МАТЕМАТИКА 11

АЛГЕБРА ВА АСОСҲОИ АНАЛИЗ
ГЕОМЕТРИЯ
ҚИСМИ 1

Китоби дарсӣ барои донишомӯзони мактабҳои таълими умумии синфи 11

Вазорати таълими халқи Республикаи Ўзбекистон тасдиқ намудааст

Нашри якум

ТОШКАНД
2018

УЎК: 51(075.32)
КБК: 22.1уа72
М 65

Муаллифони қисми Алгебра ва асосҳои анализ

М. А. Мирзааҳмедов, Ш. Н. Исмоилов, А. Қ. Амонов

Муаллифи қисми Геометрия:

Б. Қ. Ҳайдаров

Муқаризон:

Р. Б. Бешимов – Мудири кафедраи «Геометрия ва топология»-и Донишгоҳи Миллии Ўзбекистон ба номи Мирзо Улуғбек, доктори илмҳои физика-математика.

Қ. С. Ҷуманиёзов – дотсенти кафедраи «Методикаи омўзиши математика»-и факултети физика – математикаи ДДОТ ба номи Низомӣ, номзади илмҳои педагогӣ.

Р. О. Розимов – омўзгори фанни математикаи мактаби рақами 237 –уми ноҳияи Сергелӣ.

С. Б. Ҷуманиёзова – методисти МТР.

С. Р. Сумбердиева – омўзгори фанни математикаи мактаби ихтисосонидашудаи равқами 6-уми ноҳияи Сергелӣ

Ишораҳои дар қисми китоби дарсии “Алгебра ва асосҳои анализ-истифодашуда ва талқини онҳо:

△ – ҳалли масъала (исботнамоӣ) оғоз ёфт

▲ – ҳалли масъала (исботнамоӣ) анҷом ёфт

! – кори назоратӣ ва машқҳои тест (санҷиш)

? – савол ва супоришҳо

– маълумоти асосӣ

* – машқҳои мураккабтар

ISBN: 978-9943-5128-0-1

БОБИ I

ҲОСИЛА ВА ТАТБИҚҲОИ ОН

1–2 МИҚДОРҲОИ ТАҒЙИРЁБАНДА НИСБАТИ АФЗУНШАВАНДАҲО ВА МАЪНОИ ОН. ТАЪРИФИ РАСАНДА. ФУНКСИЯИ АФЗУНШАВАНДА

Миқдорҳои тағйирёбанда нисбати афзуншавандаҳо

Дар ҳаёти инсон ҳисоб кардани миқдори нисбии ду тағйирёбандаи соҳиби воҳидҳои гуногун зуд-зуд ба назар мерасад.

Масалан, суръати автомобил ва роҳи тайнамудаи он нисбати вақт бо км/соат ёки м/сония ҳисоб карда мешавад, сарфи сӯзишворӣ бо км/литр ёки100 км/литр ҳисоб карда мешавад.

Ба ҳамин монанд, маҳорати боскетболчӣ дар як бозӣ бо адади холҳои ҷамъовардаи ӯ муайян карда мешаавад.

Мисол. Дар маҷмӯаи истеҳсолии омӯзишӣ байни донишомӯзони синфи 11 барои босифат ва босуръат чидани матн санҷиш гузаронида шуд.

Маълум гардид, ки Карим дар 3 дақиқа 213-то калимаро чида, ба 6-то хатои имлоӣ, Наргис бошад дар 4 дақиқа 260-то калимаро чида, ба 7 то хатои имлоӣ роҳ додааст. Натиҷаи онҳоро муқоиса намоед.

△ Нисбатҳои хоси ҳар як донишомӯзро тартиб медиҳем:

Карим:

суръати чидани матн $\dfrac{213 \text{то калима}}{3 \text{ дақиқа}} = 71 \dfrac{\text{калима}}{\text{дақиқа}}$;

сифати чидани матн $\dfrac{6 \text{ то хато}}{213 \text{то калима}} \approx 0,0282 \dfrac{\text{хато}}{\text{калима}}$.

Наргис:

суръати чидани матн $\dfrac{260 \text{то калима}}{4 \text{ дақиқа}} = 65 \dfrac{\text{калима}}{\text{дақиқа}}$;

сифати чидани матн $\dfrac{7 \text{ то хато}}{260 \text{то калима}} \approx 0,0269 \dfrac{\text{хато}}{\text{калима}}$.

Яъне, Карим матнро нисбати Наргис зудтар чида бошад ҳам, Наргис ин корро босифаттар иҷро намуд. ▲

Машқҳо

1. Барои санҷиши басомад(частота)-и набз нӯги ангуштон ба ҷойе, ки раги артерия мегузарад, гузошта мешавад ва барои ҳис намудани зарбаҳо ҳамон ҷой фишурда мешавад.

   Мадина ҳангоми ҳисоби набз дар як дақиқа 67-то зарбаро ҳис кард.

   а) маънои басомади набзро фаҳмонед. Он чӣ гуна бузургӣ (ишора) аст?

   б) дар ҳар соат дили Мадина чанд маротиба мезанад?

2. Карим дар хона 14 саҳифа матн чида, ба 8-то хатои имлоӣ роҳ дод. Агар дар 1 саҳифа 380-то калима бошад:

   а) сифати матнчинии Каримро муайян кунед ва бо натиҷаи масоли боло муқоиса намоед. Сифати матнчинии Карим оё хуб шудааст?

   б) Карим ҳангоми чидани 100-то калима чанд хато мекунад?

3. Маъруф 12 соат меҳнат карда 148 метру 20 см, Мурод бошад 13 соат меҳнат карда 157 метру 95 см ҷӯй тоза намуданд. Самарадории меҳнати онҳоро муқоиса намоед.

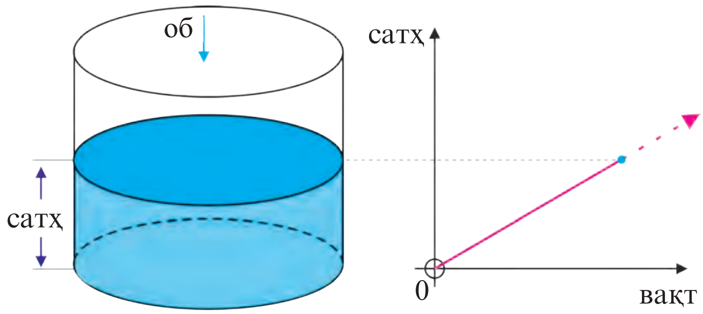
4. Қисми ҳимояи чархи автомобил 8 мм-ро ташкил мекунад. Пас аз тай намудани 32178 км дар натиҷаи хӯрдашавӣ маълум шуд, чуқурии қисми ҳимояи чарх 2,3 мм гардидааст.

   а) ҳангоми тай намудани 1 км масофа қисми ҳимояи чарх чӣ қадар дигаргун шудааст?

   б) баъди тай намудани 10000 км чӣ?

5. Мадина аз шаҳри Қаршӣ соати 11:43 баромада, соати 15:49 ба шаҳри Гулистон расида омад. Агар ӯ 350 км масофа тай намуда бошад, суръати миёнаи вай чанд соат мешавад?

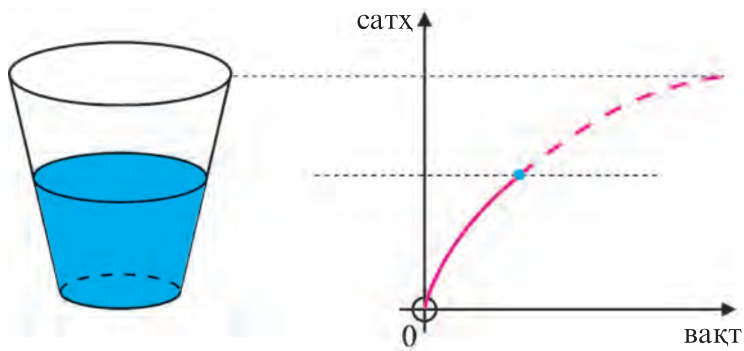
Мисол. Зарфи силиндршакл дар як хел суръат бо об пур шуда истодааст. Дар он (ҳаҷми) оби дохили зарфи силиндри рехтаистода боиси нисбатан баробар рехтан, дар намуди функсияи хаттии об сатҳи (баландии он) нисбат ба вақт вобаста мешавад (нигаред ба расми 1).



Расми 1.

Дар ин ҳол сатҳи зарфи об нисбати вақт (яъне *суръати тағйирёбии сатҳ*) ададі бетағйир шуда мемонад.

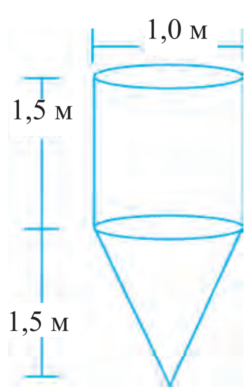
Акнун ба зарфи шаклаш дигар менигарем (расми 2):



Расми 2.

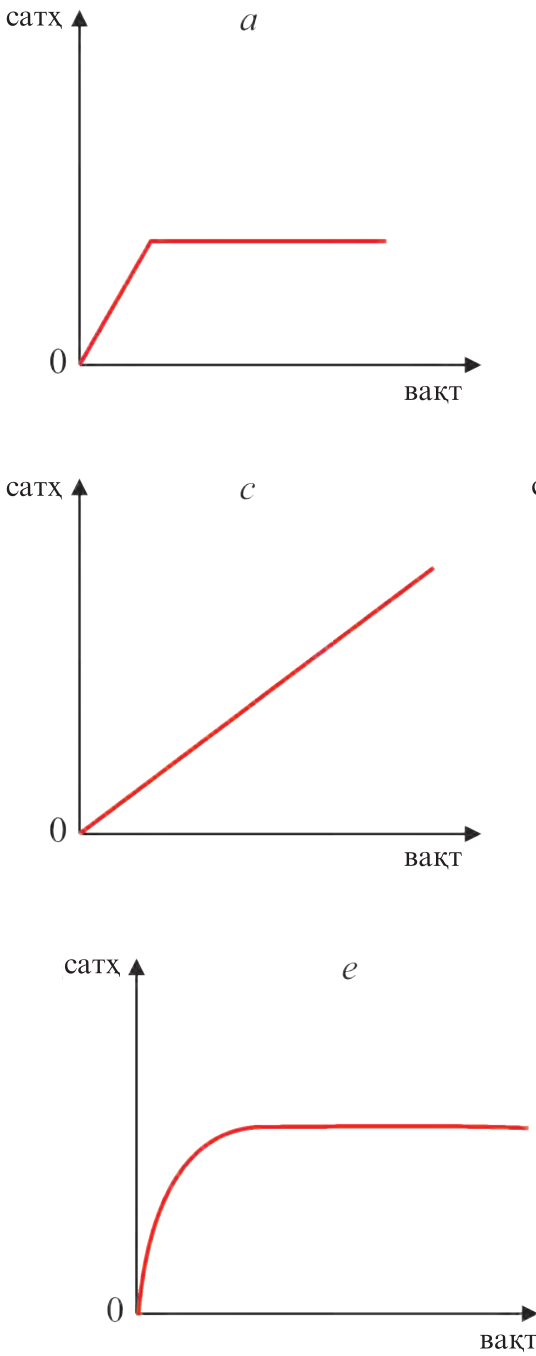
Дар расми 2 тағйирёбии суръати сатҳи об нисбати вобастагии вақт акс ёфтааст.

Саволи 1. Дар расми 3 зарфи барои обгирӣ мувофиқ тасвир шудааст.



