МАТЕМАТИКА 10

АЛГЕБРА ВА АСОСҲОИ АНАЛИЗ
ГЕОМЕТРИЯ
ҚИСМИ II

Китоби дарсӣ барои хонандагони синфҳои 10-и
муассисаҳои таълими умумӣ
Нашри-1.

Вазорати таълими халқи Республикаи Ўзбекистон тасдиқ кардааст

ТОШКАНД
2017

UO‘K 51(075.3)
KBK 22.1
M 54

Муаллифони қисми алгебра ва асосҳои анализ:

М.А. Мирзоаҳмедов, Ш.Н.Исмоилов, А.Қ. Амонов.

Муаллифи қисми геометрия:

Б.Қ.Ҳайдаров

Тақриздиҳандаҳо:

Б. Қ. Бешимов–мудири кафедраи геометрия ва топологияи Донишгоҳи миллии Ӯзбекистон ба номи Мрзо Улуғбек, доктори улуми физика - математика;

М.Д.Пардаева – ҷонишини директори Маркази таълими республика.

Д.Е.Давлетов. мудири кафедраи методикаи омӯзиши математикаи – ДДОТ ба номи Низомӣ, номзади улуми физика - математика ;

Ғ.М.Раҳимов – муаллими литсейи назди ТИҚХММИ номзади улуми физика - математика, дотсент;

А.А. Акмалов – Проректори ДБТИХТХ шаҳри Тошканд, номзади улуми педагогика, дотсент.

Ишораҳои дар қисми китоби дарсии "Алгебра ва асосҳои анализ" корфармуда ва талқини онҳо

△ –	Ҳалли масъала (исботкунӣ) шурӯъ мешавад	▲ –	ҳал кардани масъала (исботкунӣ) тамом шуд
(!) –	корҳои назоратӣ ва машқҳои тест (санҷиш)	(?) –	савол ва супоришҳо
–	Маълумоти асосӣ	–	Машқҳои мураккабтар

Аз ҳисоби маблағи Бунёди мақсадноки китоби республика чоп шудааст.

ISBN 978-9943-5056-7-4

БОБИ III

ФУНКСИЯҲОИ ЭЛЕМЕНТАРӢ ВА МУОДИЛАҲО

47-49 МУНОСИБАТҲО ВА ТАБДИЛДИҲИҲО. ФУНКЦИЯ

Дар ҷадвали поён миқдори маблағҳое, ки мувофиқи гузашти вақт дар истгоҳи автомобилҳои аэропорти шаҳри Ню Йорк супоридан лозим аст оварда шудааст:

Вақт (t)	Нарх
0 – 1 соат	$5,00
1 – 2 соат	$9,00
2 – 3 соат	$11,00
3 – 6 соат	$13,00
6 – 9 соат	$18,00
9 – 12 соат	$22,00
12 – 24 соат	$28,00

Равшан аст, ки нархи маблағи супоридашаванда ба бардавомии вақт бевосита вобаста аст. Ба ин ҷадвал нигоҳ карда ба саволи зерин ҷавоб гӯем:

Айнан барои як соат истодани автомашина чӣ қадар пул сарф мешавад? 5 доллари ИМА, 9 доллари ИМА ёки 11 доллари ИМА?

Барои ба вазъиятҳои номувофиқ наафтодан ва барои ба муаммо равшанӣ андохтан мо маълумоти дар ҷадвал бударо ба намуди график меорем.

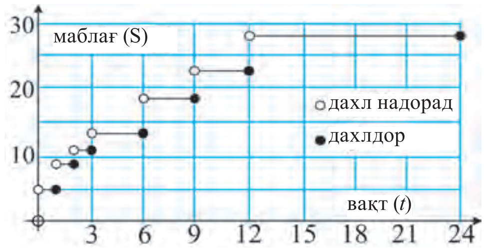
Вақт (t)	Нарх
$0 < t \leqslant 1$ соат	$5,00
$1 < t \leqslant 2$ соат	$9,00
$2 < t \leqslant 3$ соат	$11,00
$3 < t \leqslant 6$ соат	$13,00
$6 < t \leqslant 9$ соат	$18,00
$9 < t \leqslant 12$ соат	$22,00
$12 < t \leqslant 24$ соат	$28,00

Навишти "2-3 соат" дар ҷадвал "вақти аз 2 соат зиёд, аммо аз 3 соат зиёд не", яъне интервали $2 < t \leqslant 3$ гуфта фаҳмида мешавад. Он гоҳ ҷадвали зеринро ҳосил мекунем:

Дар забони математика ҷадвали мазкур муносибати байни ду тағйирёбандаи (вақт ва миқдори маблағи супоридашаванда) мисол шуда метавонад.

Муносибатро ба сифати маҷмӯи ҷуфти бо тартиб гирифташуда маънидод кардан мумкин, масалан, $\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$.

Дар истгоҳи автомашинаҳо ба вақти t–и интервали $0 < t \leqslant 24$ нигоҳ карда, тағйирёбии маблағи супоридашаванда ба тарзи зерин тасвир карда мешавад:



Маҷмӯи қимматҳои тағйирёбандаи тири горизонталӣ қабул карда, *соҳаи муайянии* муносибат номида мешавад.

Масалан, маҷмӯи, $\{t|0<t\leqslant 24\}$ соҳаи муайянии муносибати байни вақти боло ва миқдори маблағи пардохтшаванда, маҷмӯи $\{-2, 1, 4\}$ бошад, соҳаи муайянии муносибати $\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$ мешавад.

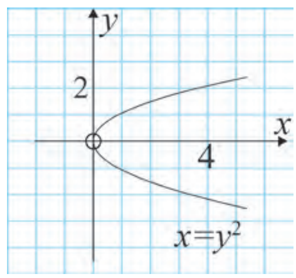
Маҷмӯи қимматҳои тағъирёбандаи тири вертикалӣ қабул карда, маҷмӯи қимматҳои муносибат номида мешавад.

Масалан, маҷмӯи $\{5, 9, 11, 13, 18, 22, 28\}$ муносибати байни *вақт* ва *миқдори* маблағи супоридашаванда, маҷмӯи $\{3, 5, 6\}$ бошад соҳаи қимматҳои муносибати $\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$ мешавад.

Акнун ба муносибат таърифи аниқтар диҳем. Маҷмӯи нуқтаҳои дар ҳамвории координатаҳои Декарт додашуда **муносибат** номида мешавад. Аксар вақт муносибат дар намуди муодилаҳое, ки **тағйирёбандаҳои** x, y иштирок мекунад дода мешавад.

Масалан, ҳар яке аз муодилаҳои $y=x+3$, $x=y^2$ муносибатро муайян мекунад.

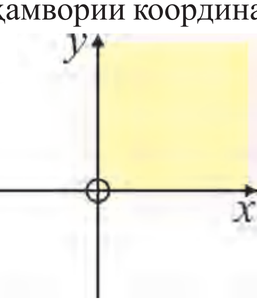
Ҳар яке аз ин муодилаҳо дар ҳамвории координатаҳои Декарт маҷмӯи нуқтаҳоро ҳосил мекунад.



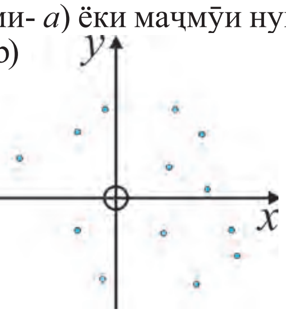
Баъзе муносибатҳоро бо ёрии муодила навишта намешавад.

Масалан, маҷмӯи нуқтаҳои шарти $x>0$, $y>0$-ро қаноаткунонандаи (x, y) (чоряки якуми ҳамвории координати расми- *a*) ёки маҷмӯи нуқтаҳои расми

a)



b)



b-ро бо ёрии муодила навиштан мумкин нест.

Агар дар муносибат ду нуқтаи гуногуни координатаи якумаш баробар мавҷуд набошад, ин муносибат **табдилдиҳӣ**, ёки **функсия** номида мешавад.

Пас, функсия хели махсуси муносибат будааст.

Ду тарзи санҷидани функсия будани муносибати додашударо меорем.

Тарзи алгебравӣ

Ин тарз агар муносибат бо ёрии муодила дода шуда бошад истифода мешавад. Агар дар вақти ба муодила қимматҳои ихтиёрии x ва y-ро гузоштан, барои ҳар як қиммати x қиммати ягонаи y ҳосил шавад, ин хел муносибат функсия мешавад. Масалан, агар ба муносибати бо ёрии муодилаи $y = 3x-2$ додашуда қиммати ихтиёрии x –ро гузорем, қиммати ягонаи y ҳосил мешавад. Пас, муносибати бо ёрии ин муодила муайяншуда функсия мешавад.

Лекин муносибати бо ёрии муодилаи $x = y^2$ муайян карда шуда функсия намешавад, чунки, масалан, қиммати $x = 4$ –ро гузорем ду қиммати $y=\pm 2$ ҳосил мешавад.

Тарзи графикӣ

Бигузор муносибат дар системаи координатаҳои Декарт дар намуди маҷмӯъ дода шуда бошад. Агар мо ҳамаи хатҳои рости вертикалии мумкин бударо кашем, адади нуқтаи буриши ихтиёрии ин хатҳои рост бо муносибат аз якто зиёд нашавад, он гоҳ ин муносибат функсия мешавад. Баръакс, агар адади нуқтаҳои буриши ким кадом хати рости вертикалӣ бо муносибати додашуда аз якто зиёд бошад, он гоҳ муносибат функсия намешавад.

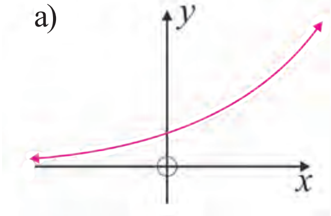
Дар ин ҷо мо, дар поён будаҳоро ба тарзи шартӣ қабул мекунем:

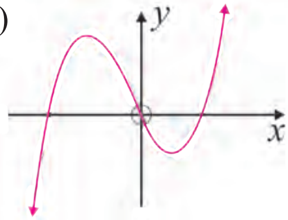
■ Агар дар хат доирачаи хурди ранги сафед дошта қайд карда шуда бошад, (—o—), ин хел нуқта ба хат тааллуқ надорад.

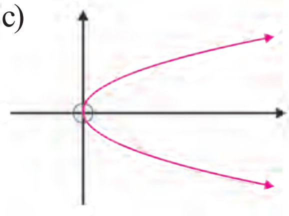
■ Агар дар хат доирачаи хурдакаки сиёҳ қайд шуда бошад, (—●—), ин нуқта ба хат тааллуқ дорад.

■ Хати тирии ⟶ (стрелка) дар ҳамон самт онро беохир давом додан мумкин буданашро мефаҳмонад.

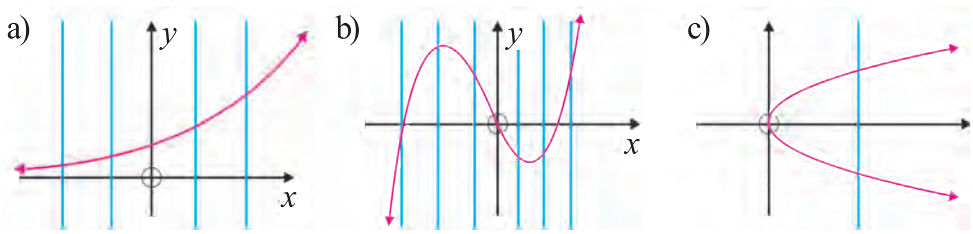
Мисоли 1. Месанҷем, ки кадоме аз муносибатҳо функсия шуда метавонад:

a)


b)


c)


△ Хатҳои рости вертикалиро кашида, ба хулосаи зерин меоем:



Ҳар яке аз муносибатҳои а) ва b) функсия шуда метавонанд (чунки хати рости ихтиёрии вертикал бо ӯ фақат дар як нуқта бурида мешавад), муносибати с) бошад функсия нест, чунки он бо хати рости вертикалӣ дар ду нуқта бурида мешавад.

Бигузор асбоби ҳисобкунӣ аз рӯйи алгоритми зерин кор кунад:

қадами-1. Ягон адад дохил шуда истодааст.

қадами-2. Адади дохилгардида ба 2 зарб шуда истодааст.

қадами-3. Ба натиҷа адади 3 зам шуда истодааст.

Масалан, агар ба асбоб адади 4-ро дохил кунанд, дар натиҷа адади $4 \cdot 2 + 3 = 11$ ҳосил мешавад.

Айнан, агар ба асбоб адади (-4) дохил карда шавад дар натиҷа адади $2 \cdot (-4) + 3 = -5$ ҳосил мешавад.

Дар ҳолати умумӣ агар ба асбоб адади x дохил гардад дар натиҷа адади ягонаи $2x + 3$ ҳосил мешавад.

Дида истодаем ки, агар ба асбоб ҳар гуна адади x дохил кунем қиммати ягонаи адади $2x + 3$ ҳосил мешавад.

Пас, алгоритме, ки асбоб кор мекунад функсияро муайян мекунад.

Ин ҳолат ба монанди $f{:}x \mapsto 2x+3$, $f(x)=2x+3$ ёки $y=2x+3$ навишта мешавад.

Агар $f(x)=2x+3$ бошад, қиммати ба адади -4 мувофиқи он ба монанди $f(-4)=2(-4)+3=-5$ ёфта мешавад.

Дар ҳолати умумӣ, қиммати функсияи, $f(x)$ – дар x-и додашуда мегӯянд ва ин муносибат ба монанди $y= f(x)$ навишта мешавад.

Мисоли 2. Агар $f{:}x \mapsto 2x^2-3x$ бошад, қимматҳои: a) $f(5)$; b) $f(-4)$-ро ёбед.

Дар муносибати $f(x)=2x^2-3x$ ададҳои $x=5$ ва $x=-4$ ро гузошта қимматҳои мувофиқро меёбем: a) $f(5)=2 \cdot 5^2-3 \cdot 5=2 \cdot 25-15=35$; b) $f(-4)=2 \cdot (-4)^2-3 \cdot (-4) =2 \cdot 16+12=44$.

Мисоли 3. Агар $f(x)=5-x-x^2$ бошад, қимматҳои: a) $f(-x)$; b) $f(x+2)$ -ро ёбед ва натиҷаҳоро содда гардонед.

Ба функсияи $f(x)=5-x-x^2$ ба ҷойи x қимматҳои $-x$ ва $x+2$ ро гузошта, қимматҳои ба онҳо мувофиқро меёбем:

a) $f(-x)=5-(-x)-(-x)^2=5+x-x^2$;
b) $f(x+2)=5-(x+2)-(x+2)^2=5-x-2-(x^2+4x+4)=3-x-x^2-4x-4=-x^2-5x-1$.

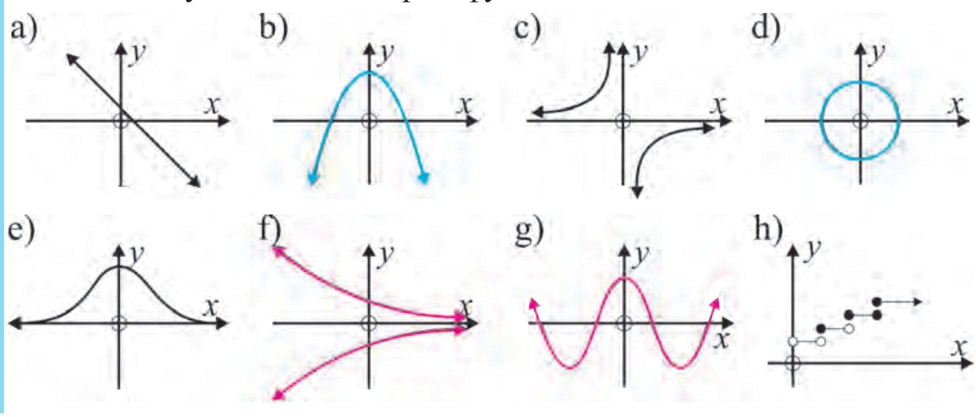
Савол ва супоришҳо

1. Ба муносибат мисолҳо биёред.
2. Ба инъикос, ёки функсия таъриф диҳед.
3. Соҳаи муайянии функсияро фаҳмонед.
4. Соҳаи қимматҳои функсияро фаҳмонед.

Машқҳо

73. Кадоме аз муносибатҳои зерин функсия мешавад?
a) $\{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 6)\}$;
b) $\{(1, 3), (3, 2), (1, 7), (-1, 4)\}$;
c) $\{(2, -1), (2, 0), (2, 3), (2, 11)\}$;
d) $\{(7, 6), (5, 6), (3, 6), (-4, 6)\}$;
e) $\{(0, 0), (1, 0), (3, 0), (5, 0)\}$;
f) $\{(0, 0), (0, -2), (0, 2), (0, 4)\}$?

74. Кадоме аз муносибатҳои зерин функсия мешавад?



75. Ҳар гуна хати рост ки дар ҳамвории координатаҳои Декарт ҷой гирифтааст, функсия мешавад? Ҷавобатонро асоснок кунед.

76. Оё муносибате, ки бо ёрии муодилаи $x^2+y^2=9$ дода шудааст функсия мешавад?

77. Агар $f{:}x\mapsto 3x+2$ бошад, қимматҳои зеринро ёбед.
A) $f(0)$; B) $f(2)$; C) $f(-1)$; D) $f(-5)$; E) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

78. Агар $f{:}x\mapsto 3x-x^2+2$ бошад, қимматҳои зеринро ёбед.
A) $f(0)$; B) $f(3)$; C) $f(-3)$; D) $f(-7)$; E) $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

79. Агар $g: x\mapsto x-\dfrac{4}{x}$ бошад, қимматҳои зеринро ёбед:
A) $g(1)$; B) $g(4)$; C) $g(-1)$; D) $g(-4)$; E) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

80. Агар $f(x)=7-3x$ бошад, қимматҳои зеринро ёбед ва натиҷаро содда гардонед.

a) $f(a)$; | b) $f(-a)$; | c) $f(a+3)$; | d) $f(b-1)$; | e) $f(x+2)$; | f) $f(x+h)$.

81. Агар $F(x)=2x^2+3x-1$ бошад, қимматҳои зеринро ёбед ва натиҷаро содда гардонед.

a) $F(x+4)$; | b) $F(2-x)$; | c) $F(-x)$; | d) $F(x^2)$; | e) $F(x^2-1)$; | f) $F(x+h)$.

82. Барои функсияи: $G(x)=\frac{2x+3}{x-4}$

a) **I** $G(2)$ **II** $G(0)$ **III** $G\left(-\frac{1}{2}\right)$ -ҳоро ёбед;

b) Барои кадом x- ҳо $G(x)$ мавҷуд нест?

c) $G(x+2)$ ро ёбед ва содда гардонед;

d) Дар кадом қиммати x қиммати $G(x)=-3$ мешавад ёбед.

83. Бигузор функсия бо ҳарфи f дода шуда бошад. Дар байни маъноҳои ишораҳои f ва $f(x)$ чӣ гуна фарқ ҳаст?

84. Баъди t соли корӣ нархи асбоби нусхабардор аз рӯйи қонунияти $V(t)=9650-860t$ тағйир меёбад.

a) $V(4)$ -ро ёбед ва маънои онро шарҳ диҳед;

b) Ҳангоми $V(t)=5780$ будан t ро ёбед. Ҳолатро фаҳмонед;

c) Асбоб бо кадом нарх харид шудааст?

85. Графики се функсияи гуногунро кашед, ки дар як ҳамвории координатӣ $f(2)=1$, $f(5)=3$ -ро буррад.

86. Функсияи хаттии $f(x)=ax+b$ ро ёбед,ки барои он $f(2)=1$ ва $f(-3)=11$ бошад.

87. Агар $f(x)=ax+\frac{b}{x}$, $f(1)=1$, $f(2)=5$ бошад, a, b-ҳоро ёбед.

88. Функсияи квадратии $T(x)=ax^2+bx+c$ ро ёбед, ки барои он $T(0)=-4$, $T(1)=-2$, $T(2)=6$ бошад.

89. Агар $f(x)=2^x$ бошад, баробарии, $f(a)\,f(b)=f(a+b)$ -ро исбот кунед.

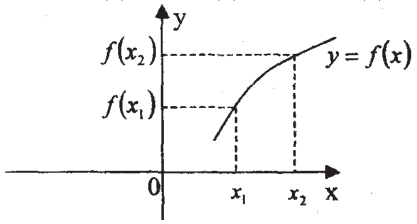
50-51 МОНОТОНИИ ФУНКСИЯҲОИ ЭЛЕМЕНТАРӢ, МАФҲУМ ДАР БОРАИ ҚИММАТҲОИ КАЛОНТАРИН ВА ХУРДТАРИН

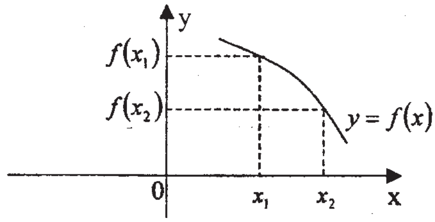
Монотонии функсия

Агар барои ҳамаи x_1, $x_2\in I$-*ҳо ки нобаробарии* $x_1<x_2$ –ро қаноат мекунонад нобаробарии $f(x_1)<f(x_2)$ ҷой дошта бошад, функсияи $y=f(x)$ дар интервали I афзуншаванда номида мешавад.

Агар барои ҳамаи x_1, $x_2\in I$ –ҳо ки нобаробарии $x_1<x_2$ –ро қаноат мекунонад нобаробарии $f(x_2)>f(x_1)$ ҷой дошта бошад, функсияи $y=f(x)$ дар интервали I

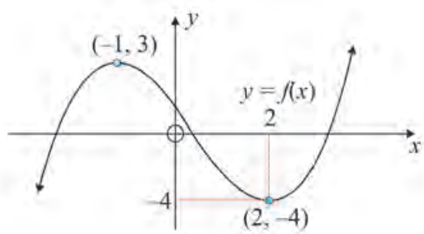
камшаванда номида мешавад.

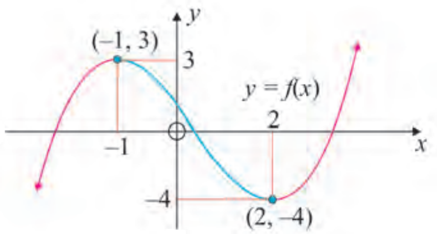




Агар функсия афзуншаванда бошад,ҳангоми қад-қади график аз чап ба рост ҳаракат кардан, ординатаҳо меафзояд;агар функсия камшаванда бошад, ординатаҳо кам мешавад.

Мисоли 1. Интервалҳои афзоиш ва камшавии функсияҳоро ёбед:

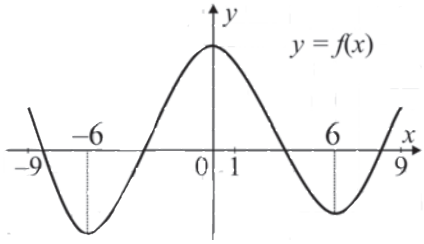




△Агар функсия афзуншаванда бошад,ҳангоми қад-қади график аз чап ба рост ҳаракат кардан, ординатаҳо меафзояд (дар график бо ранги сурх ҷудо карда шудааст). Пас функсия дар интервали $x\leqslant-1$ ва $x\geqslant2$ меафзояд. Ҷавобро дар намуди $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$ ҳам навиштан мумкин аст. Айнан ҳамин тавр, агар функсия камшаванда бошад,ҳангоми қад-қади график аз чап ба рост ҳаракат кардан, ординатаҳо кам мешавад (дар график бо ранги сабз ҷудо карда шудааст). Пас функсия дар интервали $-1\leqslant x\leqslant2$ кам мешавад. ▲

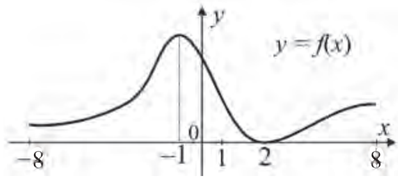
Мисоли 2. Функсия дар кадом интервалҳо меафзояд?

△Ин функсия дар интервали $[-9;\ 9]$ дода шудааст. Агар функсия афзуншаванда бошад,ҳангоми қад-қади график аз чап ба рост ҳаракат кардан, ординатаҳо меафзояд. Пас функсия дар интервали $[-6;0]$ ва $[6;9]$ меафзояд. Ҷавобро дар намуди $[-6;0]\cup[6;9]$ ҳам навиштан мумкин аст. ▲



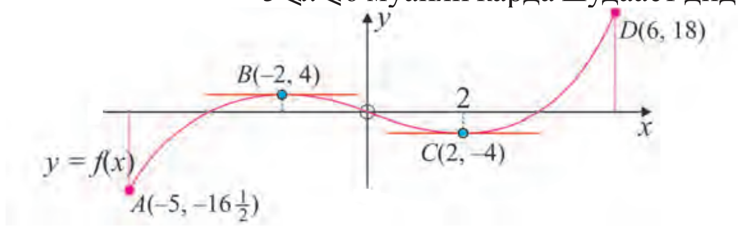
Мисоли 3. Функсия дар кадом интервал кам мешавад?

△ Агар функсия камшаванда бошад,ҳангоми қад-қади график аз чап ба рост ҳаракат кардан, ординатаҳо кам мешавад. Пас функсия дар интервали $[-1; 2]$ кам мешавад. ▲



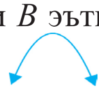
Дар бораи қимматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия маълумот медиҳем.

Графики функсияеро ки дар интервали $-5 \leqslant x \leqslant 6$ муайян карда шудааст дида мебароем.



Ординатаи нуқтаи A аз ординатаҳои нуқтаҳои дигари хурд буданаш ин нуқтаро нуқтаи **минимуми глобалӣ** меноманд. Қиммати ба он мувофиқи функсия **қиммати хурдтарини** функсия номида мешавад. Дар мисоли мо қиммати хурдтарини функсия ба $-16{,}5$ баробар аст.

Монанди ин, азбаски ординатаи нуқтаи D аз ординатаҳои нуқтаҳои дигари калон аст ин нуқтаро нуқтаи D **максимуми глобалӣ** меноманд. Қиммати ба он мувофиқи функсия **қиммати калонтарини** функсия номида мешавад. Дар мисоли мо қиммати калонтарини функсия ба 18 баробар аст.

Акнун ба нуқтаи B эътибор диҳем. Маҷмӯи нуқтаҳои график, ки ба ӯ наздик аст, ба шакли  соҳиб аст. Нуқтаи ба ин хосият соҳиббуда нуқтаи **максимуми локалӣ** номида мешавад

Айнан ҳамин тавр, маҷмӯи нуқтаҳои график, ки ба нуқтаи C наздик аст, ба шакли  соҳиб аст.

Нуқтаи ба ин хосият соҳиб буда, нуқтаи **минимуми локалӣ** номида мешавад.

Ба функсияҳое мисол мебиёрем, ки онҳо фақат минимуми локалӣ ва максимуми локалӣ доранд:

Савол ва супоришҳо

1. Дар интервал ба функсияи афзуншаванда таъриф диҳед;
2. Дар интервал ба функсияи камшаванда таъриф диҳед;

3. Ба нақша нигоҳ карда афзуншавии функсияро чӣ тавр муайян мекунанд?

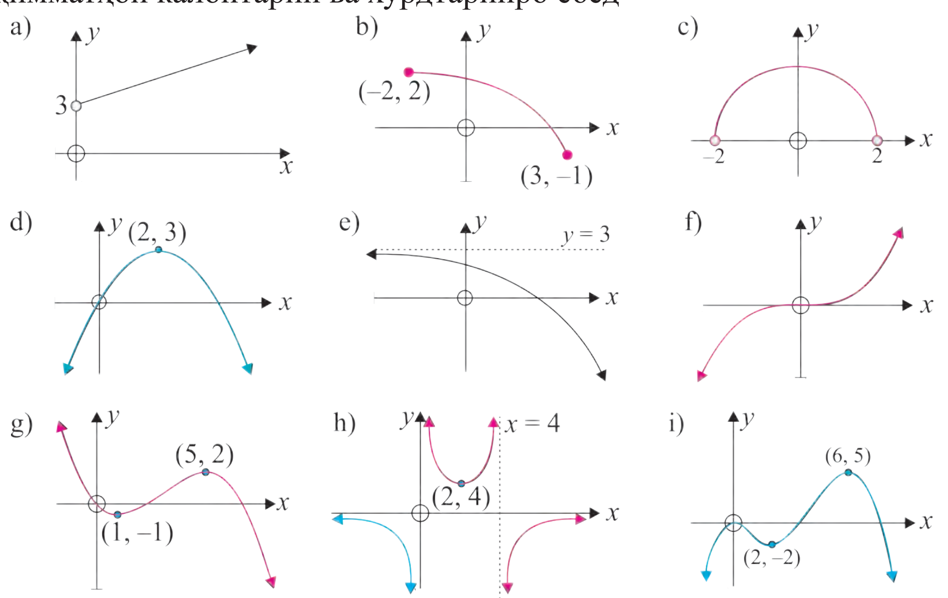
4. Ба нақша нигоҳ карда, камшавии функсияро чӣ тавр муайян мекунанд?

Машқҳо

90. Барои функсия интервалҳои зеринро муайян кунед :

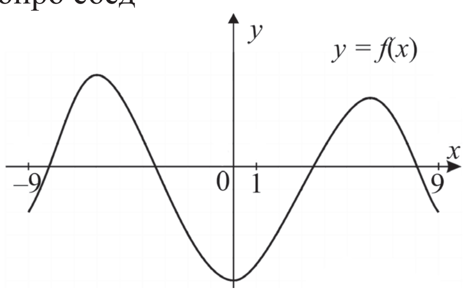
1) афзуншавӣ; 2) камшавӣ .

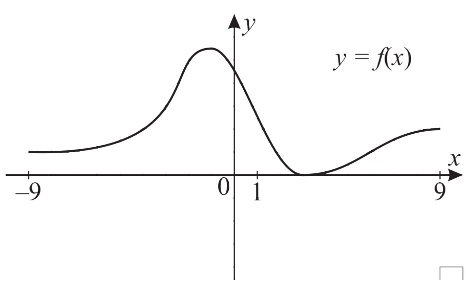
Агар мумкин бошад, барои онҳо максимум ва минимуми локалӣ, қиматҳои калонтарин ва хурдтаринро ёбед



91. Функсияи дар интервали [−9; 9] додашуда дар кадом интервал меафзояд? Дар кадом интервал кам мешавад?

Максимум ва минимуми локалӣ, қиматҳои калонтарин ва хурдтарини онро ёбед



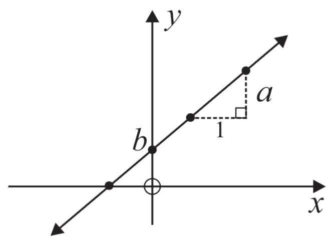


52-54 МОДЕЛҲОИ ХАТТӢ ВА КВАДРАТӢ

Функсияи хаттӣ

Функсияи намуди $f(x)=ax+b$ дошта, хаттӣ номида мешавад, дар ин ҷо x, y – тағйирёбандаҳо, a, b – ададҳои додашуда, $a \neq 0$.

Графики функсияи хаттӣ дар ҳамвории координати хати рост буда, дар ин ҷо адади a коэффитсиенти кунҷӣ номида мешавад.



Дар поён мо татбиқи функсияи хаттиро мебиёрем.

Мисоли 1. Нархи ба иҷора гирифтани корти теннис бо формулаи $C(h)=5h+8$ (доллари ИМА) муайян карда шудааст, дар ин ҷо h – вақти иҷора (дар соатҳо). Барои 4 соат ва 10 соат чӣ қадар маблағ сарф мешавад?

△ Аз формулаи $C(h)=5h+8$ истифода карда, $C(4)=5\cdot4+8=20+8=28$ ва $C(10)=5\cdot10+8=50+8=58$ буданашро меёбем. Пас,барои 4 соат 28 доллари ИМА,барои 10 соат бошад 58 доллари ИМА сарф мешавад. ▲

Мисоли 2. Дар шаҳри Ню Йорк таксӣ барои истода гирифтани мусофир 3 доллару 30 сенти ИМА, барои ҳар як километр бошад 1 доллару 75 сенти ИМА мегирад.

Ҷадвалро ба дафтаратон кӯчонед ва онро пурра кунед:

d – масофа (км)	0	2	4	6	8	10
C – маблағ ($)						

a) Алоқамандии байни C ва d ро дар намуди график ифода кунед;

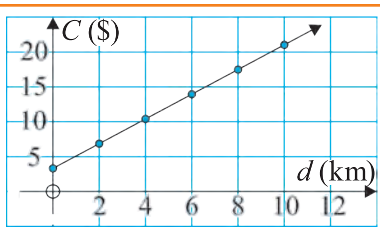
b) Формулаи функсияи дар намуди алгебравии $C(d)$ додашударо нависед;

d) Барои 9, 4 км роҳ рафтан чӣ қадар маблағ сарф мешавад?

△a) Ба 3,3 доллари ИМА $2\cdot1{,}75+3{,}30$ -ро пайдарпай зам карда катакҳоро пур мекунем:

d – масофа (км)	0	2	4	6	8	10
C – маблағ ($)	3,30	6,80	10,30	13,80	17,30	20,80

b)



Ин-функсияи хаттӣ.

c) коэффитсиенти кунҷиро меёбем:

$$a=\frac{20{,}80-17{,}30}{10-8}=1{,}75.$$

Пас, $C(d)=1{,}75d+3{,}3$.

d) $C(9{,}4)=1{,}75\cdot9{,}4+3{,}3=19{,}75$.

Пас, 19,75 доллари ИМА сарф мешавад. ▲

Функсияи квадратӣ

Функсияи намуди $y=ax^2+bx+c$ дошта функсияи квадратӣ номида мешавад,дар ин ҷо x, y − тағйирёбандаҳо, a, b, c – ададҳои додашуда, $a\neq0$.

Қимматҳои функсияи $y=2x^2+4x-5$-ро дар нуқтаҳои a) $x=0$; b) $x=3$ меёбем.

a) $x=0$ бошад. Дар ин ҳолат $y=2\cdot0^2+4\cdot0-5=0+0-5=-5$.

b) $x=3$ бошад. Дар ин ҳолат $y=2\cdot3^2+4\cdot3-5=18+12-5=25$.

Мисоли 3. Ҳангоми партофтани санг баъди t сония баландии ӯ нисбат ба замин бо ёрии функсияи $h(t)=-5t^2+30t+2$ аниқ карда мешавад.

a) Ҳангоми $t=3$ будан санг аз замин дар кадом баландӣ мешавад?

b) Санг аз кадом баландӣ истода боло партофта шуд?

c) Дар кадом вақт баландии санг 27 метр мешавад?

△ a) $h(3)=-5\cdot3^2+30\cdot3+2=-45+90+2=47$. Пас, санги партофташуда баъди $t=3$ сония дар баландии 47 метр мешавад.

b) Азбаски санг ҳангоми $t=0$ партофта шуданаш, $h(0)=-5\cdot02+30\cdot0+2=2$. Пас, санг аз баландии 2 метр боло партофта шудааст.

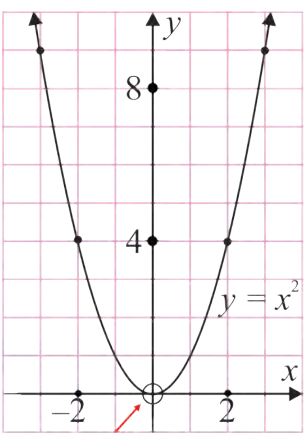
c) Агар санг аз замин дар баландии 27 метр бошад, $h(t)=27$ мешавад, яъне $-5t^2+30t+2=27$. Ин муодиларо ҳал мекунем: $-5t^2+30t-25=0$, $t^2-6t+5=0$, $t=1$, $t_2=5$. Пас, санг дар баландии 27 метр баъди 1 сония (ҳангоми ба боло бардоштан) ва баъди 5 сония (ба поён фуромада) мешавад. ▲

Графики функсияи квадратӣ

Функсияи $f(x)=x^2$ –ро дида мебароем. Дар баъзе нуқтаҳо ҷадвали қимматҳои ӯро месозем:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Ин нуқтаҳои дар ҷадвал будаи (x, y) –ро дар ҳамвории координатӣ сохта, онҳоро бо хати ҳамвор пайваст карда, ин графикро ҳосил мекунем:



Шакли ҳосилшуда **парабола** номида мешавад. Мебинем, ки шохаҳои парабола ба боло равона буда, он хати каҷи нисбат ба тири ордината симметрӣ мебошад.

Нуқтаи (0, 0) қуллаи параболаи $y=x^2$ номида мешавад.

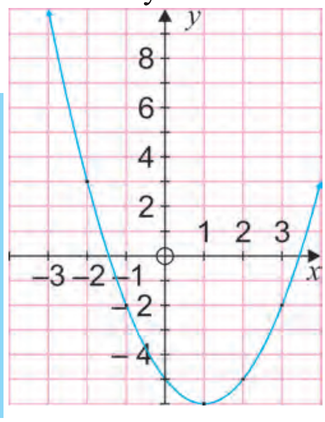
Мисоли 4. Графики функсияи квадратии $y=x^2-2x-5$ –ро созед

△ Як нуқтаи функсия, мисол қимати нуқтаи $x=-3$-ро меёбем: $f(-3)=(-3)^2-2(-3)-5=9+6-5=10$.

Қемати дар чандин нуқта будаи функсияро ёфта, ҷадвал месозем:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	3	-2	-5	-6	-5	-2

Нуқтаҳои (x, y)-ро дар ҳамвории координата сохта, онҳоро бо хати мувофиқ пайваста, графики функсияи додашударо хосил мекунем:



Графики ҳосилшуда ҳам дар шакли парабола аст. Сохтори он ҳам ба боло равоно шудааст. ▲

Нуқтаи буриши параболаи ихтиёрии $y=ax^2+bx+c$ –ро бо тири ординатаҳои Oy меёбем:

$x=0$, $y=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0+0+c=c$.

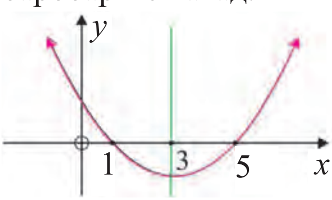
Пас, парабола бо тири ординатаҳо дар нуқтаи (0, c) бурида мешавад.

Барои ёфтани нуқтаи буриши параболаи $y=ax^2+bx+c$ бо тири абссисаҳо ёфтани ҳалли муодилаи квадратии $ax^2+bx+c=0$ кифоя аст.

Масалан, нуқтаҳои буриши параболаи $y=x^2-2x-15$–ро бо тири абссисаҳо меёбем. $x^2-2x-15=0$ гуфта, ин муодилаи квадратиро ҳал мекунем. Ҳалли он $x=-3$ ва $x=5$ мешавад. Пас, параболаи $y=x^2-2x-15$ бо тири абссисаҳо дар нуқтаҳои (−3, 0), (5, 0) бурида мешавад.

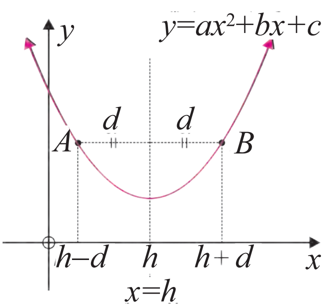
Барои параболаи $y=ax^2+bx+c$ хати рости вертикалии намуди $x=h$ тири симметрияи он мешавад.

Агар параболаи $y=ax^2+bx+c$ бо тири абссисаҳо бурида шавад, адади h ба миёнаи арифметикии абссисаҳои нуқтаҳои буриши парабола бо тири Ох баробар мешавад.



Мисоли 5. Тири симметрияи параболаи дар расм будаaро ёбед.

△ Агар парабола бо тири абссисаҳо дар нуқтаҳои (1, 0) ва (5, 0) бурида шавад, $x=\dfrac{5+1}{2}=3$ – тири симметрия мешавад. ▲



Агар параболаи $y=ax^2+bx+c$ бо тири абссисаҳо бурида нашавад, адади h –ро ба тарзи дигар ҳам ёфтан мумкин аст.

Дида мешавад ки нуқтаҳои A, B –и абссисаҳояшон $h-d$ ва $h+d$ буда, ба ординатаҳои якхела соҳиб аст, яъне $f(h-d)=f(h+d)$, пас нуқтаҳои A ва B нуқтаҳои нисбат ба тири $x=h$ симметрӣ мебошанд.

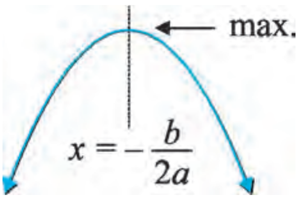
Аз ин шарт истифода бурда дар баробарии поён

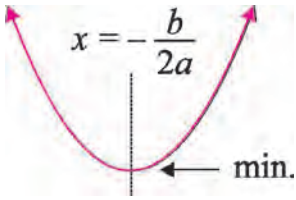
h –ро меёбем:

$a(h–d)^2+b(h–d)+c=a(h+d)^2+b(h+d)+c$ ёки $a(h^2–2hd+d^2)+bh–bd=a(h^2–2hd+$-$d^2)+bh+bd,$ ёки $-4ahd=2bd$, Пас,тири симметрия $h=\dfrac{-b}{2a}$ будааст.

Хулоса. Тири симметрияи параболаи $y=ax^2+bx+c$ дар намуди $x=\dfrac{-b}{2a}$ мешавад. Нуқтаи парабола, ки худ ба худ симметрӣ аст қуллаи парабола номида мешавад. Координатаҳои қуллаи парабола $x=\dfrac{-b}{2a}$, $y=y(\dfrac{-b}{2a})$=. Тири парабола аз нуқтаи $(-\dfrac{b}{2a},0)$ ба тири Oy параллел шуда мегузарад. Азбаски қуллаи парабола мутааллиқи тири симметрӣ аст, ба абсиссаи он баробар аст.

Аён аст, ки $a<0$ бошад шакли прабола  барин мешавад ва нӯги он $y=a\,x^2+bx+c$ нуқтаи максимуми функсияи квадратӣ $a>0$ бошад шакли прабола  барин бошад, қуллаи он минимуми функсияи квадратӣ мешавад.





Мисоли 6. Тири симетрии параболаро ёбед: $y=3x^2+4x-5$

△ $y=3x^2+4x-5$ барои $a=3$, $b=4$.

Пас, $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-4}{2\cdot3}=-\dfrac{2}{3}$, яъне $x=-\dfrac{2}{3}$ – тири симетрӣ. ▲

Мисоли 7. Қуллаи параболаро ёбед: $f(x)=x^2+6x+4$

△ $a=1$, $b=6$. $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-6}{2\cdot1}=-3$.

Пас, абссисаи қуллаи парабола $x=-3$, ординатааш бошад:

$y=f(-3)=(-3)^2+6(-3)+4=9-18+4=-5$.

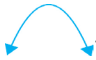
Бинобар ин, қуллаи парабола ба координатаҳои $(-3,-5)$ соҳиб аст. ▲

Мисоли 8. Варзишгар тӯбро ба боло партофт, баъди вақти t сония баландии тӯб $H(t)=30t-5t^2$ метр мешавад, $t\geqslant0$.

a) ба нуқтаи баландтарин тӯб дар чанд сония мерасад?

b) нуқтаи баландтарин аз замин дар кадом баландӣ мешавад?

c) тӯб баъди чанд сония ба замин меафтад?

△ a)барои $H(t)=30t-5t^2$, $a<0$, $a=-5$. Бинобарин ин парабола дар шакли зерин мешавад: . $t=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-30}{2\cdot(-5)}=3$ сония ба максимум мерасад.

Яъне тӯб ба нуқтаи аз ҳама баландтарин баъди 3 сония бардошта мешавад.

b) баландии максималиро меёбем: $H(3)=30\cdot3-5\cdot3^2=90-45=45$, яъне нуқтаи баландтарин аз замин дар баландии 45 метр мешавад.

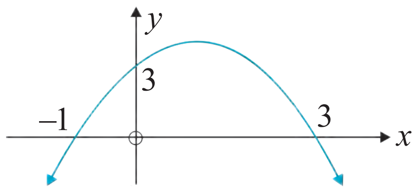
c) $H(t)=0$ бошад, тӯб ба замин меафтад. Ин муодиларо ҳал мекунем $30t-5t^2=0$, $5t^2-30t=0$, $5t(t-6)=0$. Аз ин ҷо $t_1=0$ ё $t_2=6$.

Пас, баъди 6 сония тӯб дар замин мешавад.

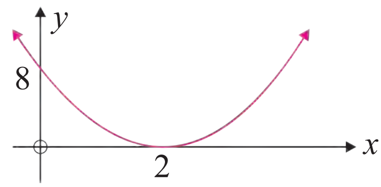
Дар поён мо ба шакли парабола нигоҳ карда, мисолҳои ёфтани формулаи функсияи квадратиро мебиёрем.

Мисоли 9. Ба параболаи додашуда нигоҳ карда, формулаи функсияи квадратиро нависед:

a)



b)

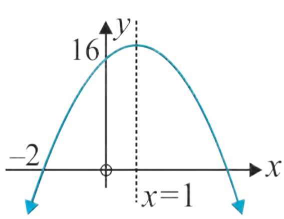


a) шохаҳои парабола ба поён нигарон аст, он бо тири абсиссаҳо дар нуқтаҳои -1 ва 3 бурида мешавад. Бинобар ин дар $y=a(x+1)(x-3)$, $a<0$. $x=0$ аз шарти $y=3$, $a=-1$-ро меёбем.

Пас, функсияи квадратӣ бо формулаи $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$ ифода карда мешавад.

b) шохаҳои парабола ба боло нигарон аст, он ба тири абсиссаҳо дар нуқтаи $x=2$ расанда мешавад. Бинобар ин дар $y=a(x-2)2$, $a>0$. $x=0$ аз шарти $y=8$, $a=2$-ро меёбем.

Пас, функсияи квадратӣ бо формулаи $y=2(x-2)2$ дода мешавад.



Мисоли 10. Ба параболаи додашуда нигоҳ карда, формулаи функсияи квадратиро нависед.

Азбаски $x=1$–тири симметрия аст, бо тири абсисса нуқтаи буриши дуюм $x=4$ мешавад. Пас, $y=a(x+2)(x-4)$. Аз ин ҷо $x=0$, $y=16$. Бинобар ин $16=a(0+2)(0-4)$. Аз ин ҷо $a=-2$ ёки $y=-2(x+2)\cdot(x-4)=-2x^2+4x+16$.

Савол ва супоришҳо.

1. Функсияи хаттӣ чист?
2. Коэффитсиенти кунҷии функсияи хаттӣ чист?
3. Функсияи квадратӣ чист?
4. Қуллаи функсияи квадратӣ чӣ хел ёфта мешавад?
5. Кай функсияи квадратӣ ба максимум соҳиб мешавад?
6. Кай функсияи квадратӣ ба минимум соҳиб мешавад?

Машқҳо

92. Дар натиҷаи кӯҳнашавӣ нархи автомашина баъди t сол аз рӯйи қонунияти $V(t)=25000-3000t$ евро тағйир меёбад.

a) қиммати $V(0)$ ро ёбед. Маънои ин қимматро фаҳмонед;

b) қиммати $V(3)$ ро ёбед. Маънои ин қимматро фаҳмонед;

c) ба қиммати $V(t)=10000$ баъди чанд сол ноил мешавад?

93. Дар ИМА даъват кардани устои барқ \$60 ва ӯ барои ҳар як соати хизмат \$45 мегирад.

a) $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ будан ҷадвали мувофиқро созед. Ҳаққи хизмат C ба вақти t чӣ хел алоқаманд буданашро ба тарзи графикӣ ифода кунед.

b) формулаи функсияи $C(t)$ (намуди алгебравӣ)–ро нависед.

c) барои $6\frac{1}{2}$ соат чӣ қадар маблағ пардохт мешавад?

94. Систерна бо оби 265 литр пур карда шудааст. Аз он дар ҳар як дақиқа 11литр об гирифта шуда истодааст.

a) ҷадвале, ки ҳангоми $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ шудан ҳаҷми V-и оби ҷорӣ шуда истода ба вақти t (дақиқа) чӣ хел алоқаманд буданашро ифода мекунад, созед.

b) алоқамандии $V(t)$ –ро дар намуди графикӣ ифода кунед;

b) формулаи функсияи (намуди алгебравии) $V(t)$–ро нависед.

c) баъди 15 дақиқа дар систерна чӣ қадар об мемонад?

d) систерна баъди чанд вақт холӣ мешавад?

95. Оё дар поён будаҳо функсияи квадратӣ мешаванд:

a) $y=2x^2-4x+10$; c) $y=-2x^2$; e) $3y+2x^2-7=0$;

b) $y=15x-8$; d) $y=\frac{1}{3}x^2+6$; f) $y=15x^3+2x-16$?

96. Оё ҷуфти (x, y)-и бо функсияи квадратии $y=ax2+bx+c$ ифодагардида дар муносибат мешавад.

a) $f(x)=6x^2-10$, $(0, 4)$;

b) $y=2x^2-5x-3$, $(4, 9)$;

c) $y=-4x^2+6x$, $(-\frac{1}{2}, -4)$;

d) $y=-7x^2+9x+11$, $(-1, -6)$;

e) $f(x)=3x^2-11x+20$, $(2, -10)$;

f) $f(x)=-3x^2+x+6$, $(\frac{1}{3}, 4)$?

97. Барои функсияи квадратии $y=ax2+bx+c$ ба қиммати додашудаи y қиммати мувофиқи x –ро ёбед.

a) $y=x^2+6x+10$, $y=1$; c) $y=x^2-5x+1$, $y=-3$;

b) $y=x^2+5x+8$, $y=2$; d) $y=3x^2$, $y=-3$.

98. Ҷисми моддӣ бо суръати 80 м/с ба боло партофта шудааст. Баландии он нисбат ба замин дар t сония бо ёрии функсияи $h(t)=80t-5t^2$ муайян мешавад.

a) баъди 1 сония, 3 сония, 4 сония баландии ҷисмро ёбед;

b) дар кадом вақт баландии ҷисм 140 метр мешавад? 0 метр чӣ? Ба ҷавобҳо ҳолатҳои мувофиқро фаҳмонед.

99. Даромади тадбиркори истеҳсолкунандаи маҳсулот аз рӯйи формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$P(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+36x-40$ (ҳазор сӯм), дар ин ҷо x –адади маҳсулот.

a) тадбиркор ҳангоми истеҳсоли 0 та маҳсулот, 20 та маҳсулот ба чӣ қадар даромад соҳиб мешавад?

b) тадбиркор барои гирифтани 270 ҳазор сӯм даромад чандто маҳсулот истеҳсол мекунад?

100. Қимматҳои ба $x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ мувофиқи функсияҳоро ёбед. Натиҷаҳоро дар намуди ҷадвал диҳед ва графикҳоро созед.

a) $y=x^2+2x-2$; d) $f(x)=-x^2+x+2$; g) $y=x^2-5x+6$;

b) $y=x^2-3$; e) $y=x^2-4x+4$; h) $y=x^2+x+1$;

c) $y=x^2-2x$; f) $f(x)=-2x^2+3x+10$; i) $y=-x^2+x-1$.

101. Ин графикҳо дар кадом шакл мешаванд?
Нуқтаи бурриши тири ординатаҳои параболаҳоро ёбед.

a) $y=x^2+2x+3$; d) $f(x)=3x^2-10x+1$; g) $y=8-x-2x^2$;

b) $y=2x^2+5x-1$; e) $y=3x^2+5$; h) $f(x)=2x^2-x^2-5$;

c) $y=-x^2-3x-4$; f) $y=4x^2-x$; i) $y=6x^2+2-5x$.

102. Графики функсияҳо бо тири ординатаҳо дар кадом нуқтаҳо бурида мешавад?

a) $y=(x+1)(x+3)$; d) $y=(2x+5)(3-x)$; g) $y=(x-1)(x-6)$;

b) $y=(x-2)(x+3)$; e) $y=x(x-4)$; h) $y=-(x+2)(x+4)$;

c) $y=(x-7)^2$; f) $y=-(x+4)(x-5)$; i) $y=-(x-3)(x-4)$?

103. Нуқтаҳои буриши параболаро бо тири абссиса ёбед.

a) $y=x^2-x-6$; d) $y=3x-x^2$; g) $y=-x^2-4x+21$; j) $y=-2x^2+x-5$;

b) $y=x^2-16$; e) $y=x^2-12x+36$; h) $y=2x^2-20x+50$; k) $y=-6x^2+x+5$;

c) $y=x^2+5$; f) $y=x^2+x-7$; i) $y=2x^2-7x-15$; l) $y=3x^2+x-1$.

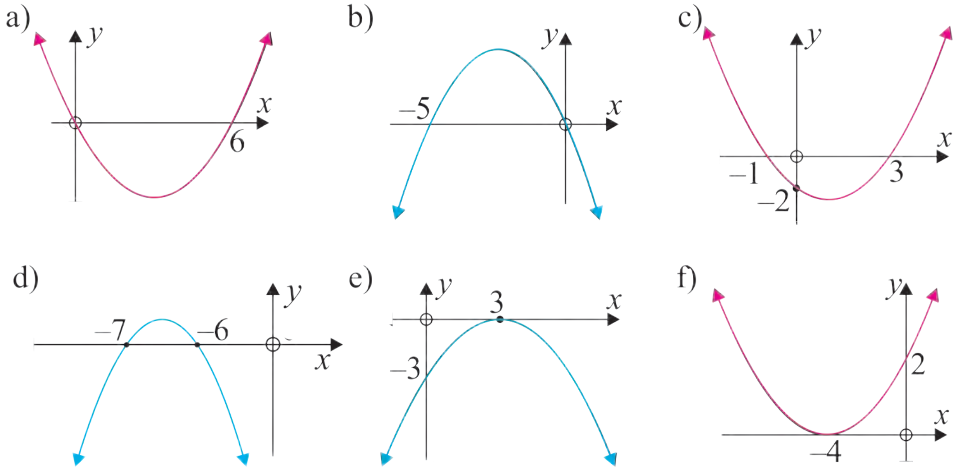
104. Нуқтаҳои буриши параболаро бо тирҳои координатӣ ёбед:

a) $y=x^2+x-2$; d) $y=x^2+x+4$; g) $y=-x^2-7x$; j) $y=-x^2+2x-9$;

b) $y=(x+3)^2$; e) $y=3x^2-3x-36$; h) $y=-2x^2+3x+7$; k) $y=4x^2-4x-3$;

c) $y=(x+5)(x-2)$; f) $y=-x^2-8x-16$; i) $y=2x^2-18$; l) $y=6x^2-11x-10$.

105. Тири симметрияи параболаро ёбед:



106. Тири симметрияи параболаро ёбед:

a) $y=(x-2)(x-6)$;

b) $y=x(x+4)$;

c) $y=-(x+3)(x-5)$;

d) $y=(x-3)(x-8)$;

e) $y=2(x-5)^2$;

f) $y=3(x+2)^2$.

