 1. Дар ҳамвории координатаҳо бигузор порчаи *AB*, ки нӯгҳояш дар чоряки якуми он мебошад, дода шуда бошанд: $A(x_1;y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$, $x_1>0$, $y_1>0$, $x_2>0$, $y_2>0$ *(расми 3)*. Миёнаи порчаи *AB*—координатаҳои нуқтаи *C*(*x*,*y*)-ро ёбед.

Ҳалли он. Дар ин ҳолат порчаи *CN* хати миёнаи трапетсияи дарозии асосҳояш x_1 ва x_2буда, порчаи *CM* бошад, хати миёнаи трапетсияи дарозии асосҳояш y_1 ва y_2 мешавад.

Мувофиқи хосияти хати миёнаи трапетсия

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (1)$$

мешавад.

Дурустии ин формуларо бо дигар ҳолатҳои порчаи *AB* ҳам ба монанди ин нишон додан мумкин аст.

Масъалаи 2. Чоркунҷаи *ABCD*-и қуллаҳояш дар нуқтаҳои *A*(-1; -2), *B*(2; -5); *C*(1; -2), *D*(-2, 1) буда параллелограмм буданашро исбот кунед.

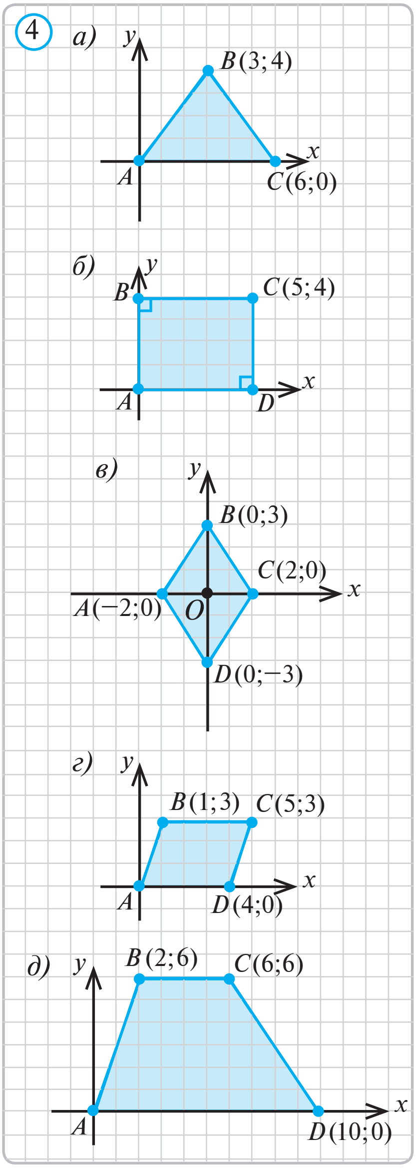
Ҳалли он. Аз формулаи (1) истифода бурда, координатаҳои миёнаҷои диагоналҳои чоркунҷаи *AC* ва *BD*-ро меёбем:

$$AC: \; x = \frac{-1+1}{2} = 0\,, y = \frac{-2+(-2)}{2} = -2;$$

$$BD: \; x = \frac{2+(-2)}{2} = 0, \; y = \frac{-5+1}{2} = -2.$$

Аз ин мебарояд, ки миёначои ҳар ду диагонали чоркунҷаи *ABCD* дар як нуқта (0; -2) будааст. Яъне диагоналҳои чоркунҷаи *ABCD* дар нуқтаи (0; -2) бурида мешаванд ва дар ин нуқта ба ду қисми баробар тақсим мегарданд. Ин бошад, чоркунҷаи *ABCD* параллелограмм буданашро нишон медиҳад.

? *Савол, масъала ва супориш*



1. Масоҳатҳои бисёркунҷаҳоро ёбед *(расми 4)*.

2. Хордаи дарозиаш 8 см дар давра камони 90°-ро ҷудо мекунад. Масофа аз маркази давра то хордаро ёбед.

3. Масоҳати секунҷаи тарафҳояш: а) 5,5 ва 6; б) 17,65 ва 80-ро ёбед.

4. Радиуси давраи ба секунҷаи тарафҳояш: а) 13,13,12; б) 35,29,8 дарункашидашударо ёбед.

5. Агар
а) *A*(1;−2), *B*(5;6);
б) *A*(4;−3), *B*(1;2);
в) *A*(−4;5), *B*(2;3);
г) *A*(−0,7;2), *B*(−0,3;4,2) бошад, координатаҳои миёначои порчаро ёбед.

6*. Агар *A(1; 0)*, *B*(2; 3), *C*(3; 2) бошад, координатаи қуллаи *D*-и параллелограмми *ABCD*-ро ёбед.

7*. Исбот кунед, ки нуқтаи буриши биссектрисаҳои кунҷҳои параллелограмм қуллаҳои росткунҷа аст.

8. Радиусҳои давраҳои ба секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 40 см ва 30 см дарун ва берункашидашударо ёбед.

9. Секунҷаи чоркунҷаи давраи дарункашидашуда 2 : 3 : 4 нисбат доранд. Кунҷҳои онро ёбед.

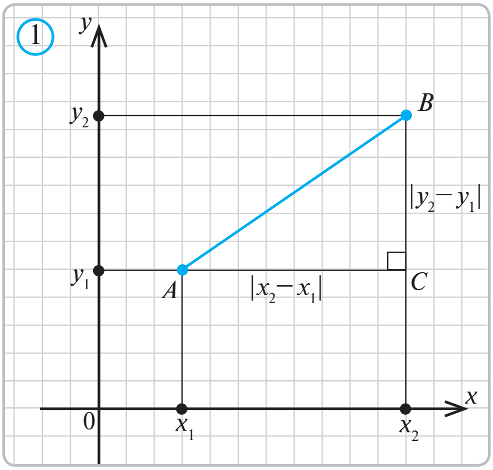
10. Хордае, ки камони 60° будаи давраи радиусаш 6 см-ро кашида меистад, ёбед.

11. Масофаи байни марказҳои давраҳои радиусашон 6 *см* ба $6\sqrt{2}$ *см* баробар аст. Дарозии хордаи умумии давраҳоро ёбед.

60

УСУЛИ КООРДИНАТА ВА ВЕКТОРҲО

Масъалаи 1. Масофаи байни нуқтаҳои $A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$, ки дар ҳамвории координати дода шудаанд, бо формулаи $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ҳисоб карда шуданашро нишон диҳед.



Ҳалли он. Бигузор, нуқтаҳои A ва B чун нишондоди расми 1 чойгир шуда бошанд ($x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$). Аз нуқтаи A ва B ба тирҳои координати хатҳои рости параллел мегузаронем ва нуқтаи буриши онҳоро бо C ишора мекунем.

Дар ин ҳол, $AC=|x_2-x_1|$, инчунин $BC=|y_2-y_1|$. Ба секунҷаи росткунҷаи ABC теоремаи Пифагорро татбиқ намоем,

$$AB^2=AC^2+BC^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

мешавад. Аз ин

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

-ро ҳосил мекунем. Ба дурустии формулаи (1) дар ҳолати $x_1=x_2$ ё ки $y_1=y_2$ ҳам бовар кунед.

Масъалаи 2. Агар $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$, $C(1; -3)$, $D(-3; -3)$ бошад, чоркунҷаи $ABCD$ росткунҷа буданашро исбот кунед.

Ҳалли он. 1) Координатаҳои миёначои диагонали AC-ро меёбем:

$$x=\frac{-3+1}{2}=-1; \qquad y=\frac{-1-3}{2}=-2.$$

Координатаҳои миёначои диагонали BD x ва y-ро меёбем:

$$x=\frac{1-3}{2}=-1; \qquad y=\frac{-1-3}{2}=-2.$$

Аз ин рӯ, диагоналҳои чоркунҷаи $ABCD$ дар як нуқтаи (-1; -2) бурида ва дар ин нуқта ба ду қисми баробар ҷудо мешаванд. Бинобар ин, $ABCD$ — параллелограмм.

2) Дарозии диагоналҳои параллелограмми $ABCD$-ро меёбем:

$$AC=\sqrt{(1-(-3))^2+(-3-(-1))^2}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20};$$

$$BD=\sqrt{(1-(-3))^2+(-1-(-3))^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}.$$

Аз ин рӯ, диагоналҳои параллелограмми $ABCD$ байни ҳам баробар будааст. Ин бошад, (мувофиқи аломати росткунҷа) $ABCD$ – росткунҷа буданашро нишон медиҳад.

Савол, масъала ва супориш

1. Агар а) $A(2;\ 7), B(-2;\ 7)$; б) $A(-5;\ -1), B(-5;\ -7)$; в) $A(-3;\ 0), B(0;\ 4)$; **г)** $A(0;\ 3), B(-4;\ 0)$ бошад,дарозии порчаи AB-ро ёбед.

2. Агар $M(4;\ 0), N(12;\ -12), P(5;\ -9)$ бошад, периметри секунҷаи MNP-ро ёбед.

3. Векторҳои коллинеарии $\bar{x}$ Þæ $\bar{y}$ -ро кашед ва вектори $2\bar{x}+3\bar{y}$ -ро созед.

4. Агар нуқтаҳои A, B, C ва D дар як хати рост нахобад ва $\overline{AB}=0{,}7\overline{DC}$ бошад,намуди чоркунҷаи $ABCD$-ро муайян кунед.

5. Агар векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ ғайриколлинеар ва $3\bar{a}-x\bar{b}=y\bar{a}+4\bar{b}$ бошад, ададҳои x ва y-ро ёбед.

6. Агар порчаҳои AA_1, BB_1, CC_1 медианаҳои секунҷаи ABC ва O нуқтаи ихтиёрӣ бошад, баробарии $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1}$ -ро исбот кунед.

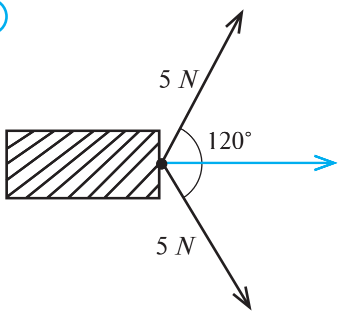
7. Медианаҳои секунҷаи ABC дар нуқтаи O бурида мешаванд. Векторҳои $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ва $\overline{CA}$ -ро бо ёрии векторҳои $\bar{a}=\overline{OA}$ ва $\bar{b}=\overline{OB}$ ифода кунед.

8. Ба ҷисм ду қувваи ҳар яке 5N буда, таъсир мерасонад *(расми 2)*. Агар самти кунҷи байни таъсири ин қувваҳо 120° бошад, бузургии баробар таъсиркунандаи онҳоро ёбед.

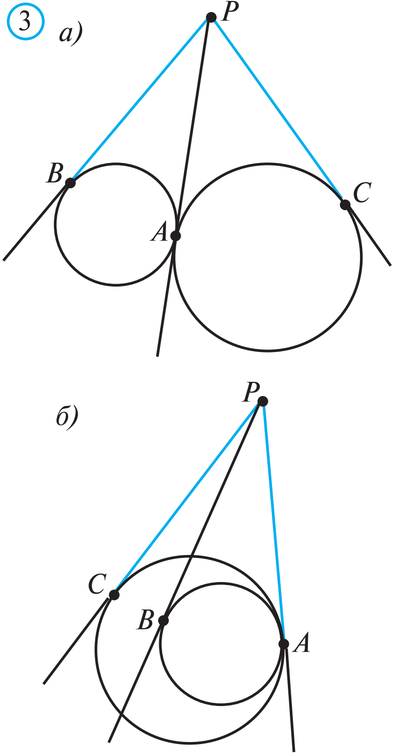
9. Радиуси давраи ба секунҷаи баробартараф берункашидашуда 6 см аст. Периметр ва масоҳати секунҷаро ёбед.

10. Аз расандаи ба давраи дар нуқтаи A гузаронидашуда нуқтаи B гирифта шуд. Масофа аз нуқтаи B то нуқтаи наздиктарини давра 4 см, то нуқтаи дуртарин 8 *см* аст. Порчаи AB-ро ёбед.

②



③



11*. Ду давраи радиусҳояшон гуногун дар нуқтаи A ба хати рости PA мерасанд. Ба ин давраҳо мувофиқан расандаҳои PB ва PC (аз PA фарқкунанда) гузаронида шудааст. Агар нуқтаҳои B ва C нуқтаҳои расиши расандаҳо ба давра бошад, баробари $PC—PB$ буданашро исбот кунед *(расми 3)*.

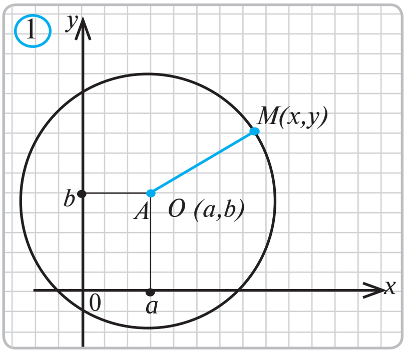
61

ДАВРА ВА ДОИРА

Масъалаи 1. Исбот кунед, ки координатаҳои x ва y-и нуқтаи дилхоҳи $M\ (x,y)$-и давраи радиусаш R ва марказаш дар нуқтаи $O\ (a;\ b)$ будаи ҳамвори координати баробарии

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

-ро қаноат (1) мекунонад.