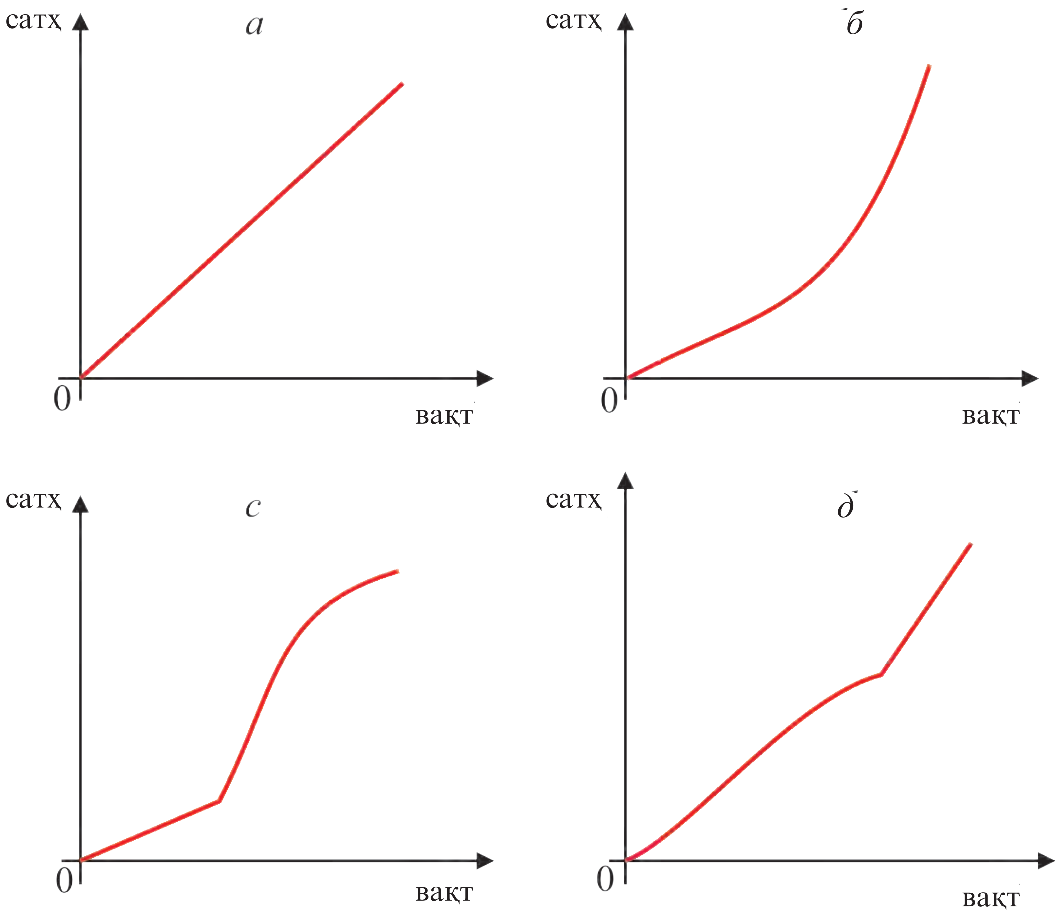
Расми 3.

Дар ибтидо дар он об набуд. Баъд он бо суръати “як литр дар як сония” ба пур кардан оғоз шуд. Тағйирёбии сатҳи об нисбати вақт дар кадом графики расми 4 дуруст нишон дода шудааст?



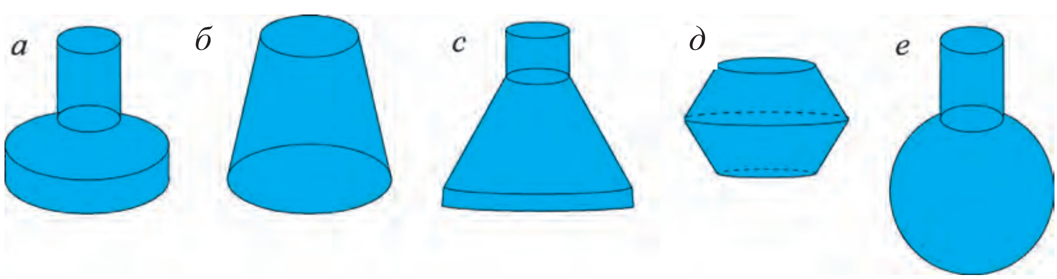
Расми 4.

Саволи 2. Тағйирёбии сатҳи об нисбати вақт дар графикҳои расми 5 дода шудааст:



Расми 5.

Онҳо ба кадом зарфҳои расми 6 мувофиқ меоянд?



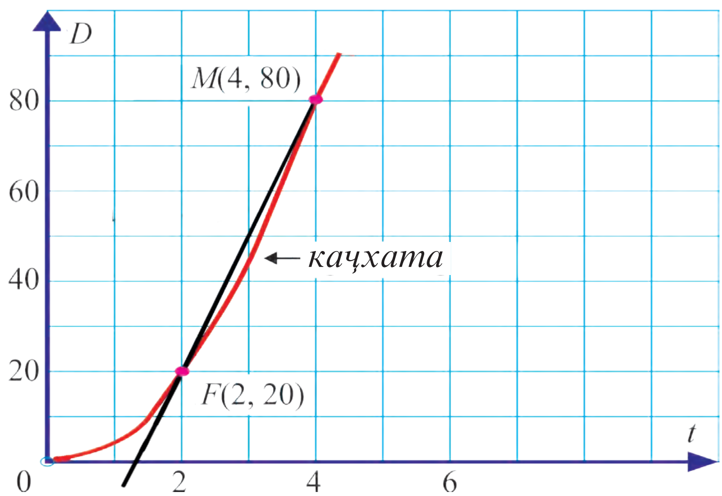
Расми 6.

Суръати миёнаи ивазшавӣ

Миқдори ду тағйирёбанда дар намуди функсияи хаттии ба ҳамдигар пайваст бошад, нисбати афзуншавии ин миқдорҳо адади бетағйир мешавад.

Ба якдигар пайвастшавии ду миқдори тағйирёбанда дар намуди функсияи хаттӣ набошад, мо нисбати миёнаи масофаи додашудаи ин миқдори тағйирёбандаро ёфта метавонем. Агар масофа гуногун бошад нисбатҳои миёнаи ҳисобкардашуда ҳам гуногун мешавад.

***Мисол* 1.** Аз боми бинои баланд ба паст нигоҳ карда тӯбча партофта истодаанд. Дар расми 7 *графики аз бом дуршавии (пастшавии)* тӯбча дар вақти t тасвир шудааст:



Расми 7.

△ Дар график нуқтаи F ба $t=2$ сония мувофиқ бошад ва нуқтаи аз он фарқкунандаи M (масалан, ба $t=4$ сония мувофиқ бошад) – ро ишора мекунем.

Суръати миёнаи фосилаи вақти $2 \le t \le 4$ ба $\frac{(80-20)\,m}{(4-2)\,s} = 30\frac{\text{m}}{\text{s}}$ баробар буданашро меёбем.

Маълум мешавад, ки буррандаи FM ба коэфитсиенти кунҷи 30 баробар аст.

▲*Савол. Нуқтаи F– ро* ноҷунбон ҳисобида, ба қиматҳои мувофиқи зерини додашудаи t барои нуқтаҳои M коэффитсиентҳои кунҷҳои буррандаҳои FM -ро ҳисоб намуда, ҷадвалро пур кунед:

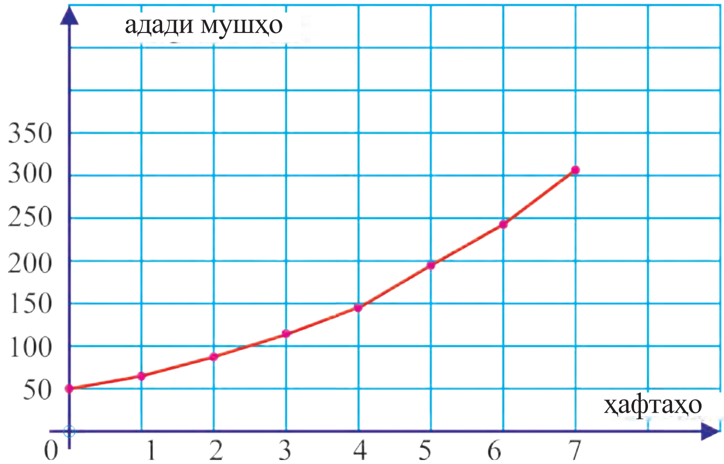
t	коэффитсиенти кунҷ
0	
1,5	

t	коэфитсиенти кунҷ
3	
2,5	

1,9			2,1	
1,99			2,01	

Ба кадом хуллоса омадед?

Мисоли 2. Адади мушҳо ҳангоми афзоиш бо гузашти ҳафтаҳо чунин тағйир меёбад (расми 8):



Расми 8.

Дар фосилаи 3 ва 6 ҳафта адади мушҳо ба ҳисоби миёна чӣ гуна тағйир ёфт? Дар муддати 7 ҳафта чӣ ?

△ Суръати афзоиши мушҳо

$\frac{(240-110)\text{ то муш}}{(6-3)\text{ то ҳафта}} \approx 43\frac{\text{муш}}{\text{ҳафта}}$, яъне дар фосилаи 3 ва 6 ҳафта адади мушҳо ба ҳисоби миёна дар як ҳафта 43 то зиёд мешавад.

Худди ҳамин хел дар 7 ҳафта $\frac{(315-50)\text{ то муш}}{(7-0)\text{ то ҳафта}} \approx 38\frac{\text{муш}}{\text{ҳафта}}$.

Дар фосилаи 7 ҳафта адади мушҳо ҳафтае ба ҳисоби миёна 38 то афзудааст. ▲

Дар ҳолати умумӣ: миқдори x аз a то b иваз гардад, суръати миёнаи миқдори тағйирёбии $y=f(x)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ба нисбати афзуншавӣ баробар аст, дар ин ҷо $f(b)-f(a)$ функсияи афзуншаванда, $b-a$ бошад аргументи афзуншаванда мебошад.

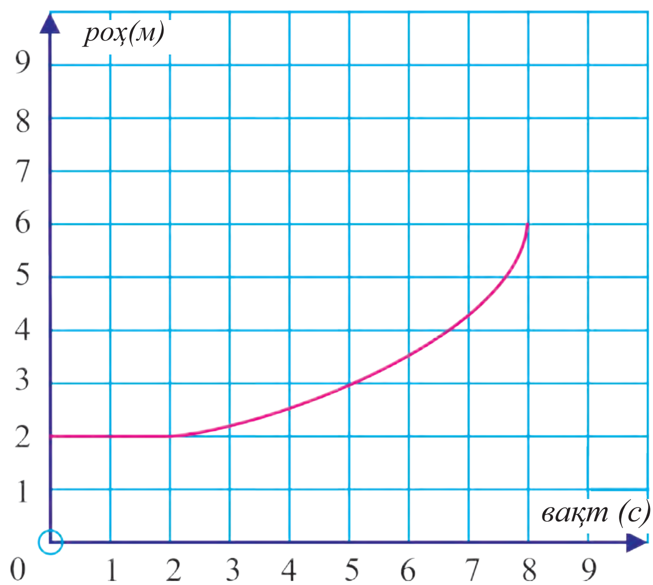
$h=b-a$ гӯён нишон диҳем, суръати миёна намуди $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$-ро мегирад.

Суръати касри $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ аргументи $y=f(x)$ *функсияи* афзуншавандаи h – ро *ба афзуншавандаи x* мувофиқ гуфтан қабул шудааст.

Худи касрро бошад, нисбати камшавӣ мегӯянд.

Машқҳо

6. Ба вақт чӣ гуна вобаста будани роҳи дар атрофи хати рост тайнамудаи нуқта дар графики расми 9 тасвир шудааст.