107. Тири симметрияи параболаро ёбед:

a) $y=x^2+6x+2$;

b) $y=x^2-8x-1$;

c) $f(x)=2x^2+5x-3$;

d) $y=-x^2+3x-7$;

e) $y=2x^2-5$;

f) $y=-5x^2+7x$;

g) $f(x)=x^2-6x+9$;

h) $y=10x-3x^2$;

i) $y=\frac{1}{8}x^2+x-1$.

108. Қуллаи параболаро ёбед:

a) $y=x^2-4x+7$;

b) $y=x^2+2x+5$;

c) $f(x)=-x^2+6x-1$;

d) $y=x^2+3$;

e) $f(x)=2x^2+12x$;

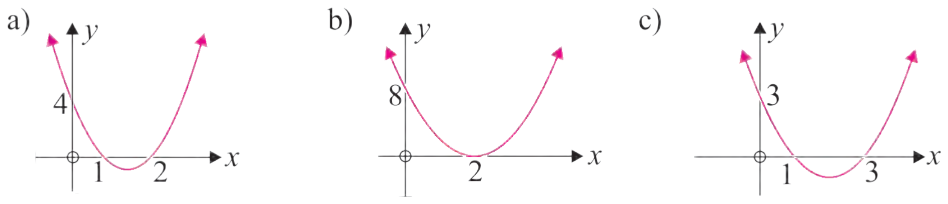
f) $y=-3x^2+6x-4$;

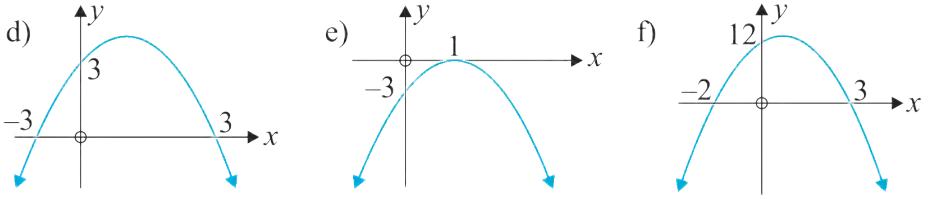
) $y=x^2-x-1$;

h) $y=-2x^2+3x-2$;

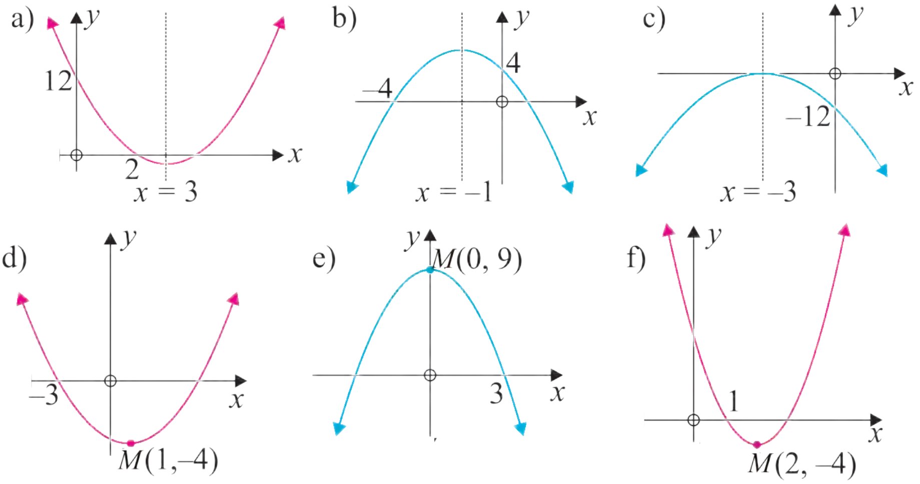
i) $y=-\frac{1}{4}x^2+3x-2$.

109. Ба парабола нигоҳ карда, формулаи функсияи квадратии мувофиқро ёбед:





110. Ба парабола нигоҳ карда, функсияи квадратиро ёбед:



111. Дилшод барои аз қаъри баҳр гирифтани гавҳар худро ба об партофт. Баъди t сония ӯ дар чуқурии $H(t)=-4t^2+4t+3$ метр мешавад, $t \geqslant 0$.

a) гавҳарҳо дар кадом чуқурӣ ҷой гирифтаанд?

b) одам барои гирифтани гавҳар чӣ қадар вақт сарф мекунад?

c) одам худро аз кадом баландӣ ба об партофт?

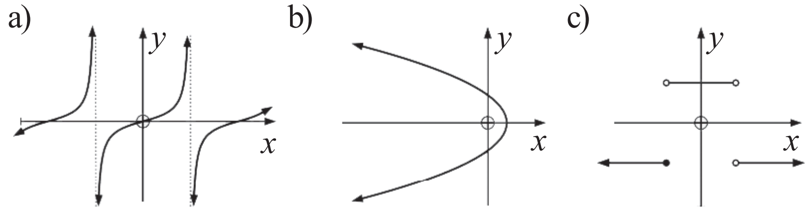
112. Ҷасмина барои дӯхтани курта фармоиш қабул кард. Агар дар як рӯз x–то курта дӯзад, ӯ даромади $P(x)=-x^2+20x$ доллари ИМА мегирад.

a) барои он ки даромади калонтарин гирад ӯ бояд чанд курта курта дӯзад?

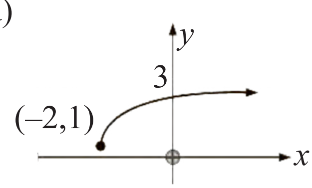
b) даромади калонтарин ба чанд доллар баробар аст?

Намунаи кори санҷишӣ

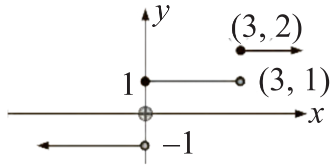
1. Кадоме аз муносибатҳои поён функсияҳо ҳастанд?



d)



e)



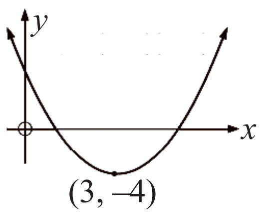
2. Кадоме аз маҷмӯи ҷуфтҳои ба тартиб андохташуда табдилдиҳӣ мешавад? Ҷавобатонро асоснок кунед.

a) $\{(1, 2),(-1, 2),(0, 5),(2, -7)\}$; b) $\{(0, 1),(1, 3),(2, 5),(0, 7)\}$;

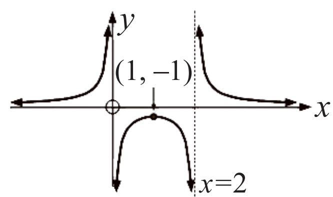
c) $\{(6, 1),(6, 2),(6, 3),(6, 4)\}$.

3. Соҳаи муайянӣ ва маҷмӯи қимматҳои функсияҳои дар намуди графикӣ додашударо ёбед:

a)

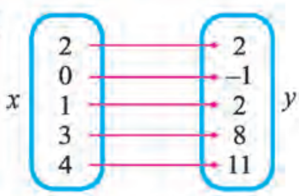


b)

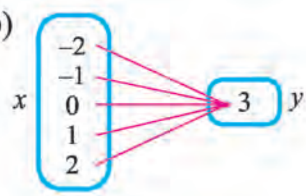


4. Диограммаи зерин $y=f(x)$ аксгардониро медиҳад:

a)



b)



1) $y=f(x)$ соҳаи муайякунии аксгардонӣ ва дастҷамъиро нависед.

2) $y=f(x)$ аксгардонӣ дар системаи ҳамвории координатаҳо чӣ тавр тасвир мешавад?

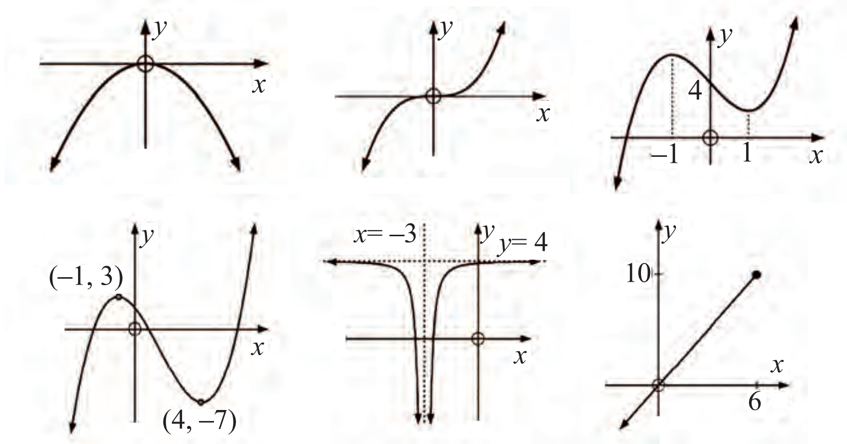
3) Барои $y=f(x)$ ифодаи муайянро нависед.

5. Барои функсияи $f(x)=2x-x^2$

a) $f(2)$; b) $f(-3)$; c) $f(-\frac{1}{2})$ қиммати калонтаринро ёбед.

6. барои функсияи $g(x)=x^2-3x$ ифодаҳоро содда кунед a) $g(x+1)$; b) $g(x^2-2)$

7. Интервалҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияҳои дар намуди графикӣ додашударо ёбед:



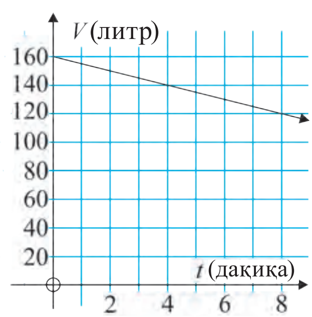
8. Барои функсияҳои: a) $f(x)=2x+1$; b) $f(x)=-3x+2$; c) $f(x)=x^2$; d) $f(x)=-x^3$

1) нуқтаҳои буриши функсияҳоро бо тирҳояшон ёбед;

2) максимуми локалӣ, минимуми локалӣ, ё нуқтаҳои кач мавҷуд бошад, координатаҳои онҳоро ёбед;

3) графики тахминии функсияро кашед.

9. Дар графики поён дар вақти t-и дар дақиқаҳо ифодашуда ҳаҷми V-и нефти аз систерна ҷоришаванда тасвир шудааст.



1) формулаи алоқамандии ҳаҷми нефти ҷоришудаистода, аз вақтро ёбед.

2) дар 15 дақиқа чӣ қадар нефт ҷорӣ мешавад?

3) 50 литр нефт дар чанд дақиқа ҷорӣ мешавад?

4) баъди чанд вақт систерна холӣ мешавад?

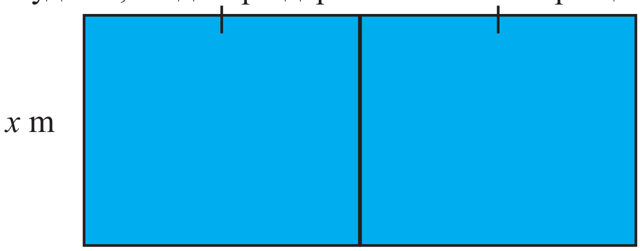
10. Санг аз сатҳи баҳр аз баландии 60 метр ба боло партофта шуд. Агар баъди t сония нисбат ба сатҳи баҳр баландии санг ба $H(t)=-5t^2+20t+60$ баробар шавад:

1) баъди чанд сония баландии санг калонтарин мешавад?

2) нисбат ба сатҳи баҳр баландии санг ба чанд баробар аст?

3) баъди чанд сония санг ба об меафтад?

11. Фермер майдони паҳлӯ ба паҳлӯи якхеларо, ки гандум кошта шудааст, бо девори дарозиаш 2000 метр иҳота кард.



1) майдони умумӣ бо ёрии *x* чӣ хел ифода мешавад?
2) майдони умумии калонтарини ду саҳро ба чанд баробар шуданаш мумкин аст?
3) масоҳати ин хел саҳроҳоро муайян кунед.

55 ҶАРАЁНҲОИ ДАВРӢ ВА НАЗОРАТИ ОНҲО

Ҷараёнҳои даврӣ дар табиат ва техника васеъ паҳн шудааст. Ба онҳо мисолҳо биёрем:

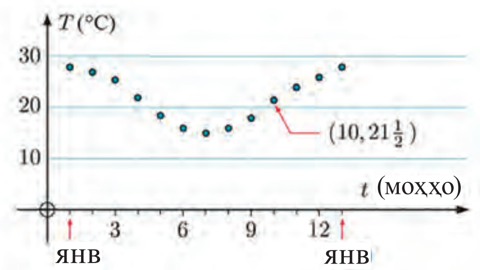
- Тағйирёбии обу ҳаво нисбат ба фаслҳои сол;
- Тағйирёбии миёнаи ҳарорат;
- Бардавомии рӯз ва шаб;
- Чуқурии об дар соҳили паҳлӯи укёнус;
- Адади ҳайвонҳо;
- Тағйирёбии фаъолияти офтоб;
- Лаппишҳои даврӣ дар механика,электротехника.

Дар ин ҷараёнҳо бо гузашти вақти муайян такроршавии ҳолатҳо назорат мешавад. Онҳоро ба вазъият нигоҳ карда, даври **лаппишкунанда ё сиклӣ** меноманд.

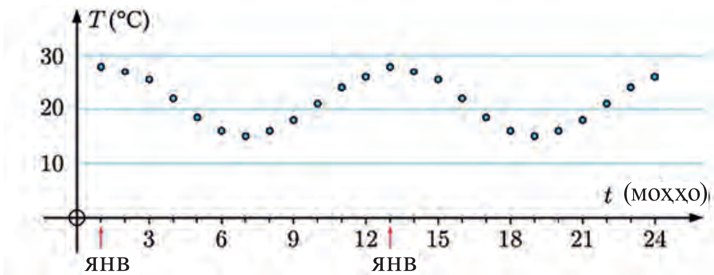
Масалан, ҷадвали тағйирёбии максималии моҳонаи ҳароратро дар шаҳри Кейптауни Африкаи Ҷанубӣ дида мебароем:

Моҳ	Ян	Фев	Мар	Апр	Май	Июн	Июл	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек
Темп (0 °C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Ин маълумотро ба намуди графикӣ ифода мекунем. Барои ин тири ордината ҳароратҳоро, тири абссиса бошад рақамҳои тартибии моҳ (масалан, феврал t=2)ро мефаҳмонад. Дар ин график дар моҳи январ ба ҳисоби миёна ҳарорат 28°C дар назар дошта шудааст. Такроршавии ин қиммат дар ҳар 12 моҳ, яъне дар моҳҳои январи ҳар сол табиист.



Барои моҳҳои дигар низ инро давом дода, графики тағйирёбии миёнаи ҳарорати тақрибан акскунандаро кашидан мумкин аст:



Агар функсияи $y=f(t)$ дар моҳи t ҳарорати миёнаро ифода кунад, қонуниятҳои монанди $f(0)=f(12)=f(24)=...$, $f(1)=f(13)=f(25)=...$ва ҳ.к, дар ҳолати умумӣ барои t-и ихтиёрӣ $f(t+12)$ шуданаш дар назар аст.

Дар ин вақт 12 моҳ муддатеро, ки такроршавӣ дида мешавад **давр** меномем.

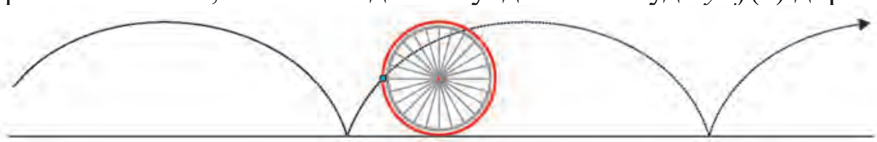
Агар барои функсияи $f(x)$-и дар маҷмӯи X муайяншуда, x-и ихтиёрӣ баробарии $f(x+T)=f(x)$ ро қаноаткунондаи $T>0$ мавҷуд бошад, $f(x)$ функсияи даврӣ номида мешавад, дар ин ҷо $x+T \in X$.

Равшан аст,ки агар $f(x+T)=f(x)$ бошад, он гоҳ $f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=...$

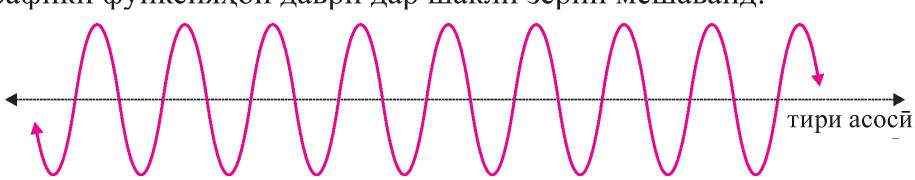
Қиммати хурдтарини чунин ададҳои $T>0$-ро **даври функсия** меномем.

Агар ғилдирак қад-қади хати рост чарх зада, ҳаракат кунад,нуқтаи дар он аниқ қайдшуда, аз рӯйи хати каҷи **сиклоид** номида шаванда, даврӣ ҳаракат мекунад.

Гуфтан лозим аст, ки сиклоида ба муодилаи намуди $y=f(x)$ доро нест.

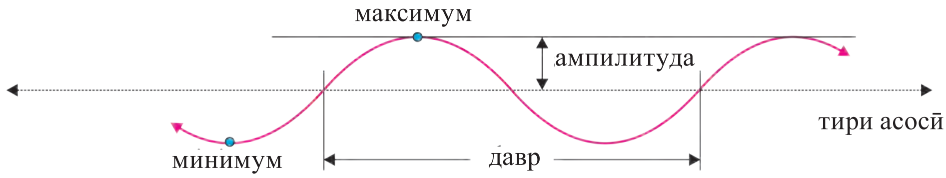


Графики функсияҳои даврӣ дар шакли зерин мешаванд:



Муодилаи тири асосӣ ба таври зерин муайян мешавад: $y = \dfrac{\max + \min}{2}$ дар ин ҷо max – қиммати калонтарини функсия, min бошад қиммати хурдтарин.

Графики функсияи даврӣ ба қисмҳои таркибии зерин доро аст:



Амплитуда масофаи байни максимум ва тири функсия(ёки тир ва минимум) буда, у чунин муайян карда мешавад: $\text{amplituda} = \dfrac{\max - \min}{2}$.

Савол ва супоришҳо

1. Ба чараёни даврӣ мисол биёред.
2. Ба даври функсия таъриф диҳед.
3. Амплитудаи функсияи даврӣ чи хел ҳисоб карда мешавад?
4. Чӣ будани сиклоидаро фаҳмонед.
5. Кай функсияи квадратӣ ба максимум (минимум)соҳиб аст?

Машқҳо

113. Барои ҳар як ҳолат маълумотро ба намуди графикӣ тасвир кунед ва дар бораи даврӣ будан ё даврӣ набудани онҳо хулоса бароред.

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	1	1,4	1	0	–1	–1,4	–1	0	1	1,4	1	0

b)

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

c)

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
y	0	1,9	3,5	4,5	4,7	4,3	3,4	2,4

d)

x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
y	0	4,7	3,4	1,7	2,1	5,2	8,9	10,9	10,2	8,4	10,4

114. Агар дар ҷадвали зерин ғилдирак чарх зада, қад-қади хати рост ҳаракат кунад, дар он бузургиҳое оварда шудаанд, ки он ҳаракати нуқтаи қайдшударо ифода мекунад.

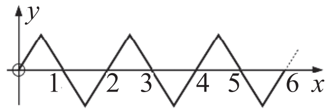
Масофа (см)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Баландӣ (см)	0	6	23	42	57	64	59	43	23	7	1

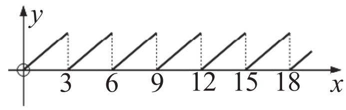
Масофа (см)	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400
Баландӣ (см)	5	27	40	55	63	60	44	24	9	3

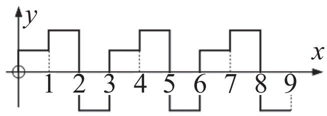
а) аз масофа вобаста будани баландиро ба тарзи графикӣ ифода кунед

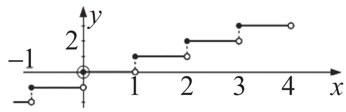
б) оё ин ҷараён даврӣ аст? Агар даврӣ бошад,муодилаи тир, максимуми функсия, давр ва амплитудаашро ёбед.

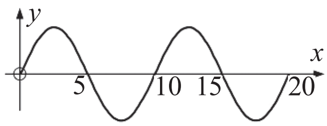
115. Кадоме аз инҳо ҷараёни давриро ифода мекунад?

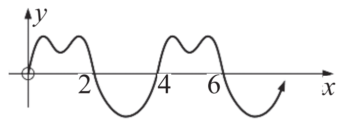
a)


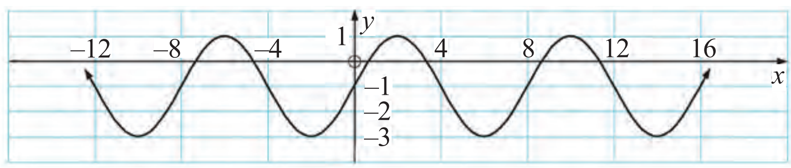
b)


c)


d)


e)


f)


116.


Барои функсияи даврии додашуда:

а) амплитударо ёбед;

b) даврашро ёбед;

c) нуқтаи якуми максимумро ёбед;

d) масофаи байни ду максимумро аниқ кунед;

e) муодилаи тири асосиро тартиб диҳед.

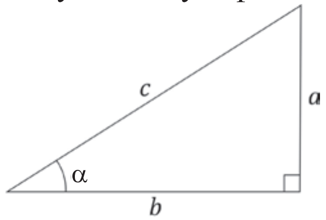
56-58 ФУНКСИЯҲОИ $y=\sin x$, $y=\cos x$ ВА БО ЁРИИ ОНҲО МОДЕЛОНИДАН

Дар секунҷаи росткунҷа *a*, *b* – катетҳо, *c* – гипотенуза бошад, бо α кунҷе, ки муқобили катети *a* мехобад ишора мекунем (нигаред ба расми 1) Дар курси геометрия синус ва косинуси кунҷи *a* бо ёрии муодилаи зерин дароварда мешавад.

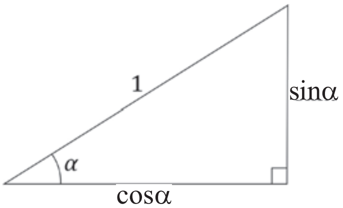
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Агар гипотенузаро 1 гуфта гирем, расми 1 намуди зеринро мегирад (нигаред ба расми 2).

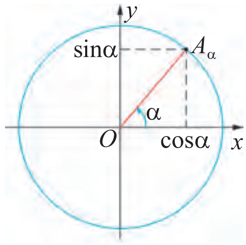
Дар ҳамворӣ системаи координатаҳоро дохил карда, дар он давраи радиусаш ба 1 баробари воҳидиро дида мебароем ва дар ин давра нуқтае ки ба кунҷи α мувофиқ аст қайд мекунем (расми 3).



Расми 1



Расми 2

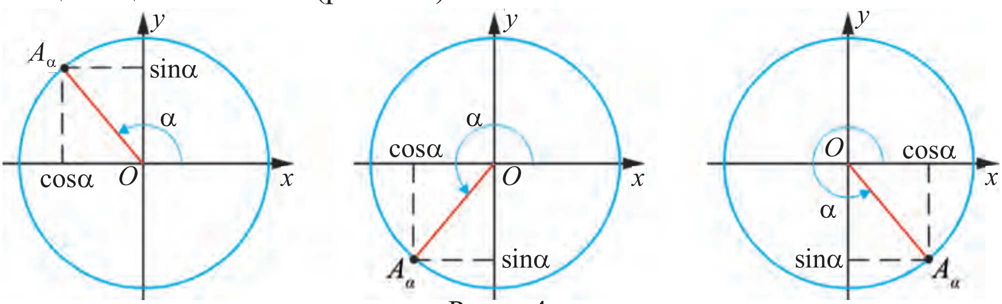


Расми 3

Синуси кунҷи α гуфта ординатаи нуқтаи A_α ро меноманд ки он дар натиҷаи нуқтаи (1;0)-ро дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунҷи α чарх занонидан ҳосил мешавад (sinα ишора карда мешавад).

Айнан ҳамин тавр, косинуси кунҷи α гуфта абссисаи нуқтаи (1; 0)-ро меноманд, ки он дар натиҷаи нуқтаи (1;0)-ро дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунҷи α чарх занонидан ҳосил мешавад (cosα ишора карда мешавад).

Агар нуқтаи ба кунҷи α мувофиқ дар чоряки дигар хобад, ба чунин шаклҳо соҳиб мешавем (расми 4):



Расми 4.

Мувофиқи теоремаи Пифагор, айнияти асосии тригонометрии, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ – ҷой дорад,дар ин ҷо $0^\circ\leq\alpha\leq360^\circ$. Кунҷҳои (камони) дар тригонометрия дида бароянда дар градусҳо, ёки радианҳо чен карда мешаванд.

Нисбати дарозии камони ба кунҷи марказии α мувофиқ нисбати радиуси ҳамон камон ченаки радиании ҳамон кунҷ номида мешавад.

Ченаки радиании кунҷи дар градусҳо додашудаи α ба $\frac{\pi}{180^\circ}\alpha$ баробар аст.

Ҷадвали ченакҳои радиании кунҷҳои бисёртар вохӯрандаро меорем:

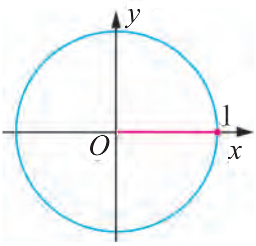
Градус	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радиан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Баъзе қимати синус ва косинуи кунҷи a-ро меёбем.

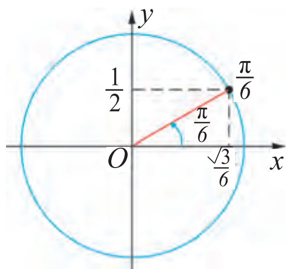
1. $\alpha=0°$ бошад (расми 5). Дар ин ҳол обсиссаи нуқтаи мувофиқ ба 1 ординатааш ба 0 баробар, пас $\sin 0°=0$, $\cos 0°=1$.

2. $\alpha=\pi/6=30°$ бошад (расми 6). Аз сабаби дар секунҷаи росткунҷа, муқобили кунҷи 30° ба нисф баробар гардидани катет нисбати гипотитенузаҳо $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ мешавад. Мувофиқи аёнияти асосии тригонометрӣ $\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

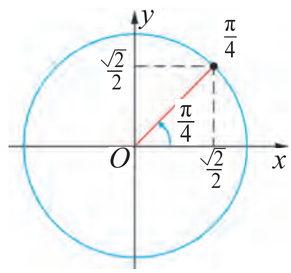
3. $\alpha=\pi/4=45°$ бошад (расми 7). Дар ин ҳол паҳлӯи баробари кунҷи секунҷа ҳосил мешавад. Дар чунин секунҷаҳо синус ва косинуси кунҷи а баробаранд. Онҳоро x мегӯем Айнияти асосии тригонометр $x^2+x^2=1$, яъни $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ мешавад. Пас, $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



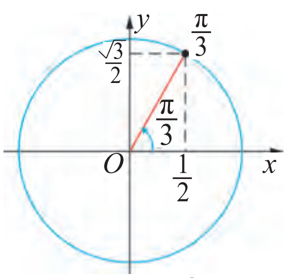
Расми 5



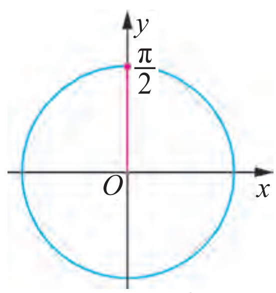
Расми 6



Расми 7



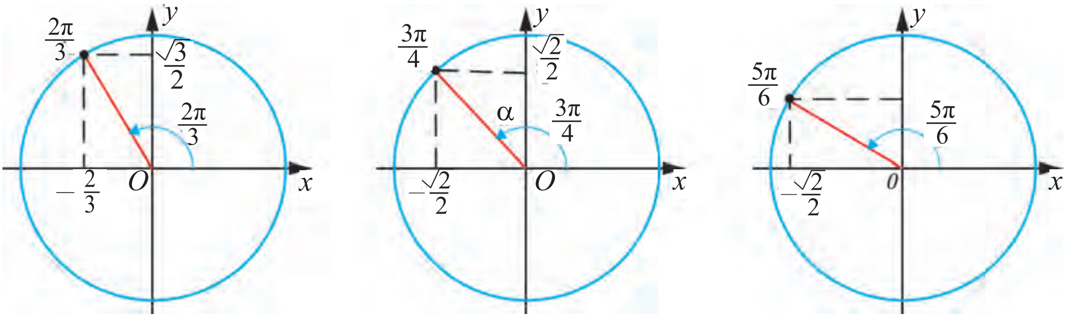
Расми 8



Расми 9

4. $\alpha=\pi/3=60°$ бошад (расми 8). Дар ин ҳол мисли $\alpha=\frac{\pi}{6}$ мулоҳиза намуда, ба баробарии, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ соҳиб мешавем.

5. $\alpha=\pi/2=90°$ бошад (расми 9). Дар ин ҳол абссиссаи нуқтаи мувофиқ ба 0 ва ординатааш ба 1 баробар аст. Пас, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$.



Расми 10

6. Дар ҳолати $\frac{2\pi}{3}=120°$, $\frac{3\pi}{4}=135°$, $\frac{5\pi}{6}=150°$ будан мебинем(расми10).

$\frac{2\pi}{3}$ барои нуқтаи $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$. Дар он ҳол ин нуқта $\frac{\pi}{3}$ ба нуқтаи Oy тири нисбатан симметрӣ мешавад. Пас, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

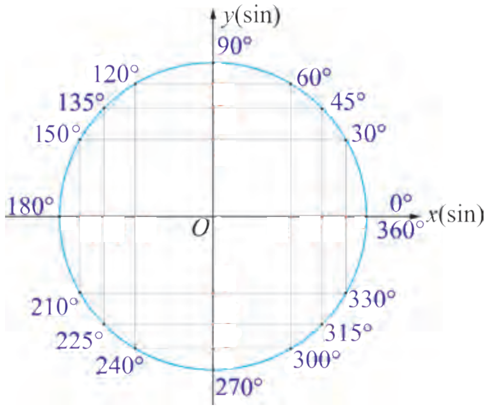
$\frac{3\pi}{4}$ барои нуқтаи $\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$. Дар ин ҳол ин нуқта $\frac{\pi}{4}$ ба нуқтаи Oy тири нисбатан симметрӣ мешавад. Пас, $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\frac{5\pi}{6}$ барои нуқтаи $\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$. Дар ин нуқта $\frac{\pi}{6}$ ба нуқтаи Oy тири нисбатан симметрӣ мешавад. Пас, $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

7. Ҳангоми $\alpha=\pi=180°$ будан, $\cos\pi=-1$, $\sin\pi=0$ буданашро исбот кардан ва расми мувофиқ кашиданро ба хонандаҳо ҳавола мекунем.

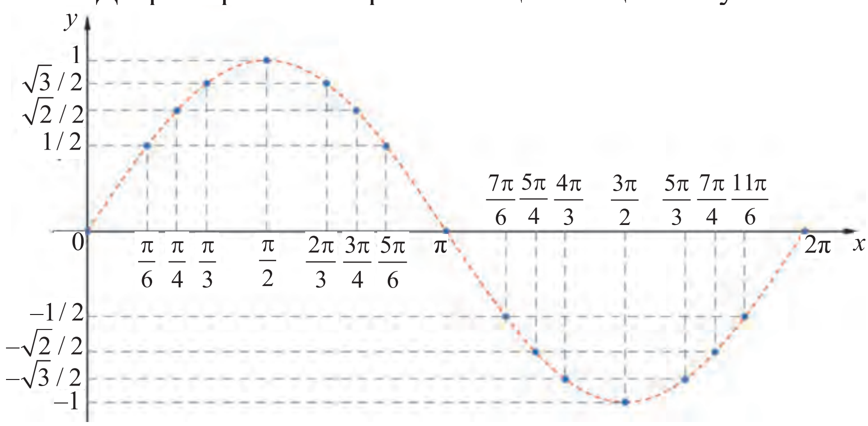
Дар боло мо дар интервали $[0; \pi]$ барои баъзе кунҷҳо қиматҳои синус ва косинусро муайян кардем. Ба ҳар яки ин кунҷҳо π-ро зам карда, барои кунҷҳои интервалӣ, $[\pi; 2\pi]$ низ қиматҳои синус ва косинусро муайян кардан мумкин аст. Натиҷаҳоро дар расми 11, ки даври тригонометрӣ номгӯ шудааст, ифода мекунем:

Аз қиматҳои боло истифода бурда, графики функсияҳои $y=\sin x$, $y=$-$\cos x$-ро кашидан мумкин. Барои ин дар тири абсиссаҳо қиматҳои кунҷи α-ро, дар тири ординатаҳо бошад қиматҳои мувофиқи синусро гирифта, нуқтаҳои ҳосилшударо қайд мекунем. Баъдан нуқтаҳои қайд кардашударо бо хати ҳамвор пайваст карда, дар интервали $[0; 2\pi]$ графики функсияи $y=\sin x$ (расми12)-ро, ҳосил мекунем. Графики функсияи $y=\cos x$ (расми 13) ҳам монанди ин сохта мешавад.

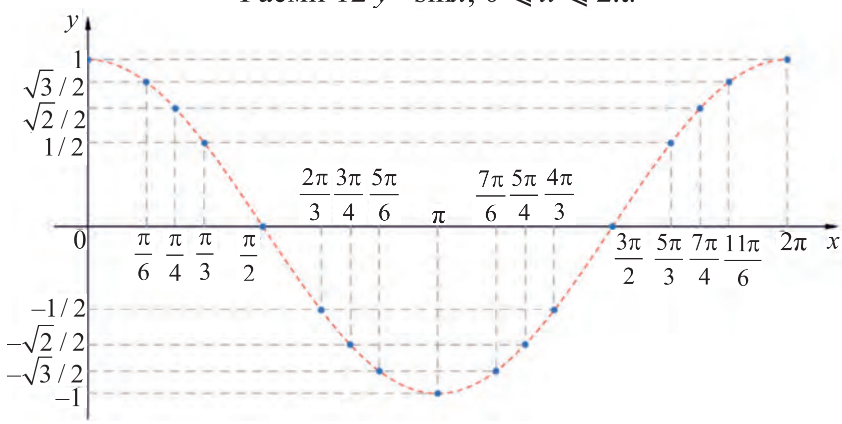


$30° = \frac{\pi}{6};$	$45° = \frac{\pi}{4};$	$60° = \frac{\pi}{6};$
$90° = \frac{\pi}{2};$	$120° = \frac{2\pi}{3};$	$135° = \frac{3\pi}{6};$
$180° = \pi;$	$210° = \frac{7\pi}{6};$	$225° = \frac{5\pi}{4};$
$240° = \frac{4\pi}{3};$	$270° = \frac{3\pi}{2};$	$300° = \frac{5\pi}{3};$
$315° = \frac{7\pi}{4};$	$330° = \frac{11\pi}{6}.$	

Расми 11. Давраи тригонометрӣ. Баъзе қимматҳои синус ва косинус.

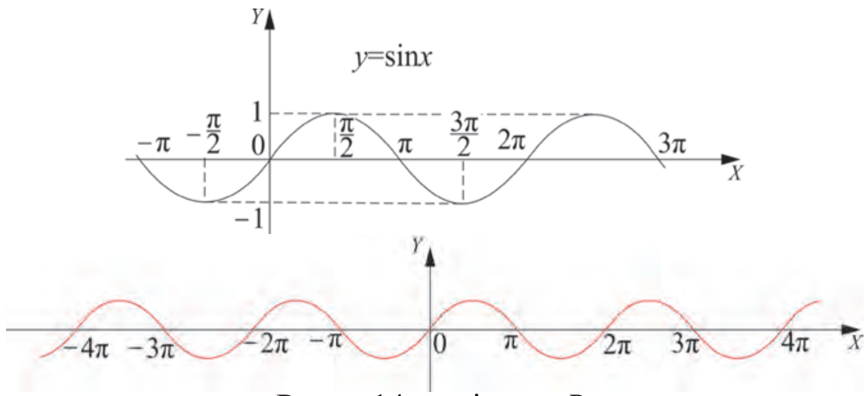


Расми 12 $y=\sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

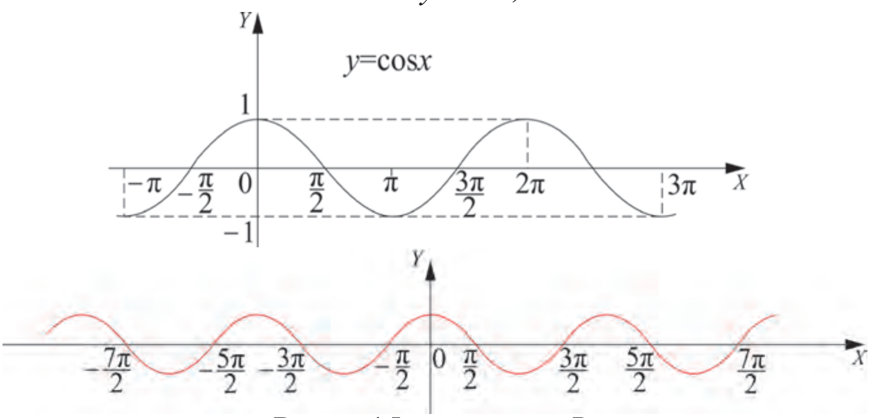


Расми 13. $y=\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Ин графикҳоро ба тарзи даврӣ давом дода, графики функсияҳои $y=\sin x$, $y=\cos x$-ро ҳосил мекунем (расмҳои 14 ва 15).



Расми 14. $y=\sin x,\ x\in R$.



Расми 15. $y=\cos x,\ x\in R$.

Баъди хондани графикҳо ба хулосаи зерин меоем: даври функсияҳои $y=\sin x$ ($y=\cos x$) ба 2π, амплитудааш ба 1, қиммати калонтаринаш ба 1, қиммати хурдтаринаш бошад ба -1 баробар аст.

Баъзе мулоҳизаҳое, ки дар татбиқҳо дар бораи функсияҳои $y=a\sin x$ ва $y=\sin bx,\ b\neq 0$ васеъ вомехӯранд мебиёрем.

Амплитудаи функсияи $y=a\sin x$ ба $|a|$ баробар. Графики он дар натиҷаи графики функсияи $y=\sin x$-ро ҳангоми $|a|>1$ будан аз рӯйи тири ординатаҳо кашидашавӣ, ҳангоми $|a|<1$ будан бошад фишурдан ҳосил мешавад. Даври функсияи $y=\sin bx$ ба $\dfrac{360°}{|b|}$ баробар аст.

Графики ин функсия аз графики функсияи $y=\sin x$ ҳангоми $0<|b|<1$ шудан аз рӯйи тири абсиссаҳо кашидашавӣ, ҳангоми $|b|>1$ шудан фишурдашавӣ ҳосил мешавад.

Графики функсияи намуди $y=\sin x+c$ аз графики функсияи $y=\sin x$ дар натиҷаи ба c воҳид параллел кӯчонидан ҳосил мешавад ва дар ин ҷо тири асосии функсияи $y=\sin x+c$ ба муодилаи $y=c$ доро аст.

Дар боло будаҳоро ба назар гирифта, графики функсияи намуди $y=a\sin bx+c$ доштаро ҳосил кардан мумкин аст.

Масалан, функсияи $y=2\sin3x+1$-ро дида мебароем.

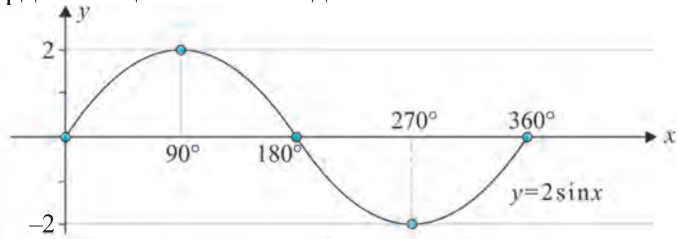
Графики ин функсия аз графики функсияи $y=\sin x$ ба таври зерин ҳосил мешавад:

1. Амплитударо ба 2 зарб карда $y=2\sin x$–ро ҳосил мекунем
2. Даврро ба 3 тақсим карда, $y=2\sin3x$–ро ҳосил мекунем
3. Ба 1 воҳиди додашуда параллел мекӯчонем. $y=2\sin3x+1$ ба муодилаи $y=1$ соҳиб аст.
4. Дар натиҷа графики функсияи $y=2\sin3x+1$-ро ҳосил мекунем.

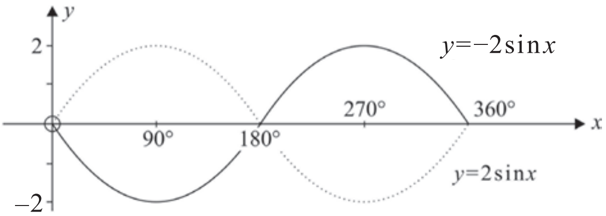
Мулоҳизаҳои ба ин монандро дар бораи функсияи $y=\cos x$ ҳам овардан мумкин.

Мисоли 1. Графикҳои функсияҳои $y=2\sin x$, $y=-2\sin x$, $y=\sin2x$-ро созед, $0°\leq x\leq 360°$.

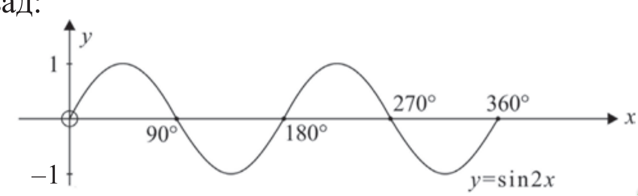
△ Аввал графики функсияи $y=2\sin x$-ро месозем. Амплитудаи ин функсия ба 2 баробар ва графики он дар натиҷаи кашидашавии графики функсияи $y=\sin x$ аз рӯйи тири ордината ҳосил мешавад:



Графики функсияи $y=-2\sin x$ ба графики функсияи $y=2\sin x$ нисбат ба тири абсиссаҳо симметрӣ аст. Аз ин истифода бурда, графики функсияи $y=-2\sin x$–ро месозем.

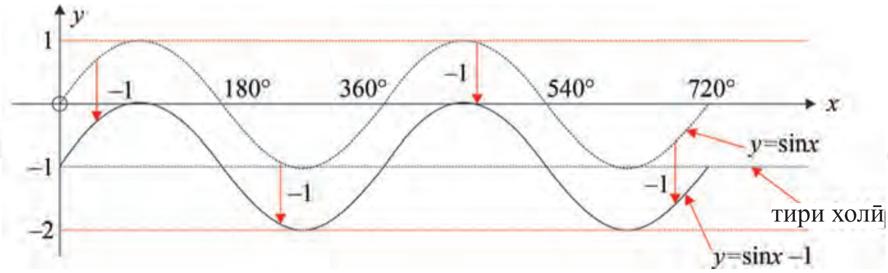


Даври функсияи $y=\sin2x$ ба $\dfrac{360°}{2}=180°$. баробар аст. Графики ин функсия чунин мешавад:



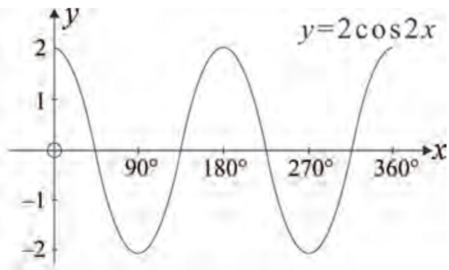
▲

Мисоли 2. Ҳангоми $0° \leqslant x \leqslant 720°$ будан графики функсияҳои $y=\sin x$ ва $y=\sin x-1$-ро созед.



Мисоли 3. Дар порчаи $0° \leqslant x \leqslant 360°$ графики функсияи $y=2\cos 2x$–ро месозем.

$a=2$. Пас, амплитудаи функсия ба $|2|=2$ баробар, азбаски $b=2$ аст даври функсия ба $\frac{360°}{|b|}=\frac{360°}{2}=180°$ баробар аст. Аз ин ҷо ба графики зерин соҳиб мешавем:



Саволҳо ва супоришҳо

1. Дар доираи воҳидӣ ба синуси кунҷ таъриф диҳед.
2. Дар доираи воҳидӣ ба косинуси кунҷ таъриф диҳед.
3. Барои кунҷи 30° синус ва косинусро ҳисоб кунед.
4. Графики функияи $y=\sin x$-ро кашед.
5. Графики функияи $y=\cos x$-ро кашед.

Машқҳо

117. Графикҳоро дар порчаи $0° \leqslant x \leqslant 360°$ созед:

a) $y=3\sin x$; b) $y=-3\sin x$; c) $y=\frac{3}{2}\sin x$; d) $y=-\frac{3}{2}\sin x$.

118. Графикро дар порчаи $0° \leqslant x \leqslant 540°$ созед:

a) $y=\sin 3x$; b) $y=\sin(\frac{x}{2})$; c) $y=\sin(-2x)$; d) $y=-\sin\frac{x}{3}$.

119. Даври функсияро муайян кунед:

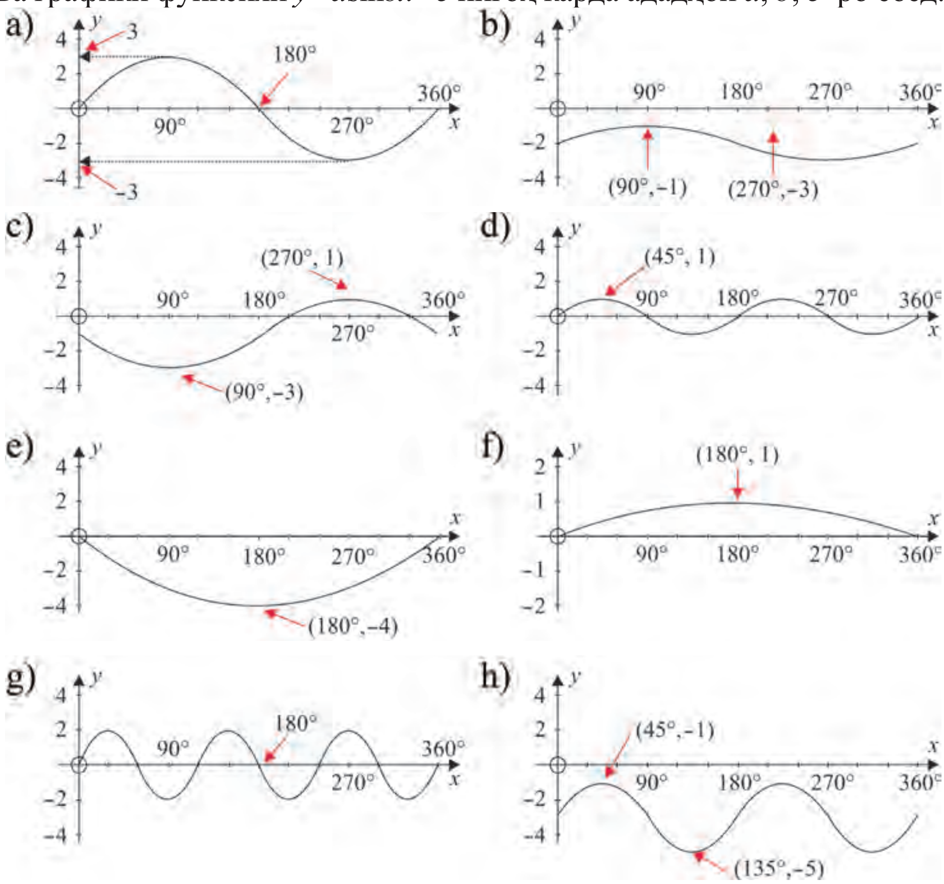
a) $y=\sin 4x$; b) $y=\sin(-4x)$; c) $y=\sin(\frac{x}{3})$; d) $y=\sin(0{,}6x)$.

120. Агар барои $y=\sin bx$, $b>0$ даври функсия ба

a) 900°; b) 120°; c) 2160°; d) 720°

баробар бошад, b –ро ёбед.

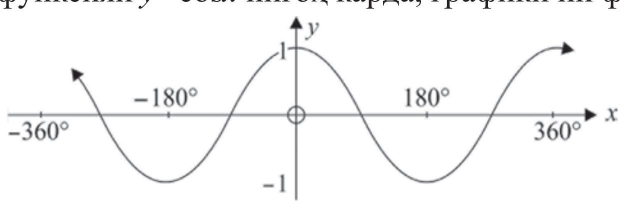
121. Ба графики функсияи $y=a\sin bx+c$ нигоҳ карда ададҳои a, b, c–ро ёбед:



122. Графикҳоро дар порчаи $0° \leqslant x \leqslant 360°$ созед:

a) $y=\sin x+1$; b) $y=\sin x-2$; c) $y=1-\sin x$;
d) $y=2\sin x-1$; e) $y=\sin 3x+1$; f) $y=1-\sin 2x$.

123. Ба графики функсияи $y=\cos x$ нигоҳ карда, графики ин функсияҳоро созед:



a) $y=\cos x+2$; b) $y=\cos x-1$; c) $y=\frac{2}{3}\cos x$;

d) $y=\frac{3}{2}\cos x$; e) $y=-\cos x$; f) $y=\cos 2x$;

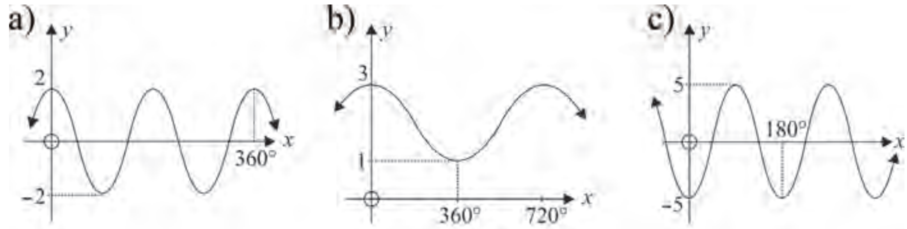
g) $y=\cos(\frac{x}{2})$; h) $y=3\cos 2x$.

124 Даври функсияро муайян кунед:

a) $y=\cos 3x$; b) $y=\cos(\frac{x}{3})$; c) $y=\cos(\frac{x}{2})$; d) $y=\cos 4x$.

125. Бигузор функсияи $y=a\cos bx+c$ дода шуда бошад. Маънои геометрии ададҳои a,$в$,c-ро муайян кунед.

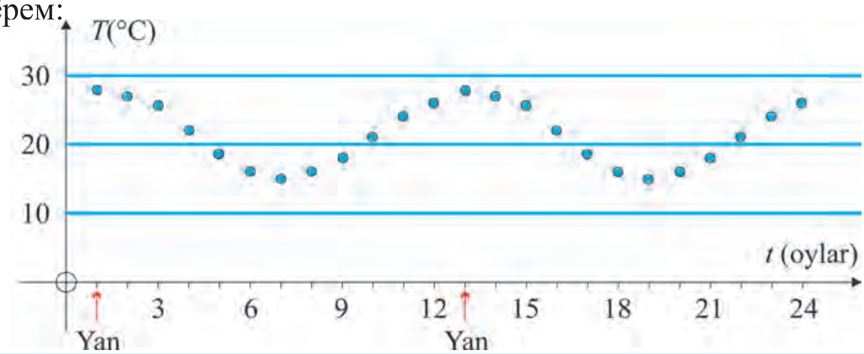
126. Ба графики функсияи $y=a\cos bx+c$ нигоҳ карда ададҳои a, b, c-ро ёбед.



Мисоли 4. Дар поён ҷадвали тағйирёбии максималии ҳарорати моҳонаи обу ҳавои шаҳри Кейптауни Африкаи Ҷанубӣ дода шудааст:

Oy	*Yan*	*Fev*	*Mar*	*Apr*	*May*	*Iyun*	*Iyul*	*Avg*	*Sen*	*Okt*	*Noy*	*Dek*
T(°C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Графике, ки тағйирёбии максималии ҳароратро тахминан акс мекунад, мебиёрем:



Модели ин ҷараён дар намуди $T=a\cos bt+c$ гуфта фарз карда a, b, c-ҳоро параметрал меёбем. Азбаски давр 12 моҳ аст

$$\frac{360°}{|b|}=12\text{, яъне } b=\frac{360°}{12}=30°.$$

Амплитударо ҳисоб мекунем: $\frac{\max-\min}{2}\approx\frac{28-15}{2}=6,5$. Аз ин ҷо $\alpha\approx6,5$.

Азбаски тири асосӣ дар байни қимматҳои хатҳои рости максималӣ ва минималӣ ҷой гирифтааст $c\approx\frac{28+15}{2}\approx21,5$.

Пас, модели математикии бо гузашти вақт тағйирёбии моҳонаи ҳарорат функсияи $T≈6{,}5\cos30t+21{,}5$ мебошад.

Машқҳо

127. Дар базаи Қутбии Антарктида ҳарорати миёна дар мобайни 30 сол ба таври зерин буданаш маълум:

Тартиби рақами моҳ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ҳарорат (°C)	0	–4	–10	–15	–16	–17	–18	–19	–17	–13	–6	–1

Модели математикии тағйирёбии миёнаи ҳароратро созед.

128. Ҳангоми санҷиши ҷараёни бардошташавии оби баҳр то соҳилҳо ва фурӯхамии он аз соҳилҳо чунин муайян карда шуд: 1) фарқи байни чуқурии аз ҳама калон ва аз ҳама хурди об 14 метр. 2) чуқурии об ба қимматҳои аз ҳама калонтарин ба ҳисоби миёна дар ҳар як 12,4 соат соҳиб мешавад. 3) Модели математикии тағйирёбии чуқурии обро нисбат ба вақт созед ва онро ба таври графикӣ ифода кунед.

129. Дар чархи велосипед нури ранги зардро инъикоскунанда ҷойгир карда шудааст. Ҳангоми шабона дар роҳи ҳамвор ҳаракат кардан велосипед ба навор гирифта шуд. Дар асоси видеотасвир тағйирёбии баландии нур инъикоскунанда нисбат ба роҳ бо гузашти вақт муайян гардида, ҷадвал ба таври зерин пур шуд:

Вақт(t, s)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Баландӣ (H, sm)	19	17	38	62	68	50	24	15	31

a) аз функсияи синус истифода бурда, модели математикии ҷараёнро созед.

b) намуди графикии ҷараёнро биёред.

c) радиуси чархро ёбед.

d) велосипед бо чӣ гуна суръат ҳаракат карда истодааст?