Ҳалли он. Бигузор нуқтаи $O(a;b)$ маркази давраи додашуда ва $M(x;y)$- нуқтаи дилхоҳи он бошад. Он гоҳ $OM=R$ мешавад. Дар асоси формулаи ёфтани масофаи байни ду нуқта дар ҳамвории координатӣ (мувофиқи масъалаи саҳифаи 134)

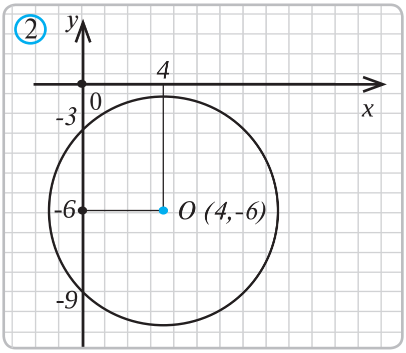
$$OM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

ҳамин тавр,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R.$$

ҳар ду тарафи баробарии охиринро ба квадрат бардошта баробарии (1) - ро ҳосил мекунем.

Дар хотир доред. Муодилаи (1)-ро муодилаи давраи марказаш дар нуқтаи $(a;b)$ ва радиусаш ба R баробар буда меноманд.



Масъалаи 2. Дар ҳамвории координатӣ аз тири ордината давраи бо муодилаи

$$(x-4)^2+(y+6)^2=25$$

додашуда порчаеро ҷудо мекунад. Дарозии ин порчаро ёбед.

Ҳалли он. Абсиссаи нуқтаи буриши давраи додашуда бо тири ордината ба сифр баробар мешавад. Дар ҳолати $x=0$ будан, аз муодилаи додашуда истифода бурда ординатаҳои ин нуқтаҳоро меёбем:

$$(0-4)^2+(y+6)^2=25,\ (y+6)^2=9,$$

$$y=-9 \text{ ё ки } y=-3.$$

Бинобар ин, давра ва тири ординатаҳо дар нуқтаҳои $(0;-9)$ ва $(0;-3)$ якдигарро мебуранд. Масофаи байни ин нуқтаҳо ба 6 воҳид баробар аст. ***Ҷавоб:*** 6.

Масъалаи 3. Ду давраи марказаш дар нуқтаи O воқеъ буда, ҳалқа ташкил мекунад. Хордаи AB-и ба 32 *см* баробари доираи калон дар нуқтаи C ба доираи хурд расанда мебошад (*расми 3*). Агар васеъгии ҳалқа 8 *см* бошад, он гоҳ масоҳати ин ҳалқаро ёбед.

Ҳалли он. Радиуси доираи калонро бо R, хурдашро бошад, бо r ишорат мекунем. Мувофиқи шарти масъала, $OA=R=r+8$ (*см*) ва $OC = r$. Ба ғайр аз ин нуқтаи C

миёначои хордаи *AB,* яъне *AC = 16 см,* секунҷаи *OCA* бошад, секунҷаи росткунҷа мешавад.

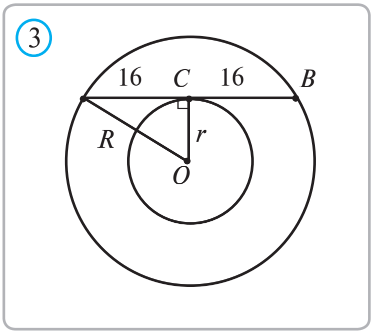
Дар асоси теоремаи Пифагор барои $OC^2+CA^2=OA^2$ буданаш муодилаи

$$r^2 + 16^2=(r + 8)^2$$

-ро ҳосил мекунем. Ин муодиларо ҳал карда, *r=12 см* ҳосил мекунем. Аз он *R= r* +8=20 *см* мешавад. Аз масоҳати доираи калон масоҳати доираи хурдашро тарҳ намуда, масоҳати ҳалқаи додашудом *S*-ро меёбем:

$$S=\pi R^2 - \pi r^2=20^2\pi - 12^2\pi=400\pi - 144\pi=$$

$=256\pi$ $(см^2)$. ***Ҷавоб:*** 256π $см^2$.



Савол, масъала ва супориш

1. Радиус ва координатаҳои марказҳои давраи ба муодилаҳои зерин додашударо гӯед ва ин давраҳоро созед.

а) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$;
б) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$;
в) $x^2 + y^2 = 25$;
г) $x^2 + (y - 2)^2 = 9$.

2. Дар чоркунҷаи *ABCD*-и дарункашидашудаи давра кунҷҳои назди қуллаҳои *A,B* ва *C* ба нисбати 1:2:3 аст.Кунҷҳои дохилии чоркунҷаро ёбед.

3. Ба 1:8 ҳиссаи давра кунҷи марказии мувофиқро ёбед.

4. Дар давраи марказаш *A* нуқтаи *B* гирифта шудааст. Давраи дигари марказаш дар нуқтаи *B* буда аз нуқтаи *A* мегузарад. Ин ду давра дар нуқтаи *C* бурида мешавад. Кунҷи *ACB*-ро ёбед.

5. Хордаҳои *AB* ва *CD*-и давра дар нуқтаи *O* бурида мешаванд. Агар *AO*=4 *см*, *BO*=6 *см* ва *CD*=11 *см* бошад, порчаҳои *OC* ва *OD*-ро ёбед.

6. Диагонали росткунҷаи дарункашидашудаи давра аз як тарафаш 2-то зиёд. Ченаки градусии камонҳои қуллаҳои чоркунҷа аз давра ҷудо кардаро ёбед.

7. Хато миёнаи трапетсияи берункашидашудаи давра 7 *см*. Периметри трапетсияро ёбед.

8*. Хордаи *AB* аз нуқтаи *K*-и 7 *см* аз маркази доираи радиусаш 15 *см* буда ба 27 *см* дурӣ гузаронида шудааст. Порчаҳои *AK* ва *BK*-ро ёбед.

9. Кунҷи байни диагоналҳои аз ҳама калон ва аз ҳама хурди аз як қуллаи ҳашткунҷаи мунтазам барояндаро ёбед.

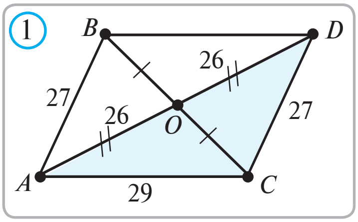
10. Дар ҳамвории координатаи секунҷаи қуллаҳояш дар нуқтаҳои *A* (-3; 4), *B* (3; 4), *C* (3;-8) дода шудааст.

а) $\angle ABC=90^\circ$ буданашро нишон диҳед;

b) Марказ, радиус ва масоҳати доираи берункашидашудаи секунҷаи *ABC*-ро ёбед.

62 ТАКРОРКУНӢ

Масъала. Дар секунҷаи росткунҷаи ABC AO медиана, $AO=26, AB=27$ ва $AC=29$. Масоҳати секунҷаро ёбед.



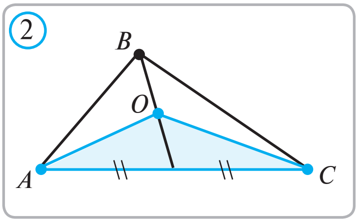
Ҳалли он. Дар нури AO аз нуқтаи A шарти $AD=2AO=52$ ичрошаванда карда интихоб мекунем (*расми 1*). Он гоҳ аз $BO=OC, AO=OD$ буданаш $ABDC$ параллелограмм мешавад.

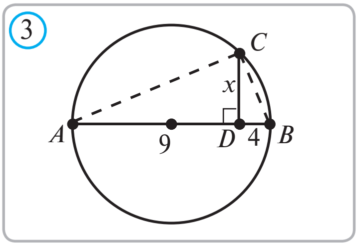
Масоҳатҳои секунҷаҳои ABC ва ADC баробар. Аз формулаи Герон истифода бурда, масоҳати секунҷаи ADC-ро ҳисоб мекунем:

$$P=\frac{29+52+27}{2}=54; \quad S=\sqrt{54\cdot(54-29)(54-52)(54-27)}=270.$$ ***Ҷавоб:*** 270.

Савол, масъала ва супориш

1. Секунҷаҳои ABC ва EFK монанд: AB ва EF, BC ва FK тарафҳои мувофиқи онҳо. Агар $AB=4$ *см*, $BC=5$ *см*, $CA=7$ *см* ва $EF:AB=2{,}1$ бошад, тарафҳои секунҷаи EFK-ро ёбед.
2. Секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ монанд ва нисбати тарафҳои мувофиқи онҳо ба 6:5 баробар аст. Масоҳати секунҷаи ABC аз масоҳати секунҷаи $A_1B_1C_1$ 77 $дм^2$ зиёд аст. Масоҳатҳои секунҷаҳоро ёбед.
3. Нуқтаи буриши медианаҳои секунҷаи ABC нуқтаи O бошад. Агар масоҳати секунҷаи AOC 4 $дм^2$ бошад, масоҳати секунҷаи ABC-ро ёбед (*расми 2*).
4. Аз нуқтаи давра C ба диаметри AB перпендикуляри CD гузаронида шудааст. Агар $AD=9$, $DB=4$ бошад, порчаи CD-ро ёбед (*расми 3*).





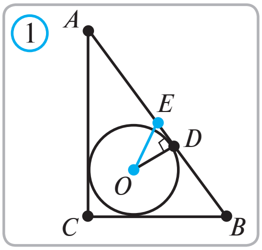
5. Масоҳати секунҷаи тарафаш 6 *м* ва кунҷҳои ба он часпидааш 30° ва 45° бударо ёбед.
6. Баландии трапетсияи асосҳояш 28 *дм* ва 16 *дм*, тарафи паҳлуиаш бошад, 25 *дм* ва 17 *дм*-ро ёбед.
7. Трапетсияи баробарпаҳлуи маслоҳаташ 20 $см^2$ аз давраи радиусаш 2 *см* берун кашида шудааст. Дарозии тарафҳои трапетсияро ёбед.
8. Нуқтаи расиши давраи ба секунҷаи росткунҷа дарункашидашуда гипотенузаро ба порчаҳои 2 *см* ва 3 *см* ҷудо мекунад. Катетҳои секунҷаро ёбед.

63 ТАКРОРКУНӢ

Масъала. Масофаи байни марказҳои давраҳои ба секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 3 ва 4 буда дарун ва берункашидашударо ёбед (*расми 1*).

Ҳалли он. 1) Дар секунҷаи ABC $\angle C=90^\circ$, $AC=4$ ва $BC=3$ бошад. Он гоҳ мувофиқи теоремаи Пифогор

$$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$



2) Маркази давраи ба секунҷаи росткунҷа берун кашидашуда дар миёначои гипотенуза E мешавад:

$$BE=\frac{AB}{2}=\frac{5}{2}.$$

3) Радиуси OD-и ба секунҷа давраи дарункашидашударо меёбем (D – нуқтаи расиши давраи дарункашидашуда дар гипотенуза):

$$OD=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{4+3-5}{2}=1.$$

4) Порчаҳои BD ва DE-ро меёбем:

$$BD=\frac{AB+BC-AC}{2}=\frac{5+3-4}{2}=2; \qquad ED=BE-DE=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}.$$

5) Порчаи OE-и секунҷаи росткунҷаи ODE -ро меёбем:

$$OE=\sqrt{OD^2+ED^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}. \qquad \textbf{Ҷавоб: } \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Савол, масъала ва супориш

1. Дар секунҷаи баробарпаҳлуи ABC $AB=AC=4$ *см* ва $\angle A=30^\circ$ бошад, баландии он BE ёфта шавад.

2. Асосҳои трапетсия 5 *дм* ва 8 *дм*, тарафҳои паҳлуи бошад, ба 3,6 *дм* ва 3,9 *дм* баробар аст. Давоми тарафҳои трапетсия дар нуқтаи O бурида мешавад. Масофа аз нуқтаи O то қуллаҳои трапетсияро ёбед.

3. Ба як тарафи кунҷи A порчаҳои $AB=5$ *см* ва $AC=16$ *см*, ба тарафи дуюм бошад, порчаҳои $AD=8$ *см* ва $AF=10$ *см* гузошта шудаанд. Оё секунҷаҳои ACD ва AFB монананд? Ҷавобатонро асоснок кунед.

4. Масоҳати росткунҷа 9 *дм*^{2}, яке аз кунҷҳои ҳосилкардаи диагоналҳои он 120° аст. Тарафҳои росткунҷаро ёбед.