Расми 9.

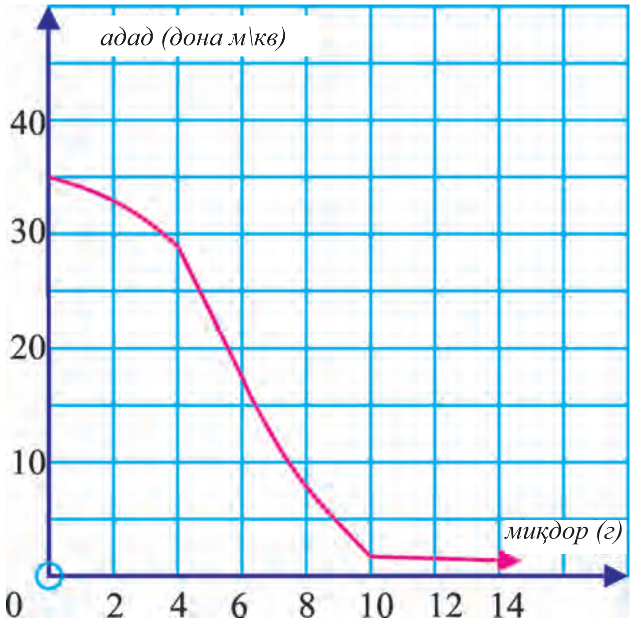
Суръати миёнаи нуқтаро

а) дар 4 сонияи аввал;

б) дар 4 сонияи охир;

с) дар 8 сонияи мобайн ёбед.

7. Ҳангоми бо миқдори (андозаи) гуногуни дору гузаронидани коркард дар саҳро тағйирёбии адади ҳашаротҳои зараррасони дар 1 $м^2$ мавҷудбуда дар графики расми 10 нишон дода шудааст.



Расми 10.

а) 1) микдор аз 0 грамм то 10 грамм зиёд шавад; 2) аз 4 грамм то 7 грамм зиёд шавад, тағйирёбии адади ҳашаротҳои дар 1 $м^2$ мавҷудбударо ёбед.

б) миқдор аз 10 грамм то 14 грамм зиёд шавад, чӣ ҳодиса рӯй медиҳад?

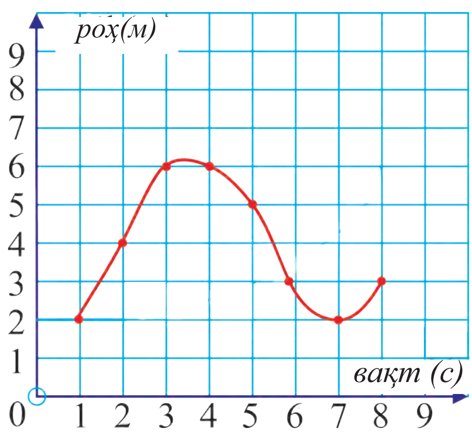
2) графики қонуни ҳаракати ҷисм аз рӯйи хати рост s(t) дар расм дода шудааст.

а) ададҳои s(2),s(3),s(5), s(7) ба чанд баробар?

б) дар кадом фосила функсия афзоянда?

с) дар кадом фосила функсия камшаванда?

д) афзуншавандаҳои s(1) –s(1),s(5)–s(4), s(7)–s(6),s(8)–s(6) –ро ҳисоб кунед.



3–4 МАФҲУМ ДАР БОРАИ ЛИМИТ

Қимати x аз 2 хурд буда, ба 2 наздик равад, ҷадвали қимати функсияи $f(x)=x^2$ ро мебинем:

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$	1	3,61	3,9601	≈ 3,996 00	≈ 3,999 60

Аз ҷадвал маълум мешавад, ки қимати *x ба 2 ҳар қадар наздик шавад*, қимати функсияи $f(x)$ ба адади 4 наздик мегардад.

Дар ин ҳолат аргумент(тағйирёбанда)–*и* x ба 2 аз чап наздик шавад мегӯем, ки қиматҳои $f(x)$ ба адади 4 наздик мешавад.

Акнун қиматҳои x аз 2 калон буда, ба 2 наздик шудан гирад ба ҷадвали қимати функсияи $f(x)=x2$ менигарем:

x	3	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)$	9	4,41	4,0401	≈ 4,004 00	≈ 4,000 40

Дар ин ҳолат аргументи x ба 2 аз рост наздик шавад, қимати функсия $f(x)$ ба адади 4 *наздик мешавад* мегӯем.

Ду ҳолати болоиро умумӣ гардонида, аргументи x ба 2 наздик шавад, аргументи $f(x)$ ба адади 4 наздик мешавад мегӯем ва инро чунин менависем:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Ин навишта чунин хонда мешавад: аргументи x ба 2 наздик шавад, *лимити функсияи* $f(x)=x^2$ ба 4 баробар аст.

Дар ҳолати умумӣ ба фаҳмиши *лимити функсия* чунин майл мекунем:

$x \neq a$ буда, қиматҳои он ба адади a наздик гашта, қиматҳои $f(x)$ ба адади A наздик бояд шавад. Дар ин ҳол адади A агар ба x a наздик гардад лимити функсияи $f(x)$ мегӯянд ва чунин муайян мекунанд.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Дар баъзе вақтҳои ҳолати мазкур қиматҳои *x агар ба a* майл намояд, функсияи $f(x)$ ба A майл менамояд, мегӯем.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ ба ҷойи $x \to a$ навиштаҷоти $f(x) \to A$ ҳам истифода мешавад.

Ёдрас. Ҳангоми ба x a майл кардан, иҷрошавии шарти $x \neq a$ муҳим аст.

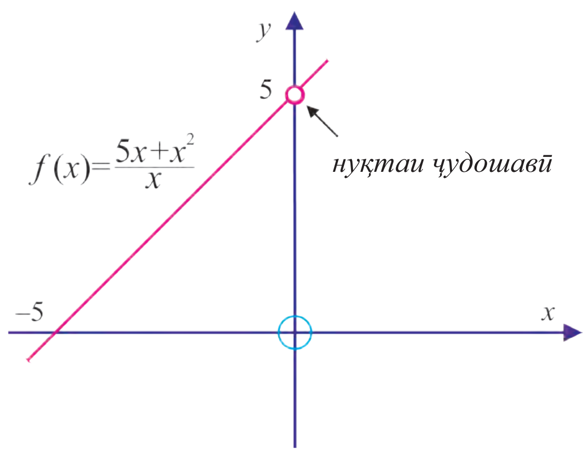
Мисол. Агар $x \to 0$ бошад лимити функсияи $f(x) = \dfrac{5x + x^2}{x}$ ро ёбед.

△ Шарти $x \neq 0$ иҷро нагардад, яъне $x=0$ бошад. Қимати $x=0$ – *ро ба* $f(x)$ бевосита гузошта бинем, ба номуайянии намуди, $\dfrac{0}{0}$ соҳиб мешавем.

Аз тарафи дигар, барои он ки $f(x) = \dfrac{x(5+x)}{x}$ аст, ин функсия чунин намудро мегирад:

$$f(x) = \begin{cases} 5 + x, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бошад} \\ \text{номуайян, агар} & x = 0 \text{ бошад,} \end{cases}$$

Графики функсияи $y=f(x)$ нуқтаи координатаи “гирифта партофташуда” (0; 5) дар намуди хати рости $y=x+5$ мешавад. (расми 11):



Расми 11.

Нуқтаи координатаи (0; 5) нуқтаи бурриши функсияи $y=f(x)$ гуфта мешавад.

Маълум мешавад, дар нуқтаҳое, ки аз ин нуқта фарқ доранд агар қимати х ба 0 наздик шавад, қимати мувофиқи функсияҳои $f(x)$ ба 5 наздик мегардад, яъне лимити он мавҷуд аст: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x + x^2}{x} = 5$. ▲

Дар амал барои ёфтани лимити функсия, лозим бошад, ичро намудани содагардонии дахлдор мувофиқи мақсад аст.

Мисоли 1. Лимитҳоро ҳисоб кунед:

а) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x}$; с) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

△ а) қиматҳои x ба 2 наздик шавад, қиматҳои x 2 ба 4 наздик мешавад, яъне $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

б) барои он ки $x\neq 0$ аст

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+3)=3\cdot$$

с) барои он ки $x\neq 3$ аст

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6. \ ▲$$

Машқҳо

Лимитро ҳисоб намоед (**8–11**):

8. а) $\lim\limits_{x\to 3}(x+4)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(5-2x)$; с) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-1)$

д) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-3x+2)$; е) $\lim\limits_{h\to 0} h^2(1-h)$; ё) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+5)$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 5} 5$; б) $\lim\limits_{h\to 2} 7$; с) $\lim\limits_{x\to 0} c$, *c – адади доимӣ.*

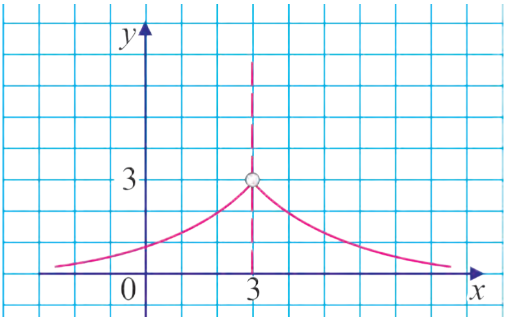
10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x}{x}$; б) $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{h^2+5h}{h}$; с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}$.

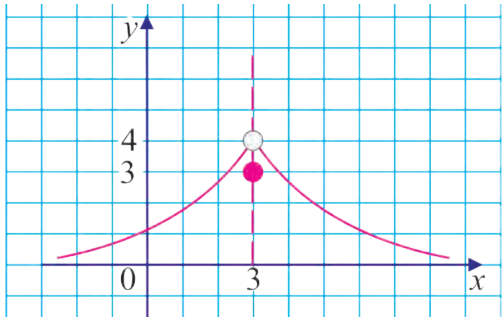
11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x}{x}$; с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-x}{x}$.

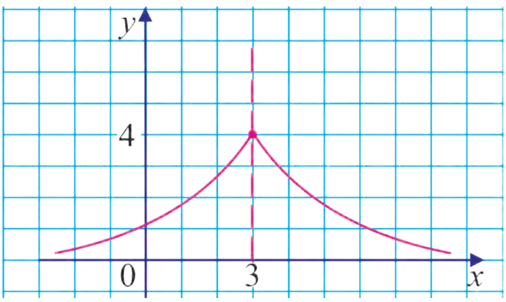
д) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h^2+6h}{h}$; е) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2-4h}{h}$; ё) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3-8h}{h}$;

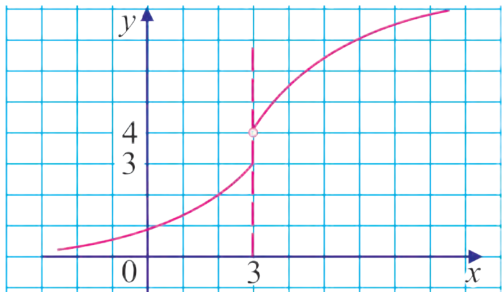
ж) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x-1}$; з) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}$; и) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$.

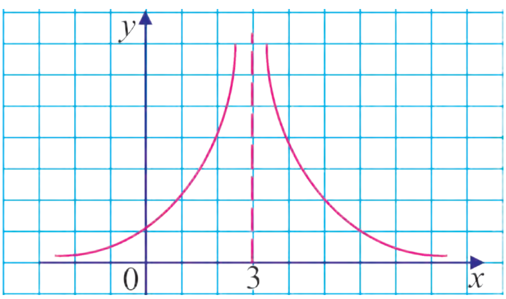
12. Кадоме аз функсияҳои зерин дар $x \to 3$ будан ба лимит соҳиб аст? Ҳамин лимитро ёбед.