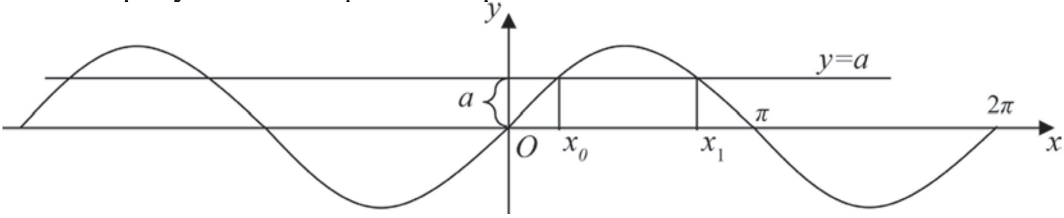
59-61 МУОДИЛАҲОИ СОДДАТАРИНИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Муодилаи sin $x=a$

Ба мо маълум аст, ки, $-1\le \sin x\le 1$, бинобар ин ҳангоми $|a|>1$ ин муодила ҳал надорад. Барои ёфтани ҳалли муодила дар интервали $-1\le a\le 1$ таърифи зеринро дохил мекунем.

Арксинуси адади $a\in[-1;\ 1]$ гуфта адади $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ ки синусаш ба a баробар аст меноманд: агар $\sin x=a$ ва $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ бошад, $\arcsin a=x$.

Барои ҳал кардани муодила аз графики функсияи $y=\sin x$, ки дар расми 16 тасвир шудааст истифода мебарем.



Расми 16.

Аз график мебинем, ки ҳангоми, $a\in[-1;\ 1]$ будан функсияи $y=a$ дар интервали $[0;\ 2\pi]$ графики функсияи $y=\sin x$ ро дар нуқтаҳое ки абсциссаҳояш x_0 ва $x_1=\pi-x_0$ мебуррад. Ин ду нуқтаро бо ёрии як формула навиштан мумкин:

$$x=(-1)^n \arcsin a, \text{ дар ин ҷо } n = 0,\ 1.$$

Аз даврӣ будани функсияи $y=\sin x$ истифода бурда, барои ҳал кардани муодила ин формуларо ҳосил мекунем:

$$x=(-1)^k \arcsin a+ \pi k,\ k\in Z. \quad (1)$$

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: 1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

△ Азбаски мувофиқи таъриф $-1\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le 1$, $\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ ва $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ аст $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$. мешавад. Монанди ин, $\arcsin(-\frac{1}{2})=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$ мешавад. ▲

Мисоли 2. Муодиларо ҳал кунед: $\sin x=\frac{1}{2}$.

△ Мувофиқи формула ҳалли муодила

$x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+\pi k=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z$ мешавад. ▲

Мисоли 3. Муодиларо ҳал кунед: $\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

△ Азбаски функсияи $y=\sin x$ тоқ аст $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ мешавад.

Формулаи (1)-ро истифода бурда, баробарии, $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k,\ \ k\in Z$ -ро ҳосил мекунем.

Азбаски $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ аст, ҳалҳои $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$

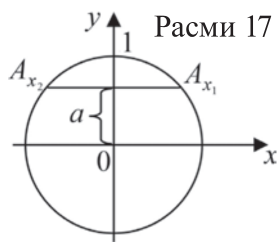
$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$ yoki $x=\frac{\pi}{6}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$ -ро ҳосил мекунем. ▲

Ҳалҳои муҳими муодилаи sin$x$=a -ро мебиёрем:
Ҳангоми a=1 будан $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; ҳангоми a=−1 будан $x=\frac{3}{2}\pi+2\pi k,\ k\in Z$; Агар a=0 бошад $x=\pi k,\ k\in Z$.

Мисоли 4. Муодиларо ҳал кунед: $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=0$.

△ Ҳангоми a=0 будан $-\frac{\pi}{10}+\frac{x}{2}=\pi k$, $\frac{x}{2}=\pi k+\frac{\pi}{10}$, яъне ҳалҳои $x=\frac{\pi}{5}+2\pi k,\ k\in Z$ -ро меёбем. ▲

sin$x$=a-ро дар доираи воҳидӣ фаҳмонидан осон аст, мувофиқи таърифи sin$x$ қиммати он дар доираи воҳидӣ ординатаи нуқтаи A_x мебошад. Ҳангоми |a|<1 будан ин хел нуқтаҳо 2-то, яъне A_{x1} ва A_{x2} мешавад.
Ҳангоми a=±1 будан 1-то мешавад (расми 17).



Расми 17

Муодилаи cos$x$=a

Азбаски $-1\le\cos x\le 1$ аст, ин муодила ҳангоми |a|>1 будан ҳал надорад.

Барои ёфтани ҳалли ин муодила дар интервали $-1\le a\le 1$ таърифи зеринро мебиёрем.

Арккосинуси адади $a\in[-1;\ 1]$ гуфта, адади $x\in[0;\ \pi]$ косинусаш ба a баробарро меноманд: агар cos$x$=a ва $x\in[0;\ \pi]$ бошад, arccos a=x.

Мувофиқи таъриф, дар интервали, [0; π] муодилаи cos$x$=a ба як решаи x=arccos$a$ соҳиб буда, азбаски y=cos$x$ функсияи ҷуфт аст, дар интервали [−π;0] низ ба ҳалли ягонаи x=−arccos$a$ соҳиб аст. Даври функсия 2π. Он гоҳ барои ҳал кардани муодилаи cos$x$=a -ро ҳал кардан формулаи. x=±arccos$a$+2πk, $k\in Z$ (2) -ро ҳосил мекунем.

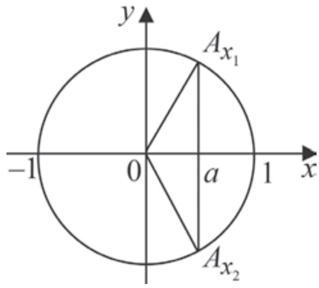
Мисоли 5. Ҳисоб кунед: 1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

△Мувофиқи таъриф, азбаски $-1\le\frac{\sqrt{3}}{2}\le 1$, $\frac{\pi}{6}\in[0;\pi]$ ва $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ аст, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$ мешавад. Дар асл $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$ мешавад. ▲

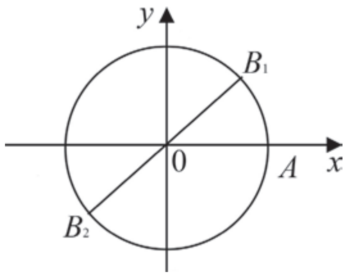
Мисоли 6. Муодиларо ҳал кунед: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Мувофиқи формулаи (2) ҳалли муодила $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$, аммо $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Пас, ҳалл дар намуди зерин мешавад: $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$



Расми 18.



Расми 19.

Ҳалли муодилаи cos$x$=a -ро дар доираи воҳидӣ мефаҳмонем (расми18). Мувофиқи таърифи функсияи cos$x$ қиммати он дар доираи воҳиди абсциссаи нуқтаи Ах мебошад. Ҳангоми $|a|<1$ будан, ин хел нуқтаҳо 2-то, яъне A_{x1} ва A_{x2} мешавад. Ҳангоми a=1 ва a=-1 будан бошад 1-то мешавад.

Ҳалҳои ҳолатҳои муҳими муодилаи cos$x$=a -ро мебиёрем:
Ҳангоми a=1будан $x=2\pi k,\ k\in Z$; ҳангоми a=-1 будан $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$; ҳангоми a=0 будан $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k\in Z$ мешавад.

Мисоли 7. Муодиларо ҳал кунед: $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Аз формулаи ҳалли муодилаи cos$x$=0 баробарии $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ -ро ҳосил мекунем.Аз ин ҷо $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$.

Муодилаи tg*x*=*a*

Барои ҳал кардани ин муодила таърифи зеринро дохил мекунем. Арктангенси адади $a\in R$ *гуфта,* тангенси ба а баробари адади $x\in(-\pi/2;\pi/2)$ -ро мегӯянд: агар tg$x$=a ва $x\in(-\pi/2;\pi/2)$ бошад, arctg $a=x$ *мешавад.*

Азбаски $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ аст, пас tg$x$ ба нисбати ординатаи нуқтаи $B(x;y)$ бар абсциссааш баробар аст (расми 19). Яъне, ин нуқта нуқтаи буриши хати рости $\frac{y}{x} = a$ ва доираи воҳидӣ мебошад. Мувофиқи расми 19 ин хел нуқтаҳо 2-то: нуқтаҳои B_1 ва B_2. Бинобар ин ҳалли муодила чунин мешавад:

$$x=\mathrm{arctg}\,a+\pi n,\ n\in Z. \quad (3)$$

Мисоли 8. Ҳисоб кунед: 1) $\operatorname{arctg}1$; 2) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

△1) Азбаски $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ ва $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аст $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$;

2) Азбаски $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ ва $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ аст $\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$. ▲

Мисоли 9. Муодиларо ҳал кунед: $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$.

△Мувофиқи (3), ҳалҳои муодила чунин мешаванд:

Азбаски $x-\frac{\pi}{6}=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\pi n$ $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}(\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$ аст ҳалҳои муодила $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, ёки $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. ▲

Барои муодилаҳои соддатарин ҷадвали зеринро мебиёрем:

Муодила	Ҳалли онҳо	Баъзе хусусиятҳо
$\sin x=a$	$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in Z.$	$\arcsin(-a)=-\arcsin a,\ \lvert a\rvert\leqslant 1.$
$\cos x=a$	$x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z.$	$\arccos(-a)=\pi-\arccos a,\ \lvert a\rvert\leqslant 1.$
$\operatorname{tg}x=a$	$x=\operatorname{arctg}a+\pi k,\ k\in Z.$	$\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg}a,\ a\in R.$

Хосиятҳое. ки дар сутуни сеюм оварда шудаанд, имконияти ёфтани қимматҳои арксинуси (арккосинуси, арктангенси) ададҳои манфиро бо ёрии қимматҳои арксинуси ададҳои мусбат медиҳад. Масалан:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4},$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6},$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\pi}{6}.$$

Мисоли 10. Муодиларо ҳал кунед: $\cos(10x+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}$.

△ Ишоракунии $10x+\frac{\pi}{8}=z$ -ро дохил карда, муодилаи $\cos z=\frac{1}{2}$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо мувофиқи формулаи (2) соҳиб мешавем $z=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$ яъне $10x+\frac{\pi}{8}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ ёки $x=\frac{1}{10}\left(-\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in Z$. ▲

Муодилаҳои намуди $\sin x=\sin a$, $\cos x=\cos b$, $\mathrm{tg}\, x=\mathrm{tg}\, c$

Ҳалли ин намуд муодилаҳо, мувофиқан чунин мешаванд:
$x=(-1)^k a+\pi k,\ \ k\in Z;\quad x=\pm b+2\pi n,\ n\in Z;\quad x=c+\pi m,\ m\in Z.\qquad (4)$

Мисоли 11. Муодиларо ҳал кунед: $\cos(3x-40°) = \cos(2x+60°)$.

Мувофиқи формулаи (4), муодилаи $3x-40°=\pm(2x+60°)+360°n,\ n\in Z$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо номаълум х ёфта мешавад:

$$3x-40°=2x+60°+360°n \Leftrightarrow x=100°+360°n,\ n\in Z;$$
$$3x-40°=-2x-60°+360°n,\ 5x=-20°+360°n \Leftrightarrow x=-4°+72°n,\ n\in Z.$$

Мисоли 12. Муодиларо ҳал кунед: $\sin^2 x+3\sin x+2=0$.

Ишоракунии $\sin x=z$ -ро дохил карда, муодилаи квадратии $z^2+3z+2=0$ -ро ҳосил мекунем. Ин муодилаҳоро ҳал карда $z_1=-2,\ z_2=-1$ ёфта мешавад. Мувофиқи ишоракуни муодилаҳои $\sin z=-2$ ва $\sin x=-1$ -ро ҳосил мекунем. $\sin z=-2$ ҳал надорад. Муодилаи $\sin x=-1$ ба ҳалли $x=270°+360°k,\ k\in Z$ соҳиб аст. Пас, ҳалли муодила $x=270°+360°k,\ k\in Z$ мешавад.

Савол ва супоришҳо

1. Муодилаи $\sin x=a$ чӣ хел ҳал карда мешавад? Бо мисолҳо фаҳмонед.
2. Муодилаи $\cos x=a$ чӣ хел ҳал карда мешавад? Мисол биёред.
3. Муодилаи $\mathrm{tg}\, x=a$ чӣ хел ҳал карда мешавад? Бо мисолҳо фаҳмонед.
4. Ба адади arcsin a таъриф диҳед. Бо мисолҳо фаҳмонед.
5. Ба адади arccos a таъриф диҳед. Бо мисолҳо фаҳмонед.
6. Ба адади arctg a таъриф диҳед. Бо мисолҳо фаҳмонед.

Машқҳо

130. Ҳисоб кунед (**130–141**):

1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin\dfrac{1}{2}$; 4) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

131. 1) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; 3) $\arcsin 1$; 4) $\arcsin(-1)$.

132. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\arccos(-1)$.

133. 1) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; 2) $\arccos\dfrac{1}{2}$; 4) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

134. 1) $\operatorname{arctg} 1$; | 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; | 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 4) $3\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

135. 1) $\operatorname{arctg} 0$; | 2) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; | 3) $\operatorname{arctg}(-1)$; | 4) $7\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

136. 1) $\arcsin 1+\arcsin(-1)$; 2) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+4\arcsin\frac{1}{2}$.

137. 1) $4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

138. 1) $2\arccos 1+3\arccos 0$; 2) $6\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

139. 1) $2\arccos(-1)-3\arccos 0$; | 2) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

140. 1) $3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+3\arccos\frac{1}{2}$; 2) $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

141. 1) $2\operatorname{arctg} 1+3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})-3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

142. Маъно доштан ё надоштани ифодаҳоро муайян кунед (**142–143**):

1) $\arccos(\sqrt{8}-3)$; | 2) $\arcsin(2-\sqrt{15})$; | 3) $\arccos(3-\sqrt{18})$.

143. 1) $\operatorname{tg}(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})$; | 2) $\arcsin(\sqrt{6}-2)$; | 3) $\operatorname{tg}(3\arccos\frac{1}{2})$.

144. Муодиларо ҳал кунед (**144–161**):

1) $\sin x=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

145. 1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x=1$; 3) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

146. 1) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos 2x=-1$; 4) $\cos 3x=1$.

147. 1) $\cos x=\frac{1}{2}$; 2) $\cos x=-1$; 3) $\cos 5x=-\frac{1}{2}$; 4) $\cos 3x=-1$.

148. 1) $\text{tg}x=-\sqrt{3}$; 2) $\text{tg}x=1$; 3) $\text{tg}9x=-1$; 4) $\text{tg}3x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

149. 1) $\text{tg}x=0$; 2) $\text{tg}x=2$; 3) $\text{tg}6x=-3$; 4) $\text{tg}5x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

150. 1) $2\cos x+1=0$; | 2) $2\cos x-\sqrt{3}=0$; | 3) $2\cos x-\sqrt{2}=0$.

151. 1) $\sqrt{2}\sin x-1=0$; | 2) $2\sin x+\sqrt{3}=0$; | 3) $2\sin x+\sqrt{2}=0$.

152. 1) $\sin\left(-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; | 2) $\text{tg}\,4x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; | 3) $\cos(-3x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

153. 1) $2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; | 2) $\sqrt{3}\,\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$; | 3) $2\cos(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{6})=\sqrt{3}$.

154. 1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=-1$; 2) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{3}\right)=1$; 3) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$.

155. 1) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$; | 2) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$; | 3) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

156. 1) $(2\sin x+\sqrt{2})(\sin 4x+1)=0$; | 2) $(2-\cos x)(1+3\cos x)=0$.

157. 1) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; | 2) $4\cos^2 x-8\cos x-3=0$;
3) $2\sin^2 x-\sin x-6=0$; | 4) $2\cos^2 x-\cos x-6=0$.

158. 1) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; | 2) $4\cos^2 x-8\cos x-3=0$;
3) $2\sin^2 x-\sin x-6=0$; | 4) $2\cos^2 x-\cos x-6=0$.

159. 1) $2\cos^2 x-\sin x+1=0$; | 2) $\text{tg}^2 x-3\,\text{tg}\,x-4=0$;
3) $4\sin^2 x-\cos x-1=0$; | 4) $\text{tg}\,x-\sqrt{3}\,\text{tg}\,x+1=\sqrt{3}$.

160. 1) $\cos x=\cos2x$; 2) $\text{tg}2x=\text{tg}3x$; 3) $\sin7x=\sin3x$; 4) $\cos 4x=\cos 5x$.

161. 1) $\sin4x=\sin x$; 2) $\sin2x=\cos3x$; 3) $\text{tg}10x=\text{tg}8x$; 4) $\sin 5x=\sin 7x$.

62-64 НОБАРОБАРИҲОИ СОДДАТАРИНИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Нобаробариҳои намуди $a_1<\sin x<b_1$, $a_2<\cos x<b_2$, $a_3<\text{tg}x<b_3$ нобаробариҳои соддатарини тригонометрӣ номида мешаванд. Дар ин ҷо

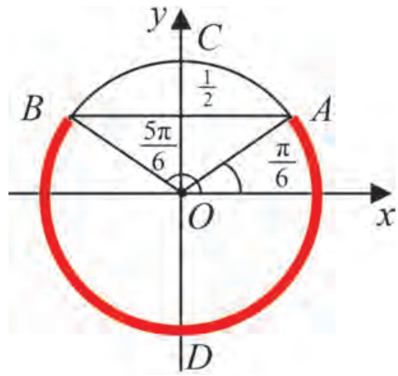
a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 – ададҳои ҳақиқии додашуда.

Ҳангоми ин намуд нобаробариҳоро ҳал кардан, аз доираи воҳидӣ ва графики функсия истифода кардан мувофиқ аст.

Мисоли 1. Нобаробарии $\sin x \leq 0,5$ -ро дар порчаи $[0, 2\pi]$ ҳал кунед.

△ Доираи воҳидиро дида мебароем. Дар ин доира нуқтаҳое ки ординатааш ба 0,5 баробар ва аз он хурдро меёбем. Аз расми 20 равшан аст, ки ҳамаи нуқтаҳои камони *BDA* шарти болоро қаноат мекунонад. Бинобар ин маҷмӯи ададҳои *x*, $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$ ҳалли нобаробарӣ мешавад.

Ҷавоб: $x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right]$ ▲

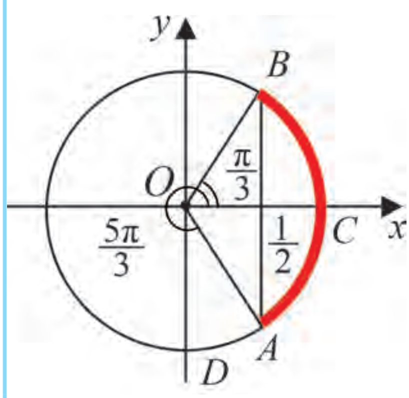


Расми 20

Мисоли 2. Нобаробарии $\cos x > \frac{1}{2}$ -ро дар порчаи $[0, 2\pi]$ ҳал кунед.

△ Дар доираи воҳиди нуқтаҳои абсциссаҳояш ба $\frac{1}{2}$ баробар ва аз он калонро меёбем. Аз расми 21 дида мешавад, ки ҳамаи нуқтаҳои камони *ACB* шарти болоро қаноат мекунонад. Бинобар ин маҷмӯи ададҳои *x* $\left[0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$ ҳалли нобаробарӣ мешавад.

Ҷавоб: $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$ ▲



Расми 21.

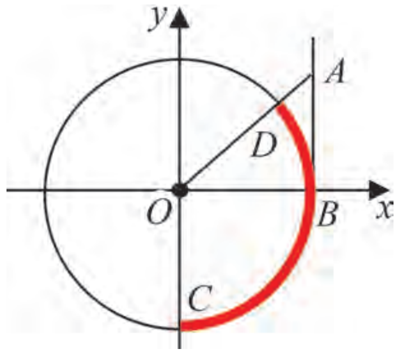
Мисоли 3. Нобаробарии $\mathrm{tg}x \leq 1$ -ро дар интервали $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ҳал кунед.

△ Аз нуқтаи *B*-и доираи воҳиди хати рости *AB*-и ба тири *OY* параллелро мегузаронем (расми 22).

Он гоҳ нуқтаи A-ро чунон интихоб мекунем ки $OB=AB$ шавад. Δ AOB секунҷаи баробарпаҳлӯ ва росткунҷа аст. Бигузор D нуқтаи буриши гипотенузаи OA бо давра бошад.

Аз расм дида мешавад, ки ҳамаи нуқтаҳои камони DBC нобаробарии додашударо қаноат мекунонад.

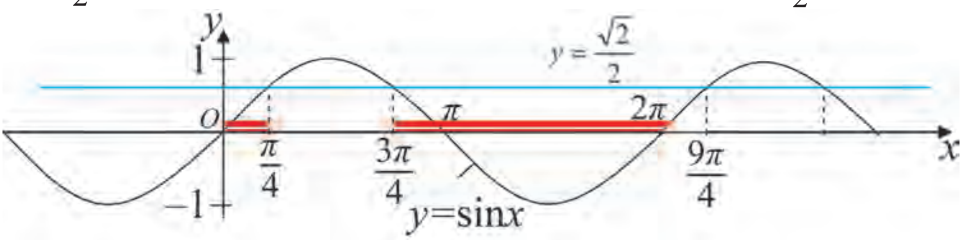
Ҷавоб: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$.



Расми 22.

Мисоли 4. Нобаробариро ҳал кунед: $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Дар як системаи координатаҳо графикҳои функсияҳои $y=\sin x$ ва $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро кашида (расми 23), ҳалли муодилаи $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро дар порчаи



Расми 23

$[0; 2\pi]$ меёбем. Аз расм дида мешавад, ки ҳалли нобаробарии $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ дар порчаи $[0; 2\pi]$ интервалҳои $\left[0; \frac{\pi}{4}\right)$ ва $\left(\frac{3\pi}{4}; 2\pi\right]$ мешавад. Аз даври будани функсия маҷмӯи $\left[2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; 2\pi(n+1)\right]$, $n \in Z$ -и x ҳалли нобаробарӣ аст.

Мисоли 5. Нобаробариро ҳал кунед: $-2\cos x \geq 1$.

Аввал дар як системаи координатаҳо графикҳои функсияҳои $y=\cos x$ ва $y=-\frac{1}{2}$ -ро мекашем. Баъдан ҳалли муодилаи $\cos x=-\frac{1}{2}$ -ро дар порчаи $[0; 2\pi]$, ки $\frac{2\pi}{3}$ ва $\frac{4\pi}{3}$ мебошад, меёбем. Пас, ҳалҳои нобаробарӣ аз порчаҳои

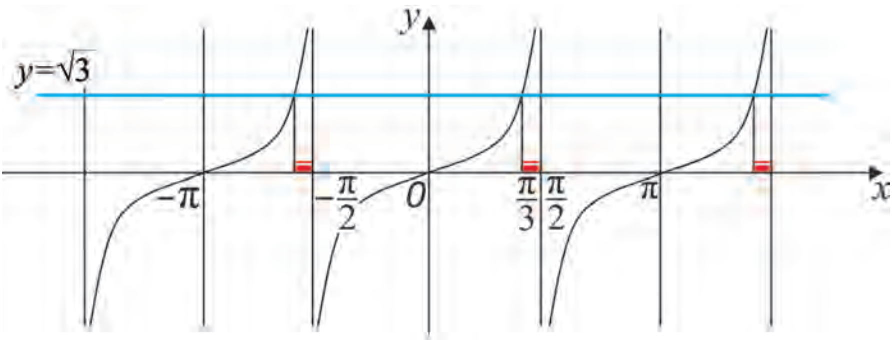
$\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in Z$ иборат будааст.▲

Мисоли 6. Нобаробариро ҳал кунед: $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$.

△ Графики функсияҳои $y = \operatorname{tg} x$ ва $y = \sqrt{3}$ -ро дар як системаи координатаҳо мекашем (расми 24). Баъдан ҳалли муодилаи $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ -ро дар порчаи [0; π] меёбем.

Ҳалли ин муодила $x = \frac{\pi}{3}$. Бинобар ин маҷмӯи ҳалли нобаробарӣ дар порчаи [0; π] интервали $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ мебошад. Аз он ки даври функсияи y=tg$x$ ба π баробар аст, истифода бурда, ҳамаи ҳалҳои нобаробариро меёбем:

$$\left[\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n \in Z.$$ ▲



Расми 24.

Савол ва супоришҳо

Нобаробариҳои $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, tg$x$>–1 чӣ хел ҳал карда мешавад?

Машқҳо

162. Нобаробариро дар интервали додашуда ҳал кунед:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$, $x \in [0; \pi]$;

2) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\cos x > \frac{1}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

5) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2},\ x\in[-\pi;0]$; 6) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

7) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2},\ x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$; 8) $\cos 2x \le \frac{\sqrt{2}}{2},\ x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

163. Нобаробариро ҳал кунед (**163–169**):

1) $\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

164. 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x > -1$; 3) $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x \le \frac{1}{2}$.

165. 1) $\sin 3x < \frac{1}{2}$; 2) $\sin\frac{x}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\operatorname{tg} 3x > 1$.

166. 1) $2\cos(2x+\frac{\pi}{3}) \le \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right) \ge 1$; 3) $2\cos(2x-\frac{\pi}{3}) > \sqrt{3}$.

167. 1) $\sin 2x\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x\sin\frac{\pi}{3} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $2\sin 2x\cos 2x \ge \frac{1}{2}$.

168. 1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos 3x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin 2x\sin\frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

169. 1) $\cos\left(\frac{x}{2}+1\right) \ge \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{4}-2\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\left(1-\frac{x}{3}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Намунаи корҳои назоратӣ

Муодилаҳоро ҳал кунед (**1–4**):

1. $\sin 3x = 0$.
2. $4\cos 6x = -2\sqrt{3}$.
3. $5\cdot\operatorname{tg} 4x = 3$.
4. $5\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 1 = 0$.

Нобаробариҳоро дар интервали $x\in[0;\pi]$ ҳал кунед (**5–6**):

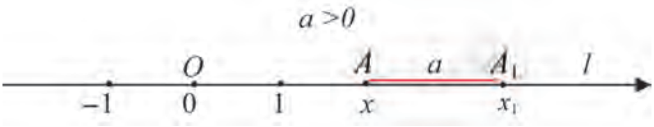
5. $\sin x > \frac{1}{2}$.
6. $\operatorname{tg} x \le -1$.

68 ҶОЙИВАЗКУНИИ ГРАФИКҲО

Кӯчиш

Тири ададӣ l ва нуқтаи O ҳисоби ибтидоии он бошад (расми 25), ҳар як нуқтаи ихтиёрии l ро ба воҳиди а кӯчонед. Агар $a>0$ бошад, кӯчиш дар самти мусбат (ба самти тир) мешавад. Агар $a<0$ бошад, кӯчиш ба самти муқобил мешавад, ҳангоми $a=0$ будан нуқтаҳо аз ҷойи худ намекӯчанд.

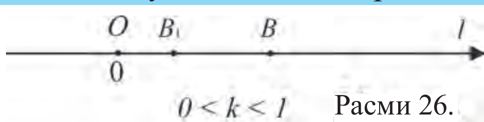
Агар ҳангоми нуқтаи $A=A(x)$-и координатааш x-ро ба воҳиди a кӯчонидан. ба нуқтаи $A_1(x_1)$ гузарад, координатаи нуқтаи A_1 аз рӯйи формулаи $x_1=x+a$ ёфта мешавад. Нуқтаи A акси (прообрази) нуқтаи A_1, A_1 бошад нусхаи (образи) нуқтаи A номида мешавад.



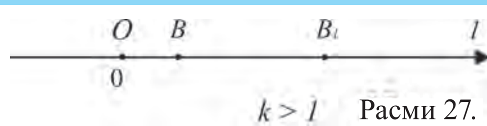
Расми 25.

Кашиш

Нуқтаи $B(x)$ дар хати рости l k-маротиба аз ибтидои координатаҳо дуртар карда шуда (ёки ба O наздик карда шуда) ба нуқтаи $B_1(x)$ гузаронида. координатаи нуқтаи B_1 аз рӯи формулаи $x = kx$ ҳисоб карда мешавад. Агар $k>0$ бошад, нуқтаҳои B_1 ва B дар як тарафи нуқтаи O, агар $k<0$ бошад, нуқтаҳои B_1 ва B дар тарафҳои гуногуни нуқтаи O ҷой мегиранд. Агар $|k|<1$ бошад, (расми 26) порчаи $x=OB$ *бурииш* k маротиба кӯтоҳ мешавад; агар $|k|>1$ бошад, (расми 27) порчаи k -маротиба дароз мешавад; ҳангоми $k=1$ нуқтаҳои B ва B_1 болоиҳам меафтанд, ҳангоми $k=-1$ будан онҳо нисбат ба нуқтаи O симметрӣ ҷойгир мешаванд.



Расми 26.

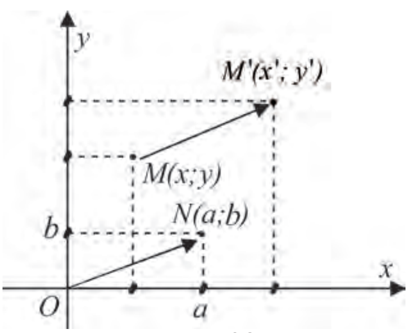


Расми 27.

Параллелкӯчонӣ

Ҳангоми параллелкӯчонӣ ҳамаи нуқтаҳои ҳамвории координатии xOy дар як хел самт ба як хел масофа мекӯчад (расми 28). Чунончи, агар ибтидои координата $O(0;0)$ ба нуқтаи $N(a;b)$ кӯчонида шуда бошад, нуқтаи $M(x;y)$ ба нуқтаи $M^1(x^1;y^1)$ мекӯчад. Барои координатаҳои нуқтаи $M^1(x^1;y^1)$ формулаи зерин ҷой дорад:

$$x^1=x+a,\ y^1=y+b.$$



Расми 28.

Ивазкунии графики функсия

Ҷойивазкуниҳои боло (кӯчиш, кашиш, параллелкӯчонӣ) бо ёрии графики функсияи $y=f(x)$ имконияти кашидани графики функсияҳои $y=f(x-a)+b$, $y = m\cdot f\left(\dfrac{x}{k}\right)$ (дар ин ҷо a, b, m, k – ададҳои доимӣ ва $m\neq0$, $k\neq0$)-ро медиҳад.

Масалан, барои кашидани графики функсияи $y=f(x-a)+b$ бо ёрии графики функсияи $y=f(x)$ ҳар як нуқтаи графики функсияи $y=f(x)$ -ро ба a воҳид ба тарафи рост кӯчонида баъдан ба b воҳид ба боло бардошта мешавад, яъне мувофиқи вектори $(a;b)$ параллел кӯчонида мешавад.

Барои кашидани графики функсияи $y = m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ бо ёрии графики функсияи $y=f(x)$ абсциссаи ҳар як нуқтаи графики $y=f(x)$ қад-қади Ox k маротиба фишурда мешавад (агар $k>0$ бошад, ба тарафи рост, $k<0$ бошад ба тарафи чап) ва ординатааш қад-қади тири Oy ба $м$ воҳид кашида мешавад ($m>0$ бошад ба боло, $m<0$ бошад ба поён).

Мисоли 1. Бо ёрии графики функсияи $y=3x$ графики функсияи $y=3(x–1)+4$ -ро кашед.

△Барои кашидани графики функсияи $y=3(x–1)+4$ графики функсияи $y=3x$ -ро мувофиқи вектори (1;4) параллел кӯчонидан лозим аст. ▲

Мисоли 2. Бо ёрии графики функсияи $y=-2x+4$ графики функсияи $y=-2(x+3)+5$-ро кашед.

△Барои кашидани графики функсияи $y=-2(x+3)+5$ графики функсияи $y=-2x+4$ -ро мувофиқи вектори (3;1) параллел кӯчонидан лозим аст. ▲

Мисоли 3. Аз графики функсияи параболаи $y=x^2$ истифода бурда, графики функсияи $y=2–(x+3)^2$ -ро кашед.

△Барои кашидани графики функсияи $y=2–(x+3)^2$ аввал графики функсияи $y=x^2$ ба 3 воҳид ба чап ва нисбат ба тири Ox симметрӣ кӯчонида мешавад. Баъдан графики ҳосилшуда мувофиқи тири Oy ба 2 воҳид боло бардошта мешавад. ▲

Мисоли 4. Бо ёрии графики функсияи $y=\sin x$ графики функсияи $y=\sin 2x$ -ро кашед.

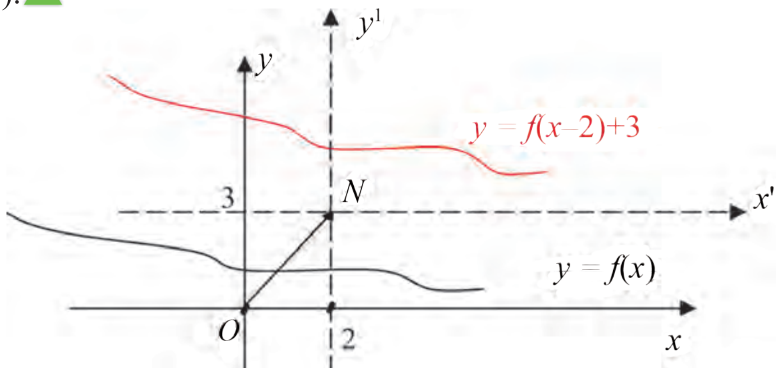
△Барои кашидани графики функсияи $y=\sin 2x$ кашидан абсциссаи ҳар як нуқтаи графики функсияи $y=\sin x$ қад қади тири Ox ду маротиба ба рост фишурда мешавад. ▲

Мисоли 5. Бо ёрии графики функсияи $y=\cos x$ графики функсияи $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ -ро кашед.

△Барои кашидани графики функсияи $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ёки $y = -2\cos 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ аввал графики функсияи $y=\cos x$ ба $\frac{\pi}{8}$ ба тарафи рост кӯчонида шуда, баъдан абсциссаaш ба тарафи рост 2 маротиба фишурда шуда, ординатааш ба боло 2 маротиба кашида мешавад. Баъдан графики охирин нисбат ба тири Ox симметрӣ кӯчонида мешавад. ▲

Мисоли 6. Бо ёрии графики функсияи $y=f(x)$ графики функсияи $y=f(x-2)+3$, -ро кашед.

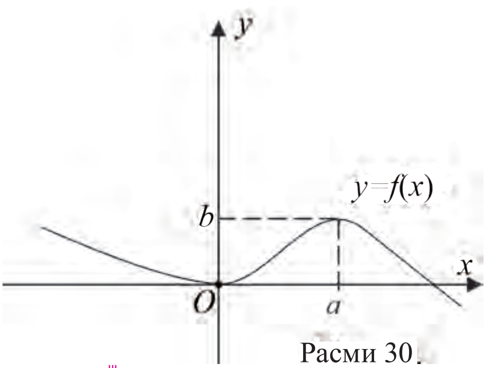
△ Барои кашидани графики функсияи $y=f(x-2)+3$ ҳар як нуқтаи графики функсияи $y=f(x)$ мувофиқи вектори (2;3) параллел кӯчонидан лозим аст (расми 29).▲



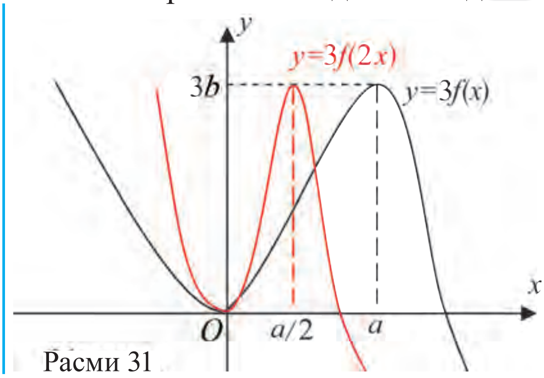
Расми 29. ▲

Мисоли 7. Бо ёрии графики функсияи $y=f(x)$ (расми 30) графики функсияи $y=3f(2x)$ -ро кашед (ҳолати $m=3$, $k=\frac{1}{2}$).

△ Графики функсияи $y=f(x)$ қад қади тири Ox ба тарафи рост 2 маротиба фишурда мешавад ва қад қади тири Oy ба боло 3 маротиба кашида мешавад.▲



Расми 30.



Расми 31

Савол ва супоришҳо

1. Кӯчонидан чист? Кашиш чист? Параллелкӯчонӣ чӣ? Мисолҳо биёред.

2. Бо ёрии графики функсияи $y=\sin x$ графики функсияи $y=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ -ро кашед.

Машқҳо

170. Бо ёрии графики функсияи $y=f(x)=x^2-2x+3$ графики функсияҳои додашударо кашед.

$1)\, y=f(x)+1;$ $2)\, y=3f(x);$ $3)\, y=3f(x)-2;$

$4)\, y=f(x-1)+1;$ $5)\, y=2f(x+1)+1;$ $6)\, y=f\left(\dfrac{x}{2}\right);$

$7)\, y=\dfrac{1}{2}f(2x);$ $8)\, y=f(2x)-3;$ $9)\, y=2f(2x)-5.$

171. Бо ёрии графики функсияи $y=f(x)=x^2-5x+6$ графики функсияҳои додашударо кашед.

$1)\, y=f(x-1);$ | $2)\, y=f\left(\dfrac{x}{3}\right);$ | $3)\, y=f(2x);$ | $4)\, y=3f\left(\dfrac{x}{3}\right)+1;$

$5)\, y=-f(x);$ | $6)\, y=2f(x)-3;$ | $7)\, y=-f(-x);$ | $8)\, y=2f(x+1)+5.$

172. Бо ёрии графики функсияи $y=\cos x$ графики функсияҳои додашударо кашед.

$1)\ y=\cos x-1;$ | $2)\ y=2\cos x+1;$

$3)\ y=-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right);$ | $4)\ y=3\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right).$

69-70 ГРАФИКҲОИ ФУНКСИЯҲОИ СОДДАТАРИНЕ,КИ ДАР НАМУДИ ПАРАМЕТРӢ ДОДА ШУДААНД

Бигузор координатаҳои нуқтаи (x,y) аз параметри t алоқаманд бошад: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Ҳангоми дар ягон интервали T тағйир ёфтани t маҷмӯи нуқтаҳои $(\varphi(t), \psi(t))$ чӣ хел мешаванд. Ин маҷмӯро графики функсияи дар намуди параметрӣ додашуда меномем.

Мисоли 1. Координатаҳои нуқтаи моддӣ дар намуди параметри $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=5t+8 \end{cases}$ дода шудааст. Дар давоми ҳаракати худ хати кашидаи (траекторияи) ин нуқтаи моддиро ёбед.

△ Аз муодилаҳо параметри t-ро меёбем: $t=\dfrac{x-1}{3}$ ва $t=\dfrac{y-8}{5}$.

Аз ифодаҳои ҳосилшуда ба муодилаи $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-8}{5}$ меоем. Аз ин ҷо $5x-5=3y-24$ ёки $5x-3y+19=0$. Ин муодилаи хати рост аст. Пас, функсияи ҷусташудаистода $3y=5x+19$ ёки $y=\frac{5}{3}x+\frac{19}{3}$ будааст.

Ҷавоб: $y=\frac{5}{3}x+\frac{19}{3}$.

Мисоли 2. Графики функсияи дар намуди параметрӣ додашуда $\begin{cases} x=3+5\sin t, \\ y=-7+5\cos t \end{cases}$ чӣ хел хат мешавад?

Аз баробариҳои додашуда $\sin t=\frac{x-3}{5}$, $\cos t=\frac{y+7}{5}$ буданашро меёбем.

Аз айнияти $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ истифода бурда, ба муодилаи $\left(\frac{x-3}{5}\right)^2+\left(\frac{y+7}{5}\right)^2=1$ меоем. Аз ин ҷо $(x-3)^2+(y+7)^2=25$. Ин муодилаи давраи марказаш дар нуқтаи (3;-7) ва радиусаш $r=5$ мебошад.

Мисоли 3. Агар координатаҳои нуқтаи моддӣ аз рӯйи қонунияти $x=7t^2+1$ ва $y=3t$ тағйир ёбад, алоқамандии байни x ва y ро муайян кунед, $t\geq 0$.

Аз қонуниятҳои додашуда t-ро муайян мекунем: $t=\sqrt{\frac{x-1}{7}}$, $t=\frac{y}{3}$. Аз ин ифодаҳо муодилаи зеринро соҳиб мешавем: $\frac{y}{3}=\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ Аз ин дар охир функсияи $y=3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ -ро меёбем. Пас, функсияи $y=3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ дар ҷустуҷӯ будааст.

Мисоли 4. Графики функсияи дар намуди параметрӣ додашуда $\begin{cases} x=4\sin t, \\ y=3\cos t \end{cases}$ чӣ хел хат мешавад, дар ин ҷо $0\leq t\leq 2\pi$?

Аз баробариҳои додашуда $\sin t=\frac{x}{4}$ ва $\cos t=\frac{y}{3}$ буданашро меёбем. Аз айнияти $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ истифода бурда муодилаи $(\frac{x}{4})^2+(\frac{y}{3})^2=1$ ёки $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$-ро ҳосил мекунем. Маҷмӯи нуқтаҳои бо ин муодила додашуда, ки марказаш ба ибтидои координата ва нимтирҳояш ба $a=4$, $b=3$ баробар аст *эллипс* номида мешавад.

Савол ва супоришҳо

Ба функсияҳои намуди параметрӣ дошта мисолҳо биёред.

Машқҳо

173. Координатаҳои нуқтаи моддӣ дар намуди параметрӣ дода шудааст. Формулаи хатӣ дар давоми ҳаракати худ кашидаи (траекторияи нуқтаи моддӣ) ин нуқтаи моддиро ёбед. Расми мувофиқ кашед:

1) $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 4t + 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 6t + 4, \\ y = 9t + 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 4t + 9, \\ y = 7t + 18; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 12t + 11, \\ y = 15t + 18. \end{cases}$

174. Координатаҳои нуқтаи моддӣ дар намуди параметрӣ дода шудааст. Алоқамандии байни координатаҳои x ва y-ро муайян кунед:

1) $\begin{cases} x = 17t^2 + 1, \\ y = 13t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 27t^2 + 21, \\ y = 23t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 37t^2 + 31, \\ y = 33t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 47t^2 + 41, \\ y = 43t. \end{cases}$

175. Графики функсияи дар намуди параметрӣ додашуда аз чӣ хел хат иборат мешавад? Расми мувофиқро кашед:

1) $\begin{cases} x = 7\sin t, \\ y = 7\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 5\sin t, \\ y = 5\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 9\sin t, \\ y = 9\cos t, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

176. Графики функсияи дар намуди параметрӣ додашуда аз чӣ хел хат иборат мешавад? Расми мувофиқро кашед:

1) $\begin{cases} x = 6\sin t + 3, \\ y = 6\cos t + 7, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3\sin t, \\ y = 3\cos t - 1, \\ 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2\sin t - 3, \\ y = 2\cos t + 7, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

71 ФУНКСИЯИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ГРАФИКИ ОН

Дараҷа ва хосиятҳои он

Дараҷаи нишондиҳандаи адади ҳақиқӣ ба хосиятҳои зерин соҳиб аст ($a>0$, $a \neq 1$):

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$; 3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;

4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

6) агар $0<a<b$ ва $x>0$ бошад, $a^x<b^x$; 7) агар $0<a<b$ ва $x<0$ бошад, $a^x>b^x$;
8) агар $x<y$ ва $a>1$ бошад, $a^x<a^y$; 9) агар $x<y$ ва $0<a<1$ бошад, $a^x>a^y$ мешавад.

Мисоли 1. Муқоиса кунед: $2^{-\sqrt{3}}$ ва $3^{-\sqrt{3}}$.

△ Мувофиқи хосияти 7 азбаски $0<2<3$ ва $-\sqrt{3} < 0$ аст $2^{-\sqrt{3}} > 3^{-\sqrt{3}}$. мешавад. ▲

Мисоли 2. Муқоиса кунед $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2}$ ва $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$.

△ Мувофиқи хосияти 9 азбаски $0,2<0,3$ аст $0 < \frac{1}{2} < 1$ мешавад. $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$. ▲

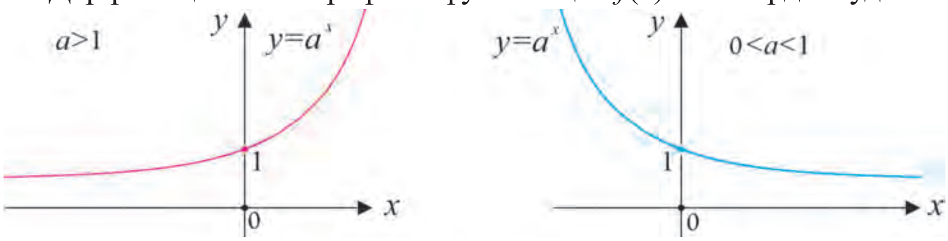
Функсияи нишондиҳандагӣ ва хосиятҳои он

Функсияи намуди $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq1$ функсияи нишондиҳандаги номида мешавад.

Ин хели функсияҳо ба хосиятҳои зерин соҳиб аст:

1) Соҳаи муайяниаш аз интервали $(-\infty;\ +\infty)$;
2) Соҳаи қимматҳояш аз интервали $(0;\ +\infty)$ иборат;
3) Барои ҳамаи $a(a>0,\ a\neq1)$ -ҳо $a^0=1$;
4) Агар $a>1$ бошад, функсия афзуншаванда;
5) Агар $0<a<1$бошад, функсия камшаванда мебошад.

Дар расмҳои поён графики функсияҳои $f(x)=a^x$ оварда шудааст.



Савол ва супоришҳо

1.Хосиятҳои дараҷаи нишондиҳандагии адади ҳақиқиро гӯед. Мисолҳо биёред.

2. Хосиятҳои функсияи нишондиҳандагиро гӯед.

Машқҳо

177. Ҳисоб кунед:

1) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; 2) $9^{\sqrt{3}}:3^{2\sqrt{3}}$ 3) $\left(2^{\sqrt[3]{4}}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $4^{6\sqrt{2}-1}\cdot16^{1-3\sqrt{2}}$.

178. Муқоиса кунед (**178–179**):

1) $2^{-\sqrt{3}}$ ва 1; 2) $4^{-\sqrt{6}}$ ва $\left(\frac{1}{2}\right)^4$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ ва 1.

179. 1) $-3^{\sqrt{2}}$ ва 1; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$ ва $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ ва $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

180. Афзуншаванда ёки камшаванда будани функсияҳоро муайян кунед (**180–182**):

1) $y=4^x$; 2) $y=-3^x$; 3) $y=5^x-2$; 4) $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$.

181. 1) $y=\sqrt{3}^x$; 2) $y=(\frac{1}{\sqrt{3}})^x$; 3) $y=(\frac{\pi}{3})^x$; 4) $y=(\sqrt{3}-1)^x$.

182. 1) $y=(\sqrt{3}-1)^{-x}$; 2) $y=(\sqrt{10}-2)^x$; 3) $y=\left(\pi-\sqrt{2}\right)^x-3$.

72-74 НОБАРОБАРИҲОИ НИШОНДИҲАНДАГИИ БЕВОСИТА ҲАЛШАВАНДА

Нобарибарихои намуди $a^{f(x)}>a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$

Нобаробарии $a^{f(x)}>a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$ ба нобаробарии нишондиҳандагӣ мисол шуда метавонад. Ин нобаробарӣ ҳангоми $a>1$ будан ба нобаробарии $f(x)>g(x)$ ҳангоми $0<a<1$ ба нобаробарии $f(x)<g(x)$ баробарқувва аст.

Мисоли 1. Нобаробариро ҳал кунед: $3^{x+5}>3^{2-5x}$.

△ Азбаски $a=3>1$ аст нобаробарии додашуда ба нобаробарии $x+5>2-5x$ баробарқувва аст. Аз ин ҷо $6x>-3$ ёки $x>-0,5$ буданашро меёбем. Пас, ҳалли нобаробарӣ аз интервали $(-0,5;\infty)$ иборат аст. *Ҷавоб*: $x\in(-0,5;\infty)$. ▲

Мисоли 2. Нобаробариро ҳал кунед: $2\cdot3^{x+2}-2\cdot3^{x+1}-5\cdot3^{x}<63$.

△ 3^x -ро аз қавс берун мебарорем: $3^x(2\cdot3^2-2\cdot3-5\cdot1)<63$. Баъди содда гардонидан нобаробарии $3^x<9$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $x<2$.
Ҷавоб: $x\in(-\infty;\ 2)$. ▲

Мисоли 3. Нобаробариро ҳал кунед: $8^{5x^2-46}\geq 8^{2(x^2+1)}$.

△ Ин нобаробарӣ ҳангоми $a=8>1$ будан ба нобаробарии $5x^2-46\geq2(x^2+1)$ баробарқувва аст. Ин нобаробариро ҳал мекунем: $3x^2\geq48$, аз ин ҷо $x^2\geq16$. Пас, ҳалли нобаробарии додашуда $x\in(-\infty;\ -4]\cup[4;\ +\infty)$ мешавад. ▲

Ҳангоми $a^x<b$ будан, ҳал надоштани нобаробарии ($a>0$, $a\neq1$) $b<0$ ва ҳангоми $a^x>b$ будан, ҳалли нобаробарии $b<0$ аз интервали $(-\infty;+\infty)$ иборат буданаш равшан аст.

Мисоли 4. Нобаробариро ҳал кунед: $4^x+2^x-6\geq0$.

△ Ивазкунии $2^x=t$ -ро амалӣ гардонида, нобаробарии квадратии $t^2+t-6\geq0$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $t\leq-3$, $t\geq2$ буданашро меёбем. Аз он ба нобаробариҳои $2^x\geq2$ ва $2^x\leq-3$ -ро соҳиб мешавем. Аз нобаробарии 1-ҳалли $x\geq1$-ро меёбем, нобаробарии 2-бошад ҳал надорад. Пас, ҳалли нобаробарии додашуда аз интервали $[1;\ +\infty;)$ иборат аст. *Ҷавоб*: $x\in[1;\ +\infty)$. ▲

Савол ва супоришҳо

Дар бораи нобаробариҳои $a^{f(x)}>a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq1$ маълумот диҳед. Мисолҳо биёред.

Машқҳо

183. Нобаробариро ҳал кунед: (**183–184**):

1) $4^{3x+5}\leq4^{3-5x}$; 2) $7^{4x+5}<7^{9-5x}$; 3) $6^{x+5}>6^{3x}$, 4) $8^{x+5}\leq8^{2-5x}$;
5) $11^x<11^{2+5x}$; 6) $2^{x-5}>2^{25x}$; 7) $2\cdot2^{x+2}-3\cdot2^{x+1}-5\cdot2^x\leq-6$;

8) $3\cdot5^{x+3}-5^{x+2}-2\cdot5^{x+1}<68$; 9) $2\cdot4^{x+2}+4^{x+1}-5\cdot4^{x}\le31$;

10) $2\cdot7^{x+2}-2\cdot7^{x+1}-14\cdot7^{x}<10$. 11) $13^{x^2+46}\le13^{x^2+25x}$;

12) $3^{x^2-4x}<3^{2\left(x^2-15\right)}$; 13) $7^{2x^2-4}\le7^{3\left(x^2-x\right)}$.

184. 1) $9^{x}+3^{x}-6\le84$; 2) $25^{x}+5^{x}-30>0$;

3) $5\cdot4^{x}+2^{x}-6\le0$; 4) $9^{x}+3^{x}-12>0$.

Намунаҳои корҳои санҷишӣ

1. 1. Графики функсияи намуди $\begin{cases} x=7\sin5t \\ y=7\cos5t \end{cases}$ -ро созед.

2. 2. Хосиятҳои функсияи $y=11^{x}+7$-ро нависед.

Нобаробариро ҳал кунед: (**3–5**):

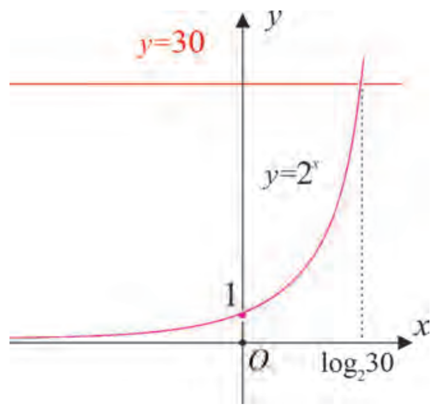
3. $6^{x^2-7x-1}<6^{7}$. 4. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{17x}\ge\left(\dfrac{1}{2}\right)^{54-x}$. 5. $0,7^{-3x}\le1$.

75-78 МАЪЛУМОТ ДАР БОРАИ ЛОГАРИФМ. ФУНКСИЯИ ЛОГАРИФМӢ. МУОДИЛА ВА НОБАРОБАРИҲОИ ЛОГАРИФМИИ СОДДАТАРИН

Маълумот дар бораи логарифм

Решаи муодилаи $2x=32$ ба $x=5$ баробар, аммо решаи муодилаи $2x=30$ чӣ хел ёфта мешавад? Барои ҳал кардани чунин муодилаҳо мавҳуми логарифмро дохил мекунанд. Муодилаи $2x=30$ ба решаи ягона соҳиб аст. Онро аз расми 32 дидан мумкин.

Ин реша логарифми адади 30 нисбат ба асоси 2 номида мешавад ва монанди $\log_2 30$ ишора карда мешавад. Пас, решаи муодилаи 2x=30 адади $x=\log_2 30$ мебошад.



Расми 32

Таърифи зеринро мебиёрем:

Логарифми адади мусбати b нисбат ба асоси a гуфта, нишондиҳандаи дараҷаеро меноманд, ки барои ҳосил кардани адади b асос a -ро ба он бардоштан лозим аст, мегӯянд ва бо $\log_a b$ ишора мекунанд. Асоси $a>0$ ва $a\neq1$ бояд шартро қаноат кунонад.

Масалан, $\log_3$ чунки 9=32. Монанди ин, $\log_2\dfrac{1}{8}=-3$; $\log_5 5=1$; $\log_7 1=0$.

Мисоли 1. Ҳисоб кунед: $\log_3 81$.

△ Мувофиқи таърифи логарифм, азбаски $3^4=81$ аст $\log_3 81=4$. ▲

Хосиятҳои логарифм

• Айнияти асосии логарифм: агар $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$ бошад, баробарии $a^{\log_a b}=b$ ҷой дорад;

• Агар $a>0$, $a\neq 1$ бошад, $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$; мешавад;

• Агар $a>0$, $a\neq 1$ ва $x>0$, $y>0$ бошад, $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$ мешавад;

• Агар $a>0$, $a\neq 1$ ва $x>0$, $y>0$ бошад, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x-\log_a y$ мешавад;

• Агар $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$ бошад, $\log_a x^n = n\cdot\log_a x$ мешавад;

• формулаи аз як асос (ба асоси нав) ба асоси дигар гӯзаштан: агар $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $b>0$, $b\neq 1$ бошад, $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ мешавад;

• Агар $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ бошад, $\log_a b\cdot\log_b a=1$ мешавад.