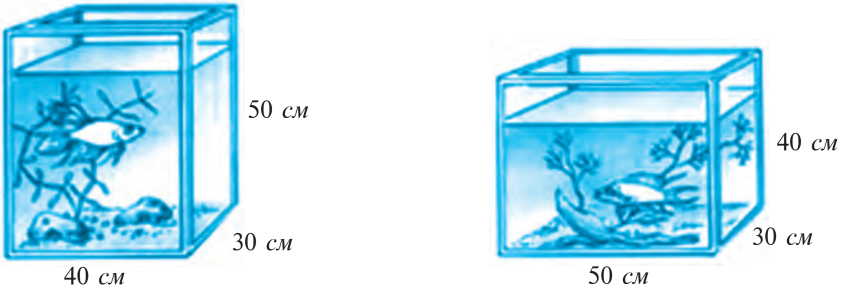
5. Агар асоси секунҷаи баробарпаҳлу 24 *см* ва тарафи паҳлуи 13 *см* бошад, дар ин ҳол радиуси давраи ба секунҷа берункашидашударо ёбед.

6. Баландии ромб 12 *см* буда, яке аз диагоналҳояш 15 *см*. Масоҳати ромбро ёбед.

7. Агар дар параллелограмми $ABCD$ $A(1;-3)$, $B(-2;4)$ ва $C(-3;1)$ бошад, координатаҳои қуллаи D-и онро ёбед.

8. Ба ду аквариум аз қисми болоӣ 10 *см* паст об рехта шуд (*расми 2*). Дар кадом аквариум об зиёд аст?

②

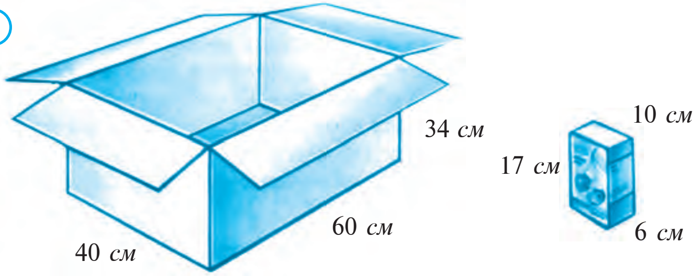


9. Ба қуттӣ чанд пакет шарбати мева меғунҷад? (*расми 3*)

10. Пакети 1 литраи шарбати мева дар шакли параллелепипеди росткунҷа аст (*расми 4*). Барои 1 пакет чӣ қадар мавод лозим мешавад?

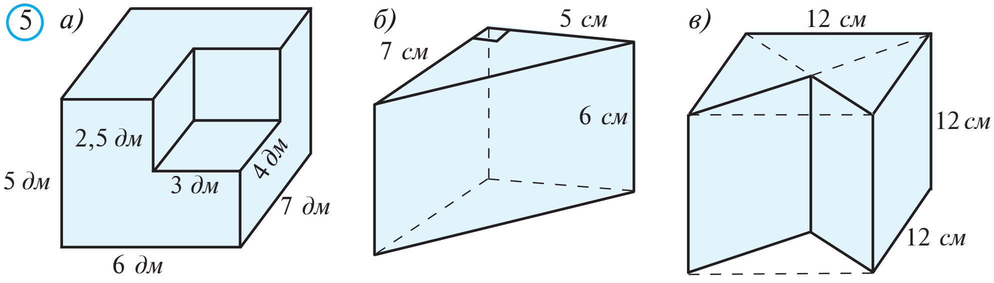
④

③



11*. Ҳаҷми қисмҳои чӯби дар расм тасвиршударо ҳисоб кунед (*расми 5*).

⑤

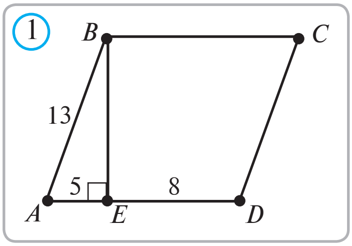


64 ТАКРОРКУНӢ

Масъала. Баландии аз кунҷи кунди ромб гузаронидашуда яке аз тарафҳои онро аз кунҷи тези он сар намуда ба порчаҳои 5 *см* ва 8 *см* ҷудо мекунад. Масоҳати ромбро ёбед.

Ҳалли он. $ABCD$ ромб, $\angle B > 90°$, BE — баландӣ $AE = 5$ *см*, $ED = 8$ *см* бошад (*расми 1*).

①



1) Тарафи ромбро меёбем:

$$AD = AE + ED = 5 + 8 = 13\ (см).$$

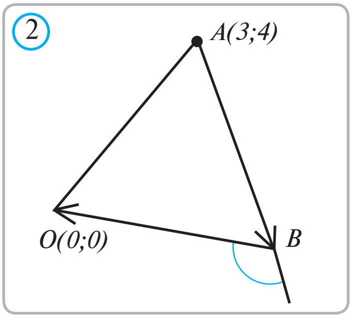
2) Дар секунҷаи росткунҷаи ABE дар асоси теоремаи Пифагор баландии BE -ро меёбем:

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\ (см).$$

3) Масоҳати ромбро меёбем: $S = AD \cdot BE = 13 \cdot 12 = 156$ ($см^2$). **Ҷавоб:** 156 $см^2$.

Савол, масъала ва супориш

②



1. Агар дар секунҷаи баробартарафи AOB $O(0;0)$ ва $A(3:4)$ буданаш маълум бошад, зарби скалярии $\overline{AB}\cdot\overline{BO}$ -ро ёбед (*расми 2*).

2. Диагонали трапетсияи $ABCD$, ки асосҳояш AB ва CD аст, дар нуқтаи O бурида мешаванд. Агар OB=8 *см*, OD=20 *см* ва OC=50 *см* бошад, порчаи AO-ро ёбед.

3. Агар $AB = 1{,}7$ *см*, $BC = 3$ *см*, $CA = 4{,}2$ *см*, $A_1B_1 = 34$ *дм*, $B_1C_1 = 60$ *дм* ва $C_1A_1 = 84$ *дм* бошад, оё секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ монанд аст?

4. Ҳангоми буриши диагоналҳои параллелограмми периметраш 18 *см* буда ду секунҷа ҳосил мешавад. Периметри яке аз секунҷаҳои ҳосилшуда аз дуюмаш 8 *см* зиёд бошад, тарафҳои параллелограммро ёбед.

5. Ба кунҷи ба 60° баробари ба якдигар аз берун расанда ду давра дарун кашида шудааст. Радиуси давраи хурд 1 *см* бошад, радиуси давраи калонро ёбед.

6. Диагонали AC-и трапетсияи $ABCD$, ки AD асоси калон аст, ба тарафи CD перпендикуляр ва $\angle BAC = \angle CAD$. Агар периметри трапетсия 20 *см* ва $\angle D = 60°$ бошад, дарозии тарафи AD -ро ёбед.

7. Агар нӯгҳои диаметри давра аз ягон расандааш дар дурии 18 *см* ва 12 *см* буданаш маълум бошад, дарозии давраро ёбед.

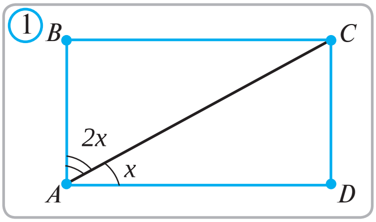
8. Дарозии асосҳояш ва масоҳаташ бо равиши мувофиқ дар трапетсияи баробарпаҳлу 8 *см*, 14 *см* ва 44 $см^2$ бошад, тарафи паҳлуии онро ёбед.

65 ТАКРОРКУНӢ

Масъала. Диагоналҳои росткунҷа ба 12 *см* баробар буда, онҳо кунҷи росткунҷаро дар нисбати 2:1 тақсим мекунад. Периметри росткунҷаро ёбед.

$ABCD$ — росткунҷа,
$AC = 12$ *см*, $\angle BAC : \angle CAD = 2:1$

$P = ?$



Ҳалли он. 1) Агар $\angle CAD = x$ гӯем, $\angle BAC = 2x$ ва $\angle CAD + \angle BAC = x + 2x = 90^\circ$ мешавад. Аз ин $x = 30^\circ$.

2) Катетҳои секунҷаи росткунҷаи ADC -ро меёбем:

$$CD = AC \sin CAD = 12 \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ (}см\text{)},$$

$$AD = AC \cdot \cos CAD = 12 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (}см\text{)}.$$

3) Периметри росткунҷаро меёбем:

$$P = 2(AD + CD) = 2(6 + 6\sqrt{3}) = 12(1 + \sqrt{3}) \text{ (}см\text{)}.$$

Ҷавоб: $12(1+\sqrt{3})$ *см*.

Савол, масъала ва супориш

1. Секунҷаи ABC ва $A_1B_1C_1$ монанд, $AB = 6$ *см*, $BC = 9$ *см* ва $CA = 10$ *см*. Агар тарафи калони секунҷаи $A_1B_1C_1$ ба 7,5 *см* бошад, тарафҳои боқимондаи онро ёбед.

2. Хати рости ба тарафи AB-и секунҷаи ABC параллел тарафи AC -ро аз қуллаи A ба ҳисобкунӣ сар кунем чун нисбати 2:7 тақсим мекунад. Агар $AB = 10$ *см*, $BC = 18$ *см* ва $CA = 21,6$ *см* бошад, тарафҳои секунҷаи аз секунҷаи ABC хати рост ҷудокардаро ёбед.

3. Агар дар трапетсияи баробарпаҳлу тарафи паҳлуи ба хати миёна баробар ва периметраш 48 *см* бошад, дарозии тарафи паҳлуии трапетсияро ёбед

4. Радиуси давраи ба трапетсияи баробарпаҳлуи асосҳояш 6 *см* ва 3 *см* дарункашидашударо ёбед.

5. Агар $A_1A_4 = 2,24$ бошад, дар ин ҳол периметри шашкунҷаи мунтазами $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ -ро ёбед.

6. Агар $N(7;3)$ ва $M(-3;5)$ бошад, дарозии давраи диаметраш NM ёфта шавад.

7. Масоҳати секунҷаи баробар паҳлуи давраи радиусаш 10 *см* ва кунҷи назди қуллааш 120° дарункашидашударо ёбед.

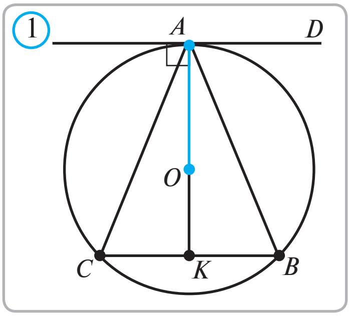
8. Агар дар чоркунҷаи $ABCD$ $AB = 5$ *см*, $BC = 13$ *см*, $CD = 9$ *см*, $DA = 15$ *см* ва $AC = 12$ *см* бошад, масоҳати чоркунҷаи $ABCD$ -ро ёбед.

9*. Дарозии камони мувофиқи кунҷи марказии 90° ба 15π баробар аст. Масоҳати секунҷаи мунтазами ба давра берункашидашударо ёбед.

66 ТАКРОРКУНӢ

Масъала. Дарозии хордаи давра *AB* 10 *см* аст. Аз нӯги *A*-и хорда расандаи *AD*, аз нӯги *B* бошад, хордаи ба ҳамин расанда параллели *BC* гузаронида шуд. Агар *BC*=12 *см* бошад, радиуси давраро ёбед.

Ҳалли он: 1) Хати рости аз нуқтаи *A* ва маркази давра *O* гузаронда хордаи *BC*-ро дар нуқтаи *K* бурида гузарад. Аз сабаби *AD* расанда буданаш $AK \perp AD$, $AD \parallel BC$ буданаш бошад, $AK \perp BC$ мешавад.



2) $AK \perp BC$, яъне аз $OK \perp BC$ буданаш $CK = KB$. Порчаи *AK* ҳам медиана ва баландии секунҷаи *ABC* будааст. Бинобар ин секунҷаи *ABC* — секунҷаи баробарпаҳлу: $AC = AB = 10$ *см*.

3) Аз формулаи Герон истифода бурда масоҳати секунҷаи *ABC* -ро меёбем:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+10+12}{2} = 16\ (см),$$

$$S = \sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16\cdot(16-10)(16-10)(16-12)} = 48\ (см^2).$$

4) Радиуси давраи ба секунҷаи *ABC* берункашидашударо меёбем:

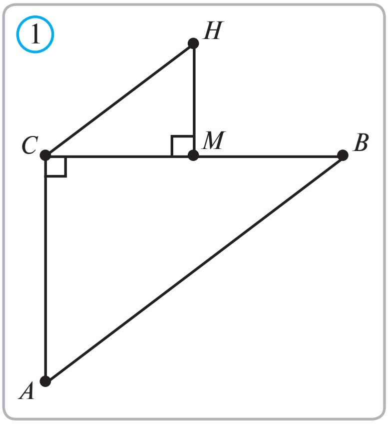
$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{12\cdot10\cdot10}{4\cdot48} = 6{,}25\ (см).$$

Ҷавоб: 6,25 *см*.