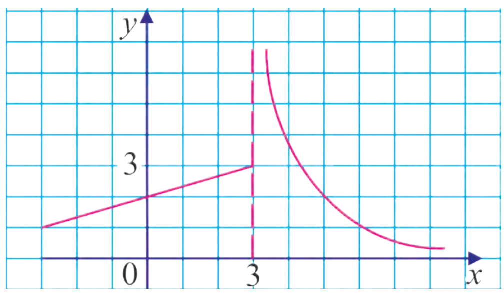


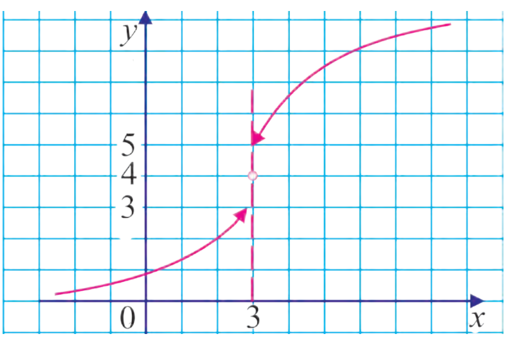


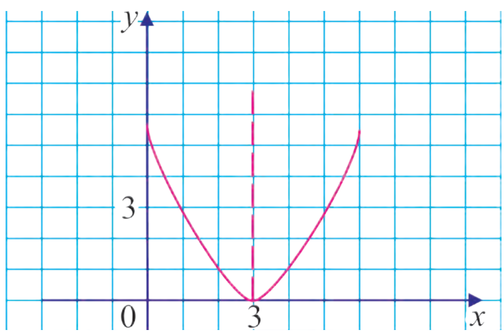






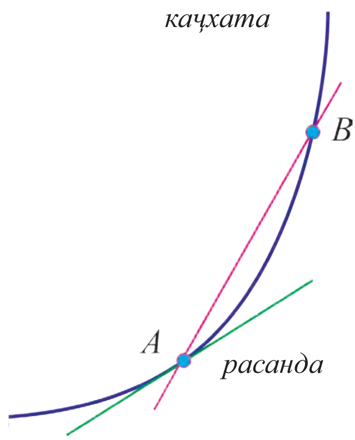




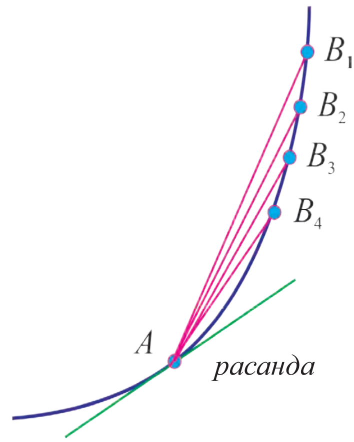


5–6 ҲОСИЛА, МАЪНОИ ГЕОМЕТРӢ ВА ФИЗИКИИ ОН

Дар расми 12 качхата, бурранда ва расанда тасвир шудааст.



Расми 12.

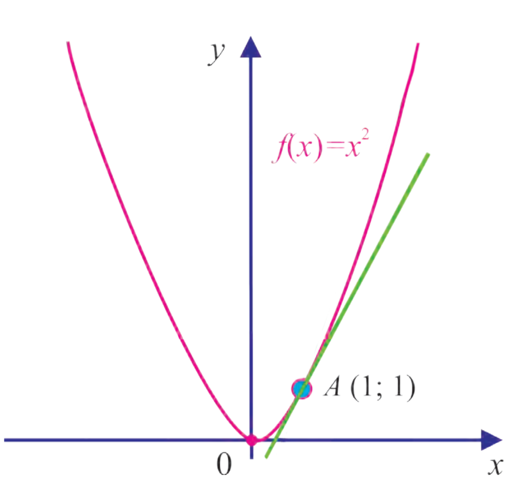


Расми 13.

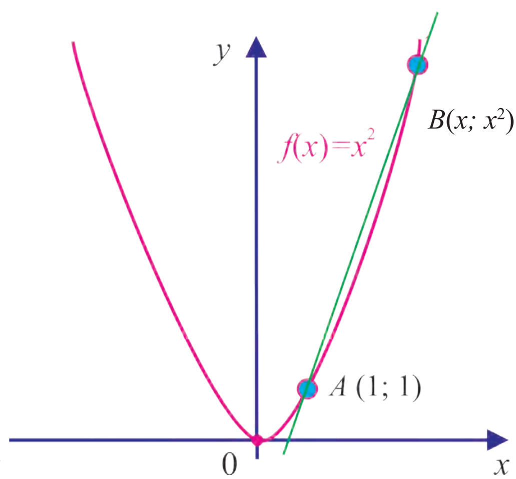
Нуқтаи B ҳолатҳои B_1, B_2, ...-ро пайдарпай қабул карда, ба нуқтаи A дар атрофи качхата наздик шавад, (расми 13), буррандаҳои мувофиқ дар качхата майли гирифтани ҳолати расандаи аз нуқтаи A гузарандаро ба тарзи интуитив қабул менамоем:

Маълум аст, ки дар ин ҳолат AB ба коэффитсиенти хати рост ва ба коэффитсиенти кунҷи расанда наздик мешавад.

Мисоли 1. Дар графики функсияи $f(x) = x^2$ дар нуқтаи $A(1;\ 1)$ кунҷи коэффитсиенти хати рости расандаро ёбед (расми 14).



Расми 14.



Расми 15.

△ **Ба графики дахлдори функсияи** $f(x) = x^2$ нуқтаи ихтиёрии $B(x, x^2)$ гузорем (расми 15).

AB коэффитсиенти кунҷи хати рост

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ёки ба $\frac{x^2-1}{x-1}$ баробар.

Нуқтаи B ба нуқтаи *A* дар атрофи каҷхата наздик шавад, қимати x ба 1 наздик мешавад, дар он $x \neq 1$.

Ҳамин тавр бошад, коэффитсиенти хати рости *AB* ба коэффитсиенти кунҷи расандаи k наздик мешавад, яъне:

$$k = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2\cdot$$

Чунин бошад, k=2. ▲

Агар функсияи $y=f(x)$ дода шуда бошад. Нуқтаҳои ба графики он дахлдори $A(x, f(x))$ ва $B(x+h, f(x+h))$ – ро нигарем (расми 16).

AB коэффитсиенти кунҷи хати рост

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

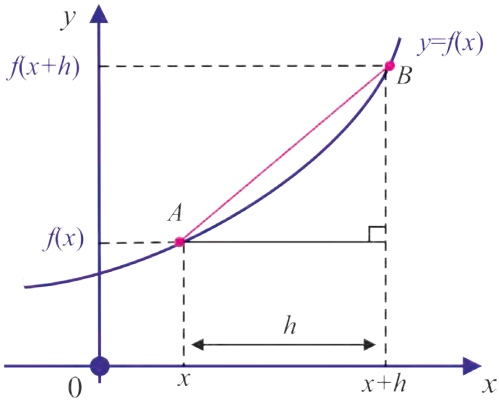
ба нисбати фарқ баробар.

Нуқтаи B ба нуқта *A* атрофи каҷхата наздик шавад, $h\to 0$, яъне h дар ҳолати афзуншаванда майл мекунад, буррандаи *AB* бошад ба графики функсияи расандаи дар нуқтаи *A* гузаронидашуда майл мекунад.

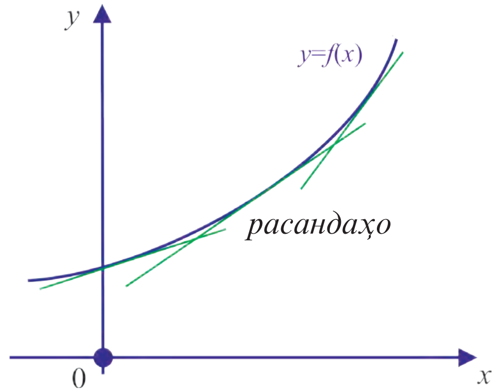
Баробари ин, коэффитсиенти кунҷи хати рости *AB* ба коэффитсиенти кунҷи бурранда наздик мешавад.

Ба тарзи дигар гӯем, қимати h ба 0 майл намуда, дар нуқтаи ихтиёрии $(x, f(x))$ ба коэффитсиенти кунҷи расандаи гузаронидашуда $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ба нисбати фарқи қимати лимитӣ, яъне ба қимати

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ баробар мешавад.



Расми 16.



Расми 17.

Ба графики функсияи қимати ихтиёрии дар ин лимит мавҷудбудаи x қимати ягонаи коэффитсиенти кунҷи дар нуқтаи $(x, f(x))$ газаронидашудаи расанда мувофиқ гузоштан мумкин аст (расми 17).

Яъне, формулаи, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ функсияи навро ифода мекунад.

Ана ҳамин функсияи $y=f(x)$ **ҳосилаи функсия**, ёки содда карда гӯем **ҳосила номида мешавад**.

Таъриф. Ҳосилаи функсияи $y=f(x)$ **гуфта**, лимити зеринро (агар он мавҷуд бошад) мегӯянд:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (1)$$

Одатан ҳосилаи функсияи $y=f(x)$ чунин $f'(x)$ ишора мешавад. Амали ёфтани ҳосила дифференсиронӣ номида мешавад.

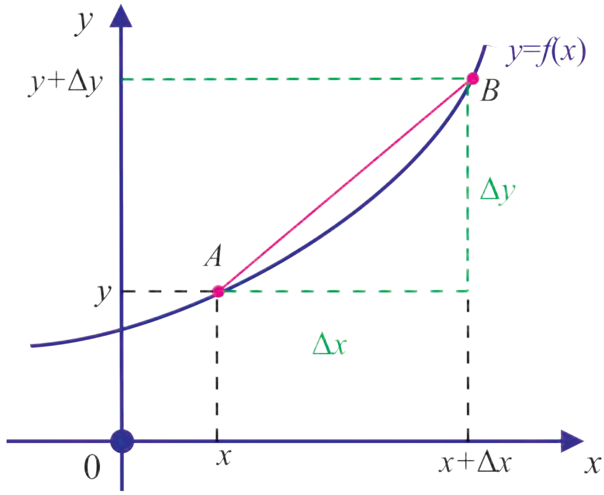
Ба ҷойи ишораи $f'(x)$ чунин $\dfrac{dy}{dx}$ ишора ҳам қабул шудааст.

Дар намуди “каср” будани ин ишоракуниро чунин фаҳмонидан мумкин.

Агар афзуншавиро $h=\Delta x$, $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$ гӯён ишора кунем, аз

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ба намуди зерин соҳиб мешавем

(расми 18): $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{dx}$.



Расми 18.

Аз мулоҳизаҳои боло ба чунин хулоса меоем: ҳосилаи функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи x_0 ба қимати графики функсияи дар ҳамин нуқта гузаронидашудаи коэффитсиенти кунҷи расанда баробар аст. Маънои геометрии ҳосила аз ҳамин иборат аст.

Мисоли 2. Нуқтаи моддӣ $s=s(t)$ (масофа бо метрҳо - s, вақт бо сонияҳо - t чен мешавад) мувофиқи қонун дар атрофи хати рост ҳаракат карда истодааст. Суръати $v(t)$ дар ҳамин нуқтаи моддиро ҳангоми (лаҳзаи) вақти t ёбед.