Ишоракуниҳои $\log_{10}x=\lg x$ ва $\log_e x=\ln x$ (e=2,718281.....) қабул карда шудааст.

Дар ин ҷо $\lg x$ логарифми даҳии x, $\ln x$ бошад, логарифми натуралии x номида мешавад. Функсияи $f(x)=\log_a x$ дар ин ҷо x-аргумент, $a>0$, $a\neq 1$) a функсияи логарифмии асоси а номида мешавад.

Хосиятҳои функсияҳои логарифмӣ:

• Соҳаи муайяниаш интервали $(0;\ +\infty)$

• Маҷмӯи қимматҳояш $\mathbb{R}=(-\infty;\ +\infty)$;

• Нол: яъне $x=1$, $\log_a 1=0$.

• Агар $a>1$ бошад, функсияи логарифми дар $(0;\ +\infty)$ афзуншаванда;

• Агар $0<a<1$ бошад, функсияи логарифмӣ дар $(0;\ +\infty)$ камшаванда.

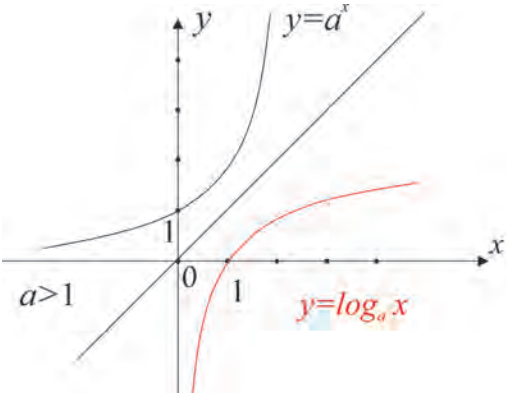
Мисоли 2. Муқоиса кунед: $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ ва 0.

△ $\log_{\frac{1}{2}}1=0$, асосаш $a=\frac{1}{2}$, яъне функсия камшаванда аз $0<\frac{1}{2}<1$ ва $0<\frac{1}{3}<1$ буданаш $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}1$ мешавад. Пас, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>0$ аст. ▲

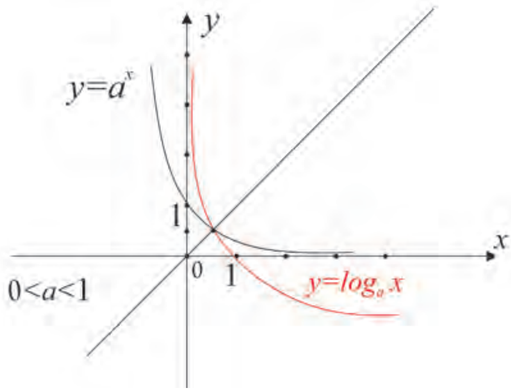
Мисоли 3. Соҳаи муайянии функсияро ёбед: $f(x)=\log_2\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$.

△Соҳаи муайянии ин функсияи логарифмӣ аз маҷмӯи ҳамаи қимматҳои x, ки нобаробарии $\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}>0$-ро қаноат мекунонад иборат аст. Ин нобаробариро ҳал карда, соҳаи муайянии функсия аз $x \in (1;2) \cup (3;+\infty)$ буданашро меёбем.

Дар расмҳои 33 ва 34 дар якҷоягӣ графикҳои функсияҳои $y=a^x$ ва $y=\log_a x$ (барои ҳолатҳои $a>1$ ва $0<a<1$) тасвир карда шудаанд.



Расми 33



Расми 34

Мисоли 4. Муқоиса кунед: $\log_3 2+\log_3 8$ ва $\log_3(2+8)$.

Аз хосиятҳои логарифм истифода мебарем: $\log_3 2+\log_3 8=\log_3(2\cdot 8)=\log_3 16$ $\log_3(2+8)=\log_3 10$. Азбаски асоси логарифм $3>1$ пас $\log_3 16>\log_3 10$.
Аз ин ҷо: $\log_3 2+\log_3 8>\log_3(2+8)$.

Мисоли 5. Ҳисоб кунед: $A=4^{\log_8 125}+27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4}$.

Аз хосиятҳои логарифм истифода мебарем: $\frac{1}{2}\log_3 4=\log_3 2;$

$$\log_8 125=\frac{\log_2 125}{\log_2 8}=\frac{3\log_2 5}{3}=\log_2 5;\quad 4^{\log_8 125}=4^{\log_2 5}=2^{2\log_2 5}=2^{\log_2 25}=25.$$

Ҳамчунин: $27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4}=27^{\frac{1}{3}-\log_3 2}=27^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{-\log_3 2}=$

$$=3\cdot 3^{-3\log_3 2}=3\cdot 3^{\log_3\frac{1}{8}}=3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$ Пас: $A=25+\frac{3}{8}=25\frac{3}{8}$.

Мисоли 6. Ҳисоб кунед: $\dfrac{\lg 54+\lg\frac{1}{2}}{\lg 72-\lg 8}$.

Аз хосиятҳои логарифм истифода мебарем:

$$\lg 54+\lg\frac{1}{2}=\lg(54\cdot\frac{1}{2})=\lg 27=\lg 3^3=3\lg 3,$$

$$\lg 72-\lg 8=\lg\frac{72}{8}=\lg 9=\lg 3^2=2\lg 3.$$

Он гоҳ: $\dfrac{\lg 54+\lg\dfrac{1}{2}}{\lg 72-\lg 8}=\dfrac{3\lg 3}{2\lg 3}=\dfrac{3}{2}$. *Ҷавоб*: $\dfrac{3}{2}$. ▲

Муодилаҳои соддатарини логарифмӣ

Муодилаи намуди $\log_a x=b$ ($a>0$, $a\neq1$, b – адади ҳақиқӣ) –ро муодилаи соддатарини логарифмӣ гуфта мешавад. Ҳалли ягонаи ин муодила: $x=a^b$.

Мисоли 7. Муодиларо ҳал кунед: $\log_3 x=\dfrac{1}{2}$.

△Мувофиқи таърифи логарифм, ҳалли он $x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$. *Ҷавоб*: $x=\sqrt{3}$. ▲

Мисоли 8. Муодиларо ҳал кунед: $\log_x 16=2$.

△Мувофиқи таърифи логарифм, $x^2=16$ ва $x>0$, $x\neq1$ Пас, ҳалли муодила $x=4$ будааст.

Ҷавоб: $x=4$. ▲

Мисоли 9. Муодиларо ҳал кунед:

$\log_2(x^2-5x+10)=4$.

△Мувофиқи таърифи логарифм, муодилаи $x^2-5x+10=2^4$ -ро ҳосил мекунем. Муодилаи квадратиро ҳал карда решаҳои $x_1=-1$, $x_2=6$ -ро меёбем. Пас, ҳалли муодила $\{-1; 6\}$ будааст. *Ҷавоб*: $x=-1$, $x=6$. ▲

Мисоли 10. Муодиларо ҳал кунед: $\lg(2x-3)=\lg(x-1)$.

△Мувофиқи таърифи логарифм, $2x–3>0$, $x>1$ буданаш лозим. Соҳаи муайянии ин функсия аз интервали $x>\dfrac{3}{2}$ иборат аст. Мувофиқи хосияти логарифм, ба муодилаи $2x-3=x-1$ меоем, аз ин ҷо $x=2$. Ин реша ба соҳаи муайянӣ тааллуқ дорад. *Ҷавоб*: $x=2$. ▲

Мисоли 11. Муодиларо ҳал кунед: $\log_x(x+2)=2$.

△Соҳаи муайянии муодиларо меёбем: $x+2>0$ $x>0$, $x\neq1$, яъне дар маҷмӯи $(0,1)\cup(1;\infty)$ муодила муайян шудааст. Мувофиқи таърифи логарифм, муодилаи $x+2=x^2$ -ро ҳосил мекунем. Ин муодилаи квадратиро ҳал карда решаҳои $x_1=-1$, $x_2=2$ -ро меёбем. Аз ин решаҳо фақат $x=2$ ба соҳаи муайянӣ мутааллиқ аст. Бинобар ин у ҳалли муодила мешавад. *Ҷавоб*: $x=2$. ▲

Мисоли 12. Муодиларо ҳал кунед: $\log_3^2 x-5\log_3 x+6=0$.

△ Ишоракунии $t=\log_3 x$ -ро дохил карда, муодилаи квадратии $t^2–5t+6=0$ -ро ҳосил мекунем. Онро ҳал карда, решаҳои $t=2$ ва $t=3$ -ро меёбем. Решаҳои ёфташударо ба $t=\log_3 x$ гузошта, баробариҳои $\log_3 x=2$ ва $\log_3 x=3$ -ро соҳиб мешавем. Ҳалли ин муодилаҳо, мувофиқан ба $x=9$ ва $x=27$ баробар аст. ▲

Нобаробарии соддатарини логарифмӣ

Нобаробарии намуди $\log_a x > b$ ($a>0$, $a\neq 1$, b – адади ҳақиқӣ)-ро нобаробарии соддатарини логарифмӣ гуфтан мумкин аст.

Мисоли 13. Нобаробариро ҳал кунед: $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > -3$.

△ Бояд $3-x>0$ бошад. Аз он ки $-3=\log_{\frac{1}{2}} 8$ аст, пас $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > \log_{\frac{1}{2}} 8$. мешавад. Азбаски асос $a=\frac{1}{2}<1$ аст, функсияи логарифмӣ камшаванда аст, пас $3-x<8$ ва $0<3-x<8$. мешавад. Аз ин ҷо ба нобаробариҳои $-3<-x<5$ ёки $-5<x<3$ меоем. *Ҷавоб*: $x\in(-5; 3)$. ▲

Мисоли 14. Нобаробариро ҳал кунед $\lg(x+1) < \lg(2x-3)$.

△ Аз хосиятҳои функсияи логарифмӣ нобаробариҳои зеринро ноил меша вем:

$$\begin{cases} x+1<2x-3, \\ x+1>0, \\ 2x-3>0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x>4, \\ x>-1, \\ x>\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ҳалли ин система аз интервали $(4; +\infty)$ иборат. *Ҷавоб*: $x\in(4; +\infty)$. ▲

Мисоли 15. Нобаробариро ҳал кунед $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 9 \le 0$.

△ Мувофиқи таърифи функсияи логарифмӣ, бояд $x>0$ бошад. Ишораи $t=\log_{\frac{1}{2}} x$ -ро дохил мекунем. Он гоҳ нобаробарии $t^2-9\le 0$-ро ҳосил мекунем. Ин нобаробариро ҳал карда, ба нобаробариҳои $-3\le t\le 3$, яъне $-3\le\log_{\frac{1}{2}} x\le 3$ ноил мешавем. Азбаски $-3=\log_{\frac{1}{2}} 8$; $3=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$ аст, пас $\log_{\frac{1}{2}} 8 \le \log_{\frac{1}{2}} x \le \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$ мешавад. Азбаски асос $a=\frac{1}{2}<1$ аст, функсияи $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ камшаванда ва бояд, $\frac{1}{8}\le x\le 8$ шавад. *Ҷавоб*: $x\in[\frac{1}{8}; 8]$. ▲

Савол ва супоришҳо

1. Ба логарифм таъриф диҳед. Мисол биёред.
2. Хосиятҳои логарифмро гӯед. Дар мисолҳо фаҳмонед.
3. Хосиятҳои функсияҳои логарифмиро гӯед.
4. Муодилаи соддатарини логарифмӣ чист ва он чӣ хел ҳал карда мешавад?
5. Нобаробарии соддатарини логарифмӣ чист ва он чӣ хел ҳал карда мешавад? Мисол биёред.

Машқҳо

185. Ҳисоб кунед:

1) $\log_5 125$; | 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; | 3) $\log_5 0,04$; | 4) $\log_{0,1} 1000$; | 5) $\log_3 \frac{1}{27}$.

186. Муқоиса кунед:

1) $\log_2 3$ ва $\log_2 5$; | 2) $\frac{\log_2 3}{\log_2 5}$ ва $\log_5 4$; | 3) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ ва $\log_{\frac{1}{2}} 5$;

4) $\log_2 3$ ва 1; | 5) $\log_3 2 + \log_3 5$ ва $\log_3(2+5)$; | 6) $\log_7 \frac{1}{2}$ ва 0.

187. Ҳисоб кунед:

1) $1,5^{\log_{1,5} 2}$; | 2) $e^{\ln 5}$; | 3) $2^{3\log_2 5}$; | 4) $3^{2+\log_3 5}$; | 5) $7^{-2\log_7 6}$;

6) $3^{3-\log_3 54}$; | 7) $\log_6 2 + \log_6 18$; | 8) $\lg 25 + \lg 4$; | 9) $\log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{5}$;

10) $\frac{\lg 2 + \lg 162}{2\lg 3 + \lg 2}$; 11) $\log_4 7 - \log_4 \frac{7}{16}$; 12) $\frac{\ln 64}{\ln 4}$.

188. Соҳаи муайянии функсияҳоро ёбед:

1) $y = \log_3(2x-5)$; | 2) $y = \log_7(x^2 - 2x - 3)$; | 3) $y = \log_5(4 - x^2)$.

4) $y = \log_2(x^2 - 2x + 1)$; | 5) $y = \log_{\sqrt{2}}(3 - x)$; | 6) $y = \log_2 \frac{x-1}{x+2}$.

189. Графики функсияро кашед:

1) $y = \log_2 x$; | 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; | 3) $y = \log_4(x-1)$; | 4) $y = -\log_3 x$.

190. Муодиларо ҳал кунед:

1) $\log_2 x = -5$; 2) $\log_{\sqrt{3}} x = 0$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; 4) $\log_x 128 = 7$;

5) $\log_9 x = \frac{1}{2}$; 6) $\log_{\sqrt{x}} 27 = 3$; 7) $\log_3 x = 5$;

8) $\log_2(x-5) = \log_2(4x+1)$; | 9) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; | 10) $\log_5(3-2x) = \log_{\frac{1}{5}} x$;

11) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-6) = -2$; | 12) $\log_2(x+1) + \log_2(8-x) = 3$; | 13) $\log_x 5 = 2$;

14) $\lg(x^2 + x - 10) - \lg(x-3) = 1$; 15) $\log_7^2 x - \log_7 x = 2$;

16) $5^{4-x}=6$; | 17) $\log_x 3+\log_3 x=2$; | 18) $5^{x^2}=6$; | 19) $5^{x^2}=\frac{1}{2}$;

20) $\lg(x^2-6x+19)=1$; | 21) $\log_5(5^x-4)=1-x$; | 22) $\lg(x^2-21)=2$.

191. Нобаробариро ҳал кунед:

1) $\log_8 x>2$; | 2) $\log_3^2 x-3>2\cdot\log_3 x$; | 3) $\log_8 x<2$; | 4) $\log_{\frac{1}{2}} x>1$;

5) $\lg(3-2x)>1$; | 6) $2^{x+1}<3$; | 7) $\log_3(2x-4)<\log_3(x+1)$; | 8) $2^{|x+1|}>3$.

79-81 МОДЕЛГАРДОНӢ БО ЁРИИ ФУНКСИЯҲОИ НИШОНДИҲАНДАГӢ ВА ЛОГАРИФМӢ.

Мисоли 1. Баъди гузаштани вақти муайян бактерия (якчанд соат, ёки, якчанд дақиқа) ба ду тақсим мешавад ва адади бактерияҳо дучанд меафзояд. Баъди гузаштани вақти навбатӣ ду бактерияи мазкур низ ба ду тақсим мешавад ва миқдори популатсия (адади умумии бактерияҳо) боз ду маротиба меафзояд; акнун, адади бактерияҳо чорто мешаванд. Дар шароитҳои қулай ин ҷараёни афзуншавӣ (ресурсҳои зарурӣ барои популатсия: ҷой, хӯрока, об, энергия ва ҳоказоҳо) такрор шудан мегирад.

Фарз мекунем, ки даставвал 10 миллион бактерия мавҷуд буда, баъди як соат ба ду тақсим шудани ин намуди бактерияҳо маълум мешавад. Ҷадвали зерин баъди гузаштани вақти t=1,2,3,4 соат чӣ тавр тағйирёбии миқдори популатсия b-ро ифода мекунад:

t(соат)	0	1	2	3	4
b_t (миллион)	10	20	40	80	160

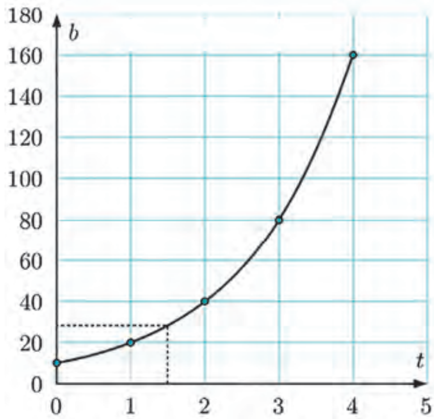
Ҳамчунин, ҳамаи бактерияҳо ҳам дар ҳар соат дар як вақт ба таври синхронӣ ба ду тақсим нашуданашон маълум. Дар ин ҳолат ҳангоми адади бутун набудани t (масалан, $t=1\frac{1}{2}$) масъалаи ёфтани миқдори популатсияи бактерияҳо истодааст.

a) Пайдарпаии b_1, b_2,...чӣ гуна пайдарпай аст?

b) Дар системаи координатаҳои росткунҷаи ҳамворӣ аз рӯйи ҷадвал нуқтаҳои мувофиқро қайд карда, баъдан нуқтаҳои ҳосилшударо бо хати рости ҳамвор пайваст кунед.

c) Баъди гузаштани вақти $t=1\frac{1}{2}$ популятсияи бактерияҳо чӣ гуна мешавад?

d) Дар вақти ихтиёрии t бо ёрии чӣ гӯна функсия тағйирёбии популатсияи бактерияҳоро моделоронидан мумкин аст?



△Пайдарпаии ададҳои дар қатори дуюм будаи b_1, b_2,...прогрессияи геометрии махраҷаш ба 2 баробар буданаш аён аст. Намуди умумии он чунин мешавад: $b_t=20\cdot2^{t-1}$, дар ин ҷо t=1,2,3,4 .

Дар системаи координатаҳои росткунҷаи ҳамворӣ аз рӯйи ҷадвал нуқтаҳои мувофиқро қайд карда, баъдан нуқтаҳои ҳосилшударо бо хати рости ҳамвор пайваст мекунем:

Баъди гузаштани $t=1\frac{1}{2}$ соат популятсияи бактерияҳо тақрибан ба 28 миллион баробар буданашро диданамон мумкин. Ба графики функсияи нишондиҳанда монанд будани шакли хати каҷи ҳосилшуда дида мешавад. Ин функсияро $b(t)$ гуфта ишора карда, (дар ин ҷо $t\geq0$), навишта метавонем: $b(t)=20\cdot2^{t-1}=10\cdot2^t$.▲

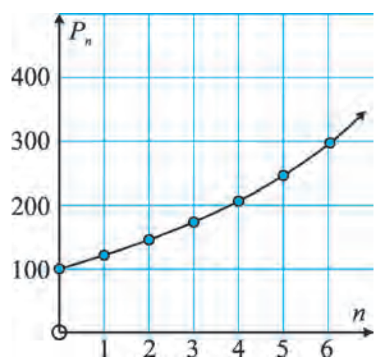
Дар ҳолати умумӣ миқдори бо қонунияти $b(t)=b_0a^t$ тағйирёбанда (дар ин ҷо $b_0>0$, $a>1$, $t\geq0$) миқдори экспонентсиал афзуншаванда номида мешавад.

Ба хулосаи зерин соҳиб мешавем:

Агар афзуншавии миқдории популатсия ба адади ибтидоии (аввалаи) он пропорсионал бошад, ин хел популатсия экспонентсиал меафзояд.

Одатан ибораи "афзуншавии экспонентсиалӣ" кадом як ҷараёни бошиддат, беист афзуншавандаро ифода мекунад. Масалан, популатсияи ҷонварон, дар матбуот афзуншавии бошиддати аҳолии ягон мамлакат чунин таъриф дода мешавад.

Мисоли 2. Мувофиқи маълумоти хизмати эпидемиологӣ миқдори популатсияи мушҳо дар шароити мусоид дар ҳар ҳафта ба 20% меафзудааст. Сараввал 100 то муш бошанд муайян кунед, ки миқдори популатсияи онҳо аз рӯйи кадом қонуният меафзояд.



△Агар бо P_n дар n ҳафта миқдори популатсияро ишора кунем, ба ҳолати зерин соҳиб мешавем: P_0=100 (миқдори ибтидоӣ), $P_1=P_0\cdot1{,}2=100\cdot1{,}2$, $P_2=P_1\cdot1{,}2=100\cdot(1{,}2)^2$, $P_3=P_2\cdot1{,}2=100\cdot(1{,}2)^3$, ва ҳоказо. Миқдори популатсия дар n ҳафта $P_n=100\cdot(1{,}2)^n$ мешавад.▲

Аз калкулятор истифода карда, қимматҳои мувофиқро ҳисоб кунем, ба графики зерин соҳиб мешавем:

Дида мешавад, ки дар 6 ҳафта миқдори популатсия тақрибан 3 маротиба меафзудааст.

Мисоли 3. Ҳангоми тадқиқот олими энтомолог зарраррасонии популатсияи малаххҳоро дар саҳроҳои хоҷагии қишлоқ муайян кард, ки масоҳати майдонҳои зарардида аз рӯйи қонунияти $A_n=1000\cdot 2^{0,2n}$ (гектар) тағйир меёбад, дар ин ҷо n адади ҳафтаҳо.

a) сараввал ба чӣ қадар майдон зарар расид?

b) дар I) 5, II) 10 ҳафта ба чӣ қадар майдон зарар расид?

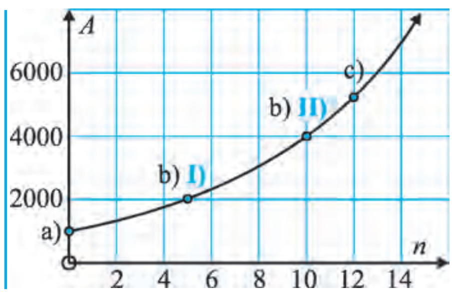
c) аз калкулятор истифода бурда, дар 12 ҳафта ба чӣ қадар майдон зарар расонида мешавад, ёбед.

d) графики қонунияти алоқамандии масоҳати майдони зарардидаро аз адади ҳафтаҳо кашед.

△ a) $A_0=1000\cdot 2^{0,2\cdot 0}=1000$ (гектар). Пас, сараввал ба майдони 1000 га зарар расонида шудааст.

b) I) $A_3=1000\cdot 2^{0,2\cdot 5}=2000$ масоҳати майдони зарардида ба 2000 (га) баробар.

II) $A_{10}=1000\cdot 2^{0,2\cdot 10}=4000$ масоҳати майдони зарардида ба 4000 (га) баробар.



c) $A_{12}=1000\cdot 2^{0,2\cdot 12}=1000\cdot 2^{2,4}\approx 5280$ масоҳати майдони зарардида тақрибан ба 5280 (га) баробар. ▲

Мисоли-4. Дар натиҷаи таҷзияи радиоактивӣ моддаи радиоактивии массааш 20 грамм ҳар сол ба 5% кам мешавад. Агар W_n гуфта массаи моддаро дар n сол ишора кунем, ба баробарии зерин соҳиб мешавем.

$W_0=20$ g;

$W_1=W_0\cdot 0,95=20\cdot 0,95$ g;

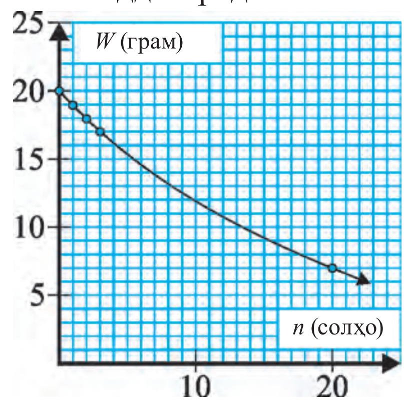
$W_2=W_1\cdot 0,95=20\cdot (0,95)^2$ g;

$W_3=W_2\cdot 0,95=20\cdot (0,95)^3$ g;

$W_{20}=20\cdot (0,95)^{20}\approx 7,2$ g;

$W_{100}=20\cdot (0,95)^{100}\approx 0,1$g

Аз ин ҷо $W_n=20\cdot (0,95)^n$.



Миқдори бо қонунияти $b(t)=b_0a^t$ тағйирёбанда (дар ин ҷо $b_0>0$, $0<a<1$, $t\geq 0$)) миқдори экспоненциал камшаванда номида мешавад.

Мисоли 5. Доруи истеъмолшуда бо оҳистагӣ дар бадани бемор паҳн шуда, баъди t соат миқдори (дозаи) боқимондаи он аз рӯйи қонунияти $D(t)=120\cdot(0,9)^t$ тағйир меёбад.

а) баъди $t=0$, 4, 12, 24 соат гузаштан $D(t)$ ро ёбед.

b) сараввал ба бадани инсон чӣ қадар доза дохил карда шудааст?

c) аз маълумоти а) истифода бурда, графики $D(t)$ ро тасвир кунед, дар ин ҷо $t\geq 0$.

d) аз график истифода бурда, баҳо диҳед, ки миқдори доруи 25 мг дар бадани инсон чанд вақт мемонад.

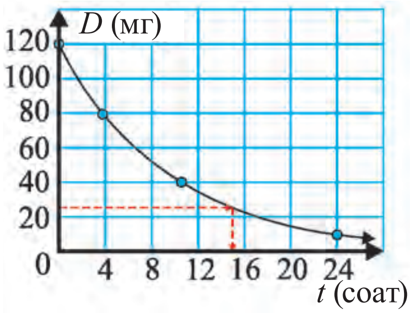
а) $D(t)=120\cdot(0,9)^t$ mg

$D(0)=120\cdot(0,9)^0=120$ mg;

$D(4)=120\cdot(0,9)^4\approx 78,7$ mg;

$D(12)=120\cdot(0,9)^{12}\approx 33,9$ mg;

$D(24)=120\cdot(0,9)^{24}\approx 9,57$ mg;



b) аз сабаби $D(0)=120$ будан, сараввал 120 мг дору дохил шудааст.

c) аз ҳамон график истифода бурда, аз 120 мг доруи ба бадани инсон дохилшуда, тахмин баъди 15 соат боқӣ мондани 25 мг доруро аниқ мекунем.

Мисоли 6. Дар натиҷаи таҷзияи радиоактивӣ массаи моддаи радиоактивӣ аз рӯйи қонунияти $W_t=W_0\cdot 2^{-0,001t}$ грамм тағйир меёбад, дар ин ҷо t солҳо.

а) сараввал модда ба чӣ қадар масса соҳиб будааст?

b) баъди 20 сол чанд фоизи модда мемонад?

Ҳангоми $t=0$ будан $W_t=W_0\cdot 2^0=W_0$ мешавад. Пас, массаи аввалаи модда W_0 будааст. Ҳангоми $t=200$ будан $W_{200}=W_0\cdot 2^{-0,001\cdot 200}=W_0\cdot 2^{-0,2}\approx W_0\cdot 0,8706$. Пас, баъди гуӯзаштани 200 сол тахминан 87,1 фоизи модда мемонад.

Мисоли 7. Аз сатҳи баҳр баъди ба баландии h км бардошта шуданамон, фишори атмосфера аз рӯйи қонунияти $p=76\cdot 2,7^{-\frac{h}{8}}$ (см сутуни симобӣ) тағйир меёфтааст. Дар баландии 5,6 км фишори атмосфера чӣ хел мешавад?

Мисоли 8. Баландӣ аз сатҳи баҳр бо ёрии формулаи $h=\dfrac{8000}{0,4343}\lg\dfrac{p_0}{p}$ ҳисоб карда мешавад, дар ин ҷо $p_0=760$ мм сутуни симоб –фишори атмосфераи сатҳи баҳр, p бошад фишори атмосфера дар баландии h(*м*). Ҳангоми ба кӯҳ баромадан ба 304 (мм сутуни симоб) баробар шудани фишорро кӯҳнавардон муайян карданд. Кӯҳнавардон ба кадом баландӣ баромадаанд?

$$h=\frac{8000}{0,4343}\lg\frac{760}{304}\approx 7330,2 \text{ м.}$$

Мисоли 9. Массаи моддаи радиоактивӣ бо гузашти вақт аз рӯйи қонунияти $m(t)=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ кам мешавад, дар ин ҷо массаи вақти ибтидоӣ m_0 ба массаи дар вақти m - t, T-коэффисиенти суръати таҷзияи радиоактивӣ (вақти нимтаҷзия).

Агар дар вақти додашуда массаи моддаи боқимонда m-ро донем, дар чанд сол кам шудани массаи m_0 то m -ро меёбем:

$$t=-T\log_2\left(\frac{m(t)}{m_0}\right).$$

Гуфтан ҷоиз аст, ки ин хел муносибатҳо дар тадқиқотҳои таърихӣ ҳам истифода мешаванд.

Мисоли 10. Бо гузаштани вақт кам шудани адади калимаҳои луғати забони табиӣ аз рӯи қонунияти $N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda t}$ ба назар мерасад, дар ин ҷо N_0 –адади калимаҳои ибтидоӣ, $N(t)$-адади калимаҳои дар вақти t (ҳазорсолаҳо) боздоштташуда, λ – коэффисиенти калимаҳои дар забон боздошташударо ифодакунанда.

Агар дар вақти додашуда, миқдори $N(t)$-адади калимаҳои боқимондаро донем, дар чанд сол ҳаҷми калимаҳо аз N_0 то $N(t)$- кам шуданашро меёбем

$$t=-\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right).$$

Масъалаи 11. Сараввал аҳолии шаҳр а нафар буда, агар дар ҳар сол адади аҳоли ба 10% афзояд, формулаеро, ки баъди x сол чӣ қадар шудани аҳолиро муайян мекунад ёбед.

△Мувофиқи формулаи фоизи мураккаб, адади аҳолии шаҳр баъди x сол $y=a\cdot\left(\frac{100+10}{100}\right)^x=a\cdot(1,1)^x$ мешавад: Пас, бо ёрии формулаи $y=a\cdot(1,1)^x$ ҳангоми дода шудани a адади аҳолиро баъди x сол муайян кардан, мумкин мешавад. Аз рӯйи a=1000000 ва адади солҳо x ҷадвали муайянкунандаи адади аҳолиро мебиёрем:

x	y	x	y
1	1 100 000	11	2 853 117
2	1 210 000	12	3 138 428
3	1 331 000	13	3 452 271
4	1 464 100	14	3 797 498
5	1 610 510	15	4 177 248
6	1 771 561	16	4 594 973
7	1 948 717	17	5 054 470
8	2 143 589	18	5 559 917
9	2 357 948	19	6 115 909
10	2 593 742	20	6 727 500

Мувофиқи ҷадвал адади аҳолӣ баъди 5 сол 1 610 510, баъди 10 сол 2 593 742, баъди 20 сол 6 727 500 нафар мешудааст. ▲

Масъалаи 12. Сараввал аҳолии шаҳр a нафар буда, шумораи аҳолӣ соле ба 2% кам мешавад, формулаи чӣ қадар шудани аҳолиро баъди x сол муайян мекунад ёбед.

△Мувофиқи формулаи мураккаби фоиз шумораи аҳолии шаҳр баъди x сол $y = a \cdot \left(\frac{100-2}{100}\right)^x = a \cdot 0,98^x$ мешавад. Пас, бо ёрии формулаи $y=a \cdot 0,98^x$ ҳангоми дода шудани a шумораи аҳолиро баъди x сол муайян кардан мумкин. Ҷадвале, ки шумораи аҳолиро ҳангоми a=2000000 ва микдори солҳо x будан муайян мекунад, мебиёрем:

Мувофиқи ҷадвал шумораи аҳолӣ баъди 5 сол 1 807 842, баъди 10 сол 1 634 146, баъди 20 сол 1 335 216 нафар мешудааст. ▲

x	y	x	y
1	1 960 000	11	1 601 463
2	1 920 800	12	1 569 433
3	1 882 384	13	1 538 045
4	1 844 736	14	1 507 284
5	1 807 842	15	1 477 138
6	1 771 685	16	1 447 595
7	1 736 251	17	1 418 644
8	1 701 526	18	1 390 271
9	1 667 496	19	1 362 465
10	1 634 146	20	1 335 216

Масъалаи 13. Сараввал аҳолии шаҳр a нафар буд. Агар шумораи аҳолӣ соле ба 10% афзояд, формулаи баъди x сол чӣ қадар шудани аҳолӣ ва баъди чанд сол k маротиба афзудани онро муайян мекунадро ёбед.

△Маълум аст, ки, $y=a \cdot 1,1^x$ ва аз шарти масъала $y=k \cdot a$ буданашро ба ҳисоб гирифта формулаи $k=1,1^x$ ёки $x=\log_{1,1}k$ ёфта мешавад. Дар поён ҷадвале, ки барои афзудани адади аҳолӣ ба k маротиба адади солҳои лозимбударо муайян мекунад, оварда шудааст:

k	y	k	y	k	y
1	0	6	19	11	25
2	7	7	20	12	26
3	12	8	22	13	27
4	15	9	23	14	28
5	17	10	24	15	28

Аз ҷадвал маълум аст, ки барои 2 маротиба афзудани шумораи аҳолӣ 7 сол; барои 5 маротиба афзудан 17 сол; 10 маротиба афзудан 24 сол лозим аст.

Масъалаи 14. Сараввал шумораи аҳолии шаҳр a нафар буда, соле ба 2% кам шавад, формулае, ки баъди x сол чӣ қадар шудани аҳолӣ ва баъди чанд сол k маротиба камшавии онро муайян мекунад, ёбед.

Маълум аст,ки $y=a\cdot 0{,}98^x$ ва аз шарти масъала $y=\frac{a}{k}$ ба назар гирифта формулаи $1/k=0{,}98^x$ ёки $x=\log_{0{,}98}(1/k)$ ро ёфтан мумкин. Дар поён ҷадвале, ки барои кам шудани адади аҳолӣ ба k маротиба миқдори солҳои лозимбударо муайян мекунад, оварда шудааст.

k	$1/k$	x	k	$1/k$	x
1	1	0	11	0,090909	119
2	0,5	34	12	0,083333	123
3	0,333333	54	13	0,076923	127
4	0,25	69	14	0,071429	131
5	0,2	80	15	0,066667	134
6	0,166667	89	16	0,0625	137
7	0,142857	96	17	0,058824	140
8	0,125	103	18	0,055556	143
9	0,111111	109	19	0,052632	146
10	0,1	114	20	0,05	148

Аз ҷадвал маълум аст, ки барои 2 маротиба кам шудани шумораи аҳолӣ 34 сол; 5 маротиба кам шудани шумораи аҳолӣ 80 сол; 10 маротиба кам шудани шумораи аҳолӣ 114 сол лозим аст;

Масъалаи 15. Соли 1935 сейсмологи америкоӣ Ч. Рихтер барои тавсиф кардани зилзила шкалаҳои магнитудаҳои 1-9,5 балларо таклиф карда буд. Дар ин вақт ҳангоми зилзила энергияи лаппиши сейсмикии пайдошаванда бо бузургие, ки интенсивӣ номида мешавад баҳо дода мешавад. Дар шкалаи Рихтер магнитудаи R-и зилзилаи интенсивиаш I бо ёрии формулаи $R=\lg I$ ёфта мешудааст.

Соли 1966 дар Тошканд зилзилаи магнитудааш ба 5,2, соли 2010 дар Гаитӣ магнитудааш ба 7 баробар рӯй додааст. Ин зилзилаҳоро аз рӯйи интенсивӣ муқоиса мекунем.

Зилзилаи Гаитӣ: $7=\lg I_1$, аз ин ҷо $I_1=10^7=10\,000\,000$;

Зилзилаи Тошканд: $5{,}2=\lg I_2$, аз ин ҷо $I_2=10^{5{,}2}\approx 158\,489{,}3$;

Аз ин ҷо $\frac{I_1}{I_2}\approx 63{,}1$. Пас, дар Гаитӣ нисбат ба Тошканд тақрибан 63 маротиба зилзилаи пурқувваттар рӯй додааст.

Савол ва супоришҳо

1. Ба модели нишондиҳандагӣ мисол биёред;
2. Ба модели логарифмӣ мисол биёред.

Машқҳо

192. 192. Агар коркарди замини наздиҳавлигӣ гузаронида нашавад, баъди t рӯз алафҳои бегона масоҳати майдони $A(t)=3\cdot 2^{0,1t}$ (кв.м)-ро мепӯшонад, ба растаниҳои фоиданок зарар мерасонад.

a) сараввал ба чӣ қадар майдон зарар расид?

b) дар **I**) 2, **II**) 10, **III**) 30, рӯз ба чӣ қадар майдон зарар мерасад?

c) аз маълумоти дар *a*), *b*) гирифташуда истифода бурда, графики қонунияти вобастагии масоҳати майдони зарардидаро аз адади рӯзҳо кашед.

193. Бо мақсади беҳ кардани аҳволи экологии соҳилҳои Орол экологҳо дар лоиҳаи афзуннамоии популятсияи ҳайвонҳои ноёб, 25 ҷуфти ҳайвонро бисёр каданианд. Мувофиқи тадқиқотҳо, дар шароитҳои додашуда миқдори популятсияи ин ҳайвонҳо аз рӯйи қонунияти $P_n=P_0\cdot 1{,}23^n$ тағйир меёбад, дар ин ҷо P_n адади ҳайвонҳо дар n сол.

a) адади P_0 чиро мефаҳмонад?

b) баъди **I**) 2, **II**) 5, **III**) 10 ба чӣ гуна популятсия соҳиб мешавем?

c) аз маълумоти дар *a*), *b*) гирифташуда истифода карда, графики қонунияти вобастагии миқдори популятсияро аз адади солҳо, кашед.

194. Суръати реаксияи химиявӣ аз рӯйи қонунияти $V_t=V_0\cdot 2^{0,05t}$ тағйир меёфтааст, дар ин ҷо t(°C) – температура.

Дар температураи a) 0 °C; b) 20 °C суръати реаксия чӣ гуна мешавад?

c) Суръати реаксия дар температураи 20 C° нисбат ба суръати реаксия дар температураи 0 C° чанд фоиз меафзояд?

d) Қиммати $\left(\dfrac{V_{50}-V_{20}}{V_{20}}\right)\cdot 100\%$ ро ҳисоб кунед ва маънидод кунед.

195. Дар ҷазираи паҳлӯи нимҷазираи Аляска соли 2017 6 ҷуфт хирсро сар доданд. Аввал дар ин ҷазира хирсҳо набуданд. Агар популятсияи хирсҳо аз рӯйи қонунияти $Bt=B_0\cdot 2^{0,18t}$ (дар ин ҷо t-солҳо) тағйир ёбад, аз воситаҳои ҳисобкунӣ истифода бурда, ба саволҳои зерин ҷавоб диҳед:

a) адади B_o чиро мефаҳмонад? *Он* ба чанд баробар аст?

b) дар соли 2037 ба кадом популятсия соҳиб мешавем?

c) адади хирсҳо дар соли 2037 нисбат ба адади хирсҳо дар соли 2027 чанд фоиз меафзояд?

196. Дар натиҷаи таҷзияи радиоактивӣ массаи моддаи радиоактивӣ аз рӯи қонунияти $W(t)=250\cdot(0{,}998)t$ (г) тағйир меёбад, дар ин ҷо t-солҳо.
a) аввал модда ба кадом масса соҳиб буд?
b) баъди **I**) 400, **II**) 800, **III**) 1200, сол чанд граммӣ модда мемонад?
c) аз маълумоти боло истифода бурда, графики $W(t)$-ро тасвир кунед.
d) Аз график истифода бурда, муайян кунед, ки кай ба миқдори 125 мг модда мемонад.

197. Ҳангоми хунук кардани оби ҷӯш ҳарорати T-и он аз рӯи қонунияти $T(t)=100\cdot2^{-0{,}02t}$ °C тағйир меёфтааст, дар ин ҷо t-дақиқаҳо.
a) аввал ҳарорат чӣ хел буд?
b) баъди **I**) 15, **II**) 20, дақиқа ҳарорат ба чанд баробар мешавад?
c) аз маълумоти боло истифода бурда, графики $T(t)$-ро тасвир кунед.
d) аз график истифода бурда, муайян кунед, ки баъди 78 дақиқа ҳарорат ба чанд баробар мешавад?

198. Қувваи ҷараёни занҷири электрикӣ аз рӯйи қонунияти $I_t=0{,}6\cdot2^{-5t}$ (A) тағйир меёфтааст, дар ин ҷо t-сонияҳо.
a) сараввал қувваи ҷараён чӣ хел буд?
b) баъди **I**) 0,1, **II**) 0,5 **III**)1 сония қувваи ҷараён ба чанд баробар мешавад?
c) аз маълумоти боло истифода бурда, графики $1t$-ро тасвир кунед.

199. Дар баҳр рӯшнои нисбат ба чуқурии d метр аз рӯйи қонунияти $L(-d)=L_0\cdot(0{,}9954)^d$ (кандела) тағйир меёфтааст.
a) дар қаъри баҳр рӯшноӣ чӣ гуна будааст?
b) рӯшноӣ дар чуқурии 1000 метр ба чанд фоиз кам мешавад?

200. Баъди 2 соат популятсияи 8-то бактерия то 100-то афзуд. Дар чунин шароит кай популатсия ба 500-то мерасад?

201. Мувофиқи маълумоти ширкати алоқаи мобилӣ, адади аз хидмати ширкати алоқаи мобилӣ истифодабарандаҳо бо ёрии формулаи $N(t)=100000e^{0{,}09t}$ ифода мешавад, дар ин ҷо t-моҳҳо. Агар имрӯз адади истифодабарандаҳо 3 млн бошад,ширкат корро кай сар кардааст?

202. Ҳангоми аз печи микромавҷӣ гирифтани хӯрока, y аз рӯйи қонунияти $T(t)=80e^{-0{,}12t}$ хунук мешудааст, дар ин ҷо t-дақиқаҳо. Агар ҳозир ҳарорати хона 22° C бошад, баъди чанд дақиқа хӯрока то ин ҳарорат хунук мешавад?

203. Баландии радифи сунъӣ бо гузашти вақти t (солҳо) аз рӯи қонунияти $H(t)=30000e^{-0{,}2t}$ тағйир меёфтааст.
a) баъди 2 сол чӣ қадар шудани баландиро ҳисоб кунед.

b) агар радиф дар баландии 320 км бошад, y дар қабатҳои болоии атмосфера месӯзад. То ин лаҳза чанд вақт мегузарад?

МАШҚҲО ДОИР БА БОБИ III

204. Муодилаҳоро ҳал кунед (**204–205**):

a) $x^4-1=0$; b) $5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0$; c) $3x^4-4x^3-7x^2-4x+5=0$.

205. a) $(x-3)(x+14)(x-15)=0$; b) $(4x+11)(3x-5)=0$;

c) $x^4-15x^2-16=0$; d) $x^4+24x^2-25=0$.

Нобаробариҳоро ҳал кунед (**206–208**):

206. a) $(2-x)(3x+1)(2x-3)>0$; b) $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4>0$.

207. a) $x^4+8x^3+12x^2\geq 0$; b) $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-x)\leq 0$.

208. a) $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1}<0$; b) $\dfrac{3x-2}{2x-3}<3$; c) $\dfrac{7x-4}{x+2}\geq 1$; d) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{3}{x+2}$.

209. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=113, \\ xy=56; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2y+xy^2=84, \\ x^3+y^3=91; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+9xy+2y^2=12, \\ 2x^2+3xy-4y^2=1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=2, \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$

Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед (**210–211**):

210. a) $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7}+\dfrac{10-3x}{5}>\dfrac{2x+7}{3}-7\dfrac{3}{21}, \\ \dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+1)}{6}>\dfrac{3x-1}{3}-\dfrac{13-x}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2}<2x, \\ \dfrac{2x+15}{9}>\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{x}{3}. \end{cases}$

211. a) $\begin{cases} 2x^2+2<5x, \\ x^2\geq x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-16\leq 0, \\ -x^2+16\geq 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9}\leq 0, \\ \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8}\geq 0. \end{cases}$

212. Муодилаи ирратсионалиро ҳал кунед:

a) $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$;

b) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}$;

c) $\dfrac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$; d) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}>-\sqrt{x-5}$.

213. Ададҳоро муқоиса кунед (**213–215**):

a) $4,2^{-\sqrt{2}}$ ва 1; b) $0,2^{\frac{3}{5}}$ ва $0,2^{-\frac{3}{5}}$; c) $(0,4)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ ва 1.

214. a) $4^{0,5}$ ва $4^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$; b) $\sqrt{3}^{\,0,2}$ ва $3^{0,2}$; c) $2^{-\frac{3}{4}}$ ва $8^{-\frac{4}{9}}$.

215. a) $2^{-\sqrt{3}}$ ва $2^{-\sqrt{5}}$; b) $7^{-0,3}$ ва $7^{-\frac{1}{3}}$; c) $(\frac{1}{3})^{\sqrt{5}}$ ва $3^{-\sqrt{3}}$.

216. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

a) $y = 5^{\sqrt{x^2-1}}$; b) $y = \dfrac{1}{3^x+1}$; c) $y = \dfrac{1}{3^{x^2}-9}$; d) $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$.

217. Соҳаи қимматҳои функсияро ёбед:

a) $y = 2^{-|x|}$; b) $y = 3 + 4^{x+1}$; c) $y = -6^x$; d) $y = 5^{|x|} + 1$.

218. Муодилаҳоро ҳал кунед (**218–219**):

a) $8^x = 2^{\frac{1}{5}}$; b) $121^x - 7\cdot 11^x = 5\cdot 11^x - 11$; c) $0,5^{\,x^2+x-3,5} = 2\sqrt{2}$.

219. a) $6^{2x} - 5^{2x-1} = 6^{2x-1} + 5^{2x}$; b) $4^{x+3} + 4^x = 130$; c) $125^x + 20^x = 2^{3x+1}$.

220. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

a) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 5^{\,y-x^2} = 0,2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{x-1} = 2^y, \\ 0,1^{2x-y} = 0,01; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5^{x-y} = 25, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases}$

221. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

a) $4^x \le 3^x$; | b) $16^x - 7\cdot 4^x - 8 < 0$; | c) $4^x \cdot 5^{1-x} < \dfrac{25}{4}$; | d) $6^{\frac{x-3}{x+8}} \ge 1$.

222. Ададҳоро муқоиса кунед:

a) $\log_3 2$ ва 2; b) $\log_3 5$ ва $2\cdot\log_3 2$; c) $\log_2 5$ ва $\log_5 2$;
d) $\log_{0,2} 5$ ва $\log_{0,2} 6$; e) $\log_4 3$ ва $\log_3 4$; f) lg18,8 ва lg6π.

223. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

a) $y = \log_2(2x+7)$; | b) $y = \log_{\frac{1}{3}}(4 - x^2)$; | c) $y = \log_5(-8x)$; | d) $y = \lg\dfrac{x-3}{x+8}$.

224. Муодиларо ҳал кунед:

a) $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$; b) $\log_2\sqrt{x-3} + \log_2\sqrt{x+3} = 2$.

225. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (**225–226**):

a) $\begin{cases} 5^{x-y} = 1, \\ 2^{\log_2(x+y)} = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ \lg x - \lg y = 6; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_{17}(3^x + 2^y) = 1, \\ 3^{x+1} - 4\cdot 2^y = -5; \end{cases}$

226. a) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 40, \\ 5^x \cdot 2^y = 250; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x + 5^{\log_5 y} = 4, \\ x^y = 16; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 81, \\ 3^x - 3^y = 24. \end{cases}$

227. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

a) $\log_3(x^2+x+1)\geq 1$; b) $\log_2(x^2+x-6)-\log_2(x+3)\leq 1$;

c) $\lg^2 x<\lg x^5-6$; d) $\log_3(4^x-5\cdot 2^x+13)>2$; e) $5^{x+7}>2$.

228. Графики функсияро кашед:

a) $y=1,5\sin(2x-1)$; b) $y=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$; c) $y=\log_3(1-x)$.

229. Муқоиса кунед:

a) $\arcsin(-\frac{1}{2})$ ва $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\arccos\frac{1}{2}$ ва $\mathrm{arctg}(-1)$;

c) $\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3}$ ва $\mathrm{arctg}1$; d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ ва $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

230. Ҳисоб кунед:

a) $2\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\mathrm{arctg}(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$;

231. Муодиларо ҳал кунед (**231–233**):

a) $2\cos^2x+5\sin x-4=0$; b) $3\sin^2 2x+7\cos^2x-3=0$; c) $4\mathrm{tg}^2x-5\mathrm{tg}x+1=0$.

232. a) $3\sin^2x+7\sin x-10=0$; b) $2\cos^2x-5\cos x+3=0$; c) $\sin 6x=\sin 3x$.

233. a) $\cos 7x=\cos 2x$; b) $\mathrm{tg}8x=\mathrm{tg}11x$.

234. Нобаробариҳоро ҳал кунед (**234–235**):

a) $\sin x>-\frac{1}{2}$; b) $\cos 2x\leq\frac{1}{2}$; c) $\mathrm{tg}3x\geq 1$; d) $\sin 2x\leq\frac{1}{2}$.

235. a) $\sin 4x\leq\frac{1}{2}$; b) $\cos 10x\geq 0$; c) $\mathrm{tg}9x\leq\sqrt{3}$; d) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 0$.

Супоришҳои тестӣ барои назорат

1. Муодиларо ҳал кунед: $\sin 6x=0$.

A) $x=\frac{\pi}{6}n,\ n\in Z$; B) $x=\frac{\pi}{5}n,\ n\in Z$;

C) $x=\frac{\pi}{4}n,\ n\in Z$; D) $x=\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z$.

2. Муодиларо ҳал кунед: $\cos 2x=0$.

$A)\ x=2\pi n,\ n\in Z;$ $B)\ x=\pi n,\ n\in Z;$

$C)\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z;$ $D)\ x=\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z.$

3. Муодиларо ҳал кунед: $\mathrm{tg}4x=\sqrt{3}$.

$A)\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z;$ $B)\ x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z;$

$C)\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z;$ $D)\ x=\frac{\pi n}{4},\ n\in Z.$

4. Нобаробариро ҳал кунед: $\sin 2x>3$.

$A)\ x=\pi n,\ n\in Z;$ $B)\ \varnothing;$ $C)\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$ $D)\ x=2\pi n,\ n\in Z.$

5. Нобаробариро ҳал кунед: $\cos 2x<3$.

$A)\ (-\infty;+\infty);$ $B)\ \varnothing;$ $C)\ (-\infty;0);$ $D)\ (0;+\infty).$

6. Соҳаи муайянии функсияро ёбед: $y=12^x$.

$A)\ (-\infty;+\infty);$ $B)\ (0;+\infty);$ $C)\ (-\infty;0);$ $D)\ \varnothing.$

7. Соҳаи муайянии функсияро ёбед: $y=\log_2(3-x)$.

$A)\ (3;+\infty);$ $B)\ [3;+\infty);$ $C)\ (-\infty;3);$ $D)\ (-\infty;3].$

8. Ҳисоб кунед: $\arcsin\frac{1}{2}$.

$A)\ \frac{\pi}{2};$ $B)\ \pi;$ $C)\ \frac{\pi}{4};$ $D)\ \frac{\pi}{6}.$

9. Ҳисоб кунед: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$A)\ \frac{\pi}{3};$ $B)\ \frac{\pi}{2};$ $C)\ \frac{\pi}{6};$ $D)\ \frac{\pi}{4}.$

10. Ҳисоб кунед: $\mathrm{arctg}1$.

$A)\ \frac{\pi}{3};$ $B)\ \frac{\pi}{2};$ $C)\ \frac{\pi}{6};$ $D)\ \frac{\pi}{4}.$

БОБИ IV

АДАДҲОИ КОМПЛЕКСӢ

86-87 АДАДҲОИ КОМПЛЕКСӢ ВА АМАЛҲО АЗ РӮЙИ ОНҲО. ТАСВИР КАРДАНИ АДАДҲОИ КОМПЛЕКСӢ

Ададҳои комплексӣ

Таълимот дар бораи ададҳои комплексӣ дар илму фан, махсусан, дар математика мавқеи муҳим дорад. Ин соҳа, ки бо суръати бузург тараққӣ карда истодааст, дар техника, ҳамчунин, дар бисёр соҳаҳои истеҳсолӣ фаровон истифода мешавад. Баъзе маълумоте, ки дар бораи ин ададҳо мавҷуд ҳастанд, мебиёрем. Аз мисоли хосаи зерин сар мекунем.

Ҳангоми ҳал кардани муодилаи $x^2+4=0$ "ададҳои" $x_1=2\sqrt{-1}$ ва $x_2=-2\sqrt{-1}$ ҳосил мешаванд. Дар байни ададҳои ҳақиқӣ ин хел "ададҳо" мавҷуд нест. Барои аз чунин ҳолат халосӣ ёфтан зарурати $\sqrt{-1}$ ро адад гуфта қабул кардан пайдо мешавад.

Ин адади нав ченаки ҳеҷ як бузургии ҳаққониро, ёки тағйирёбии онро ифода намекунад. Бо ин сабаб $\sqrt{-1}$ ро воҳиди мавҳум (хаёлӣ, дар ҳақиқат мавҷуд набуда) гуфта номгӯ кардан ва махсус ишора кардан қабул карда шудааст: $\sqrt{-1}=i$. Барои воҳиди мавҳум баробарии $i^2=-1$ ҷой дорад.

Ифодаи намуди $a+bi$ -ро дида мебароем. Дар ин ҷо a ва b ададҳои ҳақиқии ихтиёрӣ i бошад воҳиди мавҳум аст.

Азбаски ифодаи $a + bi$ аз адади ҳақиқии a ва адади мавҳуми bi иборат аст. онро адади комплекси гуфта қабул мекунем.

Ифодаи $a+bi$ шакли алгебравии адади комплексӣ номида мешавад.

Ба ҷои $a+bi$ -ро "шакли алгебравии адади комплексӣ" гуфтан кӯтоҳакак "адади комплексӣ" меномем. Ададҳои комплексиро бо як ҳарф ишора кардан мувофиқ аст. Масалан, $a+bi$ z -ро бо $z=a+bi$ ишора мекунем. Қисми ҳақиқии a-и адади комплексии $\text{Re}(z)$ -ро ба монанди (аз забони франсузии reelle-ҳақиқӣ), қисми мавҳум b-ро бошад, ба монанди $\mathrm{Im}(z)$ (аз забони франсузии imaginaire-мавҳум) ишора кардан қабул шудааст: $a=\mathrm{Re}(z)$, $b=\mathrm{Im}(z)$.