Савол, масъала ва супориш

1. Тарафҳои секунҷаи бо равиши мувофиқ 13 *см*,14 *см* ва 15 *см* аст.Нисбати масоҳатҳои доираҳои ба секунҷа дарун ва берункашидашударо ёбед.
2. Агар $\angle BDC = 40^\circ$ ва $\angle CBD = 60^\circ$ бошад, кунҷҳои *A* ва *C*-и чоркунҷаи ба давра дарун кашидашуда *ABCD* -ро ёбед.
3. Асосҳои трапетсияи баробарпаҳлуи ба давра берункашидашуда 4 *см* ва 16 *см* бошад, радиуси давраро ёбед.
4. Медианаҳои дар секунҷаи росткунҷа ба катетҳо гузаронидашуда ба $\sqrt{52}$ *см* ва $\sqrt{73}$ *см* баробар аст. Масоҳати секунҷаро ёбед.
5. Баландии ба гипотенуза гузаронидашудаи секунҷаи росткунҷаи катетҳояш 6 *м* ва 8 *м* бударо ёбед.
6. Як катети секунҷаи росткунҷа 5 *см* ва гипотенузаи он 13 *см* бошад, масоҳати онро ёбед.
7. Дар кадом қиматҳои *x* векторҳои $\bar{a}(x;7)$ ва $\bar{b}(5;2-x)$ перпендикуляр мешаванд?

67–68 КОРИ НАЗОРАТИИ ҶАМЪБАСТӢ



I. Кори назорати намунавӣ

1. Дар параллелограмми $ABCD$ $\angle A=45°$, $AD=4$. Ба давоми тарафи AB-и параллелограмм порчаи BP бо шарти $\angle PDA=90°$ гузошта шуд. Порчаҳои BC ва PD дар нуқтаи T бурида мешавад, дар ин $PT:TD=3:1$ аст.
а) $\Delta BPT \sim \Delta CDT$ буданашро исбот кунед, нисбати масоҳати ин секунҷаҳо ро ёбед.
б) Масоҳати параллелограмми $ABCD$-ро ёбед.
в) Дарозии порчаи миёнаҷои порчаҳои AB ва TD-и пайвасткунанда ёфта шавад.
г) Вектори $\overline{AB}$-ро бо векторҳои $\overline{CA}$ ва $\overline{TB}$ ифода кунед.
д) Синуси кунҷи CAD -ро ёбед.

2. *(Илова).* Дар расми 1 $BC\perp AC$, $MH\perp BC$, $2MC=BC$, $MH=0{,}5AC$ бошад, $AB||CH$ буданашро исбот кунед.

II. Тестҳои намунавӣ барои кори назоратӣ

1. Агар баландии секунҷаи росткунҷаи росткунҷа гипотенузаро ба порчаҳои 6 см ва 54 см ҷудо кунад, масоҳати ин секунҷаро ёбед.
А. 648 $см^2$; Б.324 $см^2$; В.1080 $см^2$; Г. 540 $см^2$.

2. Яке аз бурандаи аз нуқтаи C гузаранда давраро дар нуқтаи A ва B, дуюмаш дар нуқтаи D ва E бурида мегузарад. Агар $CA=18$ *см*, $CB=8$ *см*, $CD=8$ *см* бошад, дарозии порчаи DE-ро ёбед.
А. 17 *см*; Б. 1 *см*; В. 9 *см*; Г. Ҷавоби дуруст нест.

3. Агар $A(-5;2\sqrt{3})$, $B(-4;2)$, $C(-2;\sqrt{3})$, $D(0;2)$ бошад, кунҷи байни диагоналҳои чоркунҷаи $ABCD$-ро ёбед
А. 30°; Б. 60°; В.90°; Г.Ҷавоби дуруст нест.

4. Агар диагоналҳои параллелограмм 10 *см* ва $8\sqrt{2}$ *см* ва кунҷи байни онҳо 45° бошад, тарафҳои параллелограммро ёбед.
А.$\sqrt{17}$ *см* ва $\sqrt{97}$ *см*; Б. 5 *см* ва 6 *см*;
В.$\sqrt{34}$ *см* ва $\sqrt{63}$ *см*; Г. Ҷавоби дуруст нест.

5. Масоҳати шашкунҷаи мунтазами ба давраи радиусаш 8 *см* даруункашидашударо ёбед.
А. $48\sqrt{3}$ $см^2$; Б. $192\sqrt{3}$ $см^2$; В.$96\sqrt{2}$; Г. Ҷавоби дуруст нест.

6. **Радиуси сектори доиравии кунҷи марказиаш 140°, масоҳаташ $31{,}5\pi$ *см*^{2} бударо ёбед.**
А. 9 *см*; Б. 18 *см*; В. 9π *см*; Г. Ҷавоби дуруст нест.

7. **Ба асоси секунҷа, ки 15 *см* дарози дорад, порчаи параллел гузаронида шудааст. Агар масоҳати трапетсияи ҳосилшуда аз $\frac{3}{4}$ қисми масоҳати секунҷаро ташкил диҳад, дарозии порчаро ёбед.**
А. 6,5; Б. 7; В. 7,5; Г. 5.

8. **Нисбати баландии секунҷаи баробарпаҳлуи тарафи паҳлуиаш $2\sqrt{39}$ *см* ба асос бо $3:4$ баробар бошад, масоҳати секунҷаро ёбед.**
А. 260; Б. 245; В. 310; Г. 72.

9. **Кунҷи байни векторҳои $a(4;4\sqrt{3})$ ва $b(8\sqrt{3};8)$ -ро ёбед.**
А. 45°; Б. 90°; В. 30°; Г. 60°.

10. **Асосҳои трапетсияи баробарпаҳлу 10 *см* ва 16 *см*, тарафи паҳлуӣ бошад, 5 *см*. Масоҳати трапетсияро ёбед.**
А. 45; Б. 50; В. 48; Г. 52.

11. **Гипотенузаи секунҷаи росткунҷа 13 *см* буда, яке аз катетҳо аз дигаре 7 *см* зиёд аст. Масоҳати секунҷаро ёбед.**
А. 30 *см*^{2}; Б. 25 *см*^{2}; В. 45 *см*^{2}; Г. 40 *см*^{2}.

12. **Як диагоналҳои ромби тарафаш 5 *см* буда ба 6 *см* баробар аст. Масоҳати ромбро ёбед.**
А. 24 *см*^{2}; Б. 30 *см*^{2}; В. 29 *см*^{2}; Г. 40 *см*^{2}.

13. **Дарозии давраи ба квадрати диагоналаш $6\sqrt{2}$ буда дарункашидашударо ёбед.**
А. 10π; Б. 8π; В. 9π; Г. 6π.

14. **Масоҳати доираи ба квадрати тарафаш $6\sqrt{2}$ *см* буда берункашидашударо ёбед.**
А. 9π; Б. 12π; В. 15π; Г. 18π.

15. **Масоҳати параллелограмми баландиҳояш 4 *см* ва 6 *см* ба 36 *см*^{2} баробар аст. Периметри онро ёбед.**
А. 26 *см*; Б. 30 *см*; В. 29 *см*; Г. 36 *см*.

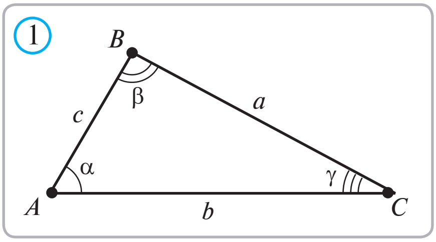
16. **Нисбати тарафҳои параллелограмми периметраш 30 *см* буда 2:3 аст. Агар кунҷи тези параллелограмм 30° бошад, масоҳати онро ёбед.**
А. 26 *см*^{2}; Б. 27 *см*^{2}; В. 29 *см*^{2}; Г. 30 *см*^{2}.

17. **Агар дар секунҷаи ABC $AB=6\sqrt{3}$ *см*, $BC=12$ *см* ва $\angle C=60^\circ$ бошад, кунҷи A-и секунҷаро ёбед.**
А. 45°; Б. 90°; В. 30°; Г. 60°.

МАЪЛУМОТ ВА МАФҲУМҲОИ АСОСӢ ДОИР БА ПЛАНИМЕТРИЯ

СЕКУНҶАҲО

1°. Мафҳумҳои асосӣ



Дар ҳамвории се нуқта дода шуда бошад ва ҳар сеи он дар дар як хати рост нахобад. Ду нуқтаи онҳоро бо порчаҳои хати рост пайваст мекунем. Шакли ҳосилшуда секунҷа номида мешавад. Нуқтаҳо қуллаҳои секунҷа, порчаҳо тарафҳои он номида мешавад. Ишорати он: A, B, C – қуллаҳо, a, b, c – тарафҳо (*расми 1*).

Секунҷа ба се кунҷи дарунӣ соҳиб: $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$. Ишорати он: α, β, γ.

Медиана — порчаи хати росте, ки қулла ва миёнаҷои тарафи муқобилро мепайвандад. Дар секунҷа се медиана буда, онҳоро бо m_a, m_b, m_c ишорат мекунанд.

Биссектриса — секунҷа ба хати рости ба тарифи муқобил хобида. Дар секунҷа сето биссектриса буда онҳоро бо l_a, l_b, l_c ишорат мекунанд.

Баландӣ — перпендикуляри аз қуллаи гузаронидашуда аст.

Дар секунҷа сето баландӣ буда онҳоро бо h_a, h_b, h_c ишорат мекунанд.

Хати миёна — порчаи миёнаҷои ду тарафро пайвасткунанда.

Миқдори хатҳои миёна ҳам сетоанд.

Периметр — ҳосили ҷамъи дарозии се тараф. Ишораташ P.

Секунҷаҳо аз рӯи тарафҳояшон ба се намуд ҷудо мешаванд:

а) баробартараф ($a=b=c$); б) баробарпаҳлу (кадоме аз дутои a, b, c баробаранд); в) тарафҳояшон гуногун (кадоме аз дутои a, b, c баробар нест).

Даврае, ки ба се тарафи секунҷа расида мегузарад, *давраи дарункашидашуда* номида мешавад (ин гуна давра мавҷуд, ягона ва дар дохили секунҷа ҷойгир аст). Радиуси давраи дарункашидашуда бо r ишорат карда мешавад.

Давраи аз се қуллаи секунҷа гузаронида *давраи ба он берункашидашуда* номида мешавад ва радиуси он бо R ишорат карда мешавад (ин гуна давра мавҷуд ва ягона).

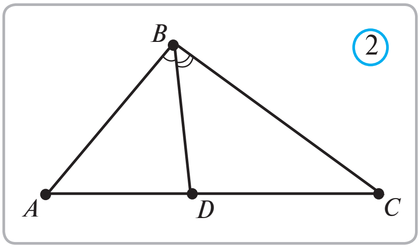
2°. Муносибатҳои асосӣ.

1) $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Ҳосили ҷамъи кунҷҳои секунҷа ба 180° баробар аст;

2) Се медиана дар як нуқта бурида мешавад. Ин нуқта медианаро дар нисбати 2:1 тақсим мекунад. Медиана секунҷаро ба ду секунҷаи масоҳатҳояшон баробар тақсим мекунад. Дарозии медианаҳо бо формулаҳои $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$; $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$ ҳисоб карда мешавад.

3) Се биссектриса дар як нуқта бурида мешавад. Ин нуқта маркази давраи

дарункашидашуда мешавад. Биссектриса тарафи муқобилро (тарафи худаш гузоштаро) ба қисмҳои ба тарафҳои боқимонда мутаносиб чудо мекунад (*расми 2*).


②

BD биссектриса бошад, $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DC}$.

Дарозии биссектрисаҳо:

$$l_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)};\quad l_b=\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$

$$l_c=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)},\quad p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$ ҳисоб карда мешавад.

4) Баландиҳои секунча ё ки давоми онҳо дар як нуқта бурида мешавад. Дарозии баландиҳо бо формулаҳои

$$h_a=\frac{2S}{a};\qquad h_b=\frac{2S}{b};\qquad h_c=\frac{2S}{c}$$

ёфта мешавад. Дар ин ҷо S — масоҳати секунча аст.

5) Перпендикуляри миёнаҳои тарафҳои секунча дар як нуқта бурида мешавад. *Ин нуқта маркази давраи ба секунҷа* берункашидашуда мешавад.

6) *Хати миёнаи секунҷа* ба тарафи сеюм параллел ва ба нисфи он баробар аст.

7) Теоремаи синусҳо:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

8) Теоремаи косинусҳо:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,\quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

9) Формулаҳои ҳисоб кардани масоҳати секунча:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;\qquad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta;$$

10) Дар формулаи Герон:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\qquad p=\frac{a+b+c}{2};\qquad S=\frac{abc}{4R},\qquad S=pr.$$

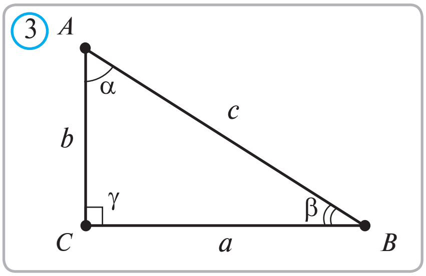
3°. Хулосаҳои муҳим.

а) *Секунҷаи росткунҷа* (*расми 3*).