△ Маълум, ки суръати лаҳзавии нуқта дар фосилаи вақти хурд Δt тақрибан ба суръати миёнаи $v(t)=\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ баробар аст. Δt *ба сифр майл кунад, фарқи миёнаи суръати лаҳзавӣ* ва суръати миёна ҳам ба сифр майл мекунад. Ин тавр бошад, суръати лаҳзавии ҳолати t *дар нуқтаи* моддӣ

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t). \blacktriangle$$

Ҳамин тавр, суръати лаҳзавии қонуни ҳаракати нуқта дар ҳолати t ба ҳосилаи аз функсияи $s(t)$ гирифташуда баробар будааст.

Маънои физикии ҳосила ҳам аз ҳамин иборат аст. Умумӣ карда гӯем, ҳосила суръати тағйирёбандаи функсия аст.

Мисолҳо

Аз таърифи ҳосила истифода бурда, ҳосилаи функсияҳоро ёбед.

1. $f(x)=x^2$; **2.** $f(x)=5$; **3.** $f(x)=x^3-7x+5$;

4. $f(x)=x^4$; **5.** $f(x)=\frac{1}{x}$; **6.** $f(x)=\sqrt{x}$; **7.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

△ **1. Ҳангоми** $h\neq 0$ будан

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

2. $h\neq 0$ бошад $f(x+h)=5$, $f(x+h)-f(x)=5-5=0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{h}=0 \text{ ин тавр бошад, } f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

3. Ҳангоми $h\neq 0$ будан

$f(x+h)=(x+h)^3-7(x+h)+5=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5;$

$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5-x^3+7x-5=$

$=3x^2h+3xh^2+h^3-7h.$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-7h}{h}=3x^2+3xh+h^2-7.$$

Дар $h\to 0$ ҳангоми $3xh+h^2\to 0$ будан

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2-7.$$

4. Мувофиқи формулаҳои зарби мухтасар $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

Яъне, $(x+h)^4-x^4=(x+h-x)(x+h+x)((x+h)^2+x^2)=$

$=h(2x+h)(2x^2+2xh+h^2)=2hx(2x+h)(x+h)+h^3(2x+h)=$

$=2hx(2x^2+h(3x+h))+h^3(2x+h)$; $h\to 0$ бошад,

$2h^2x(3x+h)\to 0$ ва ҳангоми $h^3(2x+h)\to 0$ будан

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim_{h\to 0}(4x^3+2hx(3x+h))+h^2(2x+h))=4x^3.$$

Яъне, $f'(x)=(x^4)'=4x^3$.

5. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ бошад,

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=-\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-1}{(x+h)x}.$$

Дар $h \to 0$ ҳангоми $x+h \to x$ будан $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ мешавад.

6. $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$, $x+h>0$ бошад, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ нисбати фарқро месозем ва онро содда мегардонем:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Дар $h \to 0$ ҳангоми $\sqrt{x+h} \to \sqrt{x}$ будан, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ мешавад.

7. Нисбати камшавандаро месозем:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

Дар $h \to 0$ $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}} \to \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Ин тавр бошад, $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Ҷавоб: **1.** $2x$. **2.** 0. **3.** $3x^2-7$. **4.** $4x^3$. **5.** $-\frac{1}{x^2}$. **6.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **7.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. ▲

Ёдовар шудан ҷоиз аст, ки агар миқдори x аз x ба $x+h$ тағйир ёбад, тағйирёбии миқдори $y=f(x)$ ба нисбати фарқи суръати миёнаи

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

баробар аст.

Аз ин ифодаи $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ миқдори $y=f(x)$ тағйирёбии **суръати лаҳзавиро мефаҳмонад.**

Машқҳо

13. Ҳосилаи функсияи зерин ба чӣ баробар аст?

а) $f(x)=x^3$; б) $f(x)=x^{-1}$; с) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$; д) $f(x)=c$.

14. Ҷадвалро ба дафтаратон кӯчонед ва пур кунед:

а)

$f(x)$	$f'(x)$
x^1	
x^2	
x^3	
x^{-1}	
$x^{\frac{1}{2}}$	

б) ба фикратон ҳосилаи функсияи $y=x^n$ ба чӣ баробар аст (дар ин ҷо n – адади ратсионалӣ)?

15. Аз таъриф истифода бурда, ҳосилаи функсияро ёбед:

а) $f(x)=2x+3$; б) $f(x)=3x^2+5x+1$; с) $f(x)=2x^3+4x^2+6x-1$.

16*. Ба дафтаратон кӯчонед ва пур кунед:

а) $f(x)=ax+b$ uchun $f'(x)=...$;

б) $f(x)=ax^2+bx+c$ uchun $f'(x)=...$;

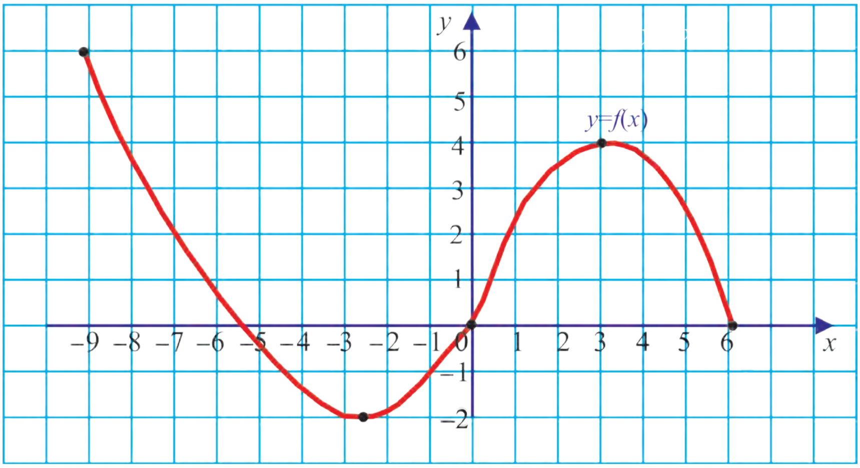
с) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ uchun $f'(x)=...$

17*. Тасдиқҳои зеринро исбот намоед:

а) $f(x)=cg(x)$ бошад, дар ин ҳолат $f'(x)=cg'(x)$;

б) $f(x)=g(x)+h(x)$ бошад, дар ин ҳолат $f'(x)=g'(x)+h'(x)$.

18*. Мувофиқи таърифи функсия қиматҳои ҳосилаҳоро муқоиса кунед:



а) $f'(-7)$ ва $f'(-2)$; с) $f'(-9)$ ва $f'(0)$;
б) $f'(-4)$ ва $f'(2)$; д) $f'(-1)$ ва $f'(5)$..

19. 1. Ба графики функсияи болоӣ нигоҳ карда, нуқтаҳои қаноатбахшандаи x_1, x_2 – и ин шартҳоро ёбед (нуқтаҳои тири x_1, x_2 – Ox: –9, –8, ..., 5, 6,):

а) $f'(x_1) > 0,\ f'(x_2) > 0$; б) $f'(x_1) < 0,\ f'(x_2) > 0$;

с) $f'(x_1) < 0,\ f'(x_2) < 0$; д) $f'(x_1) > 0,\ f'(x_2) < 0$.

2. Ба график нигоҳ карда, ба саволҳои зерин ҷавоб диҳед:

а) функсия дар кадом фосила афзуншаванда? Дар кадом фосила камшаванда?

б) афзоиши функсияро дар фосилаҳои [0; 3], [3;6], [–9; –6] ҳисоб кунед.

3. Функсия дар кадом нуқта қимати калонтарин ва дар кадом нуқта қимати аз ҳама хурдтаринро қабул мекунад?

4. Функсия дар кадом нуқтаҳо ба сифр мубаддал мешавад?

5. Дар кадом фосила функсия қиматҳои мусбатро қабул мекунад?

6. Дар кадом фосила функсия қиматҳои манфиро қабул мекунад?

7–9 ҚОИДАҲОИ ҲИСОБИ ҲОСИЛА

Агар ҳар як функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ ба ҳосила соҳиб бошад, дар ин ҳолат қоидаҳои зерини дифференсиронӣ бамаврид аст:

1. Ҳосилаи сумма ба суммаи ҳосилаҳо баробар аст:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \quad (1)$$

2. Ҳосилаи фарқ ба фарқи ҳосилаҳо баробар аст:

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) \quad (2)$$

Мисоли 1. Ҳосилаи функсияро ёбед:

1) $f(x)=x^3+x^2-x+10$; 2) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

∆ Дар ёфтани ҳосилаҳо аз қоидаҳои 1, 2 ва бандҳои 1, 3 –и ҷадвали ҳосилаҳо истифода мебарем, яъне:

1) $f'(x)=(x^3)'+(x^2)'-(x)'+10=3x^2+2x-1;$

2) $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'-\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$

Ҷавоб: 1) $3x^2+2x-1$; 2) $\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. ▲

3. Зарбшавандаи тағйирнаёбандаро аз нишони ҳосила берун баровардан мумкин: $(cf(x))'=c\cdot f'(x)$, c – адади доимӣ (3)

Мисоли 2. Ҳосилаи функсияро ёбед:

1) $f(x) = 7x^3-5x^2+4$; 2) $f(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}-x^3$.

△ Дар ёфтани ҳосилаҳо аз қоидаҳои 1, 2, 3 ва бандҳои 1, 3 –и ҷадвали ҳосилаҳо истифода мебарем, яъне:

1) $f'(x)=(7x^3-5x^2+4)'=(7x^3)'-(5x^2)'+(4)'=21x^2-10x;$

2) $f'(x)=\left(3\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}-x^3\right)'=3\left(\sqrt{x}\right)'+5\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'-(x^3)'=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}-3x^2.$

Ҷавоб: 1) $21x^2-10x;$; 2) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}-3x^2$. ▲

4. Ҳосилаи зарб: $(f(x)g(x))'=f\,'(x)g(x)+f(x)g'(x).$ (4)

Мисоли 3. Ҳосилаи функсияро ёбед:

1) $f(x)=(2x+4)(3x+1)$; 2) $f(x)=(3x^2+4x+1)(2x+6)$; 3) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^2-5x\right)$

△ Дар ёфтани ҳосилаҳо аз қоидаҳои 1, 3, 4 ва бандҳои 1, 3 –и ҷадвали ҳосилаҳо истифода мебарем, яъне:

1) $f'(x)=((2x+4)(3x+1))'=(2x+4)'(3x+1)+(2x+4)(3x+1)'=$
$=2(3x+1)+3(2x+4)=6x+2+6x+12=12x+14;$

2) $f\,'(x)=((3x^2+4x+1)(2x+6))'=(3x^2+4x+1)'(2x+6)+$
$+(3x^2+4x+1)(2x+6)'=(6x+4)(2x+6)+2(3x^2+4x+1)=18x^2+52x+26.$

3) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^2-5x\right)\right)'=\left(\sqrt[3]{x}\right)'\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\left(x^2-5x\right)'=$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\,(2x-5)=\frac{x^2-5x}{3\sqrt[3]{x^2}}+(2x-5)\sqrt[3]{x}=\frac{x^2-5x+3(2x-5)\sqrt[3]{x^3}}{3\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\frac{x^2-5x+6x^2-15x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-20x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x(7x-20)}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{3}(7x-20).$$

Ҷавоб: 1) $12x+14;$; 2) $18x^2+52x+26$; 3) $\frac{\sqrt[3]{x}}{3}(7x-20)$. ▲

5. Ҳосилаи тақсим:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2},\quad \text{дар инҷо}\quad g(x)\neq 0.. \qquad (5)$$

Мисоли 4. Ҳосилаи функсияро ёбед:

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$; 2) $f(x)=\frac{3x+7}{x-5}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{5x-7}$.