Агар барои адади комплексии $z=a+bi$ $b=0$ бошад, адади ҳақиқии $z=a$ ҳосил мешавад. Пас, маҷмӯи ададҳои ҳақиқи R тахтмаҷмӯи маҷмӯи ададҳои комплексии C мешавад: $R \subset C$.

Мисоли 1. Қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳуми ададҳои комплексии $z_1=1+2i$, $z_2=2-i$, $z_3=2{,}1$, $z_4=2i$, $z_5=0$ -ро ёбед.

Мувофиқи таърифи қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳуми ададҳои комплексӣ, меёбем:

$\mathrm{Re}(z_1)=1$; $\mathrm{Re}(z_2)=2$; $\mathrm{Re}(z_3)=2{,}1$; $\mathrm{Re}(z_4)=0$; $\mathrm{Re}(z_5)=0$;

$\mathrm{Im}(z_1)=2$; $\mathrm{Im}(z_2)=-1$; $\mathrm{Im}(z_3)=0$; $\mathrm{Im}(z_4)=2$; $\mathrm{Im}(z_5)=0$.

Барои ададҳои комплексӣ муносибатҳои “<”, “>” муайян карда нашудааст, лекин мафҳуми ададҳои комплексии баробар дохил карда мешавад.

Ададҳои комплексие, ки мувофиқан қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳумашон баробар аст, ададҳои комплексии баробар номида мешавад.

Масалан, барои ададҳои комплексии, $z_1=1{,}5+\frac{4}{5}i$ ва $z_2=\frac{3}{2}+0{,}8i$ $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)=1{,}5$; $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)=0{,}8$. Пас, $z_1=z_2$.

Ададҳои комплексие, ки аз якдигар фақат бо ишораи қисми мавҳумашон фарқ мекунанд, ададҳои комплексии ҳамроҳшуда номида мешаванд. Барои адади комплексии $z=a+bi$ адади комплексии ҳамроҳшуда ба намуди $\overline{z}=a-bi$ навишта мешавад.

Масалан, $6+7i$ ва $6-7i$ -ҳо ададҳои комплексии ҳамроҳшуда мебошанд: $\overline{6+7i}=6-7i$. Монанди ин ба адади $\overline{z}$ адади ҳамроҳшуда $\overline{\overline{z}}=z$ мешавад. Масалан, $\overline{\overline{6+7i}}=\overline{6-7i}=6+7i$. Ба адади ҳақиқии a адади ҳамроҳшуда: $\overline{a}=\overline{a+0\cdot i}=a-0\cdot i=a$. bi $\overline{bi}=-bi$ мебошад. Чунки $\overline{bi}=\overline{0+bi}=0-bi=-bi$.

Амалҳои арифметикӣ дар болои ададҳои комплексӣ

Амалҳои арифметикӣ дар болои ададҳои комплексӣ ба таври зерин муайян карда мешавад:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i; \qquad (1)$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i; \qquad (2)$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i; \qquad (3)$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \qquad (4)$$

Истифодаи бевоситаи баробариҳои (1) ва (2) душвор нест. Амали зарби ададҳои комплексии $i^2=-1$ буданашро ба эътибор гирифта, чун зарби бисёраъзогиҳо иҷро кардан мумкин аст.

Мисоли 2. Суммаро ёбед: $(3+7i)+(-5+4i)$.

Барои суммаро ёфтан аз формулаи (1) истифода мебарем:
$(3+7i)+(-5+4i)=(3+(-5))+(7+4)i=-2+11i$.

Мисоли 3. Фарқро ёбед: $(13-7i)-(-5+4i)$.

Барои фарқро ёфтан аз формулаи (2) истифода мебарем:
$(13-7i)-(-5+4i)=(13-(-5))+(-7-4)i=18-11i$.

Мисоли 4. Ҳосили зарбро ёбед: $(2-i)\cdot(\frac{3}{4}+2i)$.

Барои ёфтани ҳосили зарб қафсҳоро мекушоем. $i^2=-1$

$$(2-i)\cdot\left(\frac{3}{4}+2i\right)=2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot 2i-i\cdot\frac{3}{4}-2i^2=\frac{3}{2}+4i-\frac{3}{4}i+2=\frac{7}{2}+\frac{13}{4}i\cdot$$

Барои ҳисоб кардани ҳосили тақсими $\frac{a+bi}{c+di}$, сурат ва махраҷи онро ба “ҳамроҳшудаи” махраҷаш $c-di$ зарб карда, амалҳои лозимаро иҷро кардан лозим аст.

Мисоли 5. Амали тақсимро иҷро кунед: $\frac{2-i}{-3+2i}$.

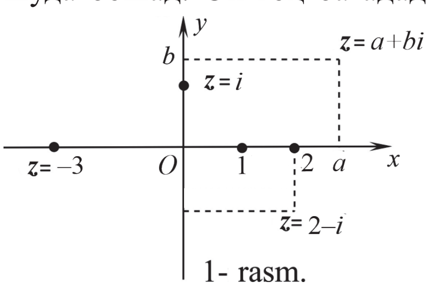
$$\frac{2-i}{-3+2i}=\frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=\frac{-6-4i+3i-2}{(-3)^2-(2i)^2}=\frac{-8-i}{13}=\frac{-8}{13}-\frac{1}{13}i\,.$$

Ададҳои комплексии z, w, ки баробарии $z+w=0$ -ро қаноат мекунонад, байни якдигар муқобил номида мешаванд. Адади ба адади комплексии z муқобилро бо $-z$ ишора кардан қабул карда шудааст. Адади комплексии ягонаи ба адади комплексии $z=a+bi$ муқобил мавҷуд аст ва ин адад аз адади комплексии $-z=-a-bi$ иборат аст.

Ададҳои комплексии z ва w, ки баробарии $zw=1$ -ро қаноат мекунонад, байни якдигар баръакс номида мешаванд. Ба адади $z=0$ адади баръакс мавҷуд нест. Барои ҳар гуна адади комплексии $z\neq 0$ адади комплексии баръакс мавҷуд аст. Ин адад аз адади $\frac{1}{z}$ иборат аст.

Тасвири адади комплексӣ дар ҳамворӣ

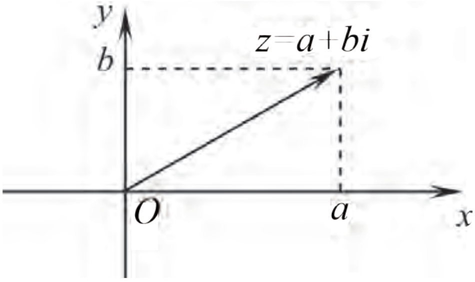
Фарз мекунем, ки дар ҳамвори координатаҳои росткунҷаи Декарт дода шуда бошад. Он гоҳ ба адади комплексии $z=a+bi$ дар ҳамвории нуқтаи координатаҳояш $(a;\ b)$ мувофиқ меояд.



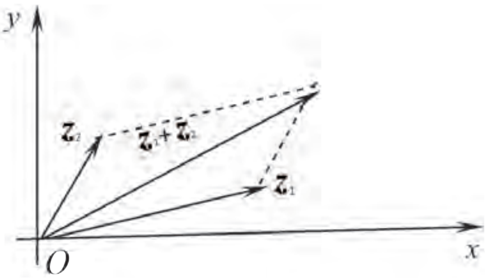
1- rasm.

Ҳангоми бо ин тарз тасвир кардани адади комплексии $a+0i$ нуқтаи координатааш $(a;0)$, ба адади комплексии $0+bi$ бошад, нуқтаи координатааш $(0;\ b)$ мувофиқ меояд. Бинобар ин ҳам тири x-ро тири ҳақиқӣ ва тири y-ро тири мавҳум меноманд (расми 1).

Ададҳои комплексии $a+bi$ -ро дар ҳамворӣ бо вектори координатаҳояш a ва b низ тасвир кардан мумкин аст (расми 2). Ин бошад ҳангоми ҷамъ кардани ададҳои комплексӣ имконияти истифодаи ҷамъи векторҳоро бо қоидаи параллелограмм медиҳад (расми 3).



Расми 2



Расми 3

Савол ва супоришҳо

1. Воҳиди мавҳум чист? Барои чӣ ба дохил кардани он эҳтиёҷ пайдо шуд?
2. Намуди алгебравии адади комплексиро нависед, мисолҳо биёред.
3. Ду ададҳои комплексӣ кай баробар мешаванд? Мисол биёред.
4. Сумма, фарқ, ҳосили зарб ва ҳосили тақсими ду адади комплексӣ чӣ хел муайян мешавад? Дар мисолҳо фаҳмонед.
5. Ададҳои комплексии муқобил чист?
6. Адади комплексии ҳамроҳшуда чист?
7. Адади комплексии баръакс чист? Мисолҳо биёред.
8. Тасвири вектории адади комплексӣ чист? Мисолҳо биёред.

Машқҳо

1. Даҳони қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳуми адади комплексиро гӯед:

1) $z=-3+7i$; 2) $z=4-\frac{1}{2}i$; 3) $z=-2-5i$;

4) $z=-5,7+5i$; 5) $z=5i$; 6) $z=9$;

7) $z=-7+3i$; 8) $z=8-\frac{1}{2}i$; 9) $z=-5-6i$;

10) $z=-5,7-5i$; 11) $z=-5i$; 12) $z=90$.

2. Адади комплексиро дар намуди алгебравӣ нависед:

1) $\mathrm{Re}(z)=4,\quad \mathrm{Im}(z)=-5$; 2) $\mathrm{Re}(z)=-2,\quad \mathrm{Im}(z)=3$;

3) $\mathrm{Re}(z)=0,\quad \mathrm{Im}(z)=8$; 4) $\mathrm{Re}(z)=7,\quad \mathrm{Im}(z)=0$;

5) $\mathrm{Re}(z)=6,\quad \mathrm{Im}(z)=-7$; 6) $\mathrm{Re}(z)=-3,\quad \mathrm{Im}(z)=4$;

7) $\operatorname{Re}(z)=0, \quad \operatorname{Im}(z)=9;$ 8) $\operatorname{Re}(z)=2, \quad \operatorname{Im}(z)=0;$
9) $\operatorname{Re}(z)=12, \quad \operatorname{Im}(z)=20.$

3. Адади комплексии баробарро нишон диҳед (**3–4**):
1) $2-4i;$ | 2) $2+3i;$ | 3) $\frac{2}{3}+i;$ | 4) $\sqrt{121}-7i;$ | 5) $33+44i;$ | 6) $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{27}\,i.$

4. 1) $4-3i;$ | 2) $1+3i;$ | 3) $\frac{1}{3}+i;$ | 4) $\sqrt{16}-\sqrt{9}i;$ | 5) $3+4i;$ | 6) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}i.$

5. Адади ҳамроҳшудаи z, адади $\overline{z}$ -ро ёбед (**5–6**):
1) $z=5-3i;$ | 2) $z=-5+3i;$ | 3) $z=1-i;$ | 4) $z=2+3i;$ | 5) $z=-7-i.$

6. 1) $z=7,2;$ | 2) $z=6i;$ | 3) $z=\sqrt{16}-\sqrt{9}i;$ | 4) $z=-2i+(-7+3i).$

7. Суммаро ёбед (**7–8**):
1) $(-5+3i)+(2-i);$ | 2) $(-3)+(3-4i);$ | 3) $(2+5i)+(-2-5i);$ | 4) $(-4i)+(3.6-3i).$

8. 1) $(8-3i)+(8+3i);$ | 2) $(-7+5i)+(7-5i);$ | 3) $9i+(3-8i);$ | 4) $-17i+(-9+16i).$

9. Фаркро ёбед (**9–10**):
1) $(3+4i)-(4+2i);$ 2) $(4-6i)-(3+2i);$ 3) $(2+4i)-(-4+2i).$

10. 1) $(5+4i)-(5-4i);$ 2) $7-(8+5i);$ 3) $7i-(6i+3).$

11. Ҳосили зарбро ёбед (**11–12**):
1) $(4+6i)(3+4i);$ 2) $(5+8i)(3-2i);$ 3) $(6-4i)(3-6i).$

12. 1) $(-3+2i)(8-4i);$ 2) $\left(\frac{1}{3}-i\right)\left(\frac{1}{2}+i\right);$ 3) $\left(\frac{5}{7}+4i\right)\left(\frac{7}{5}-2i\right).$

13. Ҳосили тақсимро ёбед (**13–14**):
1) $\frac{2+2i}{1-2i};$ | 2) $\frac{4-5i}{3+2i};$ | 3) $\frac{3+4i}{3-4i};$ | 4) $\frac{2+3i}{4-3i};$ | 5) $\frac{4-5i}{3+2i}.$

14. 1) $\frac{4-5i}{-2+3i};$ | 2) $\frac{3}{5-2i};$ 3) $\frac{5-2i}{3};$ | 4) $\frac{7i}{13-i};$ | 5) $\frac{7+4i}{5-6i}.$

15. Амалҳоро иҷро кунед (**15–16**):
1) $\frac{(3-4i)(4-3i)}{2+i};$ | 2) $\frac{(4-i)(3+2i)}{3-2i};$ | 3) $\frac{5-2i}{(2+i)(1-i)}.$

16. 1) $\frac{3-2i}{(1+i)(3-i)};$ | 2) $\frac{3}{2-3i}+\frac{3}{2+3i};$ | 3) $\frac{2}{1+i}+\frac{5}{2+i}.$

17. Ададҳои комплексиро дар ҳамворӣ тасвир кунед (**17–18**):
1) $z=3+4i;$ | 2) $z=3-4i;$ | 3) $z=-3+4i;$ | 4) $z=-3-4i;$ | 5) $z=2i.$

18. 1) $z=4-2i$; | 2) $z=5+3i$; | 3) $z=\dfrac{2+i}{2-i}$; | 4) $z=(2-i)(1+i)$; | 5) $z=(2+i)(2-i)$.

88 АДАДҲОИ КОМПЛЕКСИИ НАМУДИ $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ва $r\cdot e^{i\varphi}$ $(r>0,\ 0\le\varphi\le2\pi)$

Дар ин мавзӯъ намудҳои тригонометрӣ ва нишондиҳандаи ададҳои комплексиро меомӯзем.

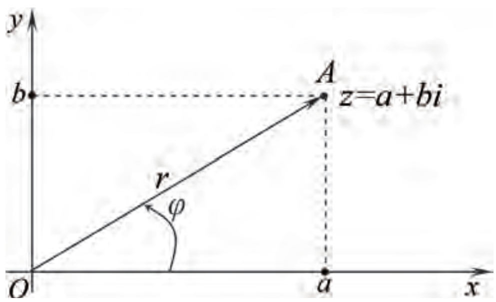
Ададҳои комплексии намуди тригонометрӣ дошта

Дар ҳамворӣ системаи координатаҳои росткунҷаи Декарт дода шуда бошад.

Ба адади комплексии $z=a+bi$ нуқтаи A-и координатааш $(a;\ b)$ мувофиқ гузашта шуда бошад. Ибтидои координатаҳо нуқтаи O ва нуқтаи A-ро пайваст карда вектори $\overrightarrow{OA}$ -ро ҳосил мекунем (расми 4).

Масофаи $r=OA$ аз нуқтаи O то нуқтаи A модули адади комплексӣ, кунҷи байни самти мусбати тири абсиссаҳо ва вектори $\overrightarrow{OA}$ (φ) аргументи адади комплексӣ номида мешавад.

Равшан аст, ки $0\le r<+\infty$, $\quad 0\le\varphi<2\pi$, $\quad r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\quad \cos\varphi=\dfrac{a}{r}$, $\quad \sin\varphi=\dfrac{b}{r}$.



Расми 4

Намуди $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ -и ададҳои комплексӣ, шакли тригонометрӣ ва намуди $z=r\cdot e^{i\varphi}$ бошад шакли нишондиҳандагии он номида мешавад. Барои аз шакли тригонометрӣ ба шакли алгебравӣ гузаштани адади комплексӣ аз формулаи зерин истифода мебаранд: $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$.

Мисоли 1. Ададҳои комплексиро дар шакли тригонометрӣ нависед:

1) i; 2) $-2i$; 3) $-1-i$.

△ 1) $z=i=0+1\cdot i$, $\ a=0$, $\ b=1$, $\ r=\sqrt{0^2+1^2}=1$, $\ \cos\varphi=\dfrac{0}{1}=0$, $\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

Пас, $i=1\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\ i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

2) Азбаски $r=2$, $\varphi=\frac{3\pi}{2}$, пас $-2i=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

3) $z=-1-i,\ a=-1,\ b=-1,\ r=\sqrt{2},\ \cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi=\frac{5\pi}{4}.$

Пас, $-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.▲

Мисоли 2. Ададҳои комплексиро дар шакли нишондиҳандагӣ нависед:

1) i; 2) $-2i$; 3) $-1-i$.

△Аз ҳисобкуниҳои мисоли 1 истифода мебарем:

$$i=e^{\frac{\pi}{2}i},\qquad -2i=2e^{\frac{3\pi}{2}i},\qquad -1-i=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$▲

Савол ва супоришҳо

1.Модули ададҳои комплексӣ чист? Он чӣ хел ҳисоб карда мешавад?

2.Аргументи адади комплексӣ чист? Мисол биёред.

3.Шакли тригонометрии адади комплексиро фаҳмонед.

4.Шакли нишондиҳандагии адади комплексиро фаҳмонед.

5.Формулаи машҳури Эйлерро исбот кунед: $e^{i\pi}=-1$.

Машқҳо

19. Модули адади комплексиро ёбед (**19–20**):

1) $z=-2+3i$; 2) $z=-2+3i$; 3) $z=1+\sqrt{3}i$; 4) $z=\sqrt{8}-i$.

20. 1) $z=6-8i$; 2) $z=2+2\sqrt{3}i$; 3) $z=\sqrt{3}+i$; 4) $z=2i$.

21. Аргументи адади комплексиро ёбед (**21–22**):

1) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 2) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 3) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $z=2\sqrt{2}i$.

22. 1) $z=5$; 2) $z=-2i$; 3) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$.

23. Адади комплексиро дар шакли тригонометрӣ ва нишондиҳандагӣ нависед (**23–24**):

1) $z=-2-2i$; | 2) $z=2-2i$; | 3) $z=\sqrt{3}-i$; | 4) $z=1-\sqrt{3}i$.

24. 1) $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; | 2) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; | 3) $z=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$; | 4) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

89-90 ҲОСИЛИ ЗАРБ ВА ТАҚСИМИ АДАДҲОИ КОМПЛЕКСИИ ДАР ШАКЛИ ТРИГОНОМЕТРӢ ДОДАШУДА

Зарб кардани адади комплексии дар шакли тригонометрӣ додашуда

Барои зарб кардани ададҳои комплексии дар шакли тригонометрии $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ додашуда формулаи зерин мувофиқ аст:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]. \quad (1)$$

Барои тақсим кардани ададҳои комплексии дар шакли тригонометрии z_1 ва z_2 додашуда бошад, формулаи зерин мувофиқ аст:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}\left[\cos(\varphi_2-\varphi_1) + i\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right] r_1 \neq 0. \qquad (2)$$

Мисоли 1. Ададҳои комплексии

$z_1 = 3(\cos 20° + i\sin 20°)$ ва $z_2 = 2(\cos 35° + i\sin 35°)$ -ро зарб кунед.

Мувофиқи қоидаи боло, ҳосили зарбро меёбем:

$z_1 \cdot z_2 = 3\cdot 2(\cos(20°+35°) + i\sin(20°+35°)) = 6(\cos 55° + i\sin 55°).$

Мисоли 2. Ададҳои комплексии

$z_1 = 2(\cos 140° + i\sin 140°)$, $z_2 = 3(\cos 150° + i\sin 150°)$ va 5 cos

ва $z_3 = 5(\cos 70° + i\sin 70°)$ -ро зарб кунед.

Мувофиқи қоидаи боло, ҳосили зарбро меёбем:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2\cdot 3\cdot 5\left[\cos(140°+150°+70°) + i\sin(140°+150°+70°)\right] = 30 \ \cos 360$$

$$= 30(\cos 360° + i\sin 360°) = 30.$$

Мисоли 3. Ҳосили тақсими ададҳои комплексии

$z_1 = 6(\cos 50° + i\sin 50°)$ ва $z_2 = 2(\cos 25° + i\sin 25°)$ -ро ёбед.

Мувофиқи қоидаи тақсимшавӣ:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}\left[\cos(50°-25°) + i\sin(50°-25°)\right] = 3(\cos 25° + i\sin 25°).$$

Ба дараҷаи натуралӣ бардоштан

Барои ба квадрат бардоштани адади комплексии $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ аз формулаи (1) зарби ададҳои комплексӣ истифода мебарем:

$$z^2 = r^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Монанди ин, $z^3 = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$. (3)

Умуман, формулаи $z^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ ҷой дорад, дар ин ҷо $n \in N$.

Мисоли 4. Адади комплексии $z = 3(\cos 15° + i\sin 15°)$ -ро ба куб бардоред:

Мувофиқи формулаи (3):

$$z^3 = 27\left(\cos 45° + i\sin 45°\right) = \frac{27}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = \frac{27}{\sqrt{2}}(1+i) \cdot ▲$$

Мисоли-5. Дараҷаи 10-уми адади комплексии $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ -ро ёбед.

△Аввал модул ва аргументи адади додашударо ёфта, онро дар намуди тригонометрӣ навишта мегирем: $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \ \varphi = \frac{\pi}{3} = 60°, \ z = 1 \cdot \left(\cos 60° + i\sin 60°\right)$

аз ин ҷо $z^{10} = \left(\cos 600° + i\sin 600°\right) = \cos 240° + i\sin 240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \cdot$ ▲

Савол ва супоришҳо

1.Ададҳои комплексии намуди тригонометрӣ дошта чӣ хел зарб карда мешавад? Маънидод кунед ва гӯед.

2.Ададҳои комплексии намуди тригонометрӣ дошта чӣ хел тақсим карда мешавад? Маънидод кунед ва гӯед.

3. Ададҳои комплексии намуди тригонометрӣ дошта чӣ хел ба дараҷа бардошта мешавад?

Машқҳо

27. Ададҳои комплексиро зарб кунед (**27–28**):

1) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ ва $z_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$;

2) $z_1 = \frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$ ва $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

28. 1) $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ ва $z_2 = \sqrt{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$;

2) $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18})$ ва $z_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

29. Ададҳои комплексиро тақсим кунед (**29–30**):

1) $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$ ро ба $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

2) $z_1 = 8(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ ро ба $z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

30. 1) $z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ ро ба $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ ga;

2) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$ ро ба $z_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

31. Ададҳои комплексиро ба дараҷа бардоред (**31–32**):

1) $(3(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}))^5$; 2) $(\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}))^6$; 3) $(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}))^7$.

32. 1) $(4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}))^4$; | 2) $(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15})^{10}$; | 3) $(\cos\frac{\pi}{22}+i\sin\frac{\pi}{22})^{11}$.

33. Амалҳоро иҷро кунед (**33–34**):

1) $\frac{(1+i)^5\left(\sqrt{2}-i\right)^4}{(1-i)\left(1+\sqrt{2}\,i\right)^4}$; | 2) $\frac{(1-i)^4\left(\sqrt{2}+i\right)^3}{(1+i)^4}$; | 3) $\frac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{10}-(1+i)^{10}\cdot i}$.

34. 1) $\frac{2+5i}{2-5i}+\frac{2-5i}{2+5i}$; | 2) $\frac{12+5i}{6-8i}+\frac{(2-i)^2}{1-2i}$; | 3) $\frac{3-4i}{3+4i}+\frac{5+6i}{5-6i}$.

91 АЗ АДАДИ КОМПЛЕКСӢ БАРОВАРДАНИ РЕШАИ КВАДРАТӢ

Барои аз адади комплексии намуди $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ решаи квадратӣ баровардан модули ин ададро x, аргументашро y гуфта баробарии зеринро менависем:
$$\sqrt{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y).$$

Ҳар ду қисми баробариро ба квадрат бардошта, аз $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=x^2(\cos 2y+i\sin 2y)$ ҳамчунин $x^2=r$, $2y=\varphi+2\pi n$ буданаш муносибатҳои $x=\sqrt{r}$, $y=\frac{\varphi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ ро меёбем. Пас, барои решаи квадратии адади комплексии z формулаи
$$\beta=\sqrt{r}\left[\cos\frac{\varphi+2\pi n}{2}+i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{2}\right]$$
ҷой дорад. Ба n қимматҳои 0, ±1, ±2, ... ро гузошта решаҳои гуногунро меёбем. Ҳангоми санҷиш фақат 2 то қимматҳои гуногун мавҷуд буданаш маълум мешавад, яъне $n=0$ $\beta_1=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$, (1)

$$n=1\ \ \beta_2=\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right]. \qquad (2)$$

Мисоли 1. Аз адади комплексии $z=9(\cos 60°+i\sin 60°)$ решаи квадратӣ бароред.

△ Мувофиқи формулаи боло, решаи квадратиро ҳисоб мекунем:
$$\sqrt{z}=3[\cos(30°+180°n)+i\sin(30°+180°n)].$$
Дар ин формула барои $n=0$ решаи квадратии $\sqrt{z}=3(\cos 30°+i\sin 30°)=\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ ва барои $n=1$ решаи квадратии $\sqrt{z}=3(\cos 210°+i\sin 210°)=-\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ ёфт мешавад. ▲

Ҳангоми аз адади комплекси баровардани решаи кубӣ аз формулаи зерин истифода мебаранд:

$$z_n=\sqrt[3]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=x(\cos y+i\sin y)=\sqrt[3]{r}(\cos\frac{\varphi+360^\circ n}{3}+i\sin\frac{\varphi+360^\circ n}{3}),$$

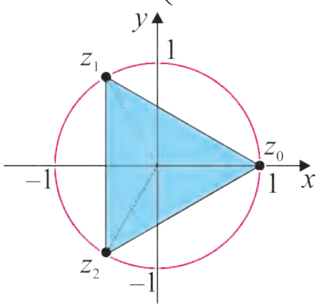
n=0, 1, 2.

Ин ададҳои ёфташуда дар системаи координатаҳои Декарт аз қуллаҳои секунҷаи мунтазаме, ки ба давраи радиусаш ба $\sqrt[3]{r}$ баробар, марказаш дар ибтидои координатаҳо хобанда иборат аст.

Мисоли 2. Решаи кубии адади комплексии z=1 ро ёбед ва дар нақша нишон диҳед.

△ Ҳангоми модули ин адад ба r=1 ва аргументаш $\varphi=0^\circ$ будан,

$$z_n=\sqrt[3]{1}=1\cdot\left(\cos\frac{0^\circ+360^\circ n}{3}+i\sin\frac{0^\circ+360^\circ n}{3}\right),\ n=0,\ 1,\ 2.$$



Расми 5.

Аз ин ҷо: барои n=0 $z_0=1\cdot(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)=1$,

барои n=1 $z_1=1\cdot(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

барои n=2 $z_2=1\cdot(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

мешавад.

Аз қуллаҳои секунҷаи мунтазам иборат будани ин ададҳоро аз расми 5 диданамон мумкин.

Ҳангоми аз адади комплексӣ баровардани решаи дараҷаи 4-ум аз формулаи зерин истифода мебаранд:

$$z_n=\sqrt[4]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[4]{r}\left(\cos\frac{\varphi+360^\circ n}{4}+i\sin\frac{\varphi+360^\circ n}{4}\right),\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Мисоли 3. Аз адади комплексии $z=i$ решаи дараҷаи 4-умро бароред.

△ Азбаски модули ин адад ба r=1, аргументаш $\varphi=90^\circ$ аст,

$$z_n=\sqrt[4]{1(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)}=1\cdot\left(\cos\frac{90^\circ+360^\circ n}{4}+\sin\frac{90^\circ+360^\circ n}{4}\right).$$

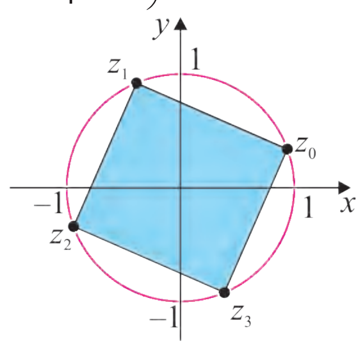
Аз ин ҷо: ҳангоми n=0 $z_0=\cos 22{,}5^\circ+i\sin 22{,}5^\circ$,

ҳангоми n=1 $z_1=\cos 112{,}5^\circ+i\sin 112{,}5^\circ$,

ҳангоми n=2 $z_2=\cos 202{,}5^\circ+i\sin 202{,}5^\circ$,

ҳангоми n=3 $z_3=\cos 292{,}5^\circ+i\sin 292{,}5^\circ$.

Ин ададҳо аз қуллаҳои квадрате, ки ба давраи радиусаш ба 1 баробар ва марказаш дар ибтидои координатаҳо хобанда дарун кашида иборат мебошад (расми 6).



Расми 6.

Савол ва супоришҳо

1. Решаи квадратӣ аз адади комплексӣ бо ёрии кадом формула ёфта мешавад?

2. Формулаи Муавр чист? Онро маънидод кунед ва гӯед.

Машқҳо

35. Аз адади комплекси решаи квадратӣ бароред (**35–36**):

1) $z=25\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $z=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\cdot\sin\frac{\pi}{18}\right)$;

3) $z=\cos\frac{\pi}{5}+i\cdot\sin\frac{\pi}{5}$; 4) $z=\cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}$;

5) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{30}+i\cdot\sin\frac{\pi}{30}\right)$; 6) $z=\frac{1}{49}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

7) $z=\cos\frac{\pi}{10}+i\cdot\sin\frac{\pi}{10}$; 8) $z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$;

36. 1) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

3) $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$; 4) $z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}$;

5) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 6) $z=\frac{16}{9}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

7) $z=5(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$; 8) $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.

МАШҚҲО ДОИР БА БОБИ IV

37. Ҳисоб кунед:

1) $(3+4i)(2-5i)+(3-4i)(2+5i)$; 2) $(1+3i)^3-\left(4+i^5\right)$;

3) $\frac{(1-2i)^2}{1+3i}$; 4) $5-7i+8i^2-9i^3+i^4$.

38. Дар намуди алгебравӣ нависед:

1) $z=\left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{3i}\right)^2$; 2) $z=\frac{12-13i}{8+6i}+\frac{(1+2i)^2}{i+3}$; 3) $\frac{4i}{(\sqrt{3}-i)^2}$.

39. Ҳисоб кунед (**39–42**):

1) $(1+i)^{10}$; 2) $(1-i)^4\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^3$; 3) $(1+i)^{2018}\cdot(1-1)^{2018}$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8$; 5) $\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i\right)}$; 6) $\left(\dfrac{\sqrt{2}-i}{1+i}\right)^{10}$.

40.

1) $z=\dfrac{(2+i)^2}{3-4i}$; 2) $z=\dfrac{(1+2i)^3}{2i}-3i^{10}$; 3) $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5$;

4) $z=\dfrac{3+2i}{1+4i}-i^7$; 5) $\dfrac{(4-i)}{3+4i}$; 6) $\dfrac{2-3i}{1-4i}$.

41.

1) $\dfrac{2+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 2) $\dfrac{12+5i}{6-8i}+\dfrac{(2-i)^2}{1-2i}$;

3) $(2-3i)^3-(2+3i)^3$; 4) $\dfrac{(4+3i)(2+3i)^2}{6+8i}$;

5) $\dfrac{33+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; 6) $\dfrac{12-5i}{6-8i}+\dfrac{(2+i)^2}{1-2i}$.

42.

1) $(2-2i)\cdot2\sqrt{3}\left(\cos70^\circ+i\sin70^\circ\right)$; 2) $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{3}-3i\right)$.

43. Тақсимро ичро кунед:

1) $5\left(\cos100^\circ+i\sin100^\circ\right):\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$; 2) $(6+6i):3\left(\cos75^\circ+i\sin75^\circ\right)$.

44. Ба дараҷа бардоред.

1) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$; 2) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^4$; 3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)^6$;

4) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$; 5) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^{10}$; 6) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)^{10}$.

45. Решаи квадратиро ҳисоб кунед:

1) $\sqrt{-27i}$; 2) $\sqrt{6-6\sqrt{3}\,i}$; 3) $\sqrt{8+8\sqrt{3}\,i}$; 4) $\sqrt{-256}$.

46. Баробариро санҷед:

1) $\left[\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right]^5+\left[\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}\right]^5=\sqrt{3}$;

2) $\dfrac{(\sin 26°+i\cos 154°)\cdot(\sin 27°+i\cos 153°)^3}{\sin 17°-i\cos 17°}=-1$.

47. Решаи кубиро ҳисоб кунед:

1) $\sqrt[3]{1+i}$; 2) $\sqrt[3]{-i}$; 3) $\sqrt[3]{8}$; 4) $\sqrt[3]{1-i}$; 5) $\sqrt[3]{-8}$.

48. Решаи дараҷаи 4-умро баоред:

1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sqrt[4]{16}$; 3) $\sqrt[4]{1+i}$; 4) $\sqrt[4]{1-i}$; 5) $\sqrt[4]{-16}$.

Намунаҳои корҳои назоратӣ

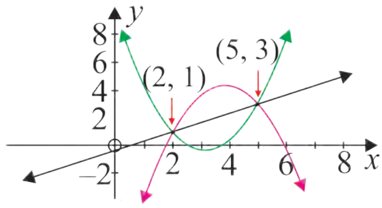
1. Ҳисоб кунед: $(35–7i)\cdot(4–6i)$.
2. Тақсимро иҷро кунед: $\dfrac{8-i}{40+3i}$.
3. Зарб кунед: $3(\cos 5°+i\sin 5°)\cdot 8(\cos 3°+i\sin 3°)$.
4. Ба дараҷа бардоред: $(3(\cos 4°+i\sin 4°))^6$
5. Аз решаи квадратӣ бароред: $\sqrt{64i}$.

ҶАВОБҲО

Боби III

73. a) азбаски ҳамаи абссиссаҳои x гуногун ҳастанд ин функсия мешавад. b) азбаски абссиссаи x дар ду нуқта як хел қиммат мегирад, ин функсия намешавад. c) азбаски ҳамаи нуқтаҳо дар абссиссаи x як хел мебошанд ин функсия намешавад. d) азбаски ҳамаи абссиссаҳои x гуногун ҳастанд ин функсия мешавад. e) азбаски ҳамаи абссиссаҳои x гуногун ҳастанд ин функсия мешавад. f) азбаски ҳамаи нуқтаҳо дар абссиссаи x як хел мебошанд ин функсия намешавад. **74.** a) функсия; b) функсия; c) функсия; d) функсия нест; e) функсия; f) функсия нест; g) функсия; h) функсия нест; **75.** Не, ҳар гуна хати рости вертикалӣ функсия намешавад. **76.** Не, $y=\pm\sqrt{9-x^2}$. **77.** a) 2; b) 8; c) –1; d) –13; e) 1. **78.** a) 2; b) 2; c) –16; d) –68; e) $\frac{32}{9}$ **79.** a) –3; b) 3; c) 3; d) –3; e) $\frac{15}{2}$. **80.** a) $7–3a$; b) $7+3a$; c) $–3a–2$; d) $10–3b$; e) $1–3x$; f) $7–3x–3h$. **81.** a) $2x^2+19x+43$; b) $2x^2–11x+13$; c) $2x^2–3x–1$; d) $2x^4+3x2–1$; e) $2x^4–x^2–2$; f) $2x^2+4hx+2h^2+3x+3h–1$. **82.** a) I) $-\frac{7}{2}$; II) $-\frac{3}{4}$; III) $-\frac{4}{9}$; b) $x=4$. **84.** $V(4)=6210$. нархи асбоб баъди 4 сол. Баъди $t=4{,}5$ сол нархи асбоб 5780 мешавад. Нархи аввали асбоб ба 9650 баробар.

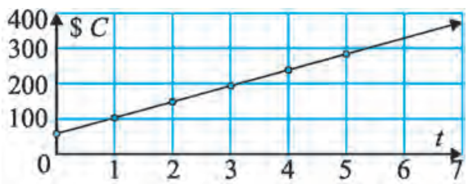
85.



86. $f(x)=-2x+5$. **87.** $a=3$, $b=-2$. **88.** $a=3$, $b=-1$, $c=-4$. **90.** a) **I)** $x>0$; b) **II)** $-2\le x\le 3$; c) **I)** $-2<x\le 0$; **II)** $0\le x<2$; d) **I)** $x\le 2$; **II)** $x\ge 2$; e) **II)** $x\in\mathbb{R}$; f) **I)** $x\in\mathbb{R}$; g) **I)** $1\le x\le 5$; **II)** $x\le 1$, $x\ge 5$; h) **I)** $2\le x<4$, $x>4$; **II)** $x<0$, $0<x\le 2$; i) **I)** $x\le 0$, $2\le x\le 6$; **II)** $0\le x\le 2$, $x\ge 6$. **92.** a) V(0)=25000 евро. Ин нархи ибтидоии автомашина. b) $V(3)=16\,000$. Ин нархи автомашина баъди 3 сол; c) $t=5$.

93. a)

t	0	1	2	3	4	5
C	60	105	150	195	240	285

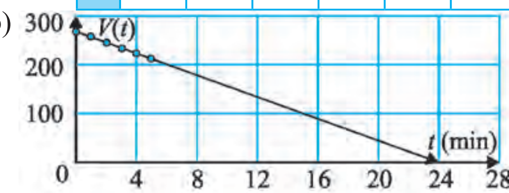


b) $C=60+45t$; c) $ 352,50.

94. a)

t	0	1	2	3	4	5
V	265	254	243	232	221	210

b)

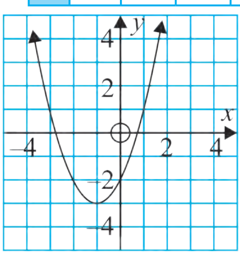


c) $V(t) = 265-11t$; d) **I)** 100 l.

95. a) ҳа; b) не; c) ҳа; d) ҳа; e) ҳа; f) не. **96.** a) не; b) ҳа; c) ҳа; d) ҳа; e) не; f) не. **97.** a) $x=-3$; b) $x=-2$ ёки -3; c) $x=1$ ёки 4; d) ба ҳалли ҳақиқӣ доро нест. **98.** a) **I)** 75 м; **II)** 195; **III)** 275 м; b) **I)** $t=2$ с ё t=14 с; **II)** $t=0$ с ё $t=16$ с. **99.** a) 40 ҳазор, 480 ҳазор; b) 10 то ё 62 то.

100. a)

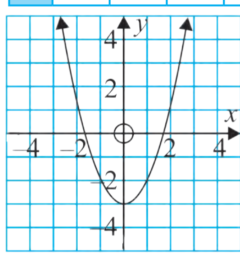
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	1	−2	−3	−2	1	6	13



$y=x^2+2x-2$

b)

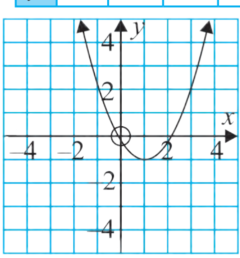
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	6	1	−2	−3	−2	1	6



$y=x^2-3$

c)

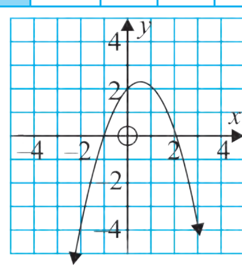
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	15	8	3	0	−1	0	3



$y=x^2-2x$

d)

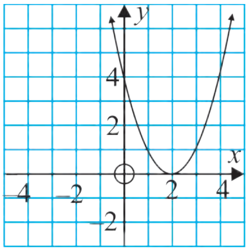
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−10	−4	0	2	2	0	−4



$f(x)=-x^2+x+2x$

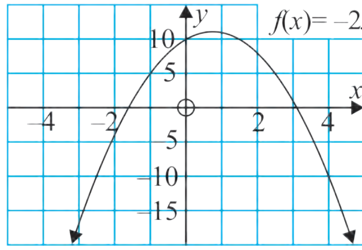
e)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	25	16	9	4	1	0	1



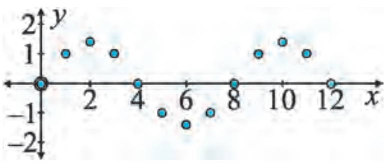
f)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–17	–4	5	10	11	8	1

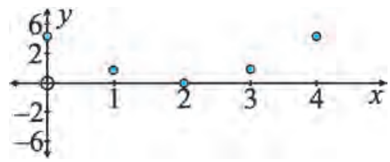


101. a) 3; b) –1; c) –4; d) 1; e) 5; f) 0; g) 8; h) –5; i) 2. **102.** a) 3; b) –6; c) 49; d) 15; e) 0; f) 20. **105.** a) $x=3$; b) $x=-5/2$; c) $x=1$; d) $x=-4$; e) $x=3$; f) $x=-4$. **106.** a) $x=4$; b) $x=-2$; c) $x=1$; d) $x=11/2$; e) $x=5$; f) $x=-2$. **107.** a) $x=-3$; b) $x=4$; c) $x=-5/4$; d) $x=3/2$; e) $x=0$; f) $x=7/10$; g) $x=3$; h) $x=5/3$; i) $x=-4$. **108.** a) (2, 3); b) (–1, 4); c) (3, 8); d) (0, 3); e) (–3, –18); f) (1, –1); g) (1/2, –5/4); h) (3/4, –7/8); i) (6, 7). **109.** a) $y=2(x-1)(x-2)$; b) $y=2(x-2)^2$; c) $y=(x-1)(x-3)$; d) $y=-(x-3)(x+1)$; e) $y=-3(x-1)^2$; f) $y=-2(x+2)(x-3)$. **110.** a) $y=3/2(x-2)(x-4)$; b) $y=-1/2(x+4)(x-2)$; c) $y=-4/3(x+3)^2$; d) $y=1/4(x+3)(x-5)$; e) $y=-(x+3)(x-3)$; f) $y=4(x-1)(x-3)$. **111.** a) 3м; b) 0,5s; c) 4м.

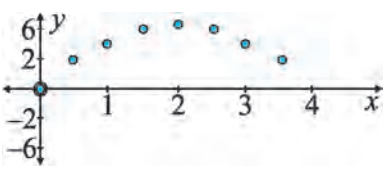
113. a) даврӣ;



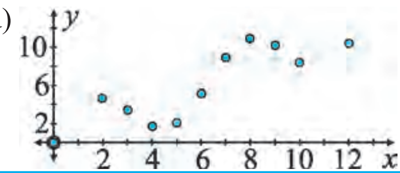
b) даврӣ нест;



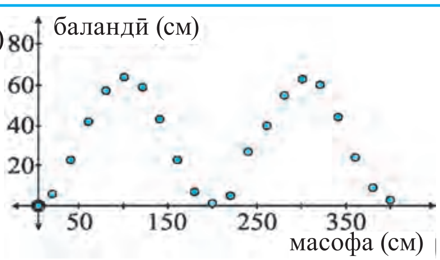
c) даврӣ нест;



d) даврӣ нест;



114. a)

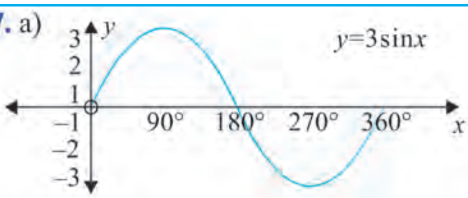


b) муодилаи тири максимуми амплитудаи даврӣ мувофиқан ба $y=32$; 64 см; 20 см; 32 см баробар.

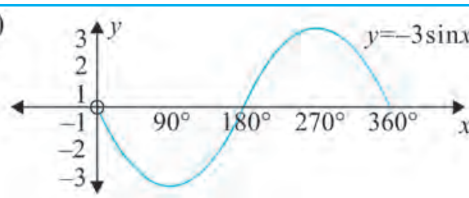
115. a) даврӣ; b) даврӣ; c) даврӣ; d) даврӣ нест; e) даврӣ; f) даврӣ.

116. a) 2; b) 8; c) (2,1); d) 8; e) $y=-1$;

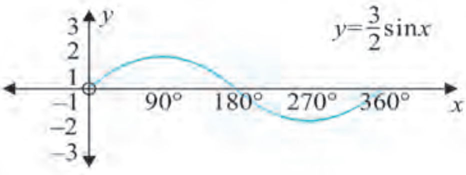
117. a)



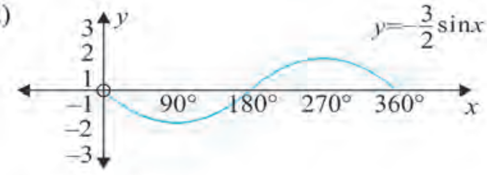
b)



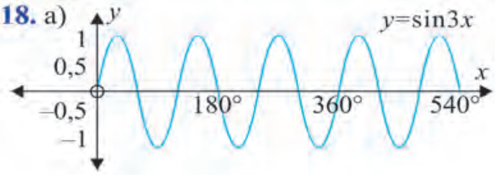
c)



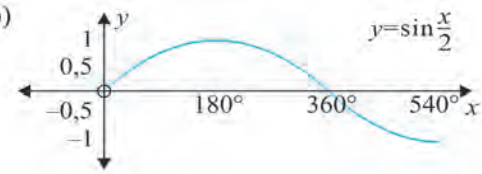
d)



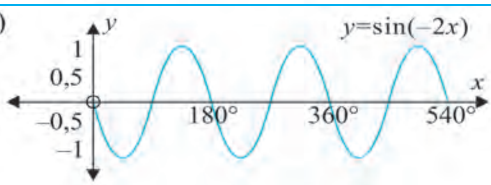
118. a)



b)

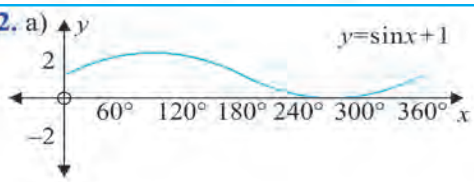


c)

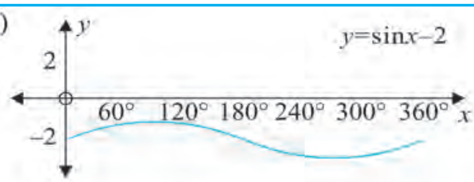


119. a) 90°; b) 90°; c) 1080°; d) 600°; **120.** a) b=2/5; b) b=3; c) b=1/6.
121. a) y=3sin$x$; b) y=sin$x$–2; c) y=–2sin$x$–1; d) y=sin2x; e) y=–4sin(x/2); f) y=sin(x/2); g) y=2sin3x; h) y=2sin2x–3.

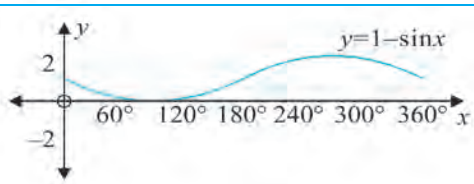
122. a)



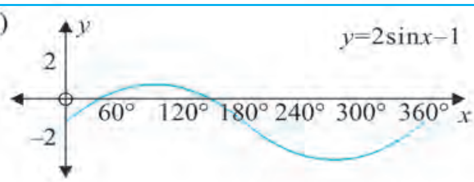
b)



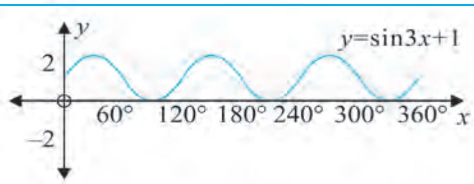
c)



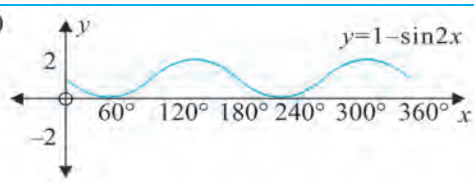
d)



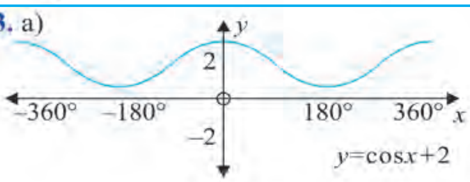
e)



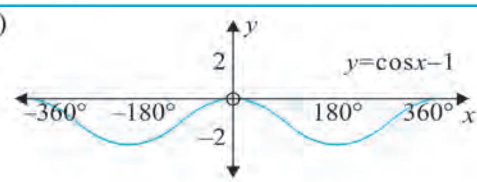
f)



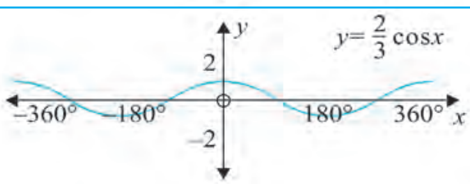
123. a)



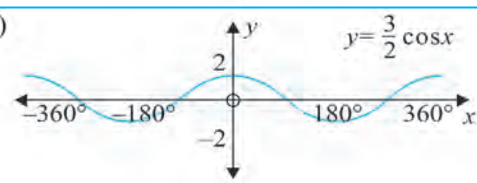
b)

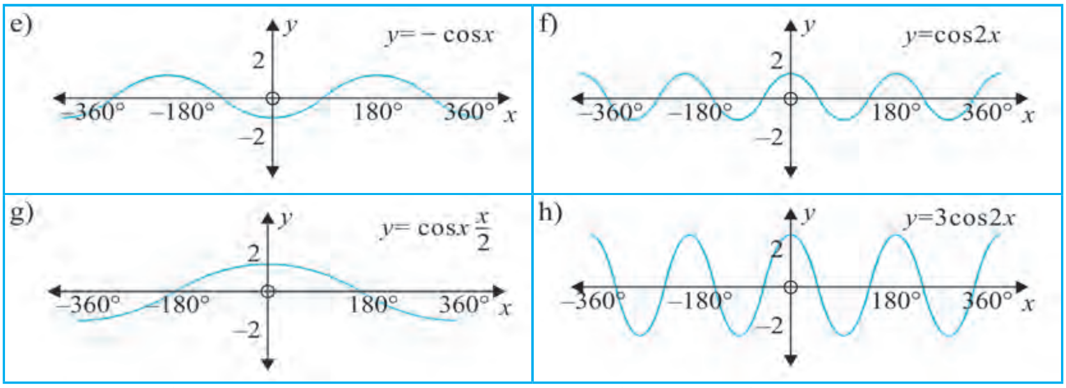


c)



d)





124. a) 120°; b) 1080°; c) 720°. **126.** a) $y=2\cos 2x$; b) $y=\cos(x/2)+2$; c) $y=-5x\cos 2x$. **127.** $T=9{,}5\cos(30t)-9{,}5$. **130.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **131.** 1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$. **132.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) π. **136.** 1) 0; 2) $\frac{4\pi}{3}$. **138.** 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) –π. **140.** 1) 2π; 2) $\frac{3\pi}{2}$.
142. 1) маъно дорад; 2) маъно надорад; 3) маъно надорад.

144. 1) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z.$

146. 1) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2n\pi,\ n\in Z.$

148. 1) $x=-\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in Z.$

150. 1) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z.$

151. 1) $x=(-1)^{n}\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z.$

152. 2) $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4},\ n\in Z.$

153. 1) $x_1=k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$

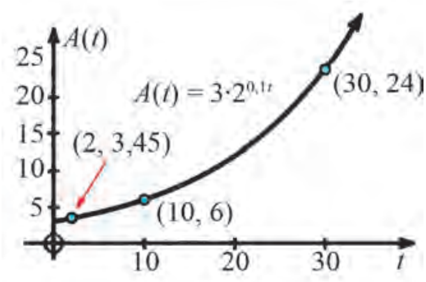
156. 1) $x_1=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z.$

157. 1) $x_1=-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\quad x_2=(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in Z.$

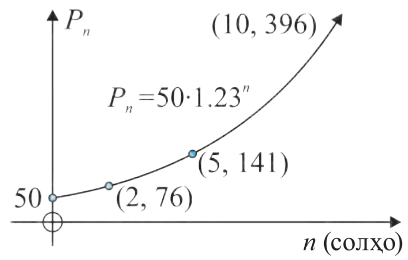
158. 2) $x=\pm\arccos(1-\frac{\sqrt{7}}{2})+2n\pi,\ n\in Z.$ **159.** 2) $x_1=-\frac{\pi}{4}+n\pi,$
$x_2=\arccos 4+n\pi,\ n\in Z.$ **160.** 1) $x=\frac{2n\pi}{3},\ n\in Z;$ 3) $x_1=\frac{n\pi}{2},$
$x_2=\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5},\ n\in Z.$ **162.** 1) $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$.
163. 1) $\left[\frac{\pi}{4}+2n\pi;\ \frac{3\pi}{4}+2n\pi\right],\ n\in Z;$ 2) $\left(\frac{3\pi}{4}+2n\pi;\ \frac{5\pi}{4}+2n\pi\right),\ n\in Z;$

3) $\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi;\ -\frac{\pi}{4}+n\pi\right)$, $n\in Z$. **167.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \frac{\pi}{3}+n\pi\right]$, $n\in Z$. **173.** 1) $y=2x+6$. **174.** 1) $y=13\cdot\sqrt{\frac{x-1}{17}}$. **175.** 1) $x^2+y^2=49$, давра. **176.** 1) $(x-3)^2+(y-7)^2=36$, давра. **177.** 1) 3; 2) 1; 3) 4; 4) 4. **178.** 1) калон; 2) хурд. **180.** 1) соҳаи муайяни: $(-\infty;+\infty)$, соҳаи қимматҳо: $(0;+\infty)$, дар интервали. $(-\infty;+\infty)$. **181.** 1) меафзояд; 2)кам мешавад; 3) меафзояд. **183.** 1) $(-\infty;\ 1]$; 2) $\left(-\infty;\frac{4}{9}\right)$; 7) $[1;\ +\infty]$; 12) $\left(-\infty;\ -2-\sqrt{34}\right)\cup\left(-2+\sqrt{34};\ +\infty\right)$. **184.** 1) $(-\infty;\ 2]$. **185.** 1) 3; 2) –2; 3) –2; 4) –3; 5) –3. **186.** 1) калон; 2) калон; 3) хурд. **187.** 1) 2; 2) 5; 3) 125; 4) 45; 5) $\frac{1}{36}$; 9) –2. **188.** 1) $(2{,}5;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$; 3) $(-2;2)$. **190.** 1) $\frac{1}{32}$; 2) 1; 3) 4; 4) 2; 8) –2; 10) 0,5 ва 1; 15) $\frac{1}{7}$ ва 49. **191.** 1) $(64;\ +\infty)$; 2) $\left(0;\ \frac{1}{3}\right)\cup(27;+\infty)$; 7) $(2;5)$.