$\angle\gamma=90°$, $\alpha+\beta=90°$, AC ва BC — катетҳо, AB — гипотенуза. Теоремаи Пифагор: $a^2+b^2=c^2$.

$$S=\frac{1}{2}ab;\qquad R=\frac{c}{2};\qquad r=\frac{a+b-c}{2};$$

$$\frac{a}{c}=\sin\alpha;\qquad \frac{a}{c}=\cos\beta;\qquad \frac{b}{c}=\sin\beta;\qquad \frac{b}{c}=\cos\alpha.$$

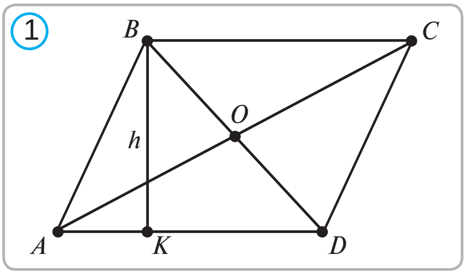

③

$$\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\alpha; \qquad \frac{a}{b}=\mathrm{ctg}\beta; \qquad \frac{b}{a}=\mathrm{ctg}\alpha; \qquad \frac{b}{a}=\mathrm{tg}\beta.$$

б) *Секунҷаи баробартараф*

$$\alpha=\beta=\gamma=60^\circ, \qquad S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad r=\frac{a\sqrt{3}}{6}, \qquad R=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

ЧОРКУНҶАҲО



1°. Параллелограмм

Чоркунҷаи тарафҳои муқобилаш параллел параллелограмм номида мешавад (*расми 1*). Порчаи қуллаҳои ғайриҳамсояро пайвасткунанда *диагонал* гуфта мешавад. AB ва CD; AD ва BC тарафҳои параллел; BD ва AC диагоналҳо.

Хосиятҳои асосӣ ва муносибатҳо

1) Нуқтаи буриши диагоналҳо симметрияи маркази параллелограмм мешавад.

2) Дарозии тарафҳои муқобил ба якдигар баробаранд.

$$AB=CD \text{ ва } AD=BC.$$

3) Кунҷҳои муқобили параллелограмм баробаранд.

$$\angle BAD=\angle BCD \text{ ва } \angle ABC=\angle ADC.$$

4) Ҳосили ҷамъи кунҷҳои ҳамсоя 180° аст.

5) Диагоналҳо дар нуқтаи буриш ба ду қисми баробар тақсим мешаванд: $BO=OD$ ва $AO=OC$

6) Ҳосили ҷамъи квадрати тарафҳо ба ҳосили ҷамъи квадрати диагоналҳо баробаранд

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2 \quad \text{ё ки} \quad 2(AB^2+BC^2)=AC^2+BD^2.$$

7) Масоҳати параллелограмм: а) $S=ah_a$, дар ин ҷо $a=AD$ тарафи он, $h_a=BK$ — баландии он; б) $S=ab\sin\alpha$, дар ин ҷо $b=AB$ — тарафи он, $\alpha=\angle BAD$ — кунҷи байни тарафҳои AB ва AD.

2°. Ромб

Параллелограмми ҳамаи тарафҳояш байни худ баробар *ромб* номида мешавад.

Ҳамаи хосиятҳои паралелограмм барои ромб низ ҷой дорад.

Хосиятҳои иловагии ромб.

1) Диагоналҳои ромб байни якдигар перпендикуляр.

2) Диагоналҳои ромб биссектрисаи кунҷҳои дарунӣ мешавад.

3) Масоҳати ромб $S=\frac{1}{2}d_1d_2$, дар ин ҷо d_1, d_2 — диагоналҳои ромб.

3°. Росткунҷа

Параллелограмми ҳамаи кунҷаҳояш ба 90° баробар буда *росткунҷа* номида мешавад.

1) Диагонали росткунҷа баробаранд.

2) Масоҳати росткунҷа $S=ab$, дар ин ҷо a ва b — тарафҳои ҳамсояи росткунҷа.

4°. Квадрат

Росткунҷаи ҳамаи тарафҳояш байни худ баробар квадрат номида мешавад.

Ҳамаи хосиятҳои дар ромб ва росткунҷа ҷой дошта ба квадрат ҳам ҷой дорад.

Агар a — тарафи квадрат, d диагонали он бошад: $S=a^2$; $S=\frac{d^2}{2}$; $d=a\sqrt{2}$.

5°. Трапетсия

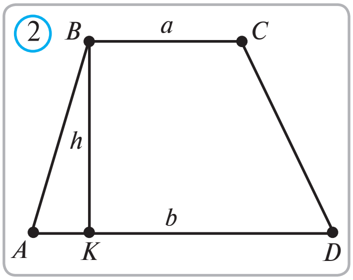
Чоркунҷаи ду тарафаш параллел (асосҳо) ва ду тарафи дигараш параллел набуда (тарафҳои паҳлӯӣ) *трапетсия* номида мешавад.

Порчаи миёнаҷои тарафи паҳлӯиро пайвасткунанда, *хати миёнаи трапетсия* номида мешавад.

Хосиятҳои асосӣ

1) Хати миёнаи трапетсия ба асосҳо параллел буда, ба нисфи суммаи асосҳо баробар аст.

2) Масоҳати трапетсия $S=\frac{a+b}{2}h$, дар ин ҷо a ва b — асосҳо, h баландӣ (*расми 2*).



ДАВРА, ДОИРА

1°. Бигузор дар ҳамворӣ адади мусбати R ва нуқтаи O дода шуда бошад, шакле, ки аз нуқтаи O дар масофаи R аз маҷмӯи нуқтаҳо ташкил шудааст, *давра* номида мешавад. Нуқтаи O маркази давра, порчаи маркази давраро ба нуқтаи давра пайвасткунанда радиус ва адади R бошад, *дарозии радиус* номида мешавад. Порчаи ду нуқтаи давраро пайвасткунанда хорда, хордаи аз маркази давра гузаранда *диаметр* номида мешавад. Қисми охирноки ба давра маҳдудкардашудаи ҳамворӣ, *доира* номида мешавад.

Муносибатҳои асосӣ

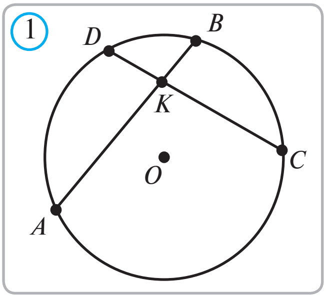
1) $D=2R$, дар ин ҷо D — дарозии диаметр.

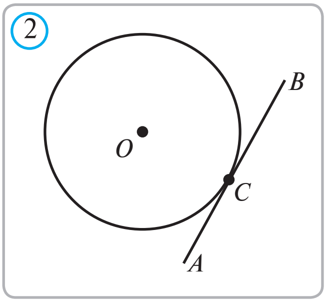
2) $L=2\pi R$ — дарозии давра.

3) $S=\pi R^2$ — масоҳати доира.

4) AB ва CD ки хордаҳоянд, дар нуқтаи K бурида шаванд (*расми 1*), $AK\cdot KB=CK\cdot KD$ иҷро мешавад.

5) Диаметри хордаро ба ду қисми баробар тақсимкунанда ба ин хорда перпендикуляр аст.





6) Хордаҳои баробар аз марказ дар масофаҳои баробар ҷойгир шудаанд ва баръакс хордаҳои аз марказ дар масофаи якхела ҷой гирифта ба якдигар баробаранд.

2°. Расанда

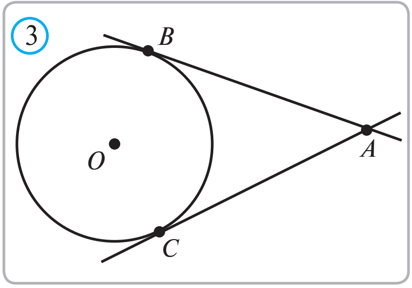
Хати росте, ки бо давра (ё ки доира) нуқтаи умумии ягона дорад, *расанда* номида мешавад. Нуқта бошад, *нуқтаи* расиш ном дорад (*расми 2*).

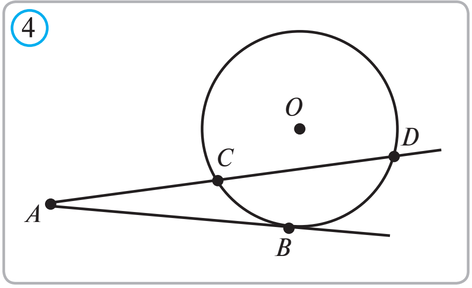
Хати рости бо давра 2- то нуқтаи умумӣ дошта, *буранда* ном дорад.

Хосиятҳои расанда

1) Радиуси ба нуқтаи расиш гузаронидашуда ба расанда перпендикуляр аст.

2) Аз нуқтаи берунии доира ба ин доира дуто расанда гузаронидан мумкин. Порчаҳои ин расандаҳо ба якдигар баробаранд (*расми 3*): $AB=AC$.





3) Агар AC буранда шуда давраро дар нуқтаи C ва D бурида гузарад ва AB расанда бошад, баробарии $AB^2=AD\cdot AC$ ҷой дорад (*расми 4*).

3°. Кунҷҳои марказӣ ва дарункашида

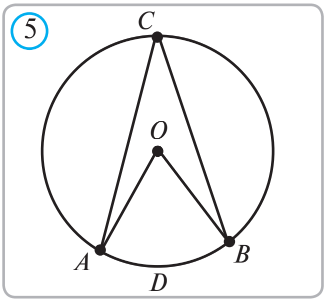
Бо ёрии ду нуқтаи дар давра буда давра ба ду қисм ҷудо мешавад. Ин қисмҳо камонҳо ном дорад. Ишорати он: $\overset{\smile}{ADB}$; $\overset{\smile}{ACB}$.

Кунҷи AOB кунҷи марказии камони ADB -ро дарҳамкашандаи марказӣ (*расми 5*), кунҷи ACB бошад, камони ADB-ро дарҳамкашанда ва ба давра кунҷи дарункашида номида мешавад. Дар байни ин кунҷҳо муносибатҳои

$$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$$

ҷой дорад.

Хусусан кунҷи дохилии нимдавраро (диаметрро) дарҳамкашанда кунҷи рост мешавад (*расми 6*). Кунҷи дохили як камони давраро дарҳамкашанда баробаранд.

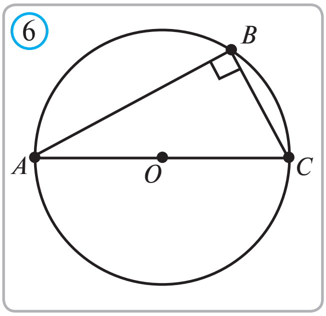


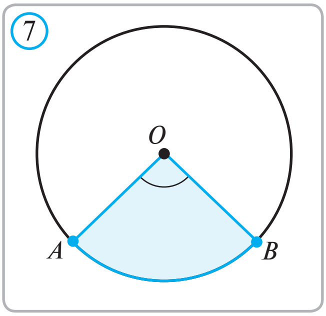
4°. Сектор ва сегмент

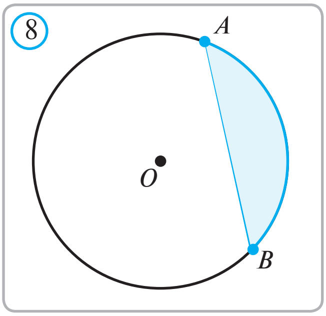
Қисми бо ду радиус маҳдуд кардашудаи доира *сектор* номида мешавад (*расми 7*). Дарозии камони сектор: $l=\frac{\pi R\alpha}{180}$, дар ин ҷо α — ченаки градусии кунҷи марказӣ

Масоҳати секторҳо: $S=\frac{\pi R^2\alpha}{360}$; $S=\frac{1}{2}Rl.$

Сегмент — бо хордаи доира ва камони ҳамин хордаро дарҳамкашида маҳдуд аст (*расми 8*).







$$\text{Масоҳати сегмент: } S=S_{сектор}\pm S_{\Delta}=\frac{\pi R^2}{360}\cdot\alpha\pm\frac{1}{2}R^2\sin\alpha$$

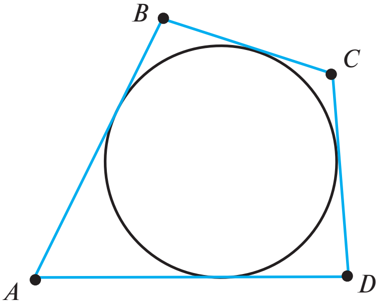
БИСЁРКУНҶАҲОИ МУНТАЗАМ

Тарафи n кунҷаи мунтазами a_n, периметраш P_n, масоҳаташ S_n, радиуси давраи дарункашидашуда r_n, радиуси давраи берункашида шуда R_n, кунҷи дарунин α_n бошад,

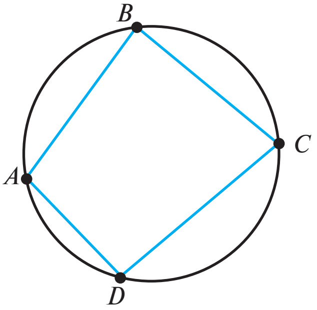
$$P_n=na_n,\qquad S_n=\frac{1}{2}P_nr_n=\frac{1}{2}na_nr_n,\qquad \alpha_n=\frac{(n-2)\cdot180^\circ}{n}$$

$$R_n=\frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}},\qquad r_n=\frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$

Чоркунҷаҳои ба давра дарун 155 ва берункашидашуда.