Δ Дар ёфтани ҳосилаҳо аз қоидаҳои 1, 3, 5 ва бандҳои 1,3 –и ҷадвали ҳосилаҳо истифода мебарем, яъне:

1) $f\,'(x)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2}=-\frac{3}{(x-2)^2};$

2) $f\,'(x)=\left(\frac{3x+7}{x-5}\right)'=\frac{(3x+7)'(x-5)-(3x+7)(x-5)'}{(x-5)^2}=$

$$=\frac{3(x-5)-(3x+7)\cdot 1}{(x-5)^2}=\frac{3x-15-3x-7}{(x-5)^2}=-\frac{22}{(x-5)^2};$$

3) $f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{5x-7}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'\cdot(5x-7)-\sqrt{x}\cdot(5x-7)'}{(5x-7)^2}=$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-7)-\sqrt{x}\cdot 5}{(5x-7)^2}=\frac{5x-7-10x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}=-\frac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}.$$

Ҷавоб: 1) $-\frac{3}{(x-2)^2}$; 2) $-\frac{22}{(x-5)^2}$;; 3) $-\frac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}$. ▲

Мисол 5. Ҳосилаи функсияҳоро ёбед:

1) $f(x) = \sin x$; 2) $f(x) = \cos x$; 3) $f(x) = \mathrm{tg}x$.

△ 1) барои ёфтани тарҳшавандаи нисбӣ аз формулаи зарби фарқи синусҳо истифода мебарем:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2}.$$

Дар $h\to 0$ *будан*, $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$, $\cos\frac{2x+h}{2}\to\cos x$ исбот намудан мумкин.

Ҳамин тавр, $(\sin x)'=\cos x$.

2) барои ёфтани тарҳшавандаи нисбӣ аз формулаи зарби фарқи косинусҳо истифода мебарем:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{h}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\frac{2x+h}{2}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin(x+\frac{h}{2}).$$

Дар $h\to 0$ будан; $\sin(x+\frac{h}{2})\to\sin x$ исбот кардан мумкин.

Пас, $(\cos x)' = -\sin x$.

3) аз қоидаи 5- уми ёфтани ҳосила, инчунин аз ҷавобҳои қисми 1 ва 2 – и ҳамин мисол истифода бурда, ҳосилаи функсияи, $f(x)=\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ -ро меёбем:

$$f'(x)=(\mathrm{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ҷавоб: 1) $(\sin x)' = \cos x$; 2) $(\cos x)' = -\sin x$; 3) $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. ▲

Дар ҳисоб кардани ҳосила аз қоидаҳои дифференсиронӣ ва ҷадвали зерин истифода бурдан мувофиқи мақсад аст.

Ҷадвали ҳосилаҳо

№	*Функсияҳо*	*Ҳосилаҳо*
1.	c – доимӣ	0
2.	$kx+b$, k, b – доимиҳо	k
3.	x^p, p – доимӣ	px^{p-1}
4.	$\sin x$	$\cos x$
5.	$\cos x$	$-\sin x$
6.	$\mathrm{tg}x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
7.	$\mathrm{ctg}x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
8.	a^x, $a>0$	$a^x \ln a$
9.	e^x	e^x
10.	$\ln x$	$1/x$
11.	$\lg x$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln 10}$
12.	$\log_a x$, $a>0$, $a=1$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

? Савол ва супоришҳо

1. Қоидаҳои ҳисоби ҳосиларо гӯед. Ба ҳар як қоида мисол оред.
2. Бандҳои 4, 5 – и ҷадвали ҳосилаҳоро исбот намоед.
3. Ҳосилаи функсия дар нуқтаи $x=x_0$ чисту функсияи ҳосилавӣ чӣ маъно дорад? Онҳо аз ҳамдигар чӣ фарқ доранд? Бо мисолҳо фаҳмонед..

Машқҳо

Ҳосиларо ёбед (**20–22**):

20. 1) $y = x^4$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \frac{1}{x^3}$.

21. 1) $y = x^4 - x^2 + x$; 2) $y = \frac{1}{x} + x$; 3) $y = x^3 + \sqrt[3]{x}$;

4) $y = x^4 + x^3 + x^2 - x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

22. 1) $y = (x-1)(x^2-5)$; 2) $y = \frac{x^2-4}{x-2}$;

3) $y = (x^4 - \sqrt{x})(x^2 + x)$; 4) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$.

23. Дар ҷисми додашуда суръати вақт t_0 -ро ҳисоб кунед:

1) $s(t) = t^3 - 2t^2 + t$; $t_0 = 5$; 2) $s(t) = 5t + t^3 + \sqrt{t}$, $t_0 = 4$.

24. Ҳосилаи функсияи дар нуқтаи абсисса додашударо ҳисоб кунед:

1) $f(x) = x^2 + 5x - 3$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = -2$;

3) $f(x) = 2\sqrt{x} + x^3 + \frac{1}{2}$, $x_0 = 4$;

4) $f(x) = x^2 + \lg 2$, $x_0 = 1$.

Ҳосиларо ёбед (**25–29**):

25. 1) $y = 2x^3 - 4x^2 + 5$; 3) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$;

2) $y = 7x^2 - 2x + \sqrt{7}$; 4) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

26. 1) $y = (x-2)(x+2)$; 3) $y = \frac{x^2-9}{x-3}$;

2) $y = (x+2)^3$; 4) $y = x^2 + \lg 7 + \sin\frac{\pi}{9}$.

27. 1) $y = x^8 + 7x^2 + 5x$; 2) $y = 2x^8 + x^6$;

3) $y = \frac{x^4}{x^6 - 1}$; 4) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$;

5) $y = x^{-2} + \frac{1}{x}$; 6) $y = x^4 - 4x$;

7) $y = \sqrt[5]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}$; 8) $y = (x^5 + x^{-5})(x^2 + x^{-2})$.

28. 1) $f(x)=x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$; 2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}x$; 5) $y=8^x$;

6) $y=\log_2 x+\log_2 3$; 7) $y=2^x x$; 8) $y=x\ln x$;

9) $y=e^x\cos x$; 10) $y=2e^x-\ln x+\dfrac{1}{x}$.

29. 1) $y=2^x\sin x$; 2) $y=e^x(\cos x+\sin x)$; 3) $y=x\mathrm{tg}x$;

4) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; 5) $y=3\sin^2 x$; 6) $y=5x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$;

7) $y=(x+1)(\ln x+1)$; 8) $y=(2+x)^3$; 9) $y=(3x+5)^6+2019$.

30. Суръати ҷисмро дар вақти додашудаи t_0 ёбед:

1) $s(t)=t^2+5t+1,\quad t_0=1$; 2) $s(t)=4t^3+\dfrac{1}{t}+1,\quad t_0=1$.

31. Ҳосилаи функсияро дар нуқтаи додашуда ёбед:

1) $f(x)=(x+1)^3,\quad x_0=-1$; 2) $f(x)=\sin x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

32. Ҳосиларо ёбед:

1) $y=2\sin x$; 2) $y=\sqrt{3}-\mathrm{tg}x$; 3) $y=-3\cos x$; 4) $y=\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x$;

5) $y=4x-\cos x$; 6) $y=x^2\sin x$; 7) $y=\dfrac{x}{\sin x}$; 8) $y=x\sin x+\cos x$.

33. Ҳосилаи дар нуқтаи x_0 будаи функсияро ҳисоб кунед:

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x-5},\quad x_0=2$; 2) $f(x)=\mathrm{tg}x-x+2,\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

3) $f(x)=x(\lg x-1),\quad x_0=10$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{2}\ln x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

34. Нуқтаи бо сифр табдилдиҳандаи ҳосиларо ёбед:

1) $f(x)=x^4-4x$; 2) $f(x)=\mathrm{tg}x-x$;

3) $f(x)=x^8-2x^4+3$; 4) $f(x)=\log_2 x-\dfrac{x}{\ln 2}$.

10–12 ҲОСИЛАИ ФУНКСИЯИ МУРАККАБ

Функсияи мураккаб. Функсия $y=(x^2+3x)^4$ -ро аз назар мегузаронем. Агар мо нишондиҳандаи $g(x)=x^2+3x$, $f(x)=x^4$ дохил намоем, функсияи $y=(x^2+3x)^4$ шакли $y=f(g(x))$ - ро мегирад. Мо функсияи $y=f(g(x))$-ро *функсияи мураккаб* мегӯем.

Мисоли 1. Агар $f(x)=x^2$ ва $g(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$ бошад, инҳоро ёбед:

1) $f(g(2))$; 2) $f(g(-4))$; 3) $g(f(1))$;
4) $f((-4))$; 5) $f(f(1))$ 6) $g(g(-1))$.

△ Аз функсияҳои додашуда истифода бурда ҳисобҳоро иҷро мекунем:

1) $f(g(x))=f\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$, аз он $f(g(2))=f\left(\dfrac{2-2}{2+3}\right)=f(0)=0^2=0$;

2) $f(g(-4))=f\left(\dfrac{-4-2}{-4+3}\right)=f(6)=6^2=36$;

3) $g(f(1))=g(1^2)=g(1)=\dfrac{1-2}{1+3}=-\dfrac{1}{4}$;

4) $g(f(-4))=g((-4)^2)=g(16)=\dfrac{16-2}{16+3}=\dfrac{14}{19}$;

5) $f(f(1))=f(1^2)=f(1)=1^2=1$;

6) $g(g(-1))=g\left(\dfrac{-1-2}{-1+3}\right)=g\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{-\dfrac{3}{2}-2}{-\dfrac{3}{2}+3}=\dfrac{-3,5}{1,5}=-\dfrac{7}{3}$.

Ҷавоб: 1) 0; 2) 36; 3) $-\dfrac{1}{4}$; 4) $\dfrac{14}{19}$; 5) 1; 6) $-\dfrac{7}{3}$. ▲

Барои функсияи мураккаби ҳосила формулаи зерин бамаврид аст:

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x) \qquad (1)$$

Мисоли 2. Ҳосилаи функсияро ёбед (k, b – ададҳои тағйирнаёбанда):

1) $f(x) = (kx + b)^n$; 2) $f(x) = \sin(kx + b)$;

3) $f(x) = \cos(kx + b)$; 4) $f(x) = \mathrm{tg}(kx + b)$.

∆ 1) ба функсияҳои 1) $f(t) = t^n$ ва $t(x) = kx + b$ формулаи (1) -ро истифода мебарем:

$$((kx+b)^n)' = (t^n)' \cdot (kx+b)' = nt^{n-1} \cdot k = n \cdot k \cdot (kx + b)^{n-1}.$$

2) ба функсияҳои $f(t)=\sin t$ ва $t(x) = kx+b$ формулаи (1) -ро истифода мебарем:

$$(\sin(kx+b))' = (\sin t)' \cdot (kx+b)' = k \cdot \cos t = k \cdot \cos(kx + b).$$

3) ба функсияҳои $f(t) = \cos t$ ва $t(x) = kx + b$ формулаи (1)-ро истифода мебарем:

$$(\cos(kx+b))'=(\cos t)' \cdot (kx+b)'=-k \cdot \sin t=-k \cdot \sin(kx+b).$$

4) *ба функсияҳои* $f(t) = \mathrm{tg} t$ ва $t(x) = kx+b$ формулаи (1)-ро истифода мебарем:

$$(\mathrm{tg}(kx + b))' = (\mathrm{tg} t)' \cdot (kx + b)' = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot k = \frac{k}{\cos^2(kx+b)}.$$

Ҷавоб: 1) $((kx + b)^n)' = n \cdot k \cdot (kx + b)^{n-1}$; 2) $(\sin(kx + b))' = k \cdot \cos(kx+b)$;

3) $(\cos(kx+b)'=-k \cdot \sin(kx+b)$; 4) $(\mathrm{tg}(kx+b)'= \frac{k}{\cos^2(kx+b)}$. ▲

Мисоли 3. Ҳосилаи *функсияи* $f(x) = \sin 8x \cdot e^{(3x+2)}$- ро ёбед.