192. a) 3 $м^2$;
b) **I)** 3,45 $м^2$; **II)** 6 $м^2$; **III)** 24 $м^2$;
c)

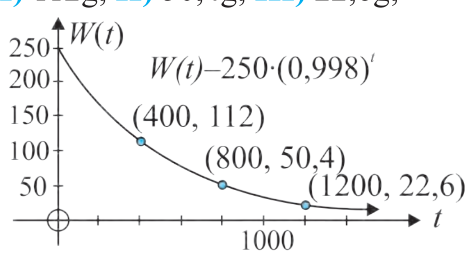


193. a) 50;
b) **I)** 76; **II)** 141; **III)** 396;
c)



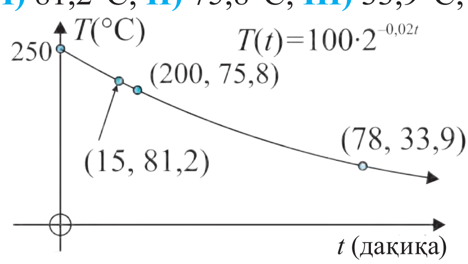
194. a) V_0; b) $2V_0$; c) 100%; d) аз 183 фоиз мегузарад.

195. a) 250g;
b) **I)** 112g; **II)** 50,4g; **III)** 22,6g;
c)

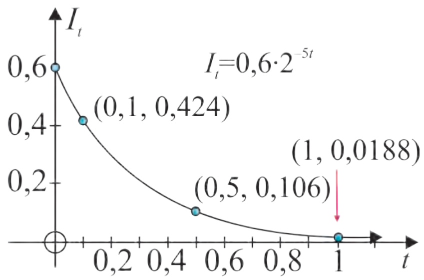


d) ≈346.

197. a) 100°C;
b) **I)** 81,2°C; **II)** 75,8°C; **III)** 33,9°C;
c)



198. a) 0,6 ампер;
b) **I)** 0,424 ампер; **II)** 0,106 ампер;
III) 0,0188 ампер;
c)



199. a) L_0; b) 99%. **200.** Тахминан 3 соату 15 дақ. **201.** 37,8 моҳ. **202.** 10,8 дақиқа.
203. 22,7 сол. **204.** b) 1. **205.** a) $\{-14;\ 3;\ 15\}$; c) $\{-4;4\}$. **206.** a) $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.
207. a) $(-\infty;-6]\cup[-2;+\infty)$.
208. a) $\left(-2;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$;
c) $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$.

209. a) $\{(7;8);(8;7);(-7;-8);+8;-7)\}$. **212.** a) 3; b) 2. **213.** a) хурд; b) хурд. **216.** a) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; b) $(-\infty;+\infty)$. **217.** a) $(0;1]$; b) $(3;+\infty)$; c) $(-\infty;\ 0)$. **218.** a) $\dfrac{1}{15}$; b) 0 ва 1; c) 1 ва –2. **219.** c) 0. **220.** a) $\{(2;3);(-3;8)\}$. **221.** a) $(-\infty;0]$; b) $(-\infty;1{,}5)$. **222.** a) хурд; b) калон. **223.** a) $(-3{,}5;\ +\infty)$; b) $(-2;2)$. **224.** a) $2\sqrt{5}$. **225.** b) $(100000;0{,}1)$. **226.** a) $(3;1)$. **227.** a) $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$. **229.** a) хурд; b) калон. **230.** a) $-\dfrac{2\pi}{3}$ **231.** c) $x_1=\dfrac{\pi}{4}+n\pi,\ x_2=\arccos\dfrac{1}{4}+n\pi,\ n\in Z.$ **234.** a) $\left(-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi;\dfrac{7\pi}{6}+2n\pi\right),\ n\in Z.$
235. c) $\left(-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi n}{9};\dfrac{\pi}{27}+\dfrac{n\pi}{9}\right),\ n\in Z.$

Боби IV

1. 7) $Re(z)=-7$, $Im(z)=3$; 8) $Re(z)=8$, $Im(z)=5$; 9) $Re(z)=-0{,}5$, $Im(z)=-6$; 10) $Re(z)=-5{,}7$, $Im(z)=-5$; 11) $Re(z)=0$, $Im(z)=-5$; 12) $Re(z)=90$, $Im(z)=0$.

6. 1) $\bar{z}=7{,}2$; 3) $\bar{z}=4+3i$. **8.** 1) 16; 3) $3+i$. **10.** 1) $8i$; 2) $-1-5i$; 3) $-3+i$. **12.** 2) $1\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}i$.

14. 1) $-\dfrac{23}{13}-\dfrac{2}{13}i$; 3) $\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}i$. **16.** 2) $\dfrac{12}{13}$. **20.** 1) 10; 2) 4; 3) 2; 4) 2. **22.** 1) 0; 2) $\dfrac{3\pi}{2}$ 3) $\dfrac{11\pi}{6}$. **24.** 1) $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ ва $2\cdot e^{\frac{7\pi i}{4}}$. **28.** 1) $z_1\cdot z_2=\cos\dfrac{13\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{13\pi}{12}$.

30. 1) $\cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}$. **32.** 2) $\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}$. **34.** 1) $-\dfrac{42}{29}$; 2) $-18i$. **36.** 1) $z_0=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{6})$, $z_1=\sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{7\pi}{6})$.

Адабиётҳои истифодашуда ва тавсиягардида

1. Ш.А. Алимов, *О.Р. Холмуҳамедов, М.А. Мирзоаҳмедов Алгебра ва асосҳои анализ китоби дарсӣ барои синфҳои* 10. Тошканд: “O‘qituvchi”, 2004.

2. *Mal Coad and others.* Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.

3. *Э. Сайдаматов и др.* Алгебра и основы математического анализа.
часть 1, Ташкент: “O‘qituvchi”, 2016.

4. *A.U. Abduhamidov va boshqalar.* Algebra va matematik analiz asoslari, 1- qism, Toshkent: “O‘qituvchi”, 2012.

5. *Н.П. Филичева.* Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. “Рязань”. 2009.

6. *М.И. Исроилов.* Ҳисоблаш методлари. Тошкент: “Ўқитувчи” 1988.

7. *Г.К. Муравин.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, “Дрофа”, 2006.

8. Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. *Н.Я. Виленкина*. Москва, “Просвещение”, 2004.

9. http://www.ams.org/mathweb/ – Internetda matematika (ingliz tilida).

10. “Математика в школе” jurnali.

11. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001- yildan boshlab chiqa boshlagan).

12. *M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov* Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.

13. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. *T.A. Azlarov* tahriri ostida. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1979.

14. *M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev.* O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1993.

15. http://www.uzedu.uz – Портали ахбор ва таълими Вазорати таълими халқ.

16. http://www.eduportal.uz – Портали ахбор ва таълими Маркази мултимедия.

17. http://www.problems.ru – Сохтори ҷустуҷӯи масъалаҳои математика (заб. русӣ).

18. http://matholymp.zn.uz – Озмунҳои математика дар Ӯзбекистон ва дунё.

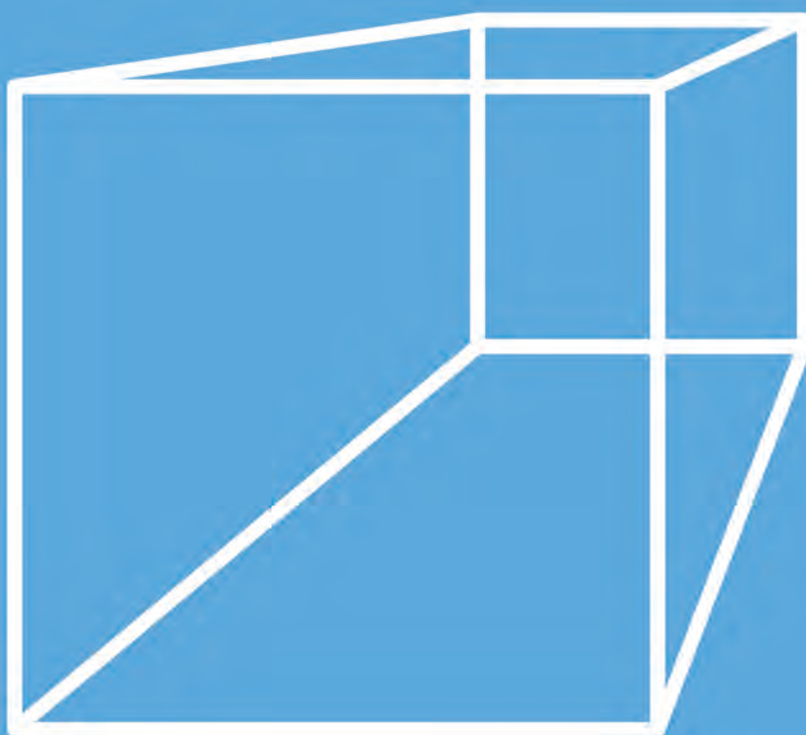
МУНДАРИҶА

Боби III. ФУНКСИЯҲОИ ЭЛЕМЕНТАРӢ ВА МУОДИЛАҲО

Боби IV. АДАДҲОИ КОМПЛЕКСӢ

Математика

Геометрия



Синфи 10

Дар қисми стереометрияи геометрияи синфи 10 ба омӯхтани сохтори хусусияти шаклҳои геометрияи фазовӣ машғул мешавем. Дар ин китоби дарсӣ масъалаҳои шаклҳои асосии фазовӣ, бисёртарафҳо, ҷисмҳои ҳалқашакл, хусусиятҳои асосии онҳо, ҳамвориҳою хатҳои рости дар фазо паралел ва перпендикуляр ва инчунин махсусияти онҳо ҷой гирифтаанд.

Дар ин китоби дарсӣ материалҳо бо забони содда ва равон ифода гардидааст. Ҳамаи мавзӯъҳо ва нишондидҳо бо мисолҳои ҳаётӣ инъикос ёфтааст. Пас аз ҳар мавзӯъ мисолу масъалаҳо, саволҳо, исботҳо оварда шудааст, ки барои фикррони эҷодии донишомӯзон ва аз худ кардану мустаҳкамгардонии дарсҳо ёрӣ мерасонад.

Ин китоби дарсӣ барои донишомӯзони синфи 10-уми мактабҳои таълими миёнаи умумӣ буда, онҳое ки геометрияро мустақилона омӯхтан мехоҳанд, метавонанд аз он истифода баранд.

МУНДАРИЧА

Ишораҳои дар қисми китоби дарсии “Геометия” истифодашуда ва талқини онҳо:

– Тавсифи теорема
– Тавсифи аксиома
– Саволҳо оиди мавзӯъ
– Машқҳои фаъолнамоӣ
– Анҷоми исботи теорема
– Татбиқи амалӣ
– Лавҳаҳои таърихӣг
– сарчархакҳои геометрӣ

ҚИСМИ IV

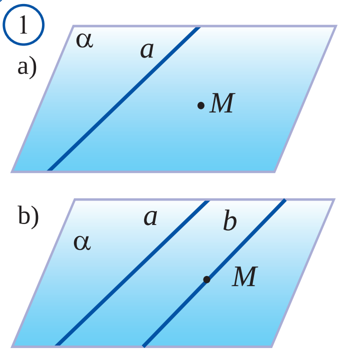
ПАРАЛЛЕЛИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

10 БАЙНИ ЯКДИГАР ҶОЙГИРШАВИИ ХАТҲОИ РОСТ ДАР ФАЗО

Агар дар фазо ду хати рости a ва b дар як ҳамворӣ хобанд ва якдигарро набуранд, хатҳои рости параллел номида мешаванд. Параллелии хатҳои рости a ва b ба тарзи $a||b$ навишта мешавад.

Аз нуқтаи дар ҳамворӣ додашуда ба хати рости додашуда хати рости ягонаи параллелро гузаронидан мумкин аст. Ин хосият дар фазо ҳам ҷой дорад:

Теоремаи 4.1. ***Дар фазо ба хати рости додашуда аз нуқтаи ба ин хати рост тааллуқ надошта, хати рости ягонаи параллелро гузаронидан мумкин аст.***



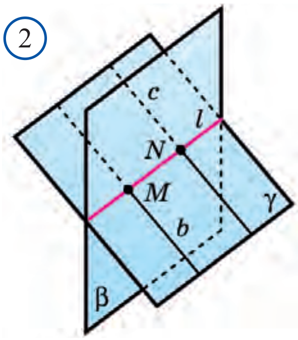
Исбот: Бигузор a –хати рости додашуда ва нуқтаи M–нуқтаи дар ин хати рост нахобанда бошад (расми1.a). Мувофиқи теоремаи исбот кардашудаи 2.1, хати рости a – хати рости додашуда ва аз нуқтаи дар он нахобандаи M ҳамвории ягонаи α-ро гузаронидан мумкин.

Дар ҳамвории α бошад аз нуқтаи M ба хати рости додашудаи a – хати рости ягонаи параллели b–ро гузаронидан мумкин (расми 1.b).

Айнан ҳамин хати рости b хати рости ягонаи ҷуста истодаамон мебошад. ❑

Агар аз ду хати рости параллели ҳамворӣ якеаш хати рости сеюмиро бурида гузарад, дуюмини онҳо низ ин хати ростро бурида мегузарад. Хосияти ба ин монанд дар фазо ҳам ҷой дорад:

Теоремаи - 4.2. ***Дар фазо агар яке аз хатҳои рости параллел ҳамвориро бурида гузарад, дуюми он низ ҳамвориро бурида мегузарад.***



Исбот: Хатҳои рости параллели b ва c додашуда буда, аз онҳо хати рости b ҳамвории β ро дар нуқтаи M бурида гузарад (расми 2.а)

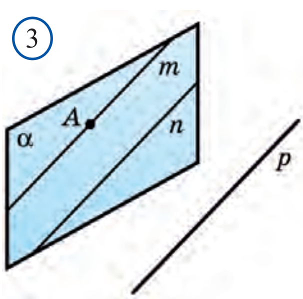
Азбаски хатҳои рости b ва c параллеланд онҳо дар як ҳамворӣ мехобанд. Бигузор ин ҳамвории γ бошад.

Барои ҳамвориҳоиф β ва γ нуқтаи M нуқтаи умумӣ мебошад Он гоҳ мувофиқи аксиомаи S3, ин ҳамвориҳо аз рӯи як хати рости l бурида мешаванд. Ин хати рост дар ҳамвории γ мехобад ва хати рости b-ро дар нуқтаи M бурида мегузарад. Бинобар ин, ин хати рости ба хати рости b параллел хати рости c ро низ дар нуқтаи N бурида мегузарад.

Азбаски хати рости l дар ҳамвории β низ мехобад нуқтаи N ба ҳамвории β низ мутааллиқ мешавад. Пас, нуқтаи N барои ҳамвориҳои β ва γ нуқтаи умумӣ мешавад. Акнун нишон медиҳем, ки хати рости c бо ҳамвории β дигар нуқтаи умумӣ надорад. Баръаксашро фарз мекунем. Бугузор, хати рости c бо ҳамвории β боз нуқтаи умумии дигари K-ро дорост. Он гоҳ мувофиқи аксиомаи S2, хати рости c дар ҳамвории β мехобад. Он гоҳ хати рости c барои ҳамвориҳои β ва γ хати рости умумӣ мешавад. Лекин, хати рости l – чунин хати рост мемонад. Аз ин ҷо болои ҳам афтидани хатҳои c ва l бармеояд. Ин тавр шуданаш мумкин нест. Чунки хати рости b ба хати рости c параллел ва хати рости l-ро бурида мегузарад. Зиддияти ба вуҷуд омада, нодуруст будани фарзамонро нишон медиҳад.

Аз планиметрия ба шумо маълум аст, ки агар ҳар яке аз ду хати рост ба сеюмӣ параллел, байни худ параллел мешаванд. Ин хосият дар фазо ҳам ҷой дошта, ӯро аломати параллелии хатҳои рост меноманд.

Теоремаи- 4.3. Ду хати рости ба хати рости сеюм параллел байни ҳам параллеланд.



Исбот: Бигузор, хатҳои рости m ва n ба хати рости p параллел бошанд. Дар як ҳамворӣ хобидани хатҳои рости m ва n ва байни якдигар брида нашуданашон, яъне параллел буданашонро нишон медиҳем.

Дар хати рости m нуқтаи A-ро мегирем, аз ин нуқта ва хати рости n ҳамвории α-ро мегузаронем. Дар ҳамвории α хобидани хати рости m-ро исбот мекунем.

Бигузор, ин тавр набошад. Азбаски хати рости m бо ҳамвории α нуқтаи умумӣ дорад, y ҳамвориро бурида мегузарад. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 4.2, ин ҳамвориро ба хати рости m хати рости параллели

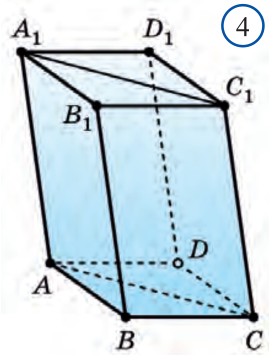
p ҳам, хати рости ба хати рости p параллели n ҳам бурида мегузарад. Лекин, ин хел шуданаш мумкин нест, чунки хати рости n дар ҳамвории α мехобад.

Пас, хатҳои рости m ва n дар ҳамвории α мехобанд.

Акнун бурида нашавандагии ин хатҳои ростро исбот мекунем.Боз ҳам баръаксашро фарз мекунем.Бигузор, хатҳои рости m ва n дар ким кадом нуқтаи B бурида шаванд. Он гоҳ аз нуқтаи B дуто хати рости m ва n-и ба хати рости p параллел мегузарад. Мувофиқи теоремаи 4.1 ин тавр шуданаш мумкин нест. ❑

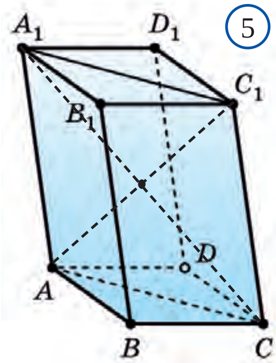
Акнун хосиятҳои зерини параллелепипедро исбот мекунем.

Хосияти 1. Дар параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (расм 4) чоркунҷаи аз диагоналҳои асос ва аз диагоналҳои паҳлӯи сохташудаи ACC_1A_1 аз параллелограмм иборат аст.



Дарҳақиқат, мувофиқи таърифи параллелепипед тарафҳои ABB_1A_1 ва BCC_1B_1, аз параллелограмм иборат аст. Тарафҳои муқобили ин параллелограммҳо байни худ баробар мешаванд. Махсусан, $AB = A_1B_1$ ва $BC = B_1C_1$.

Мувофиқи таърифи параллелопипед, $AA_1 \parallel BB_1$ ва $BB_1 \parallel CC_1$. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 4.2 , $AA_1 \parallel CC_1$ ва $AA_1 = CC_1$ мешавад. Пас, чоркунҷаи $AC_1C\ A_1$ параллелограмм аст.



Хосияти 2. Дар параллелепипеди$ABCDA_1B1C1D_1$ (расми 4) тарафҳои муқобил байни ҳам баробар.

Мувофиқи хосияти боло, AC_1CA_1 –параллелограмм ва $AC = A_1C_1$. Он гоҳ секунҷаҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ аз рӯйи се тараф баробар буда, кунҷҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ ҳам байни якдигар баробаранд. Дар натиҷа, параллелограммаҳои $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ ҳам байни якдигар баробар мешавад.

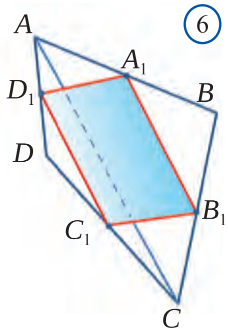
Баробарии дигар тарафҳои муқобил низ монанди ин исбот карда мешаванд.

Хосияти 3. Ҳамаи диагоналҳои параллелепипед дар як нуқта бурида мешавад ва дар ин нуқта ба ду қисми баробар тақсим мешавад. (расми 5).

Мувофиқи хосияти 1, $AC_1C\ A_1$ параллелограмм. Он гоҳ диагоналҳои ин параллелограмм A_1C ва AC_1 дар як нуқта бурида мешавад ва дар нуқтаи бурриш ба ду қисми баробар тақсим мешавад.

Буридашавӣ ва дар ин нуқта ба ду қисми баробар тақсимшавии диагоналҳои боқимонда монанди ин исбот карда мешаванд.

Порчаҳои (нурҳои) дар як хати рост ёки дар хатҳои рости параллел хобанда *порчаҳои (нурҳои) параллел* номида мешаванд.



6

Масъала. Исбот кунед, ки миёнаҷои тарафҳои чоркунҷаи фазоӣ, ки қуллаҳояш дар як ҳамворӣ намехобанд, қуллаҳои параллелограмм мешаванд.

Исбот. Бигузор $ABCD$ –чоркунҷаи фазои ва A_1, B_1, C_1 ва D_1–миёнаҷои тарафҳои чоркунҷа бошад (расми 6). Он гоҳ, порчаи A_1B_1 хати миёнаи ба тарафи AC-и секунҷаи ABC параллел, C_1D_1 бошад хати миёнаи ба тарафи AC-и секунҷаи ACD параллел мешавад.

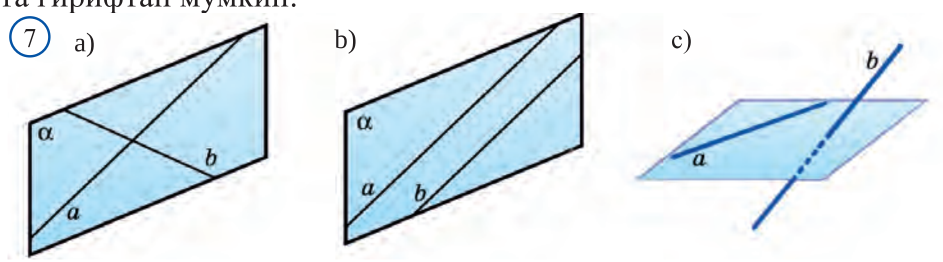
Мувофиқи теоремаи 4.3, хатҳои рости A_1B_1 ва C_1D_1 параллел мешаванд. Пас, онҳо дар як ҳамворӣ мехобанд.

Параллелии хатҳои рости A_1D_1ва B_1C_1 ҳам айнан исбот карда мешаванд.

Ҳамин тавр, чоркунҷаи $A_1B_1C_1D_1$ дар як ҳамворӣ мехобад ва тарафҳои муқобили он параллеланд. Пас, он параллелограмм аст.

Агар дар фазо ду хати рост байни якдигар бурида шаванд,. ёки параллел бошанд, онҳо дар як ҳамворӣ мехобанд (расмиҳои 7.a ва 7.b). Дар фазо хатҳои рости дар як ҳамворӣ нахобанда хатҳои рости чилликӣ номида мешаванд (расми 7.c). Мувофиқи аломати зерини хатҳои рости чилликӣ онҳоро шинохта гирифтан мумкин:

7



Теоремаи-4.4. Агар аз ду хати рост якеаш дар ягон ҳамворӣ хобад, дуюмаш ин ҳамвориро дар нуқтае, ки дар хати рости якум намехобад бурида гузарад, он гоҳ ин хатҳои рост чилликӣ мешаванд.

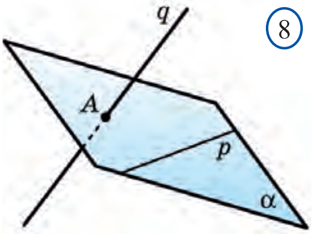
Исбот. Бигузор, хати рости p дар ҳамвории α хобад. Хати рости q бошад ин ҳамвориро дар нуқтаи A-и ба хати рости p тааллуқ надошта бурида гузарад (расми 8). Исбот мекунем, ки хатҳои рости p ва q хатҳои рости чилликӣ мебошанд.

Баръаксашро фарз мекунем: Бигузор хатҳои рости p ва q дар ягон ҳамвории β хобанд. Он гоҳ ба ҳамвории β хати рости p ва нуқтаи A мутааллиқ мешаванд. Дар навбати худ нуқтаи A ба хати рости q ҳам тааллуқ дорад.

Пас, ҳамвориҳои α ва β болоиҳам меафтанд. Дар натиҷа, мувофиқи шарт хати рости q-и ба ҳамвории a тааллуқ надошта, мутааллиқ шуд. Зиддияти ҳосилшуда нодуруст будани фарзамонро нишон медиҳад. ❑

Кунҷи хурдтарини аз ду кунҷҳои ҳамсояи дар натиҷаи буриши ду хати рост ҳосилшуда *кунҷи байни ду хати рост* номида мешавад.

8



Кунҷи байни хатҳои рости чилликӣ гуфта, кунҷи байни хатҳои рости ба ин хатҳои рост параллели буридашавандаро меноманд (расми 9).

Дар амал барои ёфтани кунҷи байни хатҳои рости чилликии a ва b (расми 10)

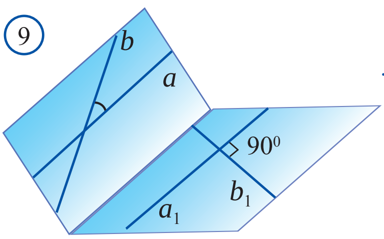
1) ягон нуқтаи A интихоб карда мешавад; 2) аз нуқтаи A ба хатҳои рости чилликӣ хатҳои рости параллели a_1 ва b_1 гузаронида мешавад; 3) кунҷи байни ин хатҳои рост чен карда мешавад.

Дар бораи натиҷаи ин алгоритм аз нуқтаи A вобаста набудани он фикр карда бинед.

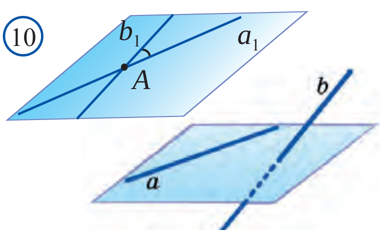
Хатҳои рости кунҷи байнашон ба 90° баробар *хатҳои рости перпендикуляр* номида мешаванд. Кунҷи байни хатҳои рости параллел ба 0° баробар аст.

? *Савол ва машқҳо оиди мавзӯъ*

9



10



1. *Чӣ хел хосиятҳои хатҳои рости параллелро медонед?*
2. *Аломати параллелии хатҳои ростро гӯед.*
3. *Аломати чилликӣ будани хатҳои ростро гӯед.*
4. *Кунҷи байни хатҳои рост чӣ тавр муайян карда мешавад?*
5. *Оё хатҳои рости чилликӣ параллел мешаванд?*

4.1. Ҷуфтҳои теғаҳои параллелӣ а) параллелопипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$; b) призмаи $ABCA_1B_1C_1$ муайян карда шаванд.

4.2. Дар чӣ гуна пирамидаҳо теғаҳои параллел мешаванд?

4.3. Маълум аст, ки агар дар ҳамворӣ хати рост яке аз хатҳои рости параллелро бурида гузарад, дуюмашро ҳам бурида мегузарад. Оё ин хосият дар фазо ҳам ҷой дорад?

4.4. Тасдиқи дурустро ёбед:

а)дар фазо аз нуқтаи дар хати рост нахобанда хатҳои рости бисёреро гузаронидан мумкин аст, ки ба он параллел бошад; b) хатҳои рости ба хати рости сеюм параллел байни худ бурида мешаванд; c) агар ду хати рост дар ҳамворӣ хобанд, онҳо бурида мешаванд; d) аз хати рост ва нуқтаи дар он нахобанда дуто ҳамвории гуногун гузаронидан мумкин аст; e) аз нуқтаи фазо, ки дар ҳамворӣ намехобад, адади беохири хатҳои рости ин ҳамвориро бурранда гузаронидан мумкин аст.

4.5. Аз порчаи AB, ки нуқтаи A дар ҳамвории a мехобад нуқтаи C интихоб карда шудааст. Хатҳои рости параллели аз нуқтаҳои B ва C гузаронидашуда ҳамвории a дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 бурида мегузарад. Агар a) нуқтаи C миёначои порчаи B, ва $BB_1 = 14$ см; b) $AC : CB = 3 : 2$ ва $BB_1 = 50$ см бошад, дарозии порчаи CC_1 –ро ёбед.

4.6. Параллелограмми $MNOP$ ва трапетсияи $MNEK$-и асосаш EK ки дар як ҳамворӣ намехобанд дода шудааст.

a) байни якдигар ҷойгиршавии хатхои рости PO ва EK – ро муайян кунед.

b) асосхои трапетсия ба $MN = 45$ см, $EK = 55$ см баробар буда, ба он давраи дарунӣ кашидан мумкин аст. Периметри трапетсияро ёбед.

4.7. Хатҳои рости a ва b дар як ҳамворӣ мехобанд. Байни якдигар ҷойгиршавии ин хатҳои ростро нишон диҳед.

A) a ва b параллел; *B)* a ва b бурида мешаванд; *C)* a ва b бурида намешаванд; *D)* a ва b чилликӣ; *E)* a ва b параллел нест.

4.8. Хатҳои рости a ва b ба хати рости c параллел. Хатҳои рости a ва b байни якдигар чӣ тавр ҷойгир шуданашон мумкин?

4.9. Дар расми 11ҳамвориҳои α ва β аз рӯйи хати рости b бурида мешавад. Агар $a//b$, хатҳои рости c ва b параллел набошанд, хатҳои рости a ва c байни якдигар чӣ тавр ҷойгир шуданашон мумкин?

4.10. Дар расми 12 нуқтаи M дар соҳаи берунаи секунҷаи ABC мехобад. Хатҳои рости ба хатҳои рости MA, MC, MB чилликӣ бударо муайян кунед.

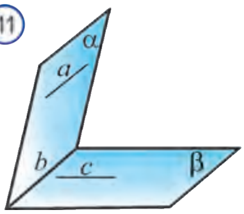
4.11. Дар расми 13 хати рости PQ дар соҳаи берунаи чоркунҷаи $ABCD$ мехобад ва ба BC параллел. a) PQ ва AB; b) PQ ва CD; c) PQ ва AD чӣ гуна хати ростанд?

4.12. Дар расми 14 нуқтаи M дар соҳаи берунаи секунҷаи ABC мехобад. Миёнаҷойи порчаҳои MA, MB, MC мувофиқан бо нуқтаҳои K, F, P қайд карда шудаанд. Кадоме аз хатҳои рости 1) KP; 2) PF; 3) KF; 4) KM; 5) PM; 6) FM; 7) AB; 8) BC; 9) AC байни якдигар параллеланд?

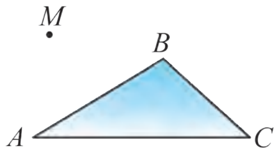
4.13. Нуқтахои M, N, U, V мувофиқан миёнаҷойи тарафҳои AC, AD, BD ва BC пирамидаи $ABCD$ (расми 15). Агар $AB = 20$ см, $CD = 30$ см бошад, периметри чоркунҷаи $MNUV$-ро ёбед.

4.14. Нуқтахои H, G, F, S дар пирамидаи секунҷаи $KLMN$ мувофиқан миёнаҷойи теғаҳои MN, ML, LK ва KN (расми 16). Агар $LK = 18$ мм, $MN =$

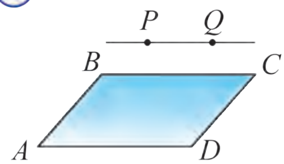
11



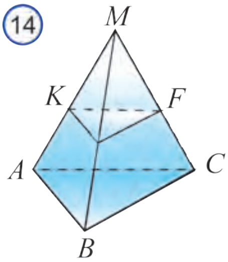
12



13

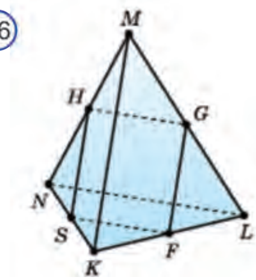


14



15

16



= 22 мм бошад, периметри чоркунҷаи *HGFS*- ро ёбед.

4.15. Исбот кунед, ки аз хати рост дуто ҳамвории гуногун гузаронидан мумкин аст.

4.16. Чор нуқтаи дар як ҳамворӣ нахобанда дода шуда аст. Чандто ҳамвории аз ҳар сетои онҳо гузарандаро гузаронидан мумкин?

4.17. Нуқтахои *A, B, C* дар ҳар яки ду ҳамвориҳои додашуда мехобанд. Исбот кунед, ки ин нуқтаҳо дар як ҳамворӣ мехобанд.

4.18. Ду ҳамвориҳое ки қад қади хати рости *a* бурида мешаванд дода шуда аст. Хати рости *b* дар яке аз онҳо мехобад ва дуюмиашро бурида мегузарад. Исбот кунед, ки хатҳои рости *a* ва *b* бурида мешаванд.

4.19. Аз се ҳамвориҳо ҳар дутояш байни якдигар бурида мешаванд. Агардуто аз хатҳои рости бу риши ҳамвориҳо дар ягон нуқта бурида шаванд, исбот кунед, ки хати буриши сеюмиаш ҳам аз ин нуқта мегузарад.

4.20. Исбот кунед, ки агар диагоналҳои чоркунҷа бурида шаванд, он гоҳ қуллаҳои у дар як ҳамворӣ мехобад.

4.21. Нуқтаҳои *K, Z, M, N* мувофиқан миёнаҷоҳои порчаҳои *SA*, *AC*, *BC*, *SB*-и пирамидаи секунҷагии *SABC* мебошад. Агар теғаҳои паҳлӯии пирамида *b*, тарафи асос ба *a* баробар бошад, пириметри чоркунҷаи *KZMN*-ро ёбед.

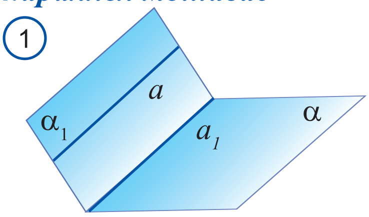
4.22. Хатҳои рости *XU* ва *VT* параллел, хатҳои рости *XY* ва *VT* бошад чилликӣ. Агар: a) $\angle YXU = 40^o$; b) $\angle YXU = 135^o$; c) $\angle YXU = 90^o$ бошад, кунҷи байни хатҳои рости *XY* ва *VT* – ро ёбед.

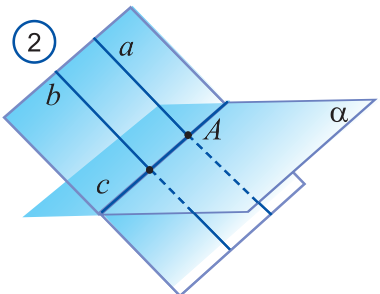
4.23. Хати рости *l* ба тарафи *BC* – и параллелограмми *ABCD* параллел ва дар ҳамвории он намехобад. Исбот кунед, ки хатҳои рости *l* ва *CD* чилликӣ мебошанд. Агар яке аз кунҷҳои пирамида. a) 58^o; b) 133^o бошад, кунҷи байни хатҳои рости *l* ва *CD*- ро ёбед.

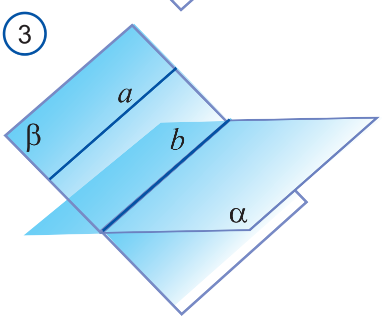
11 БАЙНИ ЯКДИГАР ҶОЙГИРШАВИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

Агар хати рост ва ҳамворӣ бурида нашаванд, *хати рост ва хамворӣ параллел* номида мешавад. Параллелии хати рост ва ҳамворӣ аз рӯйи аломати зерин муайян карда мешавад.

Теоремаи 4.5. Агар хати рости дар ҳамворӣ нахобанда ба ягон хати рости ин ҳамворӣ параллел бошад, ин хати рост ба худи ҳамворӣ ҳам параллел мешавад







Исбот. Бигузор, α - ҳамворӣ, a – хати рости дар он нахобанда, a_1 бошад хати рости дар ҳамвории α хобанда ва ба хати рости a параллел бошад.

Аз хатҳои рости a ва a_1 ҳамвории α–ро ме-гузаронем (расми 1).

Равшан аст, ки ҳамвориҳои, α ва α_1аз рӯйи хати рости a_1 бурида мешаванд.

Агар хати рости a ҳамвории α– ро бурида гузарад,он гоҳ нуқтаи буриш ба хати рости a_1 мутааллиқ мешавад. Аммо илоҷи ин нест, чунки хатҳои рости a ва a_1 байни якдигар параллеланд. Ҳамин тавр, хати рости, a ҳамвории α ро бурида гузашта наметавонад. Пас, хати рости a- ба ҳамвории α - параллел аст.❑

Масъала. Исбот кунед, ки агар ҳамворӣ яке аз ду хатҳои рости паралеллро бурида гузарад, он гоҳ дуюмиашро ҳам бурида мегузарад.

Исбот. a ва b – ду хати рости параллел, α бошад ҳамвории хати рости a ро дар нуқтаи A бурида гузаранда мешавад (расми 2). Аз хатҳои рости a ва b ҳамворӣ мегузаронем. Он ҳамворӣ α - ро аз рӯйи ягон хати рости c мебурад. Хати рости c хати рости a – ро дар нуқтаи A бурида мегузарад.

Пас хати рости ба он параллели b –ро ҳам бурида мегузарад. Азбаски хати рости c дар ҳамвории α мехобад ҳамвории α хати рости b – ро ҳам бурида мегузарад.

Теорема 4.6. Агар як ҳамворӣ аз хати рости ба ҳамвории дуюм параллел гузарад, хати рости буриши ин ҳамвориҳо ҳам ба хати рости додашуда параллел мешавад.

Исбот. Агар хати рости a ба ҳамвории α - параллел ва дар ҳамвории β хобад, хати рости b бошад хати буриши ҳамвориҳои α ва β бошад (расми 3). Дар ин ҳолат, хатҳои рости a ва b дар ҳамвории β мехобад ва байни якдигар бурида намешаванд. Дар ҳолати баръакс, хати рости a ҳамвории β – ро бурида мегузашт. Пас, ҳатҳои рости a ва b парраллел мебошанд.❑

Савол ва машқҳо оиди мавзӯъ

1. *Дар фазо хати рост ва ҳамворӣ байни якдигар чӣ тавр ҷойгир шуданаш мумкин?*
2. *Хати рост ва ҳамворӣ кай параллел мешаванд?*
3. *Аломати параллелии хати рост ва ҳамвориро гуед .*
4. *Дар фазо чӣ хел хосиятҳои байни ҳам ҷойгиршавии хати рост ва хамвориҳоро медонед?*

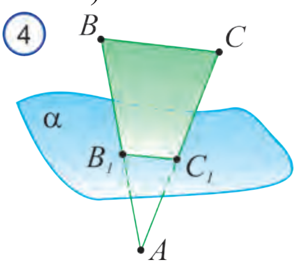
4.24. a) дар куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$; b) дар призаи шашкунҷаи мунтаззами $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ теғаҳо ва тарафҳои ба якдигар параллелро муайян кунед.

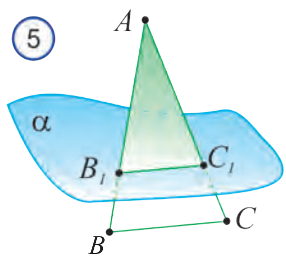
4.25. Тасдиқи дурустро интихоб кунед: а) аз нуқтаи дар хати рост нахобандаи фазо хатҳои рости ба ин хати рост параллели бисёреро гузаронидан мумкин; b) хатҳои рости ба хати рости сеюм параллел дар як нуқта бурида мешавад; c) агар ду нуқтаҳои хати рост ба ҳамворӣ мутааллиқ бошад, хати рост ҳамвориро бурида мегузарад; d) аз хати рост ва нуқтаи дар он нахобанда дуто ҳамвории гуногун гузаронидан мумкин; e) дар фазо аз нуқтаи дар ҳамворӣ нахобанда хатҳои рости бисёри ҳамвории додашударо буррандаро гузарондан мумкин.

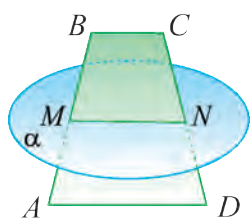
4.26. Нуқтаҳои A ва C дар ҳамвории α мехобад. Нуқтаҳои B ва D дар ҳамвории β мехобад.

Аз хатҳои рости AC, CD, BD, AB, BC ва AD кадомаш ҳамвории β -ро бурида мегузарад?

4.27. Секунҷаи ABC ҳамвории α -ро дар нуқтаҳои B ва C бурида мегузарад (расми 4).

4


5


6


Агар $AB1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15$ см, $BC//B_1C_1$ бошад, дарозии порчаи B_1C_1

–ро ёбед.

4.28. Ҳамвории α тарафҳои AB ва AC- и секунҷаи ABC – ро дар нуқтаҳои B_1 ва C_1 бурида мегузарад (расми 5). Агар $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B C = 12$ см, $BC//\alpha$ бошад, дарозии порчаи B_1C_1 -ро ёбед.

4.29. Ҳамвории α ба асоси AD-и трапетсияи $ABCD$ параллел ва тарафҳои паҳлӯяшро дар нуқтаҳои M ва N бурида мегузарад (расми 6). Агар AD =17см, BC = 9 см бошад, дарозии порчаи MN –ро ёбед..

4.30. Ба ҳамворӣ аз нуқтаи дар он нахобанда чандто хати рости параллел гузаронидан мумкин аст?

4.31. Хати рости a ба ҳамвории α параллел. Тасдиқоти дурустро ёбед. a) хати рости a танҳо ба як хати рости ҳамвории α параллел мешавад; b) хати рости a ба ғайр аз як хати рости ҳамвории α ба дигарҳояш чилликӣ мешавад;c) дар ҳамвории α ба хати рости a хатҳои рости бисёри параллел ва чилликӣ ёфт мешавад; d) дар ҳамвории α фақат якто хати рости ба хати рости a параллел ва аз нуқтаи ихтиёрии ин ҳамворӣ гузаранда мавҷуд аст.

4.32. Нуқтаҳои A, B, C, D дар як ҳамворӣ намехобанд. Нуқтаҳои M, N, K, Z мувофиқан миёнаҷои порчаҳои AD, BD, BC, AC мебошанд. Агар CD=AB бошад, исбот кунед, ки хатҳои рости MK ва NZ перпендикуляр мебошанд.

4.33. Тарафҳои AB ва BC-и параллелограмми $ABCD$ ҳамвории α -ро бурида мегузарад. Исбот кунед, ки хатҳои рости AD ва DC ҳам ҳамвории α -ро бурида мегузаранд.

4.34. Секунҷаҳои ABC ва ABD дар як ҳамворӣ намехобанд. Исбот кунед, ки хати рости ихтиёрии ба хати рости CD параллел ҳамвории ин секунҷаҳоро бурида мегузаранд.

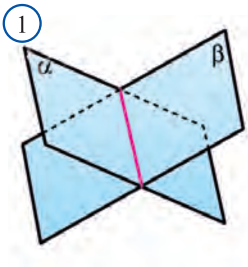
4.35. Исбот кунед, ки хатҳои рости ду хати рости буррандаи додашударо бурида гузаранда дар як ҳамворӣ мехобанд.

12 БАЙНИ ҲАМ ҶОЙГИРШАВИИ ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

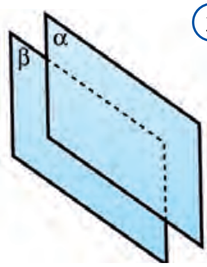
Ду ҳамворӣ, ёки ба нуқтаи умумӣ соҳиб аст, ёки ба нуқтаи умумӣ соҳиб нашуданаш мумкин. Дар ҳолати якум мувофиқи аксиомаи S3 ин ҳамворӣ ба хати рости умумӣ ҳам соҳиб мешавад, яъне қад-қади хати рост бурида мешаванд (расми 1). Дар ҳолати дуюм ҳамвориҳо бурида намешаванд (расми 2).

Ҳамвориҳои буриданашаванда *ҳамвориҳои параллел* номида мешаванд. Дар бораи ҳамвориҳои параллел фарш ва шифти хона, деворҳои муқобилро тасаввур кардан мумкин (расми 3).

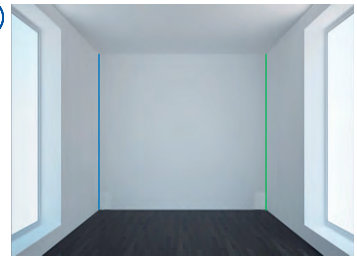
1



2

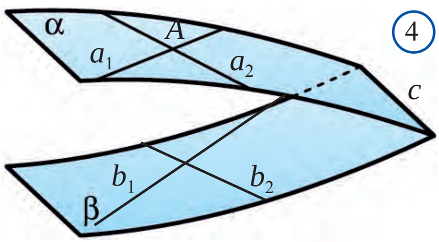


3



Параллелии ду ҳамворӣ аз рӯйи аломати зерин муайян карда мешавад.

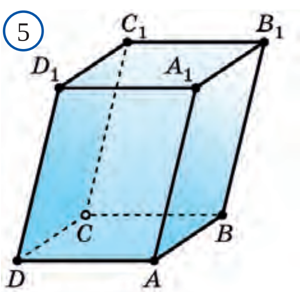
Теоремаи 4.7. ***Агар ду хати рости буррандаи як ҳамворӣ мувофиқан ба ду хати рости ҳамвории дуюм параллел бошанд, ин ҳамвориҳо параллел мешаванд.***



4

Исбот. Агар α ва β – ҳамвориҳои додашуда, a ва b – хатҳои рости дар ҳамвории α хобанда ва дар нуқтаи A буридашаванда, a_1 ва b_1 бошад дар ҳамвории β хобанда ва мувофиқан ба хатҳои рости a ва b параллел (расми 4).Фарз мекунем, ки ҳамвориҳои α ва β ҳамвориҳои байни ҳам параллел набошанд, яъне қад қади ким кадом хати рости c бурида шаванд. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 3.6, хатҳои рости a_1 ва a_2 мувофиқан ба хатҳои рости b_1 ва b_2 параллел буда,ба ҳамвории β ҳам параллел мешавад. Бинобар ин, онҳо хати рости c-и дар ин ҳамворӣ хобандаро ҳам бурида намегузарад.

5



Ҳамин тавр, аз нуқтаи A-и дар ҳамвории, α хобида дуто хати рости ба хати рости c параллели: a_1 ва a_2 гузашта истодааст. Мувофиқи аксиомаи параллелӣ, ин тавр шуданаш мумкин нест. Зиддият нодуруст будани фарзамонро нишон дода истодааст. ❑

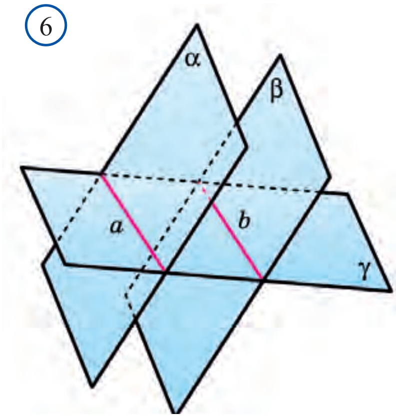
Аз ин теорема истифода бурда, параллел будани тарафҳои паҳлӯи параллелопипедро (расми 5) мустақилона исбот кунед.

Теоремаи 4.8. ***Хатҳои рости бурриши ду ҳамвории параллел бо ҳамвории сеюм байни якдигар параллел мешаванд***

Исбот. Агар, ҳамвориҳои параллели α ва β ҳамвории γ ро мувофиқан аз рӯйи хатҳои рости a ва b бурида гузаранд (расми 6). Исбот мекунем, ки хатҳои рости a ва b параллел мебошанд.

Фарз мекунем, ки хатҳои рости a ва b дар ягон нуқтаи Q бурида шаванд. Он гоҳ нуқтаи Q дар ҳамвории α мехобад, чунки хати рости a дар ҳамвории

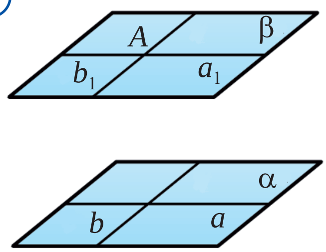
6



α мехобад. Монанди ин, нуқтаи Q дар ҳамвории β мехобад, чунки хати рости b дар ҳамвории β мехобад. Дар натиҷа, ҳамвориҳои α ва β ба нуқтаи умумии Q соҳиб шуда истодааст. Мувофиқи шарт илоҷи ин тавр шуданаш нест. Зиддият нодуруст будани фарзамонро нишон дода истодааст. ❑

Теоремаи 4.9. Аз нуқтаи берунии ҳамвории додашуда ҳамвории ягонаи параллел гузаронидан мумкин аст.

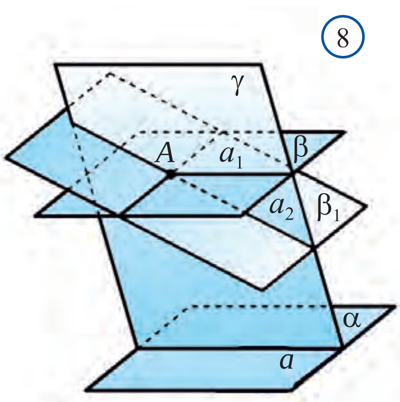
7



Исбот. Дар ҳамвории додашудаи α дуто хати рости буррандаи a, b –ро мегузаронем. Аз нуқтаи додашудаи A ба онҳо хати рости a_1, b_1 –ро мегузаронем (расми 7).

Аз хатҳои рости a_1, b_1 ҳамвории β ро мегузаронем. Мувофиқи теоремаи 3.7 ин ҳамворӣ, ба ҳамвории α параллел буда, ҳамвории ҷусташуда мебошад.

8



Акнун ягонагии ин ҳамвориҳоро нишон медиҳем. Фарз мекунем, ки боз як ҳамвории ба ҳамвории α параллели β_1 мавҷуд бошад (расми 8). Ҳамвории аз нуқтаи A ва хати рости a гузарандаи γ ро мегузаронем. Ин ҳамворӣ ҳамвории β ро қад-қади хати рости a_1, ҳамвории β_1 ро қад-қади хати рости a_2 бурида мегузарад.

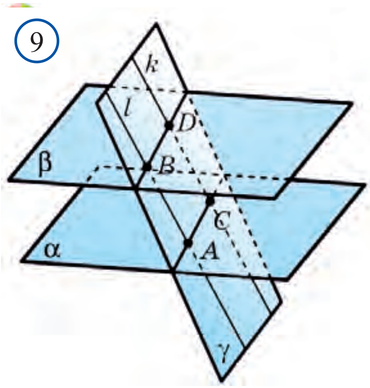
Мувофиқи теоремаи 3.6 хатҳои рости a_1, a_2 ба хати рости a параллел мешавад. Лекин ин тавр шудашаш мумкин нест, чунки дар ҳамворӣ аз нуқтаи дар он нахобанда фақат якто хати рости параллел гузаронидан мумкин аст.

Зиддият нодуруст будани фарзамонро нишон дода истодааст. ❑

Теоремаи 4.10. Ду ҳамвории ба ҳамвории сеюм параллел байни якдигар параллел мешаванд.

Ин теоремаро мустақилона исбот кунед.

Теоремаи- 4.11. Порчаи хатҳои рости параллели дар байни ҳамвориҳои параллел ҷойгирифта баробаранд.



Исбот. Агар ҳамвориҳои α ва β аз хатҳои рости k ва l порчаҳои AC ва BD-ро ҷудо кунад (расми 9). Баробарии ин порчаҳоро нишон медиҳем.

Ҳамвории γ и аз хатҳои рости k ва l гузаранда ҳамвориҳои параллелро қад-қади хатҳои рости AC ва BD бурида мегузарад. Дар натиҷа, ба чоркунҷаи $ABCD$-и тарафҳои муқобилаш параллел, яъне ба параллелограмм соҳиб мешавем. Тарафҳои муқобили параллелограмм байни якдигар баробар мешавад. Хусусан, $AB = CD$. ❑

Теоремаи-4.12. Порчаҳои хатҳои рости ихтиёрии дар байни се ҳамвории параллел ҷойгиршуда байни худ пропорсионал мешаванд.

Ин теоремаро низ мустақилона исбот кунед.

Саволҳо ва машқҳо оиди мавзӯъ

1. *Дар фазо ҳамвориҳо чи хел ҷойгир шуданашон мумкин?*
2. *Ҳамвориҳои параллел гуфта чӣ хел ҳамвориҳоро меноманд?*
3. *Аломати параллели ҳамвориҳоро гӯед.*
4. *Кадом хосиятҳои ҷойгиршавии ҳамвориҳо дар фазоро медонед?*
5. *Параллел будани тарафҳои паҳлӯи параллелепипедро асоснок кунед.*

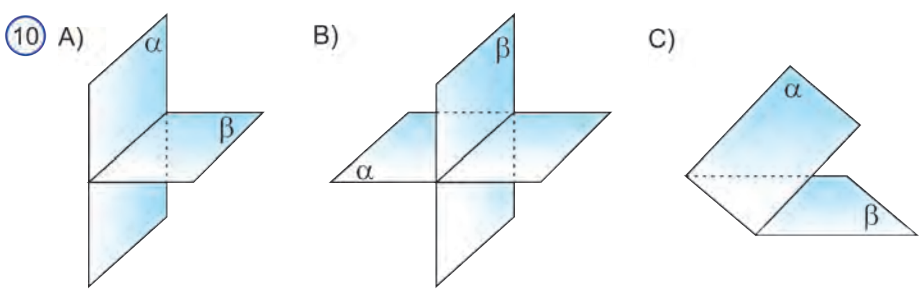
4.36. a) параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$; b) призмаи $ABCA_1B_1C_1$ ро муайян кунед.

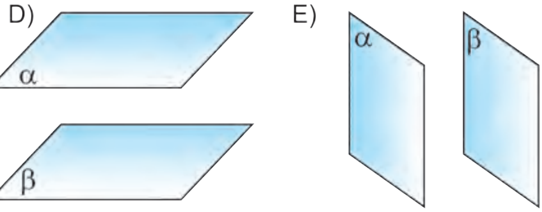
4.37. Ҳамвориҳои α ва β, ки ба ягон нуқтаи умумӣ соҳиб нест, байни якдигар чӣ хел ҷойгир мешаванд?

4.38. α ва β ҳамвориҳои параллел. a ва b хатҳои росте. ки дар ҳамвории α мехобад, хатҳои рости c ва d бошад дар ҳамвории β мехобад.

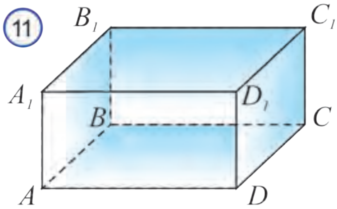
Аз тасдиқоти зерин кадомиҳояш дуруст аст?

1) $a \parallel b$; 2) $c \parallel b$; 3) $b \parallel b$; 4) $b \parallel a$; 5) $c \parallel a$; 6) $d \parallel b$; 7) $a \parallel a$; 8) $d \parallel a$.





11



4.39. Сето расмеро нишон диҳед, ки дар онҳо ду ҳамвории буранда тасвир шудааст (расми 10).