$BC+AD=AB+CD$



$\angle A+\angle C=180^\circ$

$\angle B+\angle D=180^\circ$

Чадвали квадрати ададҳои натуралӣ аз 10 то 99

даҳиҳо *воҳидҳо*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
1	121	441	961	1681	2601	3721	5041	6561	8281
2	144	484	1024	1764	2704	3844	5184	6724	8464
3	169	529	1089	1849	2809	3969	5329	6889	8649
4	196	576	1156	1936	2916	4036	5476	7056	8836
5	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025
6	256	676	1296	2116	3136	4356	5776	7396	9216
7	289	729	1369	2209	3249	4489	5929	7569	9409
8	324	784	1444	2304	3364	4624	6084	7744	9604
9	361	841	1521	2401	3481	4761	6241	7921	9801

Чадвали баъзе бузургиҳо

$\pi \cong 3,1416$
$\sqrt{2} \cong 1,4142$
$\sqrt{3} \cong 1,7320$
$\sqrt{5} \cong 2,2360$
$\sqrt{6} \cong 2,4495$
$\sqrt{7} \cong 2,6457$

$\sqrt{8} \cong 2,8284$
$\sqrt{10} \cong 3,1623$
$\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,7071$
$\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0,5774$
$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cong 0,3183$

Ҷадвали қиматҳои функсияҳои тригонометрӣ

α°	sinα	cosα	tgα	ctgα	α°	sinα	cosα	tgα	ctgα
1	0,0175	1,000	0,0175	57,3	**46**	0,719	0,695	1,036	0,966
2	0,0349	0,999	0,0349	28,6	**47**	0,731	0,682	1,072	0,933
3	0,0523	0,999	0,0524	19,1	**48**	0,743	0,669	1,111	0,900
4	0,0698	0,998	0,0699	14,3	**49**	0,755	0,656	1,150	0,869
5	0,0872	0,996	0,0875	11,4	**50**	0,766	0,643	1,192	0,839
6	0,1045	0,995	0,1051	9,51	**51**	0,777	0,629	1,235	0,810
7	0,1219	0,993	0,1228	8,14	**52**	0,788	0,616	1,280	0,781
8	0,139	0,990	0,141	7,11	**53**	0,799	0,602	1,327	0,754
9	0,156	0,988	0,158	6,31	**54**	0,809	0,588	1,376	0,727
10	0,174	0,985	0,176	5,67	**55**	0,819	0,574	1,428	0,700
11	0,191	0,982	0,194	5,145	**56**	0,829	0,559	1,483	0,675
12	0,208	0,978	0,213	4,507	**57**	0,839	0,545	1,540	0,649
13	0,225	0,974	0,231	4,331	**58**	0,848	0,530	1,600	0,625
14	0,242	0,970	0,249	4,011	**59**	0,857	0,515	1,664	0,601
15	0,259	0,966	0,268	3,732	**60**	0,866	0,500	1,732	0,577
16	0,276	0,961	0,287	3,487	**61**	0,875	0,485	1,804	0,554
17	0,292	0,956	0,306	3,271	**62**	0,883	0,469	1,881	0,532
18	0,309	0,951	0,325	3,078	**63**	0,891	0,454	1,963	0,510
19	0326	0,946	0,344	2,904	**64**	0,899	0,438	2,050	0,488
20	0,342	0,940	0,364	2,747	**65**	0,906	0,423	2,145	0,466
21	0,358	0,934	0,384	2,605	**66**	0,914	0,405	2,246	0,445
22	0,375	0,927	0,404	2,475	**67**	0,921	0,391	2,356	0,424
23	0,391	0,921	0,424	2,356	**68**	0,927	0,375	2,475	0,404
24	0,405	0,914	0,445	2,246	**69**	0,934	0,358	2,605	0,384
25	0,423	0,906	0,466	2,145	**70**	0,940	0,342	2,747	0,364
26	0,438	0,899	0,488	2,050	**71**	0,946	0,326	2,904	0,344
27	0,454	0,891	0,510	1,963	**72**	0,951	0,309	3,078	0,325
28	0,469	0,883	0,532	1,881	**73**	0,956	0,292	3,271	0,306
29	0,485	0,875	0,554	1,804	**74**	0,961	0,276	3,487	0,287
30	0,500	0,866	0,577	1,732	**75**	0,966	0,259	3,732	0,268
31	0,515	0,857	0,601	1,664	**76**	0,970	0,242	4,011	0,249
32	0,530	0,848	0,625	1,600	**77**	0,974	0,225	4,331	0,231
33	0,545	0,839	0,649	1,540	**78**	0,978	0,208	4,507	0,213
34	0,559	0,829	0,675	1,483	**79**	0,982	0,191	5,145	0,194
35	0,574	0,819	0,700	1,428	**80**	0,985	0,174	5,67	0,176
36	0,588	0,809	0,727	1,376	**81**	0,988	0,156	6,31	0,158
37	0,602	0,799	0,754	1,327	**82**	0,990	0,139	7,11	0,141
38	0,616	0,788	0,781	1,280	**83**	0,993	0,1219	8,14	0,1228
39	0,629	0,777	0,810	1,235	**84**	0,995	0,1045	9,51	0,1051
40	0,643	0,766	0,839	1,192	**85**	0,996	0,0872	11,4	0,0875
41	0,656	0,755	0,869	1,150	**86**	0,998	0,0698	14,3	0,0699
42	0,669	0,743	0,900	1,111	**87**	0,999	0,0523	19,1	0,0524
43	0,682	0,731	0,933	1,072	**88**	0,999	0,0349	28,6	0,0349
44	0,695	0,719	0,966	1,036	**89**	1,000	0,0175	57,3	0,0175
45	0,707	0,707	1,000	1,000	**90**	1,000	0,0000	-	0,0000

ҶАВОБҲО ВА НИШОНДОДҲО

Дарси 1. **1.** 50°; 130°; 133°; 97°. **2.** 12 *см*. **3.** 65°; 70°; 45°. **4.** 105°; 130°; 125°. **5.** 35°; 35°; 110°. **6.** 94°; 56°; 30°. **7.** 110°; 130°; 120°. **8.** *Нишондод:* Дар чорто секунҷа тарафҳои ҳар кадомаш ба нисфи тарафҳои секунҷаи аввала баробар аст. **9.** *Нишондод:* Порчаи *DF* хати миёнаи секунҷаҳои *ABH* ва *CEB* мешавад. **10.** *Нишондод:* Аз баробарии кунҷҳои дарунии ивазшавандаи секунҷаҳои *ANC* ва *CKA* истифода баред.

Дарси 2. **1.** $6\sqrt{6}$. **2.** 36. **3.** 30°. **4.** a) 80°; 80°; 20°; b) 70°; 70°; 40°. **5.** 6,72 *см*. **6.** 54. **7.** 5 *см*; $25\sqrt{3}$ *см*^{2}; 120°; 30°; 30°. **8.** 55°; 60°; 65°. **9.** 90°.**10.** 140°. **11.** 50°.

Дарси 3. **2.** 78°; 102°; 78°; 102°. **3.** 53°; 37°. **4.** 110°; 70°; 110°; 70°. **5.** 45°; 135°; 45°; 135°. **6.** 20 *см* ё ки 28 *см*. **7.** *Нишондод:* Росткунҷаи *ABCD*-и тарафҳои пешаш *AB*=2 *см, BC*=6 *см* созед. Баъд давраҳои марказаш дар нуқтаҳои *B ва C* ва радиусаш 3 *см* бударо созед.

Дарси 4. **1.** 30 *см*. **2.** 13 *см*. **3.** *Нишондод:* ба масъалаи 7-уми дарси 3 нигаред. **4.** $880\sqrt{41}$ *см*^{2}.**5.** а) 4 *см*, 8 *см*; б) 45°, 90°; в) $16+8\sqrt{2}$ *см*, 32 *см*^{2}. **6.** $18\sqrt{3}$ *см*^{2}. **7.** 30 *см*^{2}.**8.** 28 *см*; $28\sqrt{2}$ *см*.

Дарси 5. **3.** Секунҷаҳо монанд. **5.** 5; 8; $\frac{1}{2}$. **6.** 72; 162; 90.

Дарси 6. **3.** 12 *м*. **4.** 7,5 *см*; 12,5 *см*; 15 *см*. **5.** 73,5 *м*^{2}; 37,5 *м*^{2}. **6.** Секунҷаҳо монанд.

Дарси 7. **3.** а) 4,5; б) 10,5; в) 4,5. **4.** а) 10; б) 6; в) 4,5. **5.** а) 5 *см*, 3,5 *см*; б) $5\frac{5}{7}$ *см*, $2\frac{2}{7}$ *см*. **6.** а) 8; б) 3,5; в) 12,5. **8.** 12 *см*.

Дарси 8. **4.** а) ҳа; б) ҳа; в) не. **5.** $2\frac{1}{3}$ *см*, 9. **6.** а) 15 *см*; 20 *см*; б) 24 *см*; 18 *см*; в) 144 *см*^{2}; 256 *см*^{2}. **8.** 19,2 *м*.

Дарси 9. **2.** ҳа. **3.** а) ва в); г) ва д). **4.** 108 *см*^{2}. **5.** 4 *см*; 6 *см*. **7.** 4,8 *см*. **9.** 12.

Дарси 10. **2.** а) ва е); б) ва д); е) ва ф). **3.** 36 *м* ё ки 20,25 *м*. **4.** 12 *см*; 14 *см*. **6.** $5\frac{5}{11}$ *см*.

Дарси 11. **3.** а) 15; б) $3\frac{2}{11}$; в) $3\frac{5}{17}$. **4.** 18 *см*; 6 *см*. **5.** 29 *дм*^{2}. **6.** 6 *дм*. **7.** *m*:*n*.

Дарси 12. **1.** $3\frac{3}{17}$ *м*; 13,6 *см*. **7.** *n*:*m*. **8.** a) *S*:4; b) *S*:2; d) *S*:4.

Дарси 13. **II.** **1.** 12 *см*^{2}. **2.** 8,4. **3.** 2,4. **4.** 24. **5.** 8. **6.** 1,6. **III.** **1.** 6 *см*. **2.** 65 *дм*; 52 *дм*. **3.** $AB||EF$.

Дарси 14. **5.** 1 *км* 750 *м*. **8.** 7,2 *см*. **9.** $k=\frac{1}{2}$ ё ки $k=2$.

Дарси 15. **4.** $k=2$. **5.** 6 *см*^{2}; 24 *см*^{2}. **6.** 104 *см*^{2}. **7.** Дар ҳар ду ҳолат $k=1$. **8.** 1,2 *м*^{2}. **9.** 16 *см,* 32 *см*.

Дарси 16. **4.** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$. **5.** Нуқтаи буриши нурҳои X^*X ва Y^*Y маркази гомотетия аст. **6.** $OX_1=2\cdot OX$. **7.** *Нишондод:* Аз ҳалли масъалаи мавзӯъ истифода баред.

8. а) $OA_1=\frac{2}{3}OA$; b) $OA_1=2OA$; d) $OA_1=3OA$; e) $OA_1=OA$. **9.** *Нишондод:* Аз расми 3-юми мавзӯъ истифода баред.

Дарси 17. **4.** а) $P_2=42$; $k=\frac{1}{2}$; б) $S_1=12$, $k=2$; в) $P_1=150\sqrt{2}$, $k=\sqrt{2}$; г) $P_1=10$, $S_2=216$.

Дарси 18. **1.** ≈6,97 *м*. **2.** 300 *м*.**3.** ≈72 *м*. **4.** 6,6 *м*.

Дарси 19. **1.** 9. **2.** 12 *дм*. **3.** 8 *м*. **4.** 24 *дм*^{2}. **6.** *Нишондод:* Секунҷаи *ABCD* кашед, аз масъалаи 1 мавзӯи сохтани бисёркунҷаҳо истифода бурда секунҷае созед, ки тарафҳояш аз тарафҳои секунҷаи кашидашуда се маротиба хурд бошад.

Дарси 20. **1.** 72°; 72°; 36°. **3.** 12 *см*^{2}. **4.** 15 000 000 *км*. **5.** а) ҳа; b) ҳа. **7.** 6 *см*, 12 *см*, 18 *см*. **8.** 63 *м*.

Дарси 21. **II.** **1.** 8 *см*. **2.** $4\frac{4}{9}$ *см*. **3.** 48 *м*. **4.** 4 *см*; 0,5 *см*^{2}. **5.** $5\frac{1}{3}$ *м*. **6.** 867 *км*. **III.** **1.** 7,5 *м*. **2.** 6 *см*. **3.** а) 7,5 *см*; б) 6 *см*; в) 16,2 *см*. *Масъалаҳои шавқовар.* **1.** Тағйир намеёбад. **2.** а) ҳа; б) не. **3.** *Нишондод:* Бо хаткашак қади ҳар як лӯхтакро чен кунед ва нисбати онҳоро ёбед.