△ Мувофиқи қоидаи 4- уми ҳосилаёбӣ ва формулаи (1) -ро истифода бурда, ҳосиларо меёбем:

$$f'(x) = (\sin 8x e^{(3x+2)})' = (\sin 8x)' e^{3x+2} + \sin 8x \cdot (e^{3x+2})' = \cos 8x e^{3x+2} \cdot (8x)' +$$
$$+ \sin 8x e^{3x+2} \cdot (3x+2)' = e^{3x+2} \cdot (8\cos 8x + 3\sin 8x).$$

Ҷавоб: $e^{3x+2} \cdot (8\cos 8x + 3\sin 8x)$. ▲

Мисоли 4. Ҳосилаи функсияи $h(x) = (x^3 + 1)^5$ - ро дар нуқтаи $x_0=1$ ёбед.

△ **Аз** формулаи (1) истифода бурда ҳосиларо ҳисоб мекунем:

$h'(x)=5(x^3+1)^4(x^3+1)'=5(x^3+1)^4 3x^2=15x^2(x^3+1)^4$.

Ин тавр бошад, $h'(1) = 15(1^3+1)^4 \cdot 1^2 = 15 \cdot 16 = 240$. *Ҷавоб*: 240. ▲

Мисоли 5. Ҳосилаи функсияи $f(x) = 2^{\cos x}$- ро ёбед.

∆ **Аз** формулаи (1) истифода бурда ҳосиларо ҳисоб мекунем:

$f'(x)=2^{\cos x}\ln 2\,(\cos x)' = -\sin x\, 2^{\cos x}\ln 2$. *Ҷавоб*: $-\sin x\, 2^{\cos x}\ln 2$. ▲

Мисоли 6. Ҳосилаи функсияи $f(x)=\mathrm{tg}^5 x$ -ро ёбед.

△ Аз формулаи (1) истифода бурда ҳосиларо ҳисоб мекунем:

$$f'(x)=5\,\mathrm{tg}^4 x(\mathrm{tg}\,x)' = 5\mathrm{tg}^4 x\frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \text{\textit{Ҷавоб}}: \frac{5\mathrm{tg}^4 x}{\cos^2 x}. \ ▲$$

Мисоли 7 . Ҳосилаи функсияи $h(x)=3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x)$-ро ёбед.

△ Ишораҳои $f(x)=3^{\cos x}$ ва $g(x)=\log_7(x^3+2x)$ дохил намуда, формулаи ёфтани ҳосилаи функсияи мураккаби формулаи (1) – ро истифода мебарем:

$$f'(x)=(3^{\cos x})'=3^{\cos x}\ln 3\cdot(\cos x)'=-3^{\cos x}\ln 3\cdot\sin x,$$

$$g'(x)=(\log_7(x^3+2x))'=\frac{1}{(x^3+2x)\ln 7}\cdot(x^3+2x)'=\frac{3x^2+2}{(x^3+2x)\ln 7}$$

инчунин функсияи $h(x)$ -ро афзуншавии 2 функсия меҳисобем:

$$h'(x) = (3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x))' = (3^{\cos x})'\cdot\log_7(x^3+2x) +$$

$$+ 3^{\cos x}\cdot(\log_7(x^3+2x))' = -3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\frac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}.$$

Ҷавоб: $-3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\dfrac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}$. ▲

? Савол ва супоришҳо

1. Чаро функсияи мураккаб мегӯянд? Мисол оред.
2. Соҳаи муайяни функсияи мураккаб чӣ хел ёфта мешавад?
3. Формулаи ёфтани функсияи мураккабро навишта метавонед?
4. Ёфтани ҳосилаи функсияи мураккабро бо як–ду мисол нишон диҳед.

Машқҳо

35. Агар $f(x)=x^2-1$ бошад, функсияҳои нишондодашударо ёбед:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(2x)$; 3) $f(x^2-1)$; 4) $f(x+1)-f(x-1)$.

36. Агар $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ бошад, функсияҳои нишондодашударо ёбед:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(\frac{1}{x^2})$; 3) $f(x-1)$; 4) $f(x+1)$.

37. Агар $f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$ бошад, инҳоро ёбед:

1) $f(g(x))$; 2) $f(f(x))$; 3) $g(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

38. Агар $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2+1$ бошад, инҳоро ёбед:

1) $\frac{f(x^2)}{g(x)-1}$; 2) $f(x)+3g(x)+3x-2$;

3) $f(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

Аз баробарӣ истифода бурда, $f(x)$ ро ёбед (**39–42**):

39. $f(x+1)=x^2-1$. **40*.** $f(x)+3\cdot f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$.

41. $f(x+3)=x^2-4$. **42*.** $2f(x)+f(\frac{1}{x})=x$.

Ҳосила代ро ёбед (**43–44**):

43. 1) $f(x)=(3x-2)^5$; 2) $f(x)=e^{\sin x}$; 3) $f(x)=(4-3x)^7$;

4) $f(x)=\sin^2 x$; 5) $f(x)=\frac{1}{(2x+9)^3}$; 6) $f(x)=\ln(4x-1)$;

7) $f(x)=\sqrt{4x-5}$; 8) $f(x)=(2x-1)^{10}$; 9) $f(x)=\cos^8 x$.

44*. 1) $e^{\sin x}\cdot \mathrm{tg}\frac{1}{x}$; 2) $3^{\mathrm{ctg}x}\cdot\log_a\cos x$; 3) $\ln\cos x$;

4) $(x^2-5x+4)^3\cdot 10^{\mathrm{tg}x}$; 5) $7^{\log 3x}\cdot(x^3-2x+1)^3$; 6) $3^{\cos x}\cdot(x^2-8x+4)^2$;

7) $\mathrm{ctg}x\cdot\ln(x^2+x)$; 8) $x^2\cos^{30}x+4$; 9) $5\ln x\cdot\mathrm{ctg}x$.

13–14 РАСАНДАИ АЗ ГРАФИКИ ФУНКСИЯ ГУЗАРОНИДА ВА МУОДИЛАҲОИ НОРМАЛӢ

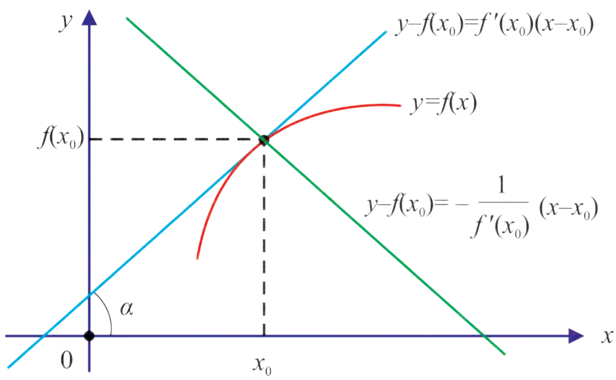
Муодилаи расанда. Аз графики функсияи $y = f(x)$ муодилаи расандаи аз нуқтаи $(x_0; f(x_0))$ гузарандаро меёбем (расми 19). Барои он ки расанда хати рост аст, намуди умумии он $y = kx + b$ мешавад. Мувофиқи маънои геометрии ҳосила $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, яъне муодилаи расанда намуди $y = f'(x_0)x + b$-ро мегирад. Барои он ки ин расанда аз нуқтаи $(x_0; f(x_0))$ гузаштааст, $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$ мешавад, аз он $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Дар ин ҷо b – и ёфтаамонро ба муодилаи расанда гузошта, муодилаи,

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \quad \text{ёки}$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

-ро ҳосил мекунем.

Муодилаи $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ дар нуқтаи $(x_0; f(x_0))$ муодилаи расандаи аз функсияи $y = f(x)$ гузаронида мешавад.



Расми 19.

Мисоли 1. Муодилаи расандаи аз графики функсияи $f(x) = x^2 - 5x$ нуқтаи абсиссаи $x_0 = 2$ гузаронидаро нависед.

▲ Аввал қимати функсия ва ҳосилаи аз функсия гирифтаро дар нуқтаи $x_0 = 2$ меёбем:

$$f(x_0) = f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 = -6, \quad f'(x) = 2x - 5, \quad f'(2) = 2\cdot 2 - 5 = -1.$$

Ёфтаамонро ба баробарӣ (1) гузошта, муодилаи расандаро ҳосил мекунем:

$y - (-6) = -1\cdot(x - 2)$ ёки $y = -x - 4$. *Ҷавоб:* $y = -x - 4$. ▲

Мисоли 2. Муодилаи расандаи графики функсияи $f(x)=x^3-2x^2$ –ро дар нуқтаи абсиссаи $x_0=1$ гузарандаро нависед.

△ Аввал қимати функсия ва ҳосилаи аз функсия гирифтаро дар нуқтаи $x_0=1$ -ро меёбем:

$$f(x_0)=f(1)=1^3-2\cdot 1^2=-1, \qquad f'(x)=3x^2-4x, \qquad f'(1)=3\cdot 1^2-4\cdot 1=-1.$$

Ёфтаамонро ба баробарӣ (1) гузошта, муодилаи расандаро ҳосил мекунем:

$y-(-1)=-1(x-1)$ ёки $y=-x$. *Ҷавоб:* $y=-x$. ▲

Агар расандаи аз графики функсия $y=f(x)$ нуқтаи абсиссаи x_0 гузаранда ба хати рости $y=kx+b$ параллел бошад, $f'(x_0)=k$ мегардад. Мувофиқи ин шарт расандаи бо хати рост параллели функсияи додашуда ёфта мешавад.

Мисоли 3. Барои функсияи $f(x)=x^2-3x+4$ муодилаи расандаи ба хати рост пареллели $y=2x-1$-ро нависед.

△ Мувофиқи шарти паралелии хати рост ба расандаи додашуда, муодилаи $f'(x_0)=2$ ёки $2x_0-3=2$ ҳосил мекунем. Ин баробарӣ барои он ки $x_0=2{,}5$ аст абсиссаи расанда аз нуқтаи $x_0=2{,}5$ буда мегузарад. Ҳисобнамоиро ичро менамоем:

$$f(x_0)=f(2{,}5)=2{,}5^2-3\cdot 2{,}5+4=6{,}25-7{,}5+4=2{,}75$$
$$f'(x_0)=f(2{,}5)=2.$$

Акнун муодилаи расандаро меёбем:

$$y-2{,}75=2(x-2{,}5) \quad \text{ёки} \quad y=2x-2{,}25.$$

Ҷавоб: $y=2x-2{,}25$. ▲

Мисоли 4. Муодилаи расандаи аз графики функсияи $f(x)=x^3-2x^2+3x-2$ нуқтаи абсиссаи $x_0=4$ гузарандаро созед ва бо расанда аз тири Ox кунҷи равиши мусбат ташкилкардаи синусро ёбед.

△ Аввал қимати функсия ва ҳосилаи аз функсия гирифтаро дар нуқтаи $x_0=4$ меёбем:

$$f(x_0)=f(4)=3\cdot 4^3-2\cdot 4^2+3\cdot 4-2=170, \quad f'(x)=3x^2-4x+3,$$
$$f'(4)=3\cdot 4^2-4\cdot 4+3=35.$$

Ёфтаамонро ба баробарӣ (1) гузошта, муодилаи расандаро ҳосил мекунем:

$y-170=35(x-4)$ ёки $y=35x+30$.

Мувофиқи маънои геометрии ҳосила $\text{tg}\alpha=35$, аз ин

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}}}=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{35}{\sqrt{1+35^2}}=\frac{35}{\sqrt{1226}}.$$

Ҷавоб: $y=35x+30$; $\sin\alpha=\frac{35}{\sqrt{1226}}$. ▲

Мисоли 5*. Параболаи $f(x)=x^2$ абсциссааш x_0 буда, расандаи аз нуқтаи A гузаранда дар нуқтаи $\frac{1}{2}x_0$ тири Ox –ро бурида мегузарад. Ин даъворо исбот намоед.