4.40. Ҳамвориҳои α ва β параллел. Аз нуқтае. ки ба ягонтои онҳо тааллуқ надорад ҳамвории γ гузаронида шудааст. Тасдиқоти дурустро нишон диҳед. a) ҳамвории γ ҳамвории ягонаи ба ҳамвории α параллел мебошад; b) ҳамвории γ ҳамвории ягонаи ҳамвории β ро бурранда аст; c) ҳамвории γ β ҳамвории ягонаи параллел мебошад; d) ҳамвории γ ягона ҳамвории α ро бурида гузаранда; e)ҳамвории γ ҳамвории ягонаи ҳам ба α ҳам ба β параллел мебошад.

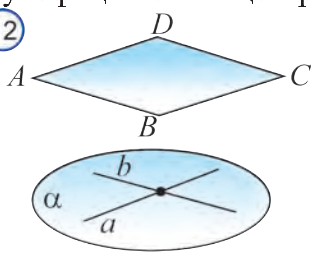
4.41. Дар расми 11 параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тасвир карда шудааст.

Байни якдигар ҷойгиршавии ҳамвориҳои зеринро муайян кунед:

a) $A_1B_1C_1D_1$ ва B_1A_1AB; b) ADD_1A_1 ва $ABCD$; c) ABB_1A_1 ва C_1D_1DC; d) $BADC$ ва ABB_1A_1; e) CC_1B_1B ва ADD_1A_1

4.42. Порчаҳои AB, BC тарафҳои параллелограмми $ABCD$ буда, онҳо мувофиқан ба хатҳои рости a ва b параллеланд (расми 12). Хатҳои рости a ва b байни ҳам бурида мешавад ва ба ҳамвории α тааллуқ дорад. Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ҳамвориҳои $ABCD$ ва α-ро муайян кунед.

12

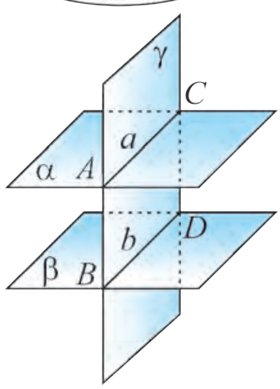


4.43. Хатҳои рости чилликии a ва b дода шудааст. Чанто ҳамвории аз хати рости a гузаронда ва ба ҳамвории β параллел бударо гузаронидан мумкин аст?

4.44. Хати буриши ду ҳамвориҳои α ва β ба ҳамвории сеюми γ параллел. Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ҳамвориҳои α ва β-ро муайян кунед.

4.45.Ҳамвории γ ки аз рӯйии хатҳои рости параллели AB ва CD гузаронида шудааст ҳамвориҳои параллели α ва β -ро мувофиқан қад қади хатҳои рости AC ва BD бурида мегузарад (расми 13). Агар BD = 15 см бошад, дарозии порчаи AC ро ёбед.

13



4.46. Исбот кунед, ки ҷуфти ягонаи ҳамвориҳои параллелӣ аз ду хати рости чилликии ихтиёрӣ гузаронда иборат аст.

4.47. Ҳамвориҳои α ва β параллеланд. Хати рости ихтиёрии дар ҳамвории α хобанда ба ҳамвории β параллел буданашро исбот кунед.

4.48. Нуқтаи O миёнаҷои порчаҳои дар як ҳамворӣ нахобандаи AA_1, BB_1, CC_1 мебошад. Исбот кунед, ки ҳамвориҳои ABC ва $A_1B_1C_1$ параллел аст.

4.49. Параллелограмми $ABCD$ ва ҳамвории онро набуранда додашуда-аст. Аз қуллаҳои A, B, C, D –и параллелограмми $ABCD$ мувофиқан хатҳои рости параллели ҳамвориро дар нуқтаҳои A_1, B_1, C_1, D_1 бурида гузаранда гузаронида шудааст. Агар $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 3$ м ва $CC_1 = 1$ м бошад, дарозаи порчаи DD_1 –ро ёбед.

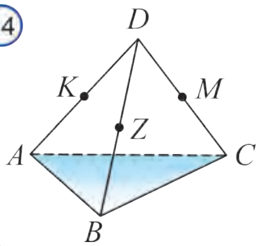
4.50. Ду ҳамвории параллел дода шудаанд. Аз нуқтаҳои A ва B-и як ҳамворӣ хатҳои рости параллели ҳамвории дуюмро дар нуқтаҳои A_1 ва B_1 бурранда гузаронида шудааст.

Агар $AB = a$ бошад, дарозаи порчаи A_1B_1 -ро ёбед.

4.51. Ҳамвориҳои α ва β параллеланд. Аз нуқтаҳои M ва N-и ҳамвории α хатҳои рости параллели ҳамвории β -ро дар нуқтаҳои K ва L бурранда гузаронида шудааст. Исбот кунед, ки $MNLK$ параллелограмм аст. Агар $ML = 14$ см, $NK = 8$ см ва $MK : MN = 9 : 7$ бошад, периметри чоркунҷаи $MNLK$-ро ёбед.

4.52. Нурҳои OF ва OP ҳамвориҳои параллели α ва β - ро мувофиқан дар нуқтаҳои F_1, P_1, F_2, P_2 бурида мегузарад. Агар $F_1P_1 = 3$ см, $F_2P_2 = 5$ см ва $P_1P_2 = 4$ см бошад, дарозаи порчаи OP_1 ёфта шавад.

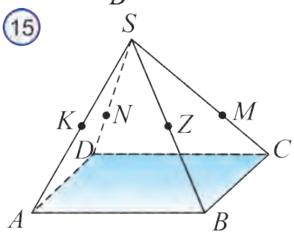
14



4.53. Нурҳои OA ва OB ҳамвориҳои параллели α ва β -ро мувофиқан дар нуқтаҳои A_1, B_1, A_2, B_2 б рида мегузарад. Агар $OA_1 = 16$ см, $A_1A_2 = 24$ см ва $A_2B_2 = 50$ см бошад, дарозии порчаи A_1B_1 –ро ёбед.

4.54. Нуқтаи D ба ҳамвории секунҷаи ABC тааллуқ надорад (расми 14). Нуқтаҳои K, M, Z мувофиқан миёнаҷои порчаҳои DA, DB ва DC мебошад. Ҷойгиршавии байни якдигарии ҳамвориҳои ABC ва KZM –ро муайян кунед.

15



4.55. Нуқтаи S ба ҳамвории параллелограмми $ABCD$ мутааллиқ нест (расми 15). Нуқтаҳои K, Z, M, N мувофиқан ба порчаҳои SA, SB, SC ва SD тааллуқ дорад. Агар $SK = AK$, $SZ = BZ$, $SM : MC = 2 : 1$, $SN : ND = 2 : 1$ бошад, байни якдигар ҷойгиршавии ҳамвориҳои $ABCD$ ва $KZMN$ –ро муайян кунед.

13 ПРОЕКСИЯИ ПАРАЛЛЕЛӢ ДАР ФАЗО

Шаклҳои фазо дар ҳамворӣ бо усулҳои гуногун тасвир карда мешаванд. Дар поён бо онҳо шинос мешавем.

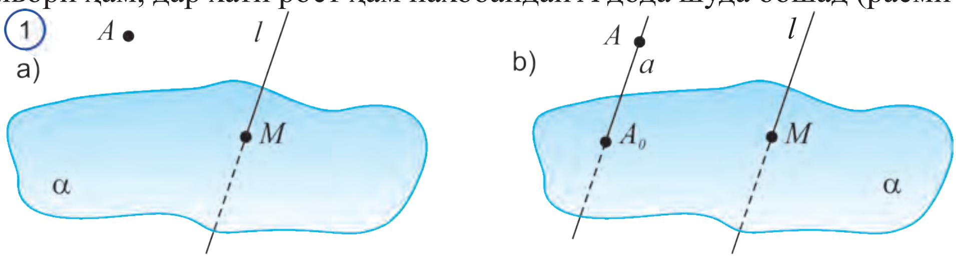
Ба ҳамвори проексиякунии параллелии шакли фазоӣ гуфта чунин инъикоскуниро меноманд, ки дар он ҳар як нуқтаи шакл қад-қади хатҳои рости ба самти проексиякунии додашуда параллел ба ҳамворӣ кӯчонида мешавад.

Проексиякунии параллелиро ба сояи ягон чизи бо ёрии нурҳои равшани дар девор, ёки фарш ҳосилкардаро қиёс додан мумкин.

Ҳамин тавр, ҳангоми проексиякунии параллели ягон шакл ва ҳамворие, ки ҳамвории проексиякунӣ номгӯ мешавад, ҳамчунин ягон хати росте, ки самти проексиякунӣ номида мешавад, интихоб карда мешавад. Албатта, ин хати рост бо ҳамвории проексия бурида шуданаш лозим.

Гӯемки, ҳамвории ихтиёрии α ва хати рости проексиякунии l ва нуқтаи дар ҳамворӣ ҳам, дар хати рост ҳам нахобандаи A дода шуда бошад (расми 1.а).

1



Аз нуқтаи A ба ҳамвории α хати рости ба хати рости і параллел бударо мегузаронем.

Ин хати рост ҳамвории α ро дар нуқтаи A_0 бурида мегузарад (расми 1.b).

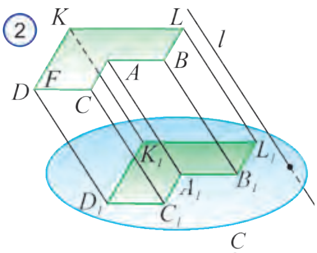
Нуқтаи ёфташудаи A_0 *проексияи параллелии* нуқтаи A ба ҳамвории α номида мешавад.

Бигузор, ягон шакли F-ро ба ҳамвории α ба самти l проексияи параллели кардан лозим бошад. Барои ин нуқтаи ихтиёрии шакли F-ро мегирем, аз он хати рости ба l параллел мегузаронем ва нуқтаи буриши онро бо ҳамвории α қайд мекунем. Ин хел нуқтаҳо дар ҳамвории α шакли номаълуми F_1-ро ҳосил мекунанд. Айнан ҳамин шакли F_1 дар ҳамвории α проексияи параллелии инро α шакли F мешавад.

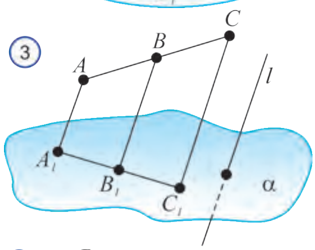
Дар расми – 2 проексияи шакли F ба ҳамвории α шакли F_1 тасвир шудааст. Хосиятҳои зерини проексиякунии параллелиро мебиёрем. Онҳоро мустақилона исбот карда бинед.

Дар проексиякунии параллели: нуқта ба нуқта, порча ба порча, хати рост ба

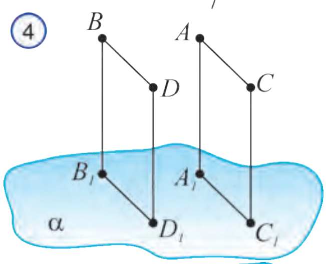
2



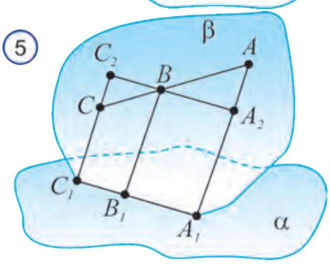
3



4



5



хати рост мегузарад.

Проексияи хатҳои рости параллел, параллел мешавад ёки болоиҳам меафтанд. Хосиятҳои зеринро исбот кунем.

***Хосияти 1.** Проексияи хати рости порча ҳам аз порчаҳо иборат мешавад.*

Дарҳақиқат, хатҳои рости ҳамаи нуқтаҳои порчаи AC-ро ба ҳамвории α проексиякунанда дар ҳамворие, ки қад-қади хати рости A_1C_1 бурида мегузарад, мехобанд. (расми 3). Аз порчаи AC нуқтаи ихтиёрии B дар порчаи A_1C_1 ба нуқтаи B_1 мегузарад.❑

***Хосияти 2.** Проексияи порчаҳои параллели шакл ҳам аз порчаҳои параллел иборат мешавад.*

Дарҳақиқат, AC ва BD порчаҳои параллели ягон шакл бошад (расми 4). Проексияҳои онҳо порчаҳои A_1C_1 ва B_1D_1 ҳам параллел мешаванд, чунки онҳоро ҳангоми ду ҳамвориҳои параллелро бо ҳамвории α буридан ҳосил кардем.

***Хосияти 3.** Нисбати дарозиҳои порчаҳои дар як хати рост ёки дар хатҳои рости параллел хобида ба нисбати проексияҳои дарозиҳои худ баробар аст.*

Дарҳақиқат, дар расми 5 хатҳои рости AC ва A_1C_1 дар ҳамвории β мехобад. Аз нуқтаи B-и порчаи AC хати рости A_2C_2 ки ба A_1C_1 параллел аст мегузаронем. Секунҷаҳои ҳосилшудаи BAA_2 ва BCC_2 монанд мешаванд. Аз монандии секунҷаҳо ва аз баробариҳои $A_1B_1=A_2B$ ва $B_1C_1=BC_2$ ба нисбати кофтуков карда истодаи $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$ соҳиб мешавем.

Ҳамин тавр, дар проексиякунии параллели дарозиҳои порчаҳои дар хати рост, ёки хатҳои рости параллел хобанда нигоҳ дошта мешудааст.

Махсусан, проексияи миёнаҷои порча ба миёнаҷои порча мегузарад.

? *Саволҳо ва машқҳо оиди мавзӯъ*

1. Проексиякунии параллелии шакли фазоро ба ҳамворӣ гуфта чӣ хел инъикоскуниро мегӯянд?

2. Проексияи параллелии нуқта ба ҳамворӣ чӣ хел ёфта мешавад?

3. Ҳамвории проексияи параллелӣ ва самти проексиякунӣ гуфта чиро мегӯянд?

4. Кадом хосиятҳои проексияи параллелиро медонед?

5. Аз проексияи параллелӣ дар куҷо истифода бурдан мумкин?

4.56. Оё дар проексиякунии параллелӣ проексияи порча a) порча; b) нуқта; c) ду нуқта; d) нур; e) хати рост шуданаш мумкин аст?

4.57. Оё дар проексиякунии параллели проексияи квадрат a) квадрат; b) параллелограмм; c) ромб; d) чоркунҷаи росткунҷа; e) трапетсия; f) порча шуданаш мумкин аст?

4.58. Агар секунҷаи дар яке аз ҳамвориҳои параллел хобида ба ҳамвории дуюм параллел проексия мешавад, исбот кунед, ки масоҳати он тағйир намеёбад.

4.59. Оё проексияи параллелограмм трапетсия мешавад? Ҷавобатонро асоснок кунед.

4.60. Оё проексияи параллелии секунҷаи мунтазам, секунҷаи мунтазам мешавад?

4.61. Оё проексияи параллелии секунҷаи росткунҷа, секунҷаи росткунҷа мешавад?

4.62. Проексияи параллелии секунҷаи ABC аз секунҷаи $A_1B_1C_1$ иборат. Дар ин проексиякуни a) медианаи; b) баландии; c) биссектрисаи секунҷаи ABC мувофиқан ба a) медианаи; b) баландии; c) биссектрисаи секунҷаи $A_1B_1C_1$ мегузарад?

4.63. Проексияи параллелии секунҷаи ABC аз секунҷаи $A_1B_1C_1$ иборат аст. Агар $\angle A = 30°$, $BC = 20$ см бошад, $\angle A_1 = 30°$, $B_1C_1 = 20$ см мешавад?

4.64. Проексияи параллелии порчаи AB аз порчаи A_1B_1 иборат аст. Проексияи нуқтаи C-и аз порчаи AB гирифташуда бошад нуқтаи C_1 аст. AB=48 см, A_1B_1=36 см. Агар дарозии порчаи AC a) 24 см; b) 12 см; c) 8 см; d) 32 см; e) 36 см бошад, дарозии порчаи A_1C_1-ро ёбед.

14 МАШҚИ АМАЛӢ ВА ТАТБИҚ

4.65. a) ду хати рост; b) хати рост ва ҳамворӣ; c) ду ҳамворӣ ба чанд нуқтаи умумӣ соҳиб шуданаш мумкин?

4.66. a) ду хати рост; b) хати рост ва ҳамворӣ; c) ду ҳамворӣ; d)се ҳамворӣ ба нуқтаи ягонаи умумӣ соҳиб шуда метавонад?

4.67. Чор нуқта дар як ҳамворӣ намехоба; a) аз онҳо сетояш дар як хати рост хобиданаш мумкин аст? b) Аз рӯйи онҳо чандто ҳамворӣ гузаронидан мумкин аст?

4.68. Хатҳои рости m ва n бурида мешавад, хати рости d бошад ба хати рости n параллел аст. Хатҳои рости m ва d байни якдигар чӣ хел ҷойгир шуданашон мумкин?

4.69. Аз қуллаи C-и секунҷаи ABC гузаранда ва ба тарафи AB параллел чандто ҳамвориҳо гузаронидан мумкин аст?

4.70. Параллелограммҳои $ABCD$ ва $ABKZ$ дар ҳамвориҳои гуногун мехобанд. Хатҳои рости параллелро нишон диҳед.

A) DA ва KB; B) CD ва KZ; C) BC ва AZ; D) DA ва ZA; E) CB ва KB.

4.71. Нуқтаҳои A ва C ба ҳамвории α, нуқтаҳои B ва D ба ҳамвории β тааллуқ дорад. Кадоме аз хатҳои рости AC, CD, BD, AB, BC, AD ҳамвории β -ро бурида мегузарад?

4.72. Порчаҳои AB, AC, KB, KD ҳамвории α -ро бурида мегузарад. Кадоме аз хатҳои рости AK, AD, BD, KC, CD ҳамвории α -ро бурида мегузарад?

4.73. Хатҳои рости дар як ҳамворӣ нахобандаи AB, AC ва AD ҳамвории ҳамвории α -ро дар нуқтаҳои B, C_1 ва D_1 бурида мегузарад. Агар нуқтаҳои B_1, C_1 ва D_1 паидарҳам пайваст карда шаванд, чӣ гуна шакл пайдо мешавад?

4.74. Аз қуллаҳо ва миёнаҷои порчаи MN-и ҳамвории α -ро набуранда хатҳои рости параллел гузаронида шудааст. Агар ин хатҳои рост ҳамвории α -ро мувофиқан дар нуқтаҳои M_1, N_1, ва K_1 бурида гузарад ва KK_1= 9 см, NN_1 = 15 см бошад, дарозии порчаи MM_1 -ро ёбед.

4.75. Аз нуқтаҳои P ва Z-и ҳамвории α аз он ба берун порчаҳои параллели дарозиҳояшон PK =6 см ва ZM = 9 см фуроварда шудааст. Хати рости MK ҳамвории α -ро дар нуқтаи O бурида мегузарад. Агар MK = 6 см бошад, дарозии порчаи MO –ро ёбед.

4.76. Ҳангоми проексиякунии параллелӣ аз параллелограмм квадрат ҳосил шуданаш мумкин аст?

4.77. Проексияи параллелии секунҷа дода шудааст. Проексияи медианаҳои ин секунҷа чӣ хел сохта мешавад?

4.78. Секунҷаи MNZ ва параллелограмми $MNPS$ (BC - асос) дар як ҳамворӣ намехобанд. Нуқтаҳои Q ва R миёнаҷоҳои порчаҳои CB ва DA, M ва N бошад миёнаҷоҳои порчаҳои DP ва CZ. Параллел будани хатҳои рости MN ва QR-ро исбот кунед.

4.79. Кадоме аз тарафҳои a) AA_1D_1D; b) BB_1C_1C; c) $ABCD$; d)DD_1C_1C; e) $B_1C_1D_1A_1$; f) ADD_1A_1-и куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (расми 6) ба хати рости A_1B_1 параллел мешавад?

4.80. Секунҷаи PRT дода шудааст. Ба хати рости PT ҳамвории параллели α тарафи PR-ро дар нуқтаи S, тарафи RT –ро дар нуқтаи Q бурида мегузарад (расми 7). Агар SR = 7 см, SQ = 3 см ва SP= 35 см бошад, тарафи PT –ро ёбед.

4.81. Ҳамвории α ба асоси AD-и трапетсияи $ABCD$ параллел буда, тарафҳои AB ва CD-ро дар нуқтаҳои M ва N бурида мегузарад (расми 8). $AD = 20$ см, $MN = 16$ см.

Агар нуқтаи M миёнаи порчаи AB ва AB=8 см бошад, периметри трапетсияро ёбед.

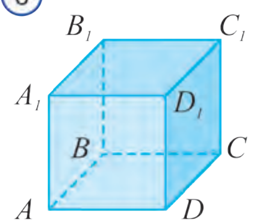
4.82. Аз нуқтаҳои P ва Z-и ҳамвории α аз он ба берун порчаҳои параллели дарозиҳояшон PK =6 см ва ZM = 9 см фуроварда шудааст. Хати рости MK ҳамвории α -ро дар нуқтаи O бурида мегузарад. Агар MK = 6 см бошад, дарозии порчаи MO –ро ёбед.

4.83. Тарафи AB-и чоркунҷаи росткунҷаи $ABCD$ ба ҳамвории α параллел, тарафи AD бошад ба ин ҳамворӣ параллел нест. Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ҳамвориҳои $ABCD$ ва α -ро муайян кунед.

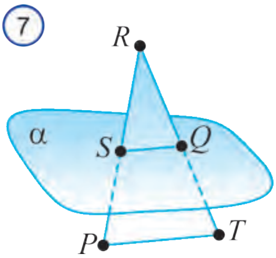
4.84. Дар параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кадоме аз тарафҳои дар поён додашудаи он ба қуллаи A ва тарафи $ABCD$ параллел мешавад?

A) D_1A_1AD; B) $D_1A_1B_1C_1$; C) ABB_1A_1; D) D_1C_1CD; E) D_1A_1BD?

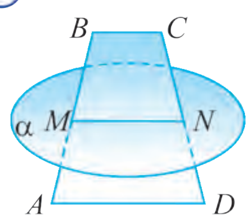
6



7



8



4.85. Ду диагоналҳои ромб ба ҳамвории α параллел. Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ҳамвории ромб ва ҳамвории α-ро муайян кунед.

4.86. Нуқтаи D дар ҳамвории секунҷаи ABC намехобад. Нуқтаҳои K, Z ва M мувофиқан миёнаҷоҳои порчаҳои DA, DB, ва DC. Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ҳамвориҳои ABC ва KZM –ро муайян кунед.

Татбиқҳо ва ҳосил кардани компетенсияи амалӣ

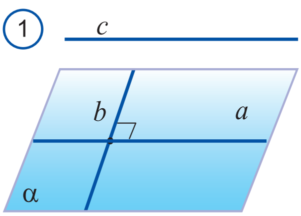
1. Тирҳои вагонҳои роҳи оҳан нисбат ба якдигар чи хел ҷой гирифтаанд?
2.Тирҳои вагонҳои роҳи оҳан нисбат ба релсҳо чи гуна ҷой гирифтаанд?
3.Аз гирду атроф нисбати хатҳои рости параллел ва чилликӣ мисолҳо биёред.
4.Барои чӣ кашакҳои мизи навишт дар баъзе ҳолатҳо ҳамвор кушода намешаванд?
5.Барои чӣ поршени насос дар даруни он ҳамвор ҳаракат мекунад?
6.Бо ёрии ченаки дӯзандагӣ, ё калтаки дароз параллелии хатчӯбҳои дар атрофи фарши даҳлез задаро чӣ хел санҷида мешавад?
7.Ҳамаи тарафҳои тахта (брус)-и аз чӯб тарошидашуда, шакли чоркунҷаи росткунҷаро дорад. Онро якпаҳлӯ, қад қади теғаҳояш ва чӣ хел арра накунед, дар ҳама буришҳо параллелограмм ҳосил мешавад. Инро исбот кунед.

ҚИСМИ V

ПЕРПЕНДИКУЛЯРИИ ХАТҲОИ РОСТ ВА ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

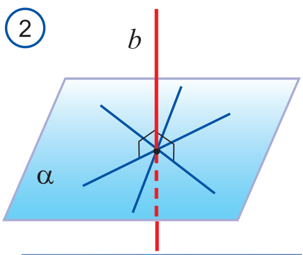
15 ХАТИ РОСТ ВА ҲАМВОРИИ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ДАР ФАЗО

Ёдовар мешавем, ки агар дар фазо кунҷи байни ду хати рост ба 90^0 баробар бошад, онҳо байни худ *хатҳои рости перпендикуляр* меноманд. Хатҳои рости перпендикуляр буранда ва чилликӣ мешавад. Дар расми 1 хатҳои рости перпендикуляри a ва b бурранда, хатҳои рости перпендикуляри b ва c бошад чилликӣ мебошанд. Перпендикулярии хатҳои рости a ва b ба тарзи $a \perp b$ навишта мешавад.



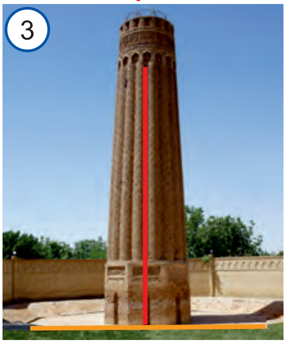
Хати росте, ки ба хати рости ихтиёрии ҳамворӣ перпендикуляр аст, хати рости ба ҳамворӣ перпендикуляр номида мешавад (расми 2).

Перпендикулярии ҳамвории α ва хати рости b ба тарзи $b \perp \alpha$ навишта мешавад.



Аз атроф мисолҳои бисёри шаклҳои байни худ перпендикулярро овардан мумкин. Одатан деворҳо ва сутунҳои хона, манораҳо ва симчӯбҳо нисбат ба замин рост, яъне перпендикуляр сохта мешаванд.Ҷевони хона, миз ва яхдон ҳам нисбат ба замин рост ҷойгир карда мешаванд (расми 3).

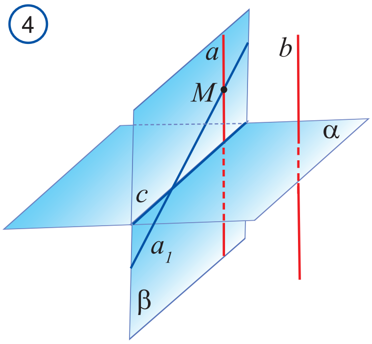
Акнун дар бораи баъзе хосиятҳои хатҳои рости перпендикуляр дар фазо истода мегузарем.



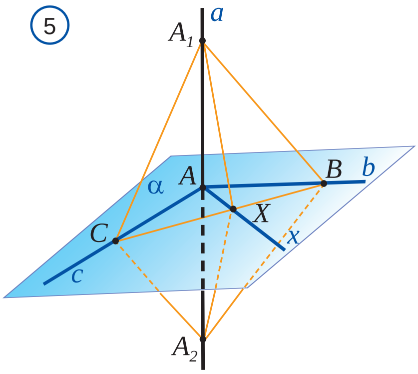
Агар хати рости a дар ҳамвории α хобад, ё ба он параллел бошад, он гоҳ ба хати рости a-и дар ҳамвории α хобанда хати рости b-и параллел ҳам ёфт мешавад. Бинобар ин, хати рости ба ҳамвори перпендикуляр, албатта ин ҳамвориро бурида мегузарад. Тасдиқи баръакс ҳам ҷой дорад.

Теоремаи 5.1. Агар ду хати рост ба ҳамворӣ перпендикуляр бошад, онҳо байни якдигар параллел мешаванд.

4



5



Исбот: Бигузор хатҳои рости a ва b ба ҳамвории α перпендикуляр бошанд (расми 4). Исбот мекунем, ки ин хатҳои рост байни якдигар параллеланд.

Аз ягон нуқтаи M-и хати рости a ба хати рости b хати рости параллели a_1 ро мегузаронем. Он гоҳ, $a_1 \perp \alpha$ мешавад.

Нишон медиҳем, ки хатҳои рости a ва a_1 болои ҳам меафтанд.Агар ин тавр нашавад, хатҳои рости a ва a_1 болои ҳам намеафтанд. Он гоҳ аз нуқтаи M-и ҳамворие ки дар он хатҳои рости a ва a_1 мехобанд ба хати рости c-и хати буриши ҳамвориҳои α ва β дуто хати рости перпендикуляри a ва a_1 мегузарад. Ин тавр шуданаш мумкин нест. Зиддияти ҳосилшуда нодуруст будани фарзамонро нишон медиҳад.

Пас, хатҳои рости a ва b байни якдигар параллеланд.

Акнун аломати перпендикулярии хати рост ва ҳамвориро мебиёрем.

Теоремаи 5.2. Агар хати рост ба ду хати рости бурандаи дар ҳамворӣ хобанда перпендикуляр бошад, он ба ҳамворӣ ҳам перпендикуляр мешавад.

Исбот: Бигузор хати рости a ба ду хати рости дар ҳамвории α хобандаи b ва c перпендикуляр бошад. Хати рости a аз нуқтаи буриши хатҳои рости b ва c нуқтаи A мегузарад. Исбот мекунем, ки хати рости a ба ҳамвории α перпендикуляр мебошад.

Аз нуқтаи A-и ҳамвории α хати рости ихтиёрии x-ро мегузаронем ва ба хати рости a перпендикуляр будани ӯро нишон медиҳем.

Дар ҳамвории α хати рости x-и хатҳои рости аз нуқтаи A нагузарандаи b, c ва x–ро брандаро мегузаронем. Бигузор ин нуқтаҳои буриш мувофиқан нуқтаҳои B, C ва X бошанд.

Дар хати рости a дар тарафҳои гуногуни нуқтаи A порчаҳои AA_1 ва AA_2 –ро мегузорем. Секунҷаҳои ҳосилшудаи A_1BA_2 ва A_1CA_2 баробар мешаванд (инро мустақилона асоснок кунед). Аз ин ҷо баробар будани секунҷаҳои A_1BC ва A_2BC бармеояд (инро мустақилона асоснок кунед). Дар навбати худ, аз ин ҷо баробар будани кунҷҳои A_1BX ва A_2BX ва ниҳоят баробар будани секунҷаҳои A_1BX ва A_2BX ҳам бармеояд (инро ҳам мустақилона асоснок кунед).

Хусусан, $A_1X = A_2X$ мешавад. Он гоҳ секунҷаи $A_1X\ A_2$ баробарпаҳлӯ мешавад. Бинобар ин, медианаи XA-и баландии ӯ ҳам мешавад. Ин бошад дар навбати худ, перпендикуляр будани хати рости x-ро ба хати рости a нишон медиҳад.

Пас, хати рости a ба ҳамвории α перпендикуляр аст.

Аз ин теорема ба сифати натиҷа хосиятҳои зерин бармеоянд, онҳоро мустақилона асоснок кунед.

Теоремаи 5.3. Агар хати рост ба яке аз дуто ҳамвориҳо перпендикуляр бошад, ба дуюмиаш ҳам перпендикуляр мешавад.

Теоремаи 5.4. Агар дуто ҳамвори ба якто хати рост перпендикуляр бошад, онҳо параллел мешаванд.

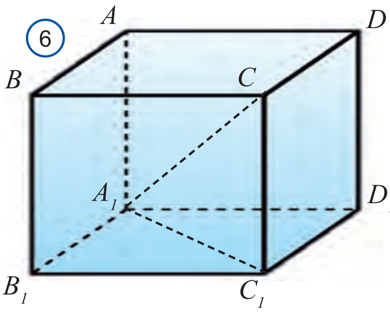
Дар поён барои мустақилона исбот кардан хосиятҳое, ки ҳамчу "теоремаҳои мавҷудият ва ягонагӣ" қабул шудааст, меорем.

Теоремаи 5.5. Аз нуқтаи ихтиёрии фазо, ба хати рости додашуда ягона ҳамвории перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.

Теоремаи 5.6. Аз нуқтаи ихтиёрии фазо, ба ҳамвории додашуда хати рости ягонаи перпендикулярро гузаронидан мумкин аст.

Натиҷа (теоремаи умумигардонидашудаи Пифагор). Квадрати диагонали параллелепипеди росткунҷа ба суммаи квадратҳои се ченаки он баробар аст.

Бигузор $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелопипеди росткунҷа бошад (расми 6). Ба



рои он ки теғаи CC_1 ба тарафи $A_1B_1C_1D_1$ перпендикуляр аст A_1C_1C С секунҷаи росткунҷа мешавад. Он гоҳ мувоиқи теоремаи Пифагор,

$$A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 \quad (1).$$

$A_1D_1C_1$ ҳам секунҷаи росткунҷа. Боз ҳам мувофиқи теоремаи Пифагор,

$$A_1C_1^2 = A_1D_1^2 + D_1C_1^2 \quad (2).$$

Он гоҳ, мувофиқи (1) ва (2): $A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 = CC_1^2 + A_1D_1^2 + D_1C_1^2$.

Азбаски $A_1D_1 = B_1C_1$ аст, пас $A_1C^2 = CC_1^2 + B_1C_1^2 + D_1C_1^2$. ❑

Савол ва машқҳо оиди мавзӯъ

1. *Дар фазо чӣ хел хатҳои рост байни якдигар перпендикуляр мешаванд?*

7

2. *Оё хатҳои рости чилликӣ перпендикуляр шуда метавонанд?*
3. *Дар расми 7 кадом шаҳр тасвир шудааст? Дар он шумо чӣ хел хатҳои рост ва ҳамвориҳоро мебинед? Аз расм ба хатҳои рости параллел, перпендикуляр ва чилликӣ мисолҳо биёред.*
4. *Чӣ хел хати рост ба ҳамворӣ перпендикуляр мешавад?*
5. *Хосиятҳои хатҳои рости ба як ҳамворӣ перпендикуляр бударо гӯед.*
6. *Аломати перпендикулярии хатҳои рост ва ҳамвориҳоро гӯед.*
7. *Хосияти ба яке аз ҳамвориҳои параллел перпендикуляр будани хати ростро гӯед.*
8. *Хосияти ба як хати рост ҳамвориҳои перпендикуляр бударо гӯед.*
9. *Теоремаи умумигардонидашудаи Пифагор дар бораи чист?*

5.1. Порчаи SB ба ҳамвории параллелограмми $ABCD$ перпендикуляр аст (расми 8). Хатҳои рости ба порчаи SB перпендикуляр бударо гӯед.

5.2. Хати номуайянии рости l ба тарафҳои AB ва AC-и секунҷаи ABC перпендикуляр аст. Ҷойгиршавии хати рости l ва ҳамвории секунҷаи ABC-ро муайян кунед.

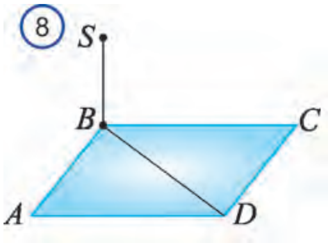
а) хати рости l ва ҳамвории ABC –ро бурида мегузарад, лекин ба он перпендикуляр нест. b) ба хати рости l ва ҳамвории ABC тааллуқ дорад; c) ба хати рости l ва ҳамвории ABC перпендикуляр; d) ба хати рости l ва ҳамвории ABC параллел.

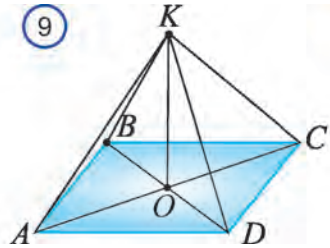
5.3. Хати рости KO ба ҳамвории параллелограмми $ABCD$ перпендикуляр (расми 9). Ба хати рости KO хати рости перпендикулярро муайян кунед.

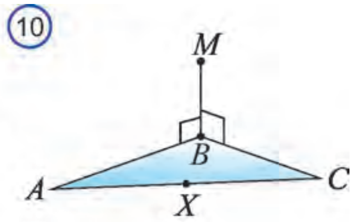
5.4. Хати рости MB ба тарафҳои AB ва BC-и секунҷаи ABC перпендикуляр (расми 10). Агар нуқтаи X нуқтаи ихтиёрии тарафи AC бошад, тири секунҷаи MBX –ро муайян кунед.

5.5. Дар параллелопипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикуляр будани буриши диагоналии AA_1C_1C ва BB_1D_1D -ро исбот кунед.

5.6. Тарафҳои чоркунҷаи $ABCD$ мувофиқан ба тарафҳои чоркунҷаи росткунҷаи $A_1B_1C_1D_1$. Чоркунҷаи росткунҷа будани $ABCD$ –ро исбот кунед.







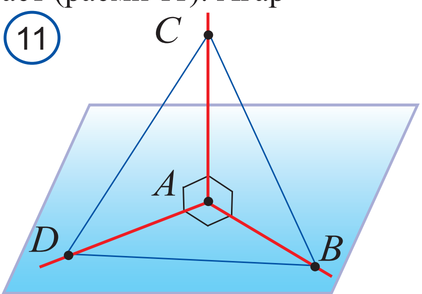
5.7. Ҳамвории α ба хати рости m, хати рости m ба хати рости n параллел. Ба хати рости n перпендикуляр будани ҳамвориро исбот кунед.

5.8. Хати росте, ки дар он асоси AB-и трапетсияи $ABCD$ мехобад ба ҳамвории α перпендикуляр аст. Исбот кунед, ки хати рости асоси CD хобидаи ин трапетсия ҳам ба ҳамвории α перпендикуляр аст.

5.9. Исбот кунед, ки аз нуқтаи ихтиёрии хати рости фазо ба он хати рости перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.

5.10. Исбот кунед, ки аз нуқтаи ихтиёрии хати рости фазо ба он дуто хати рости гуногуни перпендикуляр гузаронидан мумкин аст.

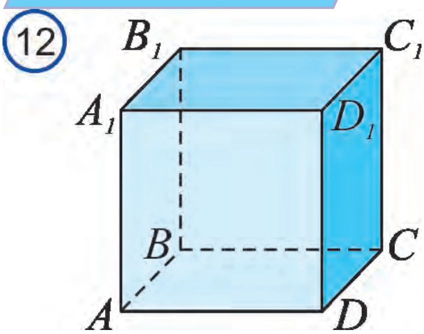
5.11. Хатҳои рости AB, AC, AD ҷуфт-ҷуфт байни якдигар перпендикуляр аст (расми 11). Агар



1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см;
2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см;
3) $AB = b$ см, $BC = a$ см, $AD = d$ см;
4) $BD = c$ см, $BC = a$ см, $AD = d$ см бошад,

дарозии порчаи CD –ро ёбед.

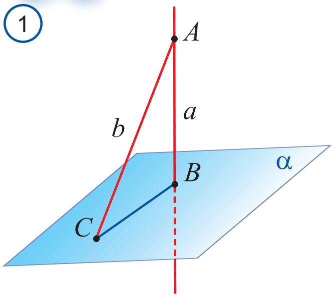
5.12. Аз қуллаи A-и чоркунчаи росткунҷаи $ABCD$ ба ҳамвории он хати рости перпендикуляри AK гузаронида шудааст. Аз нуқтаи K масофа то қуллаҳои боқимондаи чоркунча 6 м, 7 м, 9 м. Масофаи AK-ро ёбед.



5.13. Аз нуқтаҳои A ва B хатҳои рости ба ҳамвории α перпендикуляр ва хатҳои рости онро мувофиқан дар нуқтаҳои C ва D буранда гузаронида шудааст. Агар $AC = 3$ м, $BD = 2$ м ва $CD = 2{,}4$ м бошад ва порчаи AB ҳамвории α ро бурида нагузарад, масофаи байни нуқтаҳои A ва B –ро ёбед.

5.14. Теғаи кубе дар расми 12 тасвир кардашуда а) 4 см; b) 8 см бошад, периметри секунҷаи AB_1C ва масоҳати секунҷаи DAC_1 –ро ёбед.

16 ПЕРПЕНДИКУЛЯР, МОИЛ ВА МАСОФА ДАР ФАЗО



Ба ҳамвории α аз нуқтаи дар он нахобандаи A хати рости перпендикуляри a-ро мегузаронем (расми 1).

Ин хати рост ҳамвориро B бурида гузарад. Ҳамчунин, ягон нуқтаи C-и ҳамвориро бо нуқтаи A пайваст мекунем. Дар натиҷа порчаи ҳосилшудаи AB – *перпендикуляри ба ҳамворӣ фуровардашуда*, порчаи AC-*моили ба ҳамворӣ фуровардашуда*, Порчаи BC-*проексияи моил дар ҳамворӣ*, нуқтаи B - *асоси перпендикуляр*, нуқтаи C- *асоси моил* номида мешавад.

Секунчаи ABC росткунча ва дар он АВ катет, азбаски дар он AC гипотенуза аст, ҳама вакт $AB < AC$ мешавад.

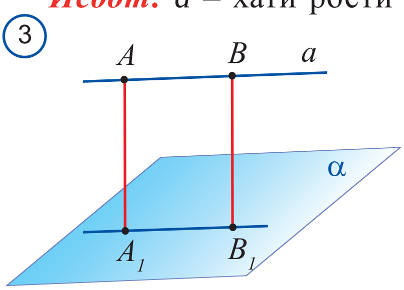
Пас, дарозии перпендикуляри аз ягон нукта ба ҳамворӣ фуровардашуда аз дарозии моили ихтиёрии аз ҳамон нукта фуровардашуда хурд мешавад.

Масофаи аз нуқта то ҳамворӣ гуфта, дарозии перпендикуляри аз нукта ба ҳамворӣ фуровардашударо меноманд.

Ҳангоми дарозии манораи соати шаҳри Тошкандро 30 м гуфтан, дарозии перпендикуляри аз қуллаи манора ба ҳамвории асос фуроварда шударо мефаҳманд (расми 2).

Теоремаи- 5.7. Агар хати рост ба ҳамворӣ параллел бошад, он гоҳ ҳамаи нуқтаҳои он аз ҳамворӣ дар масофаи баробар мешаванд.

Исбот: a – хати рости додашуда ва α – ҳамвории додашуда бошад (расми 3). Дар хати рости a ду нуқтаи A ва B-ро мегирем. Аз онҳо ба ҳамвории α перпендикуляр мефарорем. Асоси ин перпендикуляр мувофиқан нуктаҳои A_1ва B_1 бошад. Он гоҳ масофаҳо аз нуқтаҳои A ва B то ҳамвории α мувофиқан порчаҳои AA_1 ва BB_1 мешаванд. Мувофиқи теоремаи 3.6 порчаҳои AA_1 ва BB_1 параллел мешаванд.

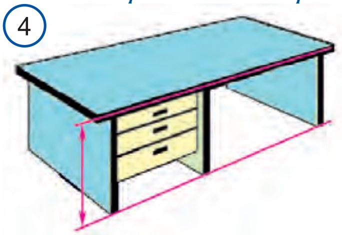


Пас, онҳо дар як ҳамворӣ мехобанд. Ин ҳамворӣ ҳамвории α –ро қад қади хати рости A_1B_1 брида мегузарад. Хати рости a ба хати рости A_1B_1 параллел мешавад, чунки он ҳамвории α -ро бурида намегузарад.

Ҳамин тавр, дар чоркунҷаи ABA_1B_1 тарафҳои муқобил параллел. Пас, ӯ параллелограмм аст. Дар ин параллелограмм $AA_1 = BB_1$.

Масофа аз хати рост то ҳамвории ба он параллел гуфта, масофаи аз нуқтаи ихтиёрии хати рост то ҳамворӣ бударо меноманд.

4



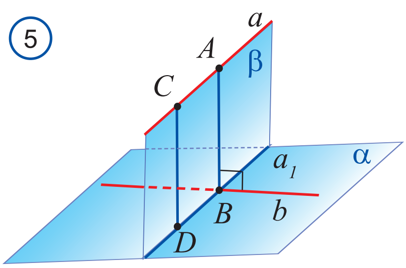
Масофа аз ду нуқтаҳои ихтиёрии ҳамворӣ то ҳамвории ба он параллел як хел мешаванд. Ин хосият монанди исботи теоремаи пештара исбот карда мешавад.

Масофаи байни ду ҳамвории параллел гуфта, масофа аз нуқтаи ихтиёрии як ҳамворӣ то ҳамвории дигар бударо меноманд. Баландии столи дар расми 4 тасвир кардашуда ба масофаи байни ҳамвориҳои фарш ва стол баробар мешавад.

Теоремаи 5.8. Ду хати рости чилликӣ ба перпендикуляри ягонаи умумӣ соҳиб аст.

Исбот: a ва b хатҳои рости чилликӣ бошанд (расми 5). Дар ин хатҳои рост мумкин будани интихоби чунин нуқтаҳои A ва B –ро нишон медиҳем, ки хати рости AB ҳам ба a, ҳам ба b перпендикуляр мешавад. Бигузор ҳамвории α аз хати рости b гузаранда ва ба хати рости a параллел бошад. Дар хати рости a нуқтаи C –ро мегирем ва аз он ба ҳамвории α перпендикуляри CD-ро мефаророполем. Аз хатҳои рости бурандаи a ва CD ҳамвории β ро мегузаронем. Бигузор хати рости a хати буриши ҳамвориҳои α ва β бошад.Барои он ки $a_1 \parallel a$ аст хатҳои рости a_1 ва b дар нуқтаи номаълум B бурида мешавад. Аз нуқтаи B-и дар ҳамвории β хобанда, ба хати рости a перпендикуляри BA-ро мефурорем.

5



Дар натиҷа, ҳар дуи хати рости AB ва CD дар ҳамвории β мехобанд ва ба хати рости a перпендикуляр мешаванд. Бинобар ин, $AB \parallel CD$ ва AB α мешавад.

Пас, AB a ва AB b мешавад. AB хати рости ҷустаамон буда, он ба ҳар ду хати рости чилликӣ ҳам перпендикуляр мешавад.

Ягонагии перпендикуляри умумиро мустақилона исбот кунед. ❑

Масофаи байни ду хати рости чилликӣ гуфта, дарозии перпендикуляри умумии онҳоро мегӯянд.

Аз теоремаи боло хосияти зерин бармеояд:

Масофаи байни ду хати рости чилликии a ва b (расми 6) –ба масофа аз нуқтаи ихтиёрии хати рости a, то ҳамворие, ки дар он хати рости b мехобад ва ба хати рости a параллел аст баробар мешавад.

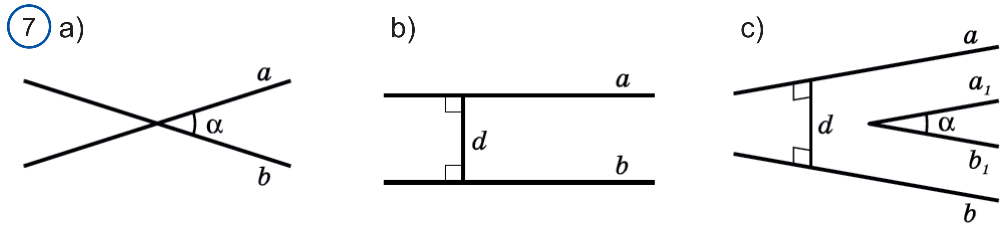
Факту рақамҳои болоро ба асос гирифта, акнун мо дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ду хати ростро бо ёрии ададҳо тавсиф доданамон мумкин.

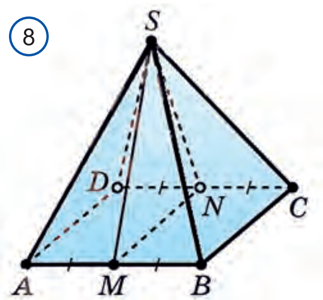
Агар дар фазо ду хати рост байни якдигар:

• бурида шаванд –кунҷи байни онҳо α (расми 7.a),

• параллел бошад –масофаи байни онҳо d (расми 7.b),

• чилликӣ бошад –кунҷи байни онҳо α ва масофа d (расми 7.c)-ро байни якдигар ҷойгиршавии мазкур хатҳои рост ададан тавсиф мекунад.





Масъала. Ҳамаи теғаҳои пирамидаи чоркунҷаи $SABCD$ ба a баробар. Масофаи байни теғаҳои AB ва SC ёфта шавад (расми-8).

Ҳалл: Мувофиқи теоремаи-4.8, дар теғаҳои AB ва SC чунин нуқтаҳои X ва Y мавҷуд аст, ки хати рости XY ба ҳар ду теғаҳои AB ва SC ҳам перпендикуляр мешавад. Монанди ин, хати рости XY, ба ҳамвории хати рости SC хобида ва ба хати рости AB параллел буда ҳам перпендикуляр мешавад.

Агар ҳамвории α аз нуқтаи S гузаранда ва ба хати рости AB перпендикуляр буда бошад. Ин ҳамвори аз миёнаҷоҳои теғаҳои AB ва CD аз нуқтаҳои M ва N мегузарад. Он гоҳ $XY \parallel \alpha$ ва проексияи порчаи XY дар ҳамвории α ба порчаи XY баробар мешавад.

Акнун ба кадом нуқтаҳо проексияшавии нуқтаҳои X ва Y –ро дар ҳамвории α муайян мекунем. Азбаски AB α аст ҳамаи нуқтаҳои теғаи AB ба нуқтаи M проексия мешавад. Пас, нуқтаи X ба нуқтаи M проексия мешавад.

Азбаски нуқтаҳои S ва C мувофиқан ба нуқтаҳои S ва N проексия мешавад, порчаи SC ба порчаи SN мегузарад. Азбаски хати рости SN дар ҳамвории ба хати рости AB параллел мехобад, проексияи порчаи кофтуков шуда истодаи XY, аз перпендикуляри аз нуқтаи M ба хати рости SN фуроварда шуда иборат аст. Дарозии ин перпендикуляр d -ро, аз масоҳати секунҷаи баробарпаҳлӯи SMN, ки асосаш ба a ва тарафи паҳлӯиаш ба $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

баробар аст меёбем.

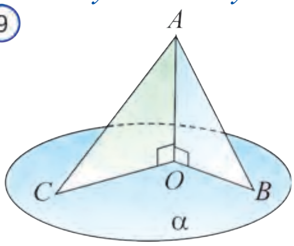
Аз як тараф масоҳати ин секунҷа ба : $\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}$ баробар.

Аз тарафи дигар ба $\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}d$ баробар. Аз ин баробарии $d=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

? *Саволҳо ва машқҳо оиди мавзӯъ*

1. Ба перпендикуляр ва моили ба ҳамворӣ фаровардашуда таъриф диҳед.
2. Проексияи моил дар ҳамворӣ гуфта чиро меноманд?
3. Масофа аз нуқта то ҳамворӣ чӣ хел муайян карда мешавад?
4. Масофаи байни хати рост ва ҳамвории ба ҳамвории додашуда параллел чӣ хел ёфта мешавад?
5. Масофаи байни ду ҳамвории параллел чӣ хел муайян карда мешавад?
6. Масофаи байни ду хати рости чилликӣ чӣ хел муайян карда мешавад?
7. Дар фазо байни якдигар ҷойгиршавии ду хати ростро кадом бузургиҳои ададӣ муайян мекунад?

9



5.15. Нуқтаҳои A, B, Q мутааллиқи ҳамвории α, нуқтаи M бошад ба он тааллуқ нест ва $MQ\perp\alpha$. Кадоме аз порчаҳои MA, AQ, MQ, BQ, MB а)перпендикуляр; b)моил; c)проексияи моил буданашро муайян кунед.

5.16. Аз нуқтаи A ба ҳамвории α моилҳои AB ва AC ва перпендикуляри AO фуроварда шудааст (расми 9). Агар $AB = 2{,}5$ см, $AC = 3$ см бошад, проексияҳои моилҳоро байни якдигар муқоиса кунед.

5.17. Аз нуқта ба ҳамвори думо моил фуроварда шудааст (расми 9). Агар яке аз моилҳо аз дуюмиаш 26 см дарозтар, проексияҳояшон бошад 12 см ва 40 см бошад, дарозии ин моилҳоро ёбед.

5.18. Аз маркази давраи ба секунҷа берун кашидашуда ба ҳамвории секунҷа хати рости перпендикуляр гузаронида шудааст. Исбот кунед, ки ҳар як нуқтаи ин хати рост аз қуллаҳои секунҷа дар дуриҳои баробар мехобанд.

5.19. Ба ҳамвории квадрати $ABCD$ ки масоҳаташ ба а) 21 см^2; b) 96 см^2; c) 44 см^2; d) 69 см^2; e) 156 см^2 перпендикуляри DM-и дарозиаш 10 см буда фуроварда шуда аст. Дарозии моили MA –ро ёбед.

5.20. Аз қуллаи кунҷи тези секунҷаи ABC ки дар он C кунҷи рост аст, ба ҳамвории секунҷа хати рости перпендикуляри AD гузаронида шудааст. Агар $AC = c$, $BC = b$ ва $AD = c$ бошад, масофа аз нуқтаи D то қуллаҳои B ва C –ро ёбед.

5.21. Нуги болоии сутунҳои вертикал ки аз якдигар дар масофаи 3,4 м ҷойгир шудаанд, бо шоҳпул пайваст карда шудаанд. Агар баландии сутунҳо

5,8 м ва 3,9 м бошад, дарозии шоҳпулро ёбед.

5.22. Сими телефони дарозиаш 15 м ба симчӯб аз сатҳи замин дар баландии 8 м баста шудааст ва ба боми хонаи баландошёнаи баландиаш аз баландии он 20 м баландтар маҳкам кашида шудааст. Масофаи байни хона ва сутунро ёбед.

5.23. Дарозии перпендикуляри аз нуқтаи P ба ҳамвори фуровардашудаи PQ ба 1, дарозии моилҳои PA ва PB бошад ба 2 баробар. Нуқтаи C миёначои порчаи AB. Агар

a) $\angle APB = 90°$; b) $\angle APB = \beta$ бошад, дарозии порчаи QC-ро ёбед.

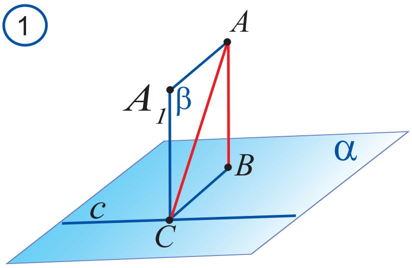
5.24. Аз қуллаи кунҷи кунди B-и параллелограмми $ABCD$ порчаи перпендикуляри BH рост карда шудааст. Агар $AH = 5$ см, $HD = HC = 8{,}5$ см, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$ бошад, тарафҳои параллелограммро ёбед.

5.25. Нуқтаи M аз ҳар як қуллаи секунҷаи мунтазами ABC-и тарафҳояш 60 см дар масофаи 40 см ҷой гирифтааст. Масофа аз ҳамвории секунҷаи ABC то нуқтаи M ёфта шавад.

17 ТЕОРЕМА ДАР БОРАИ СЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯР

Теоремаи- 5.9. Агар хати рости аз асоси моили ба ҳамворӣ фуровардашуда гузаранда ба проексияи моил перпендикуляр бошад, он гоҳ ба худи моил ҳам перпендикуляр мешавад.