Дарси 22. **4.** $\sin A=\frac{5}{13}$; $\cos A=\frac{12}{13}$; $\mathrm{tg}A=\frac{5}{12}$; $\mathrm{ctg}A=\frac{12}{5}$. **5.** а) $\sin A=\frac{7}{25}$; $\cos A=\frac{24}{25}$; $\mathrm{tg}A=\frac{7}{25}$; $\mathrm{ctg}A=\frac{25}{7}$. $\sin B=\frac{24}{25}$; $\cos B=\frac{7}{25}$; $\mathrm{tg}B=\frac{25}{7}$; $\mathrm{ctg}B=\frac{7}{25}$. **6.** $BC=\frac{11}{20}$; $AB=\frac{61}{20}$. **7.** $AB=34$; $AC=30$.

Дарси 23. **4.** а) 15 *см*; б) 8 *см*; в) 36,125 *см*; г) 31,875 *см*. **5.** $\frac{15\sqrt{55}}{8}$ *см*. **7.** 42*см*^{2}. **8.** 21 *см*^{2}. **9.** 32 *см*^{2}. **10.** 180 *см*^{2}.

Дарси 24. **3.** $2\sqrt{3}$ *дм*, $4\sqrt{3}$ *дм*. **4.** а) $12+4\sqrt{3}$; б) $6+6\sqrt{3}$; в) $16+8\sqrt{2}$. **5.** а) $\angle A=45°$, $\angle B=45°$; б) $\angle A=60°$; $\angle B=30°$; в) $\angle A=30°$, $\angle B=60°$. **6.** $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ *см*^{2}. **7.** 7 *см*; 24 *см*, $\cos A=\frac{24}{25}$, $\mathrm{tg}A=\frac{7}{24}$; $\mathrm{ctg}A=\frac{24}{7}$. **8.** 120°; 120°; 60°; 60°.

Дарси 25. **1.** 36 *см*^{2}. **2.** 24 *см*. **3.** а) $6\sqrt{3}$; б) 30; в) $\frac{105\sqrt{3}}{4}$. **4.** $(24+4\sqrt{3})$ *см*; $(24+8\sqrt{3})$ *см*^{2}. **5.** $10\sqrt{3}$ *см*. **6.** а) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** ≈807 *м*^{2}. **8.** ≈88 *м*.

Дарси 26. **2.** Тангенс дар 90° котангенс дар 0° ва 180°. **3.** $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\mathrm{tg}\alpha<0$, $\mathrm{ctg}\alpha<0$. **6.** $\sin45°=\sin135°$; $\cos45°>\cos135°$. **7.** 24 *см*; 18 *см*^{2}.

Дарси 27. **2.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha$; 3) 1; 4) $\cos^2\alpha$; 5) $\cos^2\alpha$; 6) $\sin^2\alpha$. **3.** а) $-\frac{3}{5}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; d) 0. **4.** $6\sqrt{3}$ *см*^{2}. **5.** $0,8\sqrt{3}$ *см*, $1,6\sqrt{3}$ *см*. **6.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) 0. **9.** а) $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $A(-2;0)$; д) $A\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};2\right)$.

Дарси 28. **4.** а) 150°; б) 135°; в) 135°; г) 150°. **5.** а) 0; б) 1; в) 0; е) −3,5; **6.** а) 1; б) 1; в) 1. **7.** 3,5 *см*. **8.** $36\sqrt{3}$ *см*^{2}. **9.** а) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) 0. **10*.** а) 30°; б) 135°; в) 150°.

Дарси 29. **III.** **2.** 1000, 37°. **3.** 2°. **4.** 34°. **5.** $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. **6.** $3\sqrt{3}$ *см*. **7.** 5 *см*. **8.** 12, $24\sqrt{3}$. **9.** 20 *см*, 100 *см*^{2}. **10.** 4, $16\sqrt{3}$. **11.** 30°; 60°. **13.** 12 *см*; $4\sqrt{3}$ *см*; $8\sqrt{3}$ *см*. **14.** 32 *см*^{2}. **15.** $-\frac{15}{17}$; $-\frac{8}{15}$; $-\frac{15}{8}$. **16.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **17.** $12(\sqrt{3}+1)$, $72(\sqrt{3}+1)$. **IV.** **1.** $\frac{15}{17}$; $-\frac{8}{15}$; $-\frac{15}{8}$

2. $2\sqrt{77}$; 13°; 77°. **4.** *Нишондод:* Аз теорема дар бораи баробарии секунҷаҳо истифода баред.

Дарси 30. **2.** а) 6 *см*^{2}; б) 73,5 *см*^{2}; в) 6 *см*^{2}. **3.** 36 *см*^{2}. **4.** $49\sqrt{2}$ *см*^{2}. **5.** $54\sqrt{3}$ *см*^{2}. **6.** $2\frac{2}{3}$ *см*; $4{,}5\sqrt{2}$ *см*. **7.** $\frac{h_a h_b}{2\sin\alpha}$. **8.** $4{,}8\sqrt{3}$ *см*.

Дарси 31. **2.** а) $BC=6$; б) $AB=8\sqrt{2}$; в) $AC=7\sqrt{2}$. **3.** а) $\sin C=\frac{1}{3}$; б) $\sin A=\frac{21}{40}$; в) $\sin B=\frac{16}{21}$. **4.** 4,8 *дм*. **5.** 30° ё ки 150°. **6.** Мумкин. **7.** $AB\approx21{,}1$ *м*; $\angle B\approx37°$, $\angle C\approx76°$. **8.** 76°; 26,1 *см*; 23,8 *см*.

Дарси 32. **2.** а) $\sqrt{13}$ *см*; б) 4 *м*; d) $\sqrt{283}$ *дм*. **3.** $\frac{1}{5}$; $\frac{19}{35}$; $\frac{5}{7}$. **4.** $2\sqrt{13}$ *см* ё ки $2\sqrt{109}$ *см*. **5.** $\sqrt{31}$ *см*, $\sqrt{91}$ *см*. **6.** $\sqrt{109}$ *см*, $\sqrt{39}$ *см*. **7.** *Нишондод:* Аз теоремаи косинус истифода бурда, a^2 ва c^2 -ро ёбед, сипас ин баробариҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ кунед **8.** $\frac{\sqrt{106}}{2}$ *см*; $\frac{\sqrt{151}}{2}$ *см;* $\frac{\sqrt{190}}{2}$ *см*.

Дарси 33. **1.** $\angle B$ ва $\angle C$. **2.** AB ва BC. **3.** а) тезкунҷа; б) росткунҷа; в) кундкунҷа. **4.** а) $8\frac{1}{8}$; б) $8\frac{1}{8}$; в) $24\frac{1}{6}$; г) $\frac{35\sqrt{6}}{24}$. **6.** *Нишондод:* Аз теоремаи синусҳо истифода баред. **7.** *Нишондод:* 7.Чун масъалаи 6 ҳал кунед. **8.** *Нишондод:* Аз теоремаи синусҳо истифода баред.

Дарси 34. **1.** а) $10\sqrt{3}$; б) $28\sqrt{2}$; в) 12; г) ≈0,1532. **2.** а) —2,5; б) 0; в) 2. **3.** а) 8; б) 24; в) 8; г) 0. **5.** а) —7,5; в) 0. **6.** $a\perp b$, $c\perp d$.

Дарси 35. **1.** а) $\alpha=90°$, $a=b=5$, $c=5\sqrt{2}$. б) $\gamma\approx45°$; $b\approx17{,}9$, $c\approx14{,}6$; в) $\alpha=20°$; $b\approx65.8$; $c\approx88{,}6$; г) $\gamma=119°$; $a\approx16{,}7$; $b\approx11{,}2$. **2.** а) $c\approx5{,}29$; $\alpha\approx79°6'$; $\beta\approx138°21'$; б) $c\approx53{,}09$; $\alpha\approx11°39'$; $\beta\approx38°21'$; в) $a\approx19{,}9$; $\beta\approx58°19'$; $\gamma\approx936°41'$; г) $a\approx22{,}9$; $\beta\approx21°$; $\gamma\approx15°$. **3.** а) $\alpha\approx29°$; $\beta\approx47°$; $\gamma\approx104°$; б) $\alpha\approx54°$; $\beta\approx13°$; $\gamma\approx113°$; в) $\alpha\approx34°$; $\beta\approx44°$; $\gamma\approx102°$; г) $\alpha\approx39°$; $\beta\approx93°$; $\gamma\approx48°$.

Дарси 36. **1.** а) $2\sqrt{3}$ *см*; б) 16 *см*; в) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. **2.** $4\sqrt{2}$ *м*; 8 *м* ва $4+4\sqrt{3}$ *м*. **3.** $50\sqrt{3}$ *кг*. **4.** 14 *см*. **5.** $2\sqrt{14}$ *см*. **6.** $6\sqrt{3}$ *см*. **7.** 50 *см*.

Дарси 37. **1.** ≈10,8 *м*. **2.** ≈15 *м*. **3.** ≈43,4 *м*. **4.** ≈35°. **5.** ≈73,2 *м*. **6.** ≈49 *м*. **7.** Аз роҳи асфалт.

Дарси 38-39. **II.** **1.** $3\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$. **2.** $\frac{111}{120}$; 0,89; —0,65. **3.** $2\sqrt{7}$ *см*; $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ *см*. **4.** $30\frac{1}{30}$ *см*. **5.** 28 *см*. **6.** 8 *см*^{2}; $(4+4\sqrt{5})$ *см*; $h_a=4$ *см*, $h_b=0{,}8\sqrt{5}$ *см*. **7.** $2\sqrt{13}$. **8.** а) кунҷҳои тез; б) кунҷҳои рост, в) кунҷҳои кунд. **9.** 63 *см*^{2}. **10.** ≈3,7 *см*. **11.** 7 *см*. **12.** 6. **13.** 0. **14.** —9. **15.** 135°. **16.** OC≈9,6. **17.** $(24+24\sqrt{3})$ *см*. **18.** 5. **III.** **1.** ≈109°. **2.** $\gamma=100°$, $a\approx3{,}25$; $c\approx6{,}43$. **3.** 6,25; 14,76.

Дарси 40. **2.** а) Секунҷаҳои дилхоҳ дар давра дарун кашида шуданаш мумкин; б) Чоркунҷае, ки ҳосили ҷамъи кунҷҳои муқобилашон ба 180° баробаранд.

3. Кунҷҳои ба як камон часпида баробар. **4.** 10 *см*. **5.** 672 *см*^{2}. **6.** а) $10\sqrt{3}$ *см*; б) $10\sqrt{2}$ *см*; в) $10\sqrt{2}$ *см*; $10\sqrt{2}$ *см*; 20 *см*. **7.** $8\frac{1}{3}$ *см*. **8.** Дар ΔABF, $\angle BAF+\angle AFB=90°$, $\angle ABF=90°$. Ҳамин тавр, AF - диаметр. **9.** Ҳосили ҷамъи кунҷҳои муқобил 180°, яъне давра кашидан мумкин. 10. *Нишондод:* Перпендикуляри миёнаи нуқтаи буриши як асос ва як тарафи паҳлуи маркази давра мешавад.

Дарси 41. 2. 7,2 *см*. 3. а) 16,6; б) 22; в) 22,6. 4. а) 2,5; б) 3,5; в) 2. 8. 6 *см*.

Дарси 42. 3. а) 60°; б) 108°; в) 120°; г) 144°; д) 160°. 4. а) 120°; б) 72°; в) 120°; г) 36°; д) 30°. 5. а) 3; б) 4; в) 8; г) 12.

Дарси 43. 1. 3 *см* ва $3\sqrt{2}$ *см*. 2. $\sqrt{3}$ ва $2\sqrt{3}$. 7. а) 6; б) 12; в) 10; г) 20; д) 5.

Дарси 44. 3. 8 *см*; $8\sqrt{2}$ *см*; $8\sqrt{3}$ *см*; $8\sqrt{2}+3$ *см*; 16 *см*. 4. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ *см*; 5. а) $20\sqrt{2}$ *см*; б) 40 *см*. 6. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ *см*.

Дарси 45. I. **1.** Г; **2.** В; **3.** В; **4.** Б; **5.** Б; **6.** Г; **7.** Г. III. **1.** $\sqrt{3}:4$: $6\sqrt{3}$. **2.** 3:4. **3.** а) ≈5,780 *см*; б) ≈4,142 *см*; в) ≈2,679 *см*. **4.** $S=\sqrt{2}R^2$. **5.** 24 *см*^{2}. IV. **1.** 4 *см*; 13 *см*. **2.** а) 80 *см*; б) $20\sqrt{2-\sqrt{3}}$ *см*; $40\sqrt{2-\sqrt{3}}$ *см*; в) 200 *см*^{2}. **3.** $4\sqrt{3}$ *см*; 8 *см*. 4. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ *см*^{2}.

Дарси 46. 2. а) 3 маротиба зиёд; б) ба 6π *см* зиёд; в) 3 маротиба хурд мешавад; е) 6π *см* хурд мешавад. 3. 6369 *kм*. 4. а)$\frac{2\pi\sqrt{3}a}{3}$; б) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; в) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. 5. а) πa; б) $\pi c(\sqrt{2}-1)$; в) $\pi c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$. 6. 1,5 *м*. 7. 66348 маротиба.