1



Исбот: Агар порчаи AB перпендикуляри ба ҳамвории α фуровардашуда, порчаи AC моил бошад.

Хати рости c хати рости дар ҳамвории α хобанда, аз нуқтаи C гузаранда ва ба проексияи моил перпендикуляр бошад (расми 1). Хати рости ба AB параллели A_1C-ро мегузаронем. Ин хати рост ба ҳамвории α перпендикуляр мешавад.

Аз хатҳои рости AB ва AC_1 ҳамвории β-ро мегузаронем. Хати рости c ба хати рости CA_1 перпендикуляр мешавад. Мувофиқи шарт, он ба хати рости CB ҳам перпендикуляр буд. Он гоҳ хати рости c ба ҳамвории β ҳам перпендикуляр мешавад.

Пас, хати рости c ба моили дар ҳамвории β хобандаи AC ҳам перпендикуляр мешавад.❑

Азбаски дар теоремаи мазкур сухан дар бораи се перпендикуляр меравад он номи "Теорема дар бораи се перпендикуляр"-ро гирифтааст. Теоремаи ба ин теорема баръакс ҳам ҷой дорад. Онро мустақилона исбот кунед.

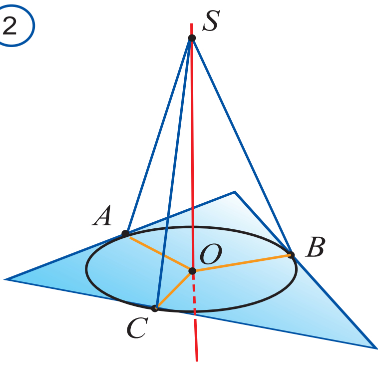
Теоремаи 5.10. ***Агар хати рости аз асоси моили ба ҳамвори фуровардашуда гузаранда ба моил перпендикуляр бошад, он гоҳ он ба проексияи моил ҳам перпендикуляр мешавад.***

Масъалаи 1. Аз маркази давраи ба секунҷа дарун кашидашуда ба ҳамвории секунҷа хати рости перпендикуляр гузаронида шудааст (расми 2). Исбот кунед, ки нуқтаи ихтиёрии ин хати рост аз тарафҳои секунҷа дар масофаи баробар мехобанд.

Исбот: Агар A, B, C –нуқтаҳои буриши тарафҳои секунҷа бо давра, O-маркази давра, S бошад нуқтаи ихтиёрии перпендикуляр бошад.

Азбаски OA ба тарафи секунҷа перпендикуляр аст, мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр, OA ҳам ба ин тараф перпендикуляр мешавад. Он гоҳ SAO секунҷаи росткунҷа мешавад. Дар ин секунҷа мувофиқи теоремаи Пифагор,

2



$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

Дар ин ҷо r – радиуси давра.

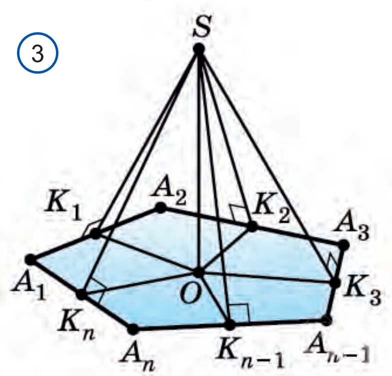
Монанди ин, аз секунҷаи росткунҷаи SBO $= \sqrt{r^2 + OS^2}$ ва аз секунҷаи росткунҷаи SCO бошад $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$ буданашро меёбем.

Пас, $SA = SB = SC$. ❑

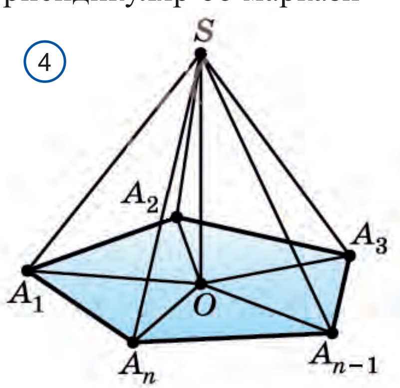
Дар асоси расмҳои дар боло овардашудаи 3,4 ба монанди масъалаи 1 ва барои бисёркунҷаи ихтиёрӣ ҳолатҳои умумиро барои мустақилона исбот кардан мебиёрем.

Масъалаи 2. Нуқтаи фазо аз тарафҳои бисёркунҷа дар масофаҳои баробар ҷойгиршуда буда, аз он ба ҳамвории бисёркунҷа перпендикуляр фуроварда шудааст. Исбот кунед, ки асоси ин перпендикуляр бо маркази

3



4



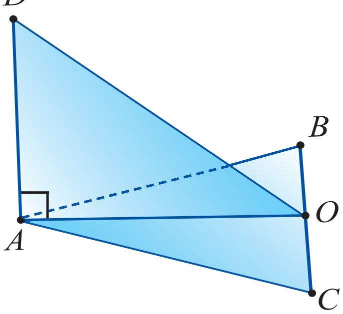
давраи ба бисёркунҷа дарун кашидашуда болоиҳам меафтад (расми 3).

Масъалаи 3. Нуқтаи фазо аз қуллаҳои бисёркунҷа дар масофаи баробар ҷойгир буда, аз он ба ҳамвории бисёркунҷа перпендикуляр фуровардa шудааст. Исбот кунед, ки асоси ин перпендикуляр бо маркази давраи ба бисёркунҷа берун кашидашуда болоиҳам меафтад (расми 4).

Масъалаи 4. Ба ҳамвории секунҷаи ABC аз нуқтаи A –и он перпендикуляр бароварда шудааст (расми 5). Агар $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 11$ ва $AD = 36$ бошад, масофа аз нуқтаи D то хати рости BC –ро ёбед.

Ҳалл: Масофаи номаълум ба дарозии перпендикуляри аз нуқтаи D ба тарафи BC фуровардашуда баробар мешавад. Барои фаровардани ин порча асоси дар тарафи BC будаи онро ёфтан лозим аст. Барои ин аз қуллаи A-и секунҷаи ABC ба тарафи BC баландии AO –ро мефурорем: $AO \perp BC$.

5



Он гоҳ мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр, $BC \perp DO$ мешавад. Пас, DO ҷустаамон будааст.

Акнун дарозии порчаи DO –ро меёбем. Барои ин, аввал масоҳати секунҷаи ABC –ро аз формулаи Герон истифода бурда меёбем:

$p = (a + b + c) : 2 = (20 + 11 + 13) : 2 = 22;$

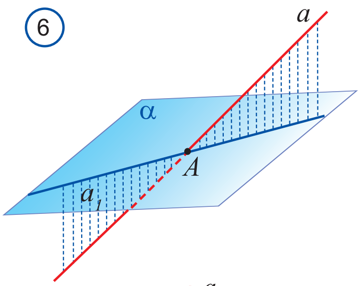
$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} = \sqrt{22 \cdot (22 - 20) \cdot (22 - 11) \cdot (22 - 13)} = 66.$

$DO = 2\,S / a = (2 \cdot 66) : 20 = 6{,}6.$

Дар секунҷаи росткунҷаи ADO, мувофиқи теоремаи Пифагор

$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6{,}6^2} = 36{,}6.$

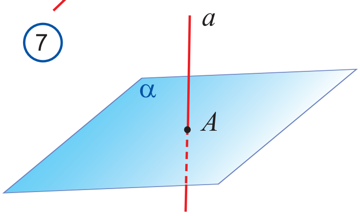
6



Агар хати рости а, ки ҳамвории α -ро бурида мегузарад ва ба он перпендикуляр нест дода шуда бошад (расми 6). Аз ҳар як нуқтаи хати рости a перпендикулярҳо мефурорем. Асосҳои ин перпендикуляр хати рости a_1 –ро ташкил мекунад.

Хати рости a_1 *проексияи* хати рости a дар ҳамвории α номида мешавад.

7



Кунҷи байни хати рости а ва ҳамвории α гуфта, кунҷи байни хати рост ва проексияи он дар ҳамвориро меноманд.

Агар хати рост ба ҳамворӣ перпендикуляр бошад (расми 7), кунҷи байни он ва ҳамворӣ ба 90^0, агар параллел бошад, кунҷи байни он ва ҳамворӣ ба 0^0 баробар аст.

Савол ва машқҳо оиди мавзӯъ

1. *Теорема дар бораи се перпендикуляррo шарҳ диҳед.Барои чӣ он чунин номида шудааст?*
2. *Теоремаи ба теорема дар бораи се перпендикуляр баръаксро гӯед ва эзоҳ диҳед.*
3. *Кунҷи байни хати рост ва ҳамворӣ чӣ хел муайян карда мешавад?*
4. *Кунҷи байни ҳамворӣ ва хати рости ба он перпендикуляр чанд градус?*

5.26. Нуқтаи A дар масофаи a аз қуллаҳои секунҷаи баробартарафи тарафаш ба a баробар мехобад. Масофа аз нуқтаи A то ҳамвории секунҷа ёфта шавад.

5.27. Аз нуқтаи S-и ба ҳамвори тааллуқнадошта ба он сето моили баробари SA, SB, SC ва перпендикуляри SO гузаронида шудааст. Асоси O-и перпендикуляр маркази давраи берункашидашудаи секунҷаи ABC буданашро исбот кунед.

5.28. Тарафҳои секунҷаи баробартараф ба 3 м баробар аст. Масофа аз нуқтаи аз ҳар як қуллаи секунҷа дар масофаи 2 м хобанда то ҳамвории секунҷаро ёбед.

5.29. Дар секунҷаи баробарпаҳлӯ асос ва баландӣ ба 4 м баробар аст. Нуқтаи додашуда аз ҳамвории секунҷа дар масофаи 6 м ва аз қуллаҳои он дар як хел масофа мехобад. Ин масофаро ёбед.

5.30. Аз нуқтаи A масофа то қуллаҳои квадрат ба a баробар аст. Агар тарафи квадрат ба b баробар бошад, масофа аз нуқтаи A то ҳамвории квадрат ёфта шавад.

5.31. Ҷойи геометрии моилҳои дарозии додашуда ва аз нуқтаи додашуда ба ҳамвори фуровардашударо ёбед.

5.32. Аз нуқтаи додашуда ба ҳамворӣ дуто моили дарозиҳояшон 10 см ва 17 см гузаронида шудааст. Фарқи проексияи ин моилҳо ба 9 см баробар аст. Проексияҳои моилҳоро ёбед.

5.33. Аз нуқта ба ҳамворӣ ду моил гузаронида шудааст. Агар 1) яке аз онҳо аз дуюмиаш 26 см дарозтар, проексияҳои моилҳо 12 см ва 40 см бошад; 2) дарозиҳои моилҳо дар нисбати 1 : 2 буда, проексияҳои онҳо ба 1 см ва 7 см баробар бошад, дарозии моилҳоро ёбед.

5.34. Аз нуқтаи A-е ки аз ҳамвории α дар масофаи d мехобад дуто моили AB ва AC, ки бо ҳамворӣ кунҷи 30^0–ро ташкил мекунад фуроварда шудааст. Проексияҳои онҳо ба ҳамвории α байни якдигар кунҷи 120^0 ташкил мекунад. Дарозии порчаи BC –ро ёбед.

5.35. Агар яке аз катетҳои секунҷаи росткунҷа мутааллиқи ҳамворӣ, дуюмиаш бошад бо он кунҷи 45^0 -ро ташкил кунад, исбот кунед, ки гипотенуза бо ин ҳамворӣ кунҷи 30^0 ташкил мекунад.

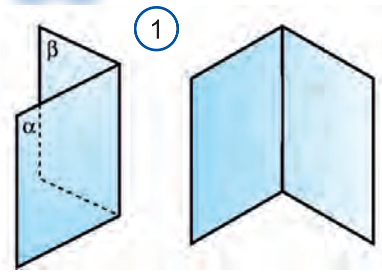
5.36. Моили a бо ҳамвории α кунҷи 45^0 ташкил мекунад, хати рости b –и ҳамворӣ бошад, бо проексияи моил кунҷи 45^0 ташкил мекунад. Исбот кунед, ки кунҷи байни хатҳои рости a ва b ба 30^0 баробар аст.

5.37. Нуқтаи P аз ҳар як қуллаи квадрати $ABCD$-и тарафаш a дар масофаи a мехобад. Кунҷи байни ҳамвории квадрат ва хати рости AP ёфта шавад.

5.38. Ҳамаи теғаҳои пирамидаи секунҷа байни якдигар баробаранд. Кунҷи байни қуллаи пирамида ва тараферо, ки ин қулла тааллуқ надорад, ёбед.

5.39. Ченакҳои параллелепипеди росткунҷа ба a, b ва c баробар аст. Масофаи байни диагонали параллелепипед ва диагонали тарафҳои онро ёбед.

18 ПЕРПЕНДИКУЛЯРИИ ҲАМВОРИҲО ДАР ФАЗО

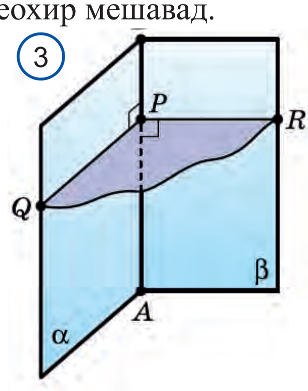


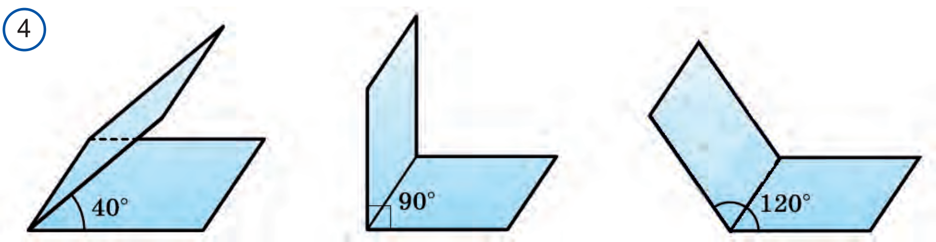
Шакли геометрие, ки аз ду нимҳамворӣ ва аз хати рости умумии ба онҳо ҳамсарҳад иборат аст *кунҷи дутарафа* номида мешавад (расми 1). Нимҳамвориҳо *тарафҳои* кунҷи дутарафа, хати рости сарҳадии онҳо бошад *теғаи* кунҷи дутарафа номида мешавад.

Дар бораи кунҷи дутарафа аз атроф маводҳои зерин тасаввурот медиҳад (расми 2): китоб, ноутбук, дари кушода ва боми иморат.

Аз нуқтаи ихтиёрии қуллаи кунҷи дутарафа нурҳои дар тарафҳои ӯ хобанда ва ба ин теға перпендикуляр бударо мебарорем. Кунҷи ин нурҳо ҳосилкарда *кунҷи хаттии* кунҷи дутарафа номида мешавад (расми 3).

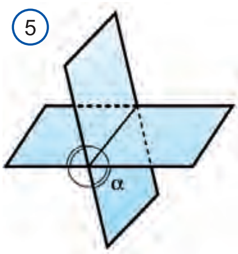
Аз таъриф дида мешавад, ки кунҷи хаттии кунҷи дутарафа бо нуқтаи дар қулла интихобшуда муайян мегардад ва хеле беохир мешавад.

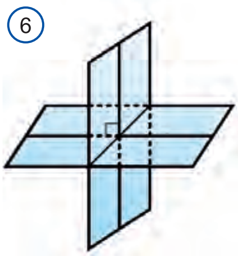




Агар чунин бошад, бузургии кунҷи хаттии кунҷи дутарафа ба нуқтаи дар қулла интихобшуда алоқаманд нест, яъне ҳамаи онҳо баробар мешаванд.

Бузургии кунҷи дутарафа бо бузургии кунҷи хаттии он муайян карда мешавад. Аз кунҷҳои тез, рост, кунд ва кушод иборат будани кунҷҳои хаттӣ нигоҳ карда, кунҷҳои дутарафа ҳам мувофиқан ба кунҷҳои дутарафаи тез, рост, кунд ва кушод ҷудо мешаванд. Дар расми 4 кунҷҳои дутарафа тасвир шудаанд.





Ду ҳамвории буранда фазои бутунро ба чор кунҷи дутарафаи ба қуллаи умумӣ соҳиб буда ҷудо мекунад (расми 5). Агар яке аз ин кунҷҳои дутарафа ба α баробар бошад, аз онҳо қиммати боз яктоаш ба α баробар мешавад. Ду қиммати боқимонда бошад, ба 180^0 - α баробар мешавад.

Дар байни кунҷҳои дутарафаи мазкур аз 90^0 хурдаш ҳам мешавад. Қиммати ин кунҷро ҳамчун кунҷи байни ҳамвориҳои буранда мегирем.

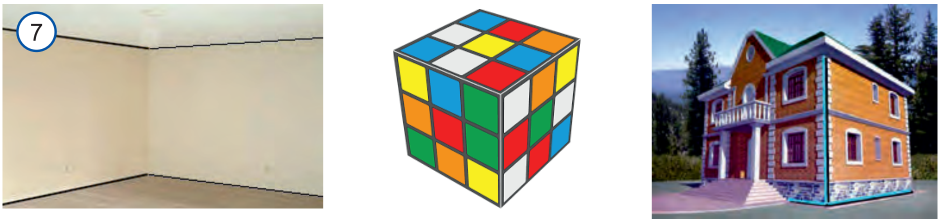
Агар яке аз кунҷҳои дутарафа рост, яъне ба 90^0 баробар бошад, сетои боқимондааш ҳам кунҷи рост мешавад (расми 6). Ҳамвориҳои таҳти кунҷи рост буридашаванда ҳамвориҳои перпендикуляр номида мешавад.

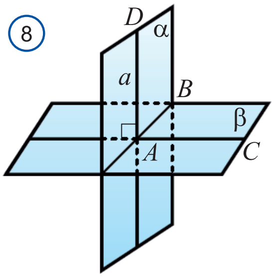
Ба ҳамвориҳои перпендикуляр аз гирду атроф ба сифати мисол фарши хона ва деворҳо, деворҳои ба қуллаи умуми соҳиббудаи хона, тарафҳои куби ба қуллаи умуми соҳиббудаи Рубик ва сатҳи замин ва деворҳои хона ҳамчунин деворҳои ба якдигар пайвастшударо ба сифати мисол овардан мумкин (расми 7).

Перпендикулярии ҳамвориҳои α ва β монанди перпендикулярии хатҳои рост бо ёрии ишораи "⊥", ба тарзи α ⊥ β навишта мешавад.

Акнун дар бораи хосиятҳои ҳамвориҳои перпендикуляр истода мегузарем. Теоремаи поён аломати перпендикулярии ҳамвориҳо номида мешавад.

Теоремаи 5.11. Агар яке аз ҳамвориҳо аз хати рости ба дуюмиаш перпендикуляр гузарад, ин хел ҳамвориҳо байни якдигар перпендикуляр мешаванд.

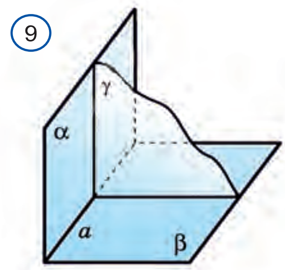




Исбот: Агар ҳамвориҳои α ва β дода шавад, ҳамвории α аз хати рости *a*-и ба ҳамвории β перпендикуляр гузарад (расми 8). Нуқтаи буриши ҳамвории β ва хати рости *a* нуқтаи *A* бошад. Исбот мекунем, ки $\alpha \perp \beta$.

Ҳамвориҳои α ва β аз рӯйи хати рости *AB* бурида шуда истодаанд. Он гоҳ, $AB \perp a$ мешавад, чунки мувофиқи шарт $b \perp a$. Хати рости *AC*, ки дар ҳамвории β мехобад ва ба хати рости *AB* перпендикуляр аст мегузаронем. Дар натиҷа, кунҷи ҳосилшудаи *DAC*- кунҷи хаттии кунҷи дутарафа мешавад. Мувофиқи шарт, $a \perp b$. Он гоҳ, *DAC* кунҷи рост. Пас, $\alpha \perp \beta$. ❑

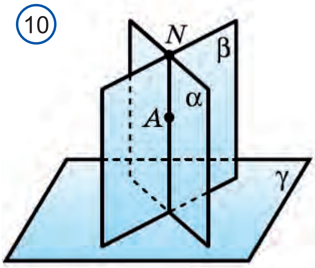
Аз ин теорема натиҷаи зерин бармеояд.



Натиҷа. Агар ҳамвориҳо ба хати буриши ду ҳамворӣ перпендикуляр бошад, он ба ҳар як ҳамворӣ перпендикуляр мешавад (расми 9).

Теоремаи ба теоремаи 4.11 баръакс ҳам ҷой дорад. Онро бе исбот мебиёрем.

Теоремаи 5.12. Агар аз нуқтаи яке аз ду ҳамвориҳои перпендикуляр хати рости перпендикуляр гузаронида шавад, ин хати рост дар ҳамвории якум мехобад.



Натиҷа. Агар ду ҳамвории перпендикуляр ба ҳамвории сеюм перпендикуляр бошад, хати буриши онҳо ҳам ба он ҳамворӣ перпендикуляр мешавад (расми 10).

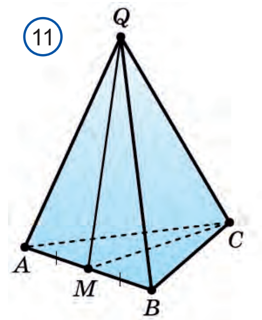
Масъалаи 1. Нуқтаи M миёнаҷои қуллаи дар асоси пирамидаи мунтазами QABC бошад (расми11).

Исбот кунед, ки ҳамвории *QCM* ба ҳамвории асоси пирамида *ABC* перпендикуляр аст.

Исбот. Азбаски порчаи *AB* асоси секунҷаҳои баробарпаҳлӯи *AQB* ва *ACB* мебошад медианаҳои ин секунҷаҳо ба *QM* ва *CM* ҳам перпендикуляр мешавад. Ҳамчунин, порчаи *AB* ба ҳамвории *QCM* ҳам перпендикуляр мешавад. Он гоҳ мувофиқи теоремаи 4.12, ҳамвории ABC ба ҳамвории QCM перпендикуляр мешавад.

Масъалаи 2. Кунҷи AQB-и қуллаи пирамидаи мунтазами $QABC$ ба a баробар. Кунҷи дутарафаи дар қуллаи паҳлӯ будаи онро ёбед (расми 12).

11



Ҳалл. Агар нуқтаи N миёнаи теғаи AC, AK бошад, перпендикуляри аз нуқтаи A ба қуллаи BQ фуровардашуда бошад.

Аз баробарии секунҷаҳои ABQ ва CBQ, $CK \perp BQ$ мешавад. Бинобар ин, кунҷи AKC кунҷи хаттии кунҷи дутарафаи BQ мешавад.

Аз секунҷаҳои росткунҷаи AKQ ва ANQ

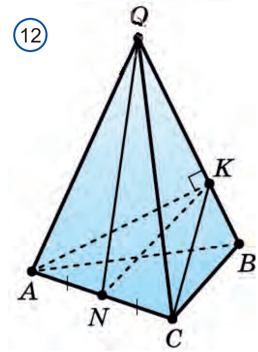
$AK = \sin\alpha$, $AN = AQ\sin(\alpha/2)$ буданашро меёбем.

Аз секунҷаи росткунҷаи AKN бошад:

ба $\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$ соҳиб мешавем.

Аз ин ҷо, $\angle AKC = 2\arcsin\frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$. ❑

12



Саволҳо ва машқҳо оиди мавзӯъ

1. *Кунҷи дутарафа гуфта чиро мегӯянд?*
2. *Чӣ хел кунҷро кунҷи байни ҳамвориҳо мегӯянд?*
3. *Ҳамвориҳои таҳти кунҷи рост буридашаванда чи хел номгӯ мешаванд?*
4. *Аломати перпендикулярии ҳамвориҳоро гӯед.*
5. *Хосиятҳои ҳамвориҳои перпендикулярро гӯед ва шарҳ диҳед.*

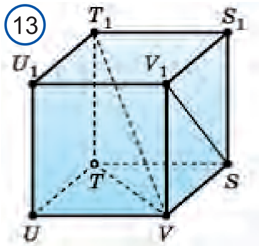
5.40. Дар а) параллелепипеди росткунҷаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$; ва дар b) призмаи рости $ABCA_1B_1C_1$ тарафҳои перпендикулярро муайян кунед ва кунҷҳои дутарафаи росташонро гӯед.

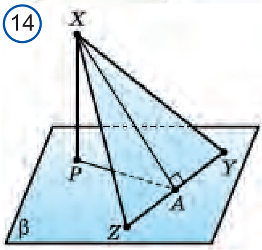
5.41. Дар куби $STUVS_1T_1U_1V_1$ (расми 13) а)кунҷи TVT_1; b) кунҷи T_1ST кунҷи хаттии кунҷи дутарафаи T_1SVT мешавад? Қиммати кунҷи дутарафаи V_1UTS –ро ёбед.

5.42. Дар ду кунҷи дутарафаи як тарафашон умумӣ, тарафҳои боқимонда дар якҷоягӣ ҳамвориро ташкил мекунад. Исбот кунед, ки суммаи ин кунҷҳои дутарафа ба 180^0 баробар аст.

5.43. Тарафи YZ-и секунҷаи XYZ дар ҳамвории β мехобад. Аз қуллаи X баландии XA ва ба ҳамвории β перпендикуляри XP фуроварда шудааст (расми 14). Исбот кунед, ки кунҷи XAP кунҷи хаттии кунҷи дутарафаи $XYZP$ мешавад.

5.44. Дар пирамидаи секунҷаи $ABCD$ қуллаи CD ба ҳамвории ABC





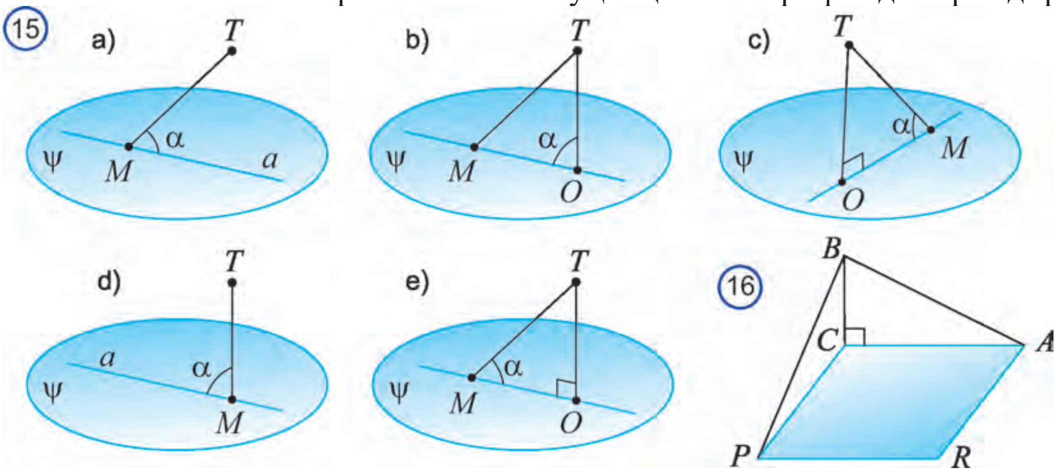
перпендикуляр. $AB = BC = AC = 6$ ва $BD = 3\sqrt{7}$ бошад, кунҷҳои дутарафаи $DACB$, $DABC$, $BDCA$ –ро ёбед.

5.45. Аз нуқтаи T ба ҳамвории ψ моил фуроварда шудааст (расми 15). Дар кадоме аз расмҳои поён кунҷи байни ҳамворӣ ва моил α дуруст ишора карда шудааст?

5.46. Дар пирамидаи секунҷагии $ABCD$ кунҷҳои DAB, DAC, ACB ростанд, $AC = CB = 5$ ва $DB = 5\sqrt{5}$ бошад, кунҷи дутарафаи $ABCD$ –ро ёбед.

5.47. Ҳамвории кунҷи хаттии кунҷи дутарафа ба ҳар як тарафи он перпендикуляр буданашро исбот кунед.

5.48. Дар як тарафи кунҷи дутарафа ду нуқта мехобад, ки аз қуллаи он дар масофаҳои 51 см ва 34 см ҷойгир аст. Агар яке аз ин нуқтаҳо аз тарафи дигари дар

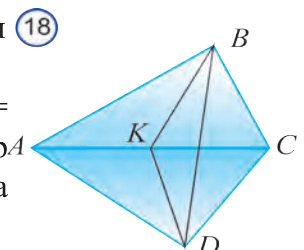


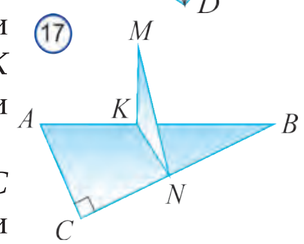
масофаи 15 см хобида маълум бошад, ин масофа то нуқтаи дуюмӣ ёфта мешавад.

5.49. Ҳамвориҳои секунҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C = 90°$) ва квадрати $ACPR$ байни якдигар перпендикуляр (расми 15). Тарафи квадрат 6 см, гипотенузаи секунҷа 10 см. Дарозии порчаи BP-ро ёбед.

5.50. Порчаи MK ба ҳамвории секунҷаи росткунҷаи ABC ($\angle C = 90°$) перпендикуляр (расми 16). $KN // AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ см, $MK = 8$ см бошад, дарозии порчаи MN –ро ёбед.

5.51. Ҳамвориҳои секунҷаи баробарпаҳлӯи ABC ва ADC перпендикуляр (расми 17). AC асоси умумии онҳо. Порчаи BK медианаи секунҷаи ABC.





BK = 8 см, DK = 15 см бошад, дарозии порчаи BD –ро ёбед.

19 ПРОЕКСИЯИ ОРТОГОНАЛӢ ДАР ФАЗО ВА ИСИФОДАИ ОН ДАР ТЕХНИКА

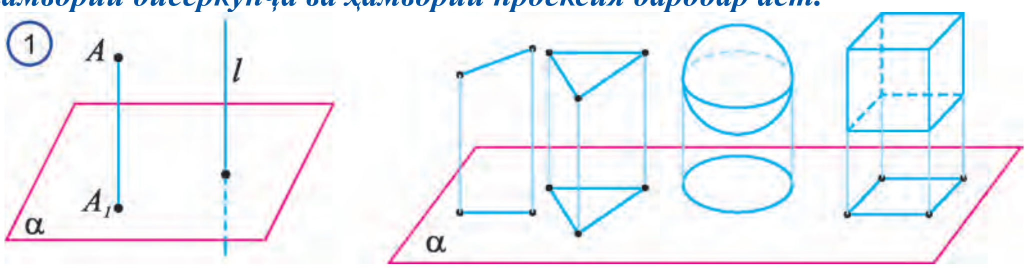
Агар самти проексия l ба ҳамвории проексиякунанда α перпендикуляр бошад, ин хел проексиякунӣ проексиякунии ортогоналӣ номида мешавад.

Шакли ҳангоми проексиякунии ортогоналӣ ҳосилшударо проексияи ортогоналии шакли додашуда, ё кӯтоҳакак проексияи он мегӯянд.

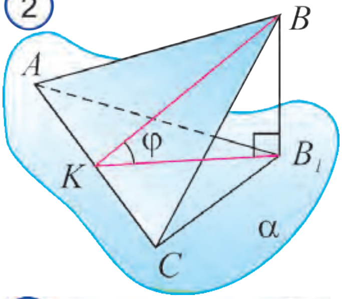
Ҳаммаи хосиятҳои проексиякунии параллелӣ дар проексиякунии ортогоналӣ ҳам ҷой дорад. Дар поён хосияте, ки фақат ба проексиякунии ортогоналӣ мансуб буда, муҳим аст исбот мекунем.

Теоремаи 5.15. Масоҳати проексияи ортогоналии бисёркунҷа ба ҳамворӣ, ба ҳосили зарби масоҳати бисёркунҷа бар косинуси кунҷи байни ҳамвории бисёркунҷа ва ҳамвории проексия баробар аст.

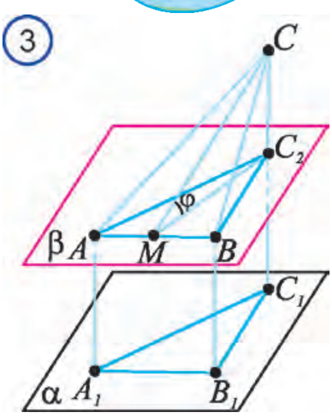
1



2



3



Исбот: 1. Аввал барои секунҷа ва ягон тарафи он проексияи ҳамвориро дида мебароем.

Агар, проексияи секунҷаи ABC дар ҳамвории α секунҷаи $AB_1\,C$ бошад.

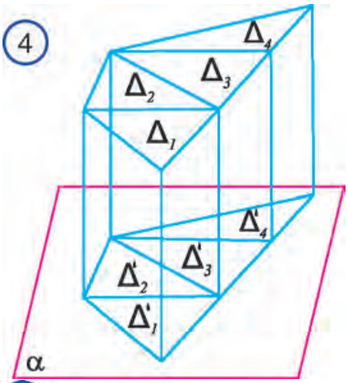
Баландии BK-и секунҷаи ABC –ро мефарорем. Мувофиқи теорема дар бораи се перпендикуляр, порчаи B_1K баландии секунҷаи KBB_1 мешавад.

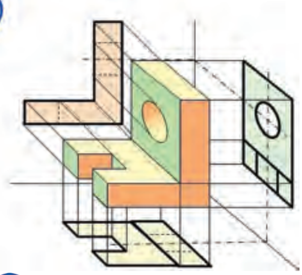
Кунҷи BKB_1 аз кунҷи байни ҳамвории секунҷа ва ҳамвории проексия j иборат мешавад. Дар секунҷаи $BKB1$: $KB = KB \cos\varphi$.

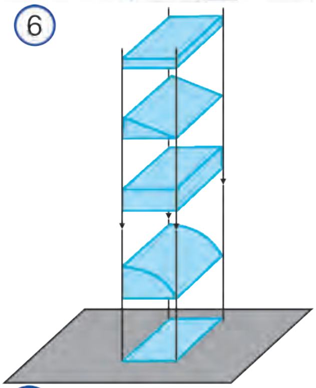
Он гох, $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot KB$, $S_{AB_1C}=\frac{1}{2}AC\cdot KB_1$.

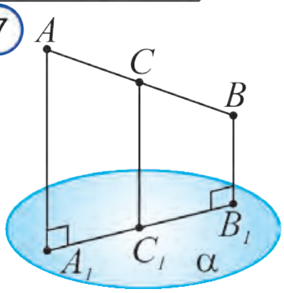
Аз инхо, $S_{AB_1C}=S_{ABC}\cdot\cos\varphi$ ро ҳосил мекунем. Дар ҳолати 1 теорема исбот шуд. 2. Ба ҷойи ҳамвории α ягон ҳамвории ба он параллел будаи β -ро гирифтан ҳам теорема ҷой дорад (расми 3). Ин аз хосияти проексиякунии параллелӣ исбот карда мешавад. 3. Акнун ба ҳолати умумӣ, ҳолати бисёркунҷа меоем (расми 4). Дар ин ҳолат теорема, бо роҳи бо ёрии диагоналҳо бисёркунҷаро ба секунҷаҳо тақсим кардан ба ҳолати махсуси дар боло дидашуда, исбот карда мешавад. ❑

Аз проексияи ортогоналӣ дар нақшакашиҳои техникӣ дар лоиҳагардонии деталҳои гуногун истифода мебаранд. Нақшаҳои деталҳои гуногуни машинаҳо ба якто, дуто ёки сето ҳамвориҳои байни якдигар перпендикуляр бо роҳи проексияи ортогоналӣ ҳосил карда мешавад (расми 5). Ин проексияҳо нисбати кадом самт проексия шуданашон проексияҳои вертикалӣ (рост), горизонталӣ ва фронталӣ номида мешаванд.

4


5


6


7


? *Саволҳо ва машқҳо оиди мавзӯъ*

1. *Проексияи ортогоналӣ гуфта чиро меноманд?*
2. *Хосиятҳои проексияи ортогоналиро шуморед.*
3. *Аз проексияи ортогоналӣ дар техника чӣ хел истифода мебаранд?*
4. *Хосияти ба як хати рост перпендикуляр будани ҳамвориро гӯед.*
5. *Теоремаи умумигардонидашудаи Пифагор дар бораи чист?*
6. *Оё ду хати рости ба ҳамвории сеюм перпендикуляр байни ҳам параллел мешаванд?*
7. *Оё ҳамвории ба ҳамвории дуюм перпендикуляр ва хати рост байни ҳам параллел мешаванд?*
8. *Аз хати рости додашуда ба ҳамвории додашуда чандто ҳамвории перпендикуляр гузаронидан мумкин?*
9. *Ҳамвории a ба ҳамвории b перпендикуляр аст. Ҳар гуна хати росте, ки дар ҳамвории a мехобад, ба ҳамвории b перпендикуляр мешавад?*
10. *Ҳамвории дуюми аз порчаи моили ҳамвории якум гузаранда ба якумаш перпендикуляр мешавад?*
11. *Оё дар параллелепипеди росткунҷа тарафҳои буридашаванда байни якдигар перпендикуляр мешаванд?*

5.52. Оё проексияи ортогоналии трапетсия a) квадрат; b) порча; c)чоркунҷаи росткунҷа; d) параллелограмм; e) трапетсия шуданаш мумкин аст?

5.53. Ба расми 6 нигоҳ карда, шаклҳои геометрии проексияи ортогоналиаш чоркунҷаи росткунҷаро гӯед

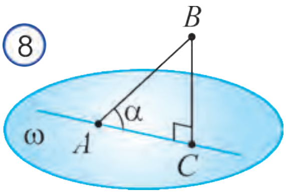
5.54. Порчаи $A_1 B_1$ проексияи ортогоналии порчаи AB дар ҳамвории α (расми 7). Агар $AB = 20$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 12$ см бошад, дарозии порчаи B_1C_1 –ро ёбед.

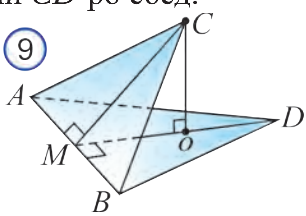
5.55. Проексияи ортогоналии порчаи AB-и дарозиаш 5 см ба ҳамвории ω аз порчаи AC-и дарозиаш 3 см иборат аст (расми 8). Косинуси кунҷи моилии порчаи AB ба ҳамвории ω ёфта шавад.

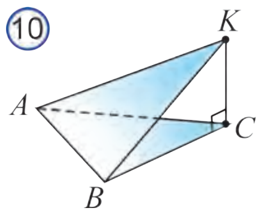
5.56. Агар масофа аз хати рости AB то нуқтаи C (расми 9) нисбат ба масофа аз нуқтаи C то ҳамвории ABD ду маротиба калон бошад, кунҷи байни ҳамвориҳои ABC ва ABD –ро ёбед.

5.57. Масоҳати секунҷаи ABC ба 18 см 2 баробар. $KC \perp (ABC)$. Агар кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои ABK ва ABC a) $a = 30^0$; b) $a = 45^0$; c) $a = 60^0$ бошад, масоҳати секунҷаи ABK –ро ёбед.

5.58. Кунҷи байни ҳамвориҳои секунҷаҳои ABC ва ABD ба 60^0 баробар. Agar $AB = 4\sqrt{3}$ бошад, дарозии CD-ро ёбед.

8


9


10


5.59. Проексияи ортогоналии секунҷаи масоҳаташ ба 48 см^2 баробар аз секунҷаи тарафҳояш 14 см, 16 см ва 6 см буда иборат аст. Кунҷи байни ҳамвории ин секунҷа ва ҳамвории проексия ёфта шавад.

5.60. Проексияи ортогоналии секунҷаи масоҳаташ ба 12 см^2 баробар аз секунҷаи тарафҳояш 13 см, 14 см ва 15 см буда иборат аст. Кунҷи байни ҳамвории ин секунҷа ва ҳамвории проексия ёфта шавад.

20 МАШҚИ АМАЛӢ ВА ТАТБИҚ

Татбиқҳо ва пайдо кардани компетенсияҳо

1. Ба фарш перпендикулярии хати пайвасти хонаи ду ҳамсояро чӣ тавр бо ёрии ченкуниҳо санҷидан мумкин?

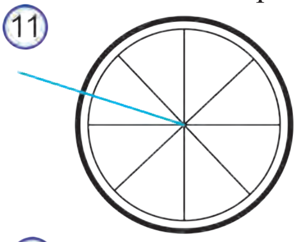
2. Бо ёрии асбоби дарози ченкунӣ-рулетка рост будани сутунро чӣ хел санҷидан мумкин?

3. Перпендикулярии ҳамвории тири ғилдирак ва ҳамвории дар он чарх зада истодаро чӣ хел санҷидан мумкин?

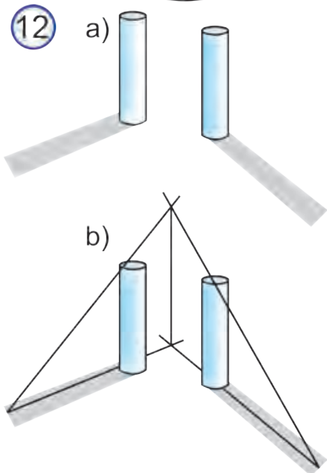
4. Аз чӣ сабаб зимистон ғафсии яххҳои аз бом овезонро ба ҳисоб нагирифта, байни якдигар параллел гуфтан мумкин?

5. Хонанда кори амалӣ иҷро карда истодааст. Барои донистани нисбат ба Замин рост будани якчанд сутун фақат яктояшро санҷид. Рост будани сутунҳои боқимондаро ба таври зерин санҷид: ӯ баландии ҳамаи сутунҳоро, масофаҳои байни асосҳои поёнӣ ва қуллаҳои болоиро чен карда, қарор қабул кард. Оё ӯ ин корро дуруст иҷро кард?

11



12



6. Аз кадом сабаб дари хона хоҳ кушода бошад, хоҳ пӯшида ҳар доим нисбат ба фарш перпендикуляр мешавад?

7. Барои мисоли перпендикулярии хати рост ба ҳамворӣ, ҷойгиршавии ҳамворие, ки дар он симҳои ғилдирак мехобад ва тири ғилдиракро овардан мумкин (расми 11). Тир ба ҳар як сими ғилдирак перпендикуляр аст. Дар давоми ҳаракат симҳои ғилдирак дар ҳар як нуқтаи ҳамвории доираи аз порчаҳои буридашаванда иборат ҳосил мекунад. Агар тир горизонталӣ ҷой гирифта бошад, ғилдирак дар кадом ҳамворӣ чарх мезанад? Чаро?

Нишондод: ба тири ғилдирак перпендикуляр, ҳамвории перпендикуляр мешавад.

8. Машқи ба баландӣ ҷаҳидан иҷро шуда истодааст. Барои гузоштани чӯби монеа аз куби теғааш 25 м ва аз параллелепипеди росткунҷаи ченакҳояш 25x25x50 истифода бурда истодаанд. 1) машқи ба баландии 125 см; 2) 150 см; 3) 175 см ҷаҳиданро чӣ хел ташкил кардан мумкин аст?

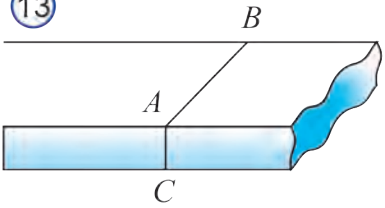
9. Дар расми 12 ду сутуни вертикалӣ ва сояҳои онҳо тасвир карда шудааст. Аз ин маълумот истифода бурда, нуқтаи ҷой гирифтаи манбаи равшани (чароғ) ва проексияи онро ба ҳамвории горизонтали ёбед ва ба саволҳои зерин ҷавоб диҳед. а) оё вертикал будани сутунҳо аҳамият дорад?

d) горизонтал будани ҳамвории фаромадани соя аҳамият дорад?

с) ё ҳамаи маълумоти дар расм додашуда муҳиманд?

Ҳалл: Дар расми 12 созиши лозима оварда шудаанд. Ҳангоми муайян кардани ҷойи манбаи равшани самти сутунҳо аҳамият надорад, лекин вертикал будани онҳо муҳим ҳисобида мешавад. Агар сутунҳо вертикалӣ ва соя ба ҳамвории горизонталӣ фуромада бошад, барои ҳал кардани масъала

13



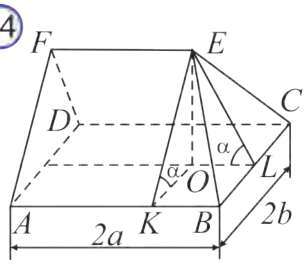
сояи як сутуни дар расм буда ва самти сояи аз сутуни дуюм фуромадаро донистан кифоя (расми-13.b).

10. Ба болои мизи доиравӣ дастархони шакли квадрат доштаи тарафаш ба a баробар андохта шудааст. Маркази доира бо маркази квадрат болоиҳам меафтанд. Қуллаҳои дастархон нисбат ба миёнаҷои тарафҳои он ба фарш чӣ қадар наздик аст? Ҷавоб: $a(2-1)/2= 0,207\ a$.

11. Рост будани деворҳо бо ёрии шоқул (риштаи ба як нӯгаш санг баста) санҷида мешавад. Агар риштаи шоқул ба девор чӣ қадар часпида истад, ба қарори ҳамон қадар рост будани девор меоем. Ин қарор чӣ қадар дуруст? Ин усули санҷиш бо чӣ асоснок карда мешавад?

12. Барои сатҳи арракунӣ ба ҳамаи қуллаҳои тахтаи аррашуда перпендикуляр буданашро таъмин кардан (расми14) дар сатҳи тахта хатҳои арракуниро чӣ хел қайд кардан даркор?

14



13. Барои санҷидани перпендикулярии деворҳои хонаи ҳамсоя аз теоремаи Пифагор чӣ хел истифода бурдан мумкин аст?

14. Барои санҷидани рост будани сутун, аз ду нуқтаи бо асоси сутун дар як хати рост нахобанда менигарем. Чунин усули санҷишро асоснок кунед.

Нишондод:Аз аломати перпендикулярии хати рост ва ҳамворӣ истифода баред.

15. Дар нуқтаи дастнорас сутуни баланд гузошта шудааст. Бо ёрии шоқул рост будани сутунро чӣ хел санҷидан мумкин?

Нишондод: Бо ягон хати рости вертикал дар як ҳамворӣ хобидани сутунро ва боз бо як хати рости вертикалӣ дар як ҳамворӣ (дигар) хобиданашро нишон додан кифоя мешавад. Шоқулро чунон ба наздамон мегузорем, ки ҳангоми қуллаҳои болоии он ва сутун ҳамчунин чашмамон дар як хати рост хоб рафтан, риштаи шоқул ва сутун дар як хати рост хобад. Ин усул бо чунин асоснок карда мешавад: 1) бояд сутуни вертикал бо хати рости вертикалӣ дар як ҳамворӣ хобад; 2) агар ду хати рости параллел дар ду ҳамвории буранда хобанд, ин хатҳои рост ба хати буриши ҳамвориҳо ҳам параллел мешаванд.

16. Ду оинаи вертикал ҷойгирашуда дода шудааст. Нури горизоталии ба сатҳи яке аз ин оинаҳо параллел буда, аз оинаи дуюм ба сатҳи оинаи якум аз рӯйи хати рости перпендикуляр буда мегардад. Кунҷи байни оинаҳоро ёбед.

Нишондод:Аз қонуни бозгашти равшанӣ истифода баред. Ҷавоб; 45°.

17. Нури горизонталӣ аз ду оинаи вертикал ҷойгиршуда баргашта истодааст. Сараввал нур ба сатҳи оинаи якум параллел бошад, дар натиҷаи ду маротиба инъикос шудан ба ҳамвории оинаи дуюм параллел шуда мемонад. Кунҷи байни оинаҳоро ёбед.

Ҷавоб: 60°.

18. Платформаи пӯлодии квадратшакл, ки ғафсиаш 5 м, масоҳаташ 4 м^2 аст, аз чор қуллааш бо сими троси горизонтал овехта шудааст. Дарозии ҳар як сими троси 2 м. Кунҷи моилии сими тросиро нисбат ба платформа ёбед. Оё баки силиндршакл, ки баландиаш 0,9 м, диаметри асосаш 0,6 м аст, ба ин платформа ҷойгир карда мешавад?

Ҷавоб: 45°, бакро ҷойгир карда мешавад.

19. Об ба асоси боми аз чор тарафаш ҷоришаванда ортогонал проексия карда шудааст. Исбот кунед, ки проексияи қуллаҳои бом биссектрисаи кунҷи асоси бом, ки шакли чоркунҷаи росткунҷа дорад, мешавад.

20. Барои хонае, ки асосаш аз чоркунҷаи росткунҷаи *ABCD* иборат аст, боми борон аз чор тарафаш ҷоришаванда сохтан даркор (расми 14). $AB = 2a$ м, $BC = 2b$ м. Ҳамаи тарафҳои бом бо ҳамвории асос кунҷи α -ро ташкил мекунад. Барои пӯшонидани ин бом чӣ қадар тунука даркор мешавад. Дар ин ҷо онро ба ҳисоб гиред, ки тунукаи ба миқдори k фоизи масоҳати сатҳи бом исроф мешавад. *Ҷавоб:* $4ab\,(1 + 0{,}01k) / \cos\alpha$.

21. Борон дар ҳавои бешамол "нишебӣ" борида истодааст. Бо ёрии порчаи фанерӣ шакли чоркунҷаи росткунҷа дошта моилии боронро нисбат ба ҳамвории горизонт чӣ хел муайян кардан мумкин аст? Нақшаи мансубро кашед.

Нишондод:Порчаи фанерро чунон ҷойгир кардан даркор, ки ҳамвории он ба траекторияи ҳаракати чакраҳои борон ва ба ҳамвории муайянкардаи проексияи онҳо ба ҳамвории горизонталӣ тахминан перпендикуляр шавад. Ҳамин вақт, дар ҳамвории горизонталӣ чоркунҷаи росткунҷаи борон нааftанда ҳосил мешавад. Баъди ин дарозиҳои порчаҳои мансуб чен карда мешаванд ва тангенси кунҷи байни онҳо ёфта мешавад.

22. Болои кати бачагонаи масоҳаташ ба S_1, дарозиаш ба n баробар бударо бо ду болопӯши шакли чоркунҷаи росткунҷаи якхела пӯшонидан даркор. Масоҳати ҳар як парда ба S_2, дарозиаш бошад ба дарозии кат баробар аст. Канори болоии ҳар ду парда дар болои кат параллел ҷойгир шудааст ва ба сими дарозиаш ба дарозии кат баробар маҳкам карда шудааст.

Аз кат дар кадом баланди ҷойгир шудани симро ёбед.

Масъаларо дар шартҳои ададии зерин ҳал кунед: $n = 1$ м 20 см, $S_1 = 6000$ см², $S_2 = 7800$ см².

Нақшаи мансубро кашед. Нишондод: $\sqrt{4S_2^2 - S_1^2} / 2n$.

Ҷавоб: 0,5 м.

23. Ба хонае, ки асосаш аз чоркунҷаи росткунҷаи *ABCD* иборат аст, боме ки борон аз чор тарафаш ҷорӣ мешавад сохтан даркор (расми 14). $AB = 18$ м, $BC = 12$ м. Ҳамаи тарафҳои бом бо ҳамвории асос кунҷи 40^o–*а* ташкил мекунад. Агар барои пӯшонидани 1 м² масоҳат 15 дона черепитса сарф шавад, барои пӯшонидани ин бом чанд дона черепитса лозим мешавад?

24. Бо ёрии қалами шашкунҷа китоби кушода тимсоли кунҷҳои байни хатҳои рост, байни хати рост ва ҳамворӣ ва байни ҳамвориҳоро нишон диҳед.

25. Аз боми дар расми 14 тасвиршудаи ба ду тири симметрия соҳиб дар кадом самт ҷорӣ шудани оби боронро муайян кунед.

26. Барои муайян кардани баландии манорае, ки ба назди асосаш рафта намешавад чӣ хел ченкуниҳоро амалӣ кардан лозим аст?

27. Барои ёфтани масофа то биное ки ба наздаш рафта намешавад, лекин баландиаш маълум аст, чӣ гуна ченкуниҳоро амалӣ кардан лозим аст?

28. Барои чӣ дар нисфирӯзи сояҳо нест мешаванд?

29. Ба болои дарахт набаромада баландии онро чӣ хел муайян кардан мумкин аст?

Ҷавобҳо ва нишондодҳо

4.5. a) 7 см; b) 30 см; **4.6.** b) 200 мм; **4.13.** 50 см; **4.14.** 40 мм; **4.21.** a + b; **4.22.** a) 400; b) 450; c) 900; **4.23.** a)580; b) 470; **4.50.** 32 см; **4.51.** 6 см; **4.52.** 20 см; **5.11.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{2a^2 - b^2 + d^2}$; 3) $\sqrt{2a^2 - c^2 + 2d^2}$; **5.12.** 2 м; **5.17.** 15 см ва 41 см; **5.20.** $BD = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2}$; $CD = \sqrt{a^2 + c^2}$; **5.21.** 3,9 м; **5.22.** 9 м; **5.23.** a) $\sqrt{2}/2$; b) $\sqrt{(5 + 3\cos b)/2}$; **5.24.** 3 см; 7,5 см; **5.25.** 20 см; **5.34.** 3d; **5.37.** 45^0; **5.38.** $\arccos\sqrt{3}/3$; **5.44.** 90^0; **5.46.** 60^0;

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Icмailov, A.Q. Amanov, B.Q. Haydarov

MATEMATIKA 10
ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI
GEOMETRIYA
II QISM

O‘rta ta’lim muassasalarining 10-sinfi o‘quvchilari uchun darslik
1- nashr
(*Tojik tilida*)

Тарҷимон:	К. Ҳакимов
Муҳаррир:	А. Исмоилов
Муҳаррири техникӣ:	К. Мадияров
Саҳифабанди компутерӣ:	Ф. Қудратиллоев

Литсензияи Нашриёт AI № 277. 15.07.2015
Ба чоп рухсат дода шуд 14.08.2017. Андозаи $70\times100^{1}/_{16}$
Гарнитураи «TimesNewRoman» .
Ҷузъи чопӣ 9,0. Ҷузъи нашрӣ. 9,0.
Адади нашр нусха
Макети оргиналӣ дар ҶММ «Extremum-press»
тайёр карда шуд. 100053, ш.Тошканд.
кӯчаи Боғи шамол, 3. Тел: 234-44-05
Дар чопхонаи Хонаи эҷодиии табъу нашри «O‘qituvchi»-и
Агентии матбуот ва ахбори Ӯзбекистон. чоп шуд.
100206, ш.Тошканд, даҳаи Юнусобод,
кӯчаи Янгишаҳр, хонаи 1.
Супориши № .