Дарси 47. 1. а) π *см*; б) $1{,}5\pi$ *см*; в) 3π *см*; г) 4π *см*. 2. а) $\frac{2\pi}{9}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{5\pi}{12}$. 3. а) ≈69°; б) 120°; в) 150°. 4. а) $\frac{5\pi}{8}$ *см*; б) 2π *см;* в) $\frac{15\pi}{4}$ *см*; 5. а) 4π; б) 16π. 7. 2.

Дарси 48. 3. k^2 маротиба калон мешавад; б) k^2 маротиба хурд мешавад. 4. $6{,}25\pi$ *см*^{2}; $12{,}5\pi$ *см*^{2}. 5. $2{,}25\pi$ *см*^{2}; 9π *см*^{2}. 6. $(\pi-2)R^2$. 7. $21{,}25\ \pi$ *см*^{2}. 8. 7,5 *см*^{2}.

Дарси 49. 3. а) $\frac{49}{12}\pi$ *см*^{2}; $\frac{49(\pi-3)}{12}$ *см*^{2}; б) $6{,}125\pi$ *см*^{2}; $\frac{49(\pi-2\sqrt{2})}{8}$ *см*^{2}; в) $\frac{49\pi}{3}$ *см*^{2}; $\frac{49(4\pi-3\sqrt{3})}{12}$ *см*^{2}; г) $\frac{49\pi}{4}$ *см*^{2}; $\frac{49(\pi-2)}{4}$ *см*^{2}. 4. а) $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$; б) $a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ в) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{2}a^2$; 5. π *см*^{2}; 3π *см*^{2}; 5π *см*^{2}; 7π *см*^{2}. 6. $\frac{25(2\pi-3\sqrt{3})}{3}$ *см*^{2}; $\frac{25(10\pi+3\sqrt{3})}{3}$ *см*^{2}; 7. $\frac{75\cdot(4\pi-3\sqrt{3})}{2}$ *см*$_2$.

8. $S_1<S<S_2$; 300 *см*^{2} < 314*см*^{2} < 321,48 *см*^{2}.

Дарси 50. 1. Аз они доира калон. 2. $\frac{160\ \pi}{3}$ *см*^{2}. 3. $5{,}76\pi$ *см*^{2}. 4. $8.(\pi-2)$ *см*^{2}. 6. 6π *см*^{2}; 10π *см*.

Дарси 51. II. **1.** $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.** $\frac{8\pi}{3}$ *дм*. **3.** 30 *см*. **4.** 90°. **5.** 3. **6.** π ва $6{,}25\pi$. **7.** $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{2\pi-3\sqrt{3}}$. **8.** $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$. **9.** $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{6}.a^2$. **10.** $1{,}5\pi$. **11.** 7. **12.** $\approx 9\pi-26{,}04$. **13.** π. **14.** $54\sqrt{3}-24\pi$. **15.** $\frac{3\pi}{8}$. III. **2.** $8\sqrt{3}$ *см*. **3.** а) $\frac{18}{\pi}$ *см*; b) $\frac{216}{\pi}$ *см*^{2}; d) $\frac{216\pi+81\sqrt{3}}{\pi^2}$*см*^{2}.

Дарси 52. 3. $5\sqrt{2}$ *см*. 4. 12 *см*. 5. 44 *м*, 60 *м*. 7. 1:7. 8. $AB\cos\alpha$.

Дарси 53. 1. а) 30 *см*, 12 *см*; б) 9 *см*, 12 *см*, 21 *см*; в) 3 *см*, 15 *см*, 3 *см*, 21 *см*.

3. 6 *см*; 10,5 *см*. **4.** 9 *см*, 12 *см*, 15 *см*, 18 *см*. **5.** 60°. **6.** 21 *см*. **7.** 20 *см*.

Дарси 54. **1.** *Нишондод:* $\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC$. **2.** 25 *см*, 15 *см*, 20 *см*. **3.** $9\frac{3}{5}$ *см*. **4.** а) 5, 4; б) 24, 25; в) 8,10. **5.** 16:25. **6.** 56,16 *см*^{2}. **7.** 60 *см*^{2}. **8.** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{3}$.

Дарси 55. **2.** *Нишондод:* а) секунҷаи росткунҷае катетҳояш a ва b - ро созед; б) секунҷаи росткунҷае гипотенузааш a ва як катеташ b -ро созед. **3.** *Нишондод:* секунҷаи ΔABC-и катетҳояш $AB=BC=1$ созед баъд. секунҷаи ΔBCC_1-и катет $CC_1=1$ ва $\angle C_1=90°$ доштаро созед ва ҳоказо . **4.** а) 20; б) 45; в) 37,5. **5.** 225 *см*^{2}. **6.** 180 *см*^{2}. **7.** 25:9. **9.** $OC \geq OD$ буяан набаробари ҳама вақт дуруст.

Дарси 56. **1.** а) 6,25; б) 12; в) 0,25. **2.** а) 8 *см*; б) 2,5 *см;* в) 0,9 *см*. **3.** а) 4 *дм*; б) 4 *дм*. **4.** 4 *см*. **6.** 9 *дм*; 16 *дм*.

Дарси 57. **1.** 10 *см*. **2.** 2 *см*. **3.** а) 2,5; б) 4; в) 2. **4.** а) $4\sqrt{6}-1$ *см*; б) 6 *см*. **5.** 1:6. **6.** 6 *см*. **7.** 3. **8.** 1:4.

Дарси 58. **II.** **1.** 18 *см*; 32 *см*. **2.** 4 *см*; **3.** 8 *см*; **4.** 6,4 *дм*. **5.** 8 *см*. **6.** 1,5. **7.** 5. **8.** 6. **9.** 45 *дм*^{2}. **10.** 4 *см*. **11.** 8 *см*. **12.** 6. **13.** 60°. **14.** 45°. **15.** 4:9. **III.** **1.** 8 *см*. **2.** 5 *дм*. **3.** 4 *см*; 8 *см*.

Дарси 59. **1.** а) 12 (кв.в.); б) 20 (кв.в); в) 12 (кв.в.); г) 12 (кв.в.); д) 42 (кв.в.). **2.** 4 *см*. **3.** а) 12; б) 288. **4.** а) $\frac{6\sqrt{133}}{19}$; б) $2\frac{1}{3}$. **5.** а) (3;2); б) (2,5;—0,5); в) (—1;4); г) (—0,5;3,1). **6.** D(2;—1). **8.** 10 *см*; 25 *см*. **9.** 60°; 90°; 120°; 90°. **10.** 6 *см*. **11.** $6\sqrt{2}$ *см*.

Дарси 60. **1.** а) 4; б) 6; в) 5; г) 5. **2.** $4\sqrt{13}+\sqrt{82}+\sqrt{58}$. **4.** трапетсия. **5.** $x=4$, $y=3$. **7.** $b-a$; $-a-2b$; $2a+b$. **8.** $5N$. **9.** $18\sqrt{3}$; $27\sqrt{3}$. **10.** $4\sqrt{2}$ *см*. **11.** $PA=PB$ ва $PA=PC$ барои буданаш $PB=PC$.

Дарси 61. **2.** 45°; 90°; 135°; 90°. **3.** 45°. **4.** 60°. **5.** 3 *см*; 8 *см*. **7.** 28 *см*. **9.** 45°.

Дарси 62. **1.** 8,4 *см*, 10,5 *см*, 14,7 *см*. **2.** 175 *дм*^{2}; 252 *дм*^{2}. **3.** 12 *см*^{2}. **4.** 6. **5.** $9(3-\sqrt{3})$ *см*^{2}. **6.** 8 *см*. **7.** 5 *см*; 2 *см*; 5 *см*; 8 *см*. **8.** 3 *см*, 4 *см*.

Дарси 63. **1.** 2 *см*. **2.** 6 *дм*; 9,6 *дм*; 6,5 *дм*; 10,4 *дм*. **3.** ҳа. **4.** $\sqrt[4]{27}$; $3\sqrt[4]{3}$. **5.** 16,9 *см*. **6.** 150 *см*^{2}. **7.** (0;—6). **8.** Ба якӯмаш. **9.** 80- то. **10.** 7 *дм*^{2}. **11.** а) 180 *дм*^{3}; б) 105 *см*^{3}; d) 1296 *см*^{3}.

Дарси 64. **1.** —12,5. **2.** 20 *см*. **3.** ҳа. **4.** 5 *см*, 13 *см*. **5.** 3 *см*. **6.** 8 *см*. **7.** 30π *см*. **8.** 5 *см*. **9.** 25 *см* ё ки 20 $\sqrt{2}$ *см*.

Дарси 65. **1.** 4,5 *см*; 6,75 *см*. **2.** $\frac{20}{9}$ *см*, 4 *см*; 4,8 *см*. **3.** 12 *см*. **4.** 2 *см*. **5.** 6,72. **6.** $2\sqrt{26}\pi$ **7.** $25\sqrt{3}$ *см*^{2}. **8.** 84 *см*^{2}. **9.** $675\sqrt{3}$ *см*^{2}.

Дарси 66. **1.** $4\frac{129}{1024}$. **2.** 100°; 80°. **3.** 4 *см*. **4.** 24 *см*^{2}. **5.** 4,8 *м*. **6.** 30 *м*^{2}. **7.** 7. **8.** 10 *см* ё ки $2\sqrt{97}$ *см*.

Дарси 67-68. **1.** а) 9; б) 4 *см*^{2}; в) 3,5 *см*; г) $\frac{4}{3}$ $TB-CA$; д) 0,2. **2.** $\Delta CMH \sim \Delta BCA$.

Х 33 Қ.Ҳайдаров Баҳодир

Геометрия: китоби дарси барои донишомўзони синфҳои 9-уми мактабҳои миёнаи таълими умумӣ /Б.Ҳайдаров, Э.Сариқов, А. Қўчқоров. — Т.:, 2014.— 160 с.

Қ.Ҳайдаров Баҳодир
ISBN 978-9943-07-307-4

UO'K 514.1(075)
ББК 22.151ya721

Bahodir Qayumovich Haydarov,
Ergashvoy Sotvoldiyevich Sariqov,
Atamurod Shamuratovich Qo'chqorov

GEOMETRIYA

9-sinf uchun darslik

Uchinchi nashri
(*Tojik tilida*)

«O'zbekiston milliy ensiklopediyasi» Davlat ilmiy nashriyoti, 2014.
Toshkent-129, Navoiy ko'chasi 30-uy.

Оригинал макет дар нашриёни "Ҳуқуқ ва Ҷамъият" тайёр карда шудааст.

Тарҷимон	А.Эшонқулов
Муҳаррир	Э.Турдиқулов
Муҳаррир техникӣ	М. Садиров
Ороишгар	Х.Сариков
Саҳифабанд	С. Қўчқорова

Литсензия AI №160, 14.08.2009.
Ба чопаш 04.08.2014 иҷозат дода шуд. Андозаи 70 х 90 $^1/_{16}$. Гарнитураи Таймс. Кегли 11. Коғази офсет. Чопи офсетӣ. Ҷузъи чопии шартӣ 11,7 Ҷузъи нашриву ҳисобӣ 10,53. Теъдоди нашр 6740 дона. Супориш №14-294

Дар ХЭТН «O'zbekiston»-и Оҷонсии матбуот ва иттилооти Республикаи Ўзбекистон,
100129, Тошканд, кӯчаи Навоӣ, 30 чоп шудааст.

Ҷадвали нишондиҳандаи ҳолати китоби ба иҷора додашуда

№	Ному насаби хонанда	Соли хониш	Ҳолати китоб ҳангоми гирифтан	Имзои раҳбари синф	Ҳолати китоб ҳангоми супоридан	Имзои раҳбари синф
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Китоб ҳангоми ба иҷора дода шудан ва дар охири соли хониш ҳангоми баргардонида гирифтан ҷадвали болоӣ аз тарафи раҳбари синф аз рӯи меъёрҳои зерин баҳо гузошта мешавад:

Нав	Ҳолати китоб ҳангоми бори аввал супоридан.
Нағз	Муқовааш бутун, аз қисми асосии китоб ҷудо нашудааст. Ҳамаи варақҳояш ҳаст, нодарида, ҷудо нашуда, дар саҳифаҳо навишт ва хатҳо нест.
Қаноатбахш	Муқова каҷ шудааст, канорҳояш коҳида, якчанд хатҳо кашида шудаанд, ҳолати аз қисмӣ асосӣ ҷудошавӣ дорад, аз тарафи истифодабаранда қаноатбахш таъмир гардидааст. Варақҳои ҷудошудааш аз нав таъмир гашта, дар баъзе саҳифаҳо хат кашида шудаанд.
Ғайри-қаноат-бахш	Муқова хат кашида шудааст, даридааст, аз қисми асосӣ ҷудо шудааст ё ки умуман нест, ғайриқаноатбахш таъмир шудааст. Саҳифаҳо дарида, варақҳо намерасанд, хат кашида, ранг карда партофта шудааст, китоб ро барқарор карда намешавад.