△ $f'(x)=2x$, $f(x_0)=x_0^2$, $f'(x_0)=2x_0$.

Муодилаи расанда мувофиқи (1) $y=2x_0\cdot x-x_0^2$ мешавад. Бо тири Ox нуқтаи буриш будани $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$ маълум аст. Аз параболаи $y=x^2$ абсиссааш x_0 буда, дар нуқтаи A тарзи сохтани расандаи гузаронидашуда пайдо мешавад: Тавассути нуқтаи A ва нуқтаи $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$ хати рости гузаронидаи $y=x^2$ ба параболаи нуқтаи A мерасад.

Муодилаи нормалӣ. Ба графики функсияи $y=f(x)$ ба расандаи дар нуқтаи абсиссаи $x=x_0$ гузаронидашуда дар нуқтаи $x=x_0$ перпендикулияр буда

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (2)$$

ба хати рости графики функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи абсиссадори x_0 гузаронидашуда нормал гуфта мешавад (расми 19).

Мисоли 6. Дар графики функсия $f(x)=x^5$ муодилаи нормалии аз нуқтаи абсиссадори $x_0=1$ гузарандаро созед.

△ Мувофиқи формулаи ҳосила $f'(x)=5x^4$ мешавад. Қимати функсия ва ҳосилаи онро дар нуқтаи $x_0=1$ ҳисоб намоед:

$f(1)=1^5=1$ ва $f'(1)=5\cdot1^4=5$. Ин қиматҳои мусоидро ба муодилаи нормалӣ мегузорем ва муодилаи $y-1=-\frac{1}{5}(x-1)$ ёки $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$ ҳосил мекунем.

Ҷавоб: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$. ▲

Ёдрас: Муодилаи расандаи аз графики фунсияи $f(x)=x^5$ нуқтаи абсиссадори $x_0=1$ гузаронидашуда $y=5x-4$ мешавад (исбот намоед!). Зарби кунҷи коэффитсиенти нормал ва расанда $5\cdot(-\frac{1}{5})=-1$ буданашро ба эътибор гиред.

Савол ва супоришҳо

1. Муодилаи расандаи аз графики функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи абсиссаи x_0 гузаронидаро нависед.
2. Муодилаи нормалии ба графики функсияи $y=f(x)$ дар нуқтаи абсиссаи x_0 гузаронидаро нависед.
3. Расандаи функсияи додашуда ба ягон хати рост пареллелбуда чӣ хел ёфта мешавад? Бо мисол фаҳмонед.

Машқҳо

45. Муодилаи расандаи дар нуқтаи абсиссаи ба графики функсияи $x_0=1$; $x_0=-2$; $x_0=0$ гузаронидаро ёбед:

1) $f(x)=2x^2-5x+1$; 2) $f(x)=3x-4$; 3) $f(x)=6$;
4) $f(x)=x^3-4x$; 5) $f(x)=e^x$; 6) $f(x)=2^x$;
7) $f(x)=2^x+\ln 2$; 8) $f(x)=\sin x$; 9) $f(x)=\cos x$;
10) $f(x)=\cos x-\sin x$; 11) $f(x)=e^x x$; 12) $f(x)=x\cdot\sin x$.

46. Муодилаи расандаи ба хати рост параллелбударо барои функсияи $y=7x-1$ нависед:

1) $f(x)=x^3-2x^2+6$; 2) $f(x)=4x^2-5x+3$; 3) $f(x)=8x-4$.

47. Нуқтаҳои бо функсияҳои расандаи додашудаи $f(x)$ ва $g(x)$ параллелбударо ёбед:

1) $f(x)=3x^2-5x+4$, $g(x)=4x-5$;
2) $f(x)=8x+9$, $g(x)=-5x+8$;
3) $f(x)=7x+11$, $g(x)=7x-9$;
4) $f(x)=x^3-8$, $g(x)=x^2+5$;
5) $f(x)=x^3+x^2$, $g(x)=5x-7$;
6) $f(x)=x^4+11$, $g(x)=x^3+10$.

48. Муодилаи нормали дар нуқтаи абсиссаи графики функсияи

а) $x_0 = 1$; b) $x_0 = -2$; d) $x_0 = 0$ бударо ёбед:

1) $f(x)=3x^2-5x+1$; 2) $f(x)=3x-40$; 3) $f(x)=7$;

4) $f(x)=x^3-10x$; 5) $f(x)=e^x$; 6) $f(x)=12^x$;

7) $f(x)=\sin x$; 8) $f(x)=\cos x$; 9) $f(x)=\cos x-\sin x$;

10) $f(x)=e^{\pi x}$; 11) $f(x)=x\cdot\cos x$; 12) $f(x)=x\cdot\sin x$.

!

Намунаи кори назоратӣ

Варианти I

1) Барои функсияи $f(x)=x^3+2x^2-5x+3$ агар $x_0=2$ ва $\Delta x=0{,}1$ бошад, нисбати аргументи афзуншандаро аз функсияи афзуншаванда ёбед.

2) Ҳосилаи функсияи $f(x)=-8x^2+4x+1$-ро дар нуқтаи $x_0=-3$ ҳисоб намоед.

3) Муодилаи расандаро ба графики функсияи $f(x)=x^3-7x^2+8x-5$ дар нуқтаи абссиссадори $x_0=-4$ нависед.

4) Ҷисм бо қонунияти $s(t)=8t^2-5t+6$ дар ҳаракат аст. Агар t – сония, s – бо метрҳо ҳисоб карда шавад, суръати лаҳзавии нуқтаро дар $t_0=8$ сония ёбед.

5) 5. Ҳосилаи зарбро ёбед: $(3x^2-5x+4)\cdot e^x$.

Варианти II

1) Ҳосилаи тақсимро ёбед: $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$.

2) Ҳосилаи функсия мураккабро ёбед: $\mathrm{ctg}^{15}x$.

3) Ҳосилаи функсияи $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x}}$ дар нуқтаи $x_0 = \dfrac{1}{16}$. ҳисоб кунед.

4) Муодилаи расандаро ба графики функсияи $f(x)=l_n(x+1)$ дар нуқтаи $x = 0$ гузаронидаро нависед.

5) Ҷисм бо қонунияти $s(t) = 0{,}5t^2 - 6t+1$ дар ҳаракат аст, суръати лаҳзавии нуқтаро дар $t_0 = 16$ сония ёбед (t – бо сония, s – бо метрҳо ҳисоб мешавад).

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

49. Функсияи $y=f(x)$ дода шудааст, h ва Δy -ро мувофиқи нуқтаҳои x_0 ва x ҳисоб кунед:

1) $f(x)=4x^2-3x+2$, $x_0=1$, $x=1{,}01$; 2) $f(x)=(x+1)^3$, $x_0=0$, $x=0{,}1$.

50. Барои функсияи додашуда агар $x_0=3$ ва $\Delta x=0{,}03$ бошад, : а) афзоиши функсияро; б) афзоиши функсияро нисбати афзоиши аргумент ёбед:

1) $f(x)=7x-5$; 2) $f(x)=2x^2-3x$; 3) $f(x)=x^3+2$; 4) $f(x)=x^3+4x$.

51. Барои функсияҳои додашуда $x_0=2$ ва $\Delta x=0{,}01$ бошад: а) квадрати функсияро; б) афзоиши функсияро нисбати афзоиши аргумент ёбед:

1) $f(x)=-4x+3$; 2) $f(x)=-8$; 3) $f(x)=x^2+10x$; 4) $f(x)=x^3-10$.

52. $x\to 0$ бошад, ба кадом адад майл мекунад:

1) $f(x)=x^3-2x^2+3x+4$; 2) $f(x)=x^5-6x^4+8x-7$;

3) $f(x)=(x^2-5x+1)(x^3-7x^2-11x+6)$;

4) $f(x)=\dfrac{x^2-x-19}{x^2+7x-28}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^3-8x}{x^3+x^2+x+1}$?

53. Ҳосилаи функсияро ёбед:

1) $y=17x$; 2) $y=29x-3$; 3) $y=-15$; 4) $y=16x^2-3x$;

5) $y=-5x+40$; 6) $y=18x-x^2$; 7) $y=x^2+15x$;

8) $y=16x^3+5x^2-2x+14$; 9) $y=3x^3+2x^2+x$.

54. Ҳосилаи функсияро дар нуқтаҳои: а) $x=-3$; б) $x=1{,}1$; с) $x=0{,}4$; д) $x=-0{,}2$ ҳисоб кунед:

1) $y=15x$; 2) $y=9x+3$; 3) $y=-20$; 4) $y=5x^2+x$;

5) $y=-8x+4$; 6) $y=8x-x^2$; 7) $y=x^2+25x$; 8) $y=x^3+5x^2-2x+4$.

55. Ҳосилаи функсияи $y=f(x)$ мувофиқи таъриф ёбед :

1) $f(x)=2x^2+3x+5$; 3*) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$;

2) $f(x)=(x+2)^3$; 4*) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

56. Ҳосилаи функсияи $y=f(x)$ -ро дар нуқтаи x_0 ёбед:

1) $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$, $x_0=1$;   2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\sin 22°$, $x_0=-1$;

3) $f(x)=(2x+1)(\sqrt{x}-1)$, $x_0=4$;   4) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1}$, $x_0=-3$

57. Ҷисм бо қонунияти $s(t)=\frac{4}{3}t^3-t+5$ дар ҳаракат аст (s бо метр, t – бо сония). Суръати ҷисмро дар 2 сония ёбед.

58. Ҳосилаи функсияро ёбед:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}$;   2) $y=\sqrt[3]{x}+2x^3$;

3*) $y=\sqrt[5]{x}+x\cdot \mathrm{tg}x-\log_3 x$;   4) $y=(2x+3)^3$;

5*) $y=x\cdot \ln x\cdot (x+1)$;   6) $y=(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)$;

7) $y=\frac{x+2}{\sin x}$;   8) $y=10^x+\log_2 5+\cos 15°$;

9) $y=3^{-x}\cdot \sin x$;   10*) $y=\mathrm{tg}x\cdot \cos x+7^x\cdot x^7$;

11) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-8x^2+3$;   12) $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sin x+5$;

13) $f(x)=x^{10}-80x$;   14) $f(x)=8x-\frac{2^x}{\ln 2}$.

59. Қимати ҳосилаи функсияро дар нуқтаи x_0 ҳисоб кунед:

1) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$, $x_0=0$;   2) $f(x)=(x^2+3x)\ln x$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}$, $x_0=1$;   4) $f(x)=e^x(x-\ln 2)$, $x_0=\ln 2$.

60*. Нобаробарии $f'(x)>0$ -ро ҳал кунед:

1) $f(x)=x\cdot \ln 27-3^x$;   2) $f(x)=\sin x-2x$;

61. Ҷисм бо қонунияти $s(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t$ дар ҳаракат аст.

Суръати ҷисм кай ба сифр(нол) баробар мешавад? Маънои ин чист?

62. Ҳосиларо ёбед: 1) $y=x^5-x^4+x$; | 2) $y=\frac{1}{x^2}-x$; | 3) $y=x^4+\sqrt[5]{x}$.

63. Суръати ҷисмро дар вақти t_0 ёбед:

1) $x(t)=t^4-2t^3+t$, $t_0=-5$; 2) $x(t)=-5t+t^2-\sqrt{t}$, $t_0=4$.

Ҳосиларо ёбед (**64–66**):

64. 1) $y=(x+2)(x^2-5x)$; | 2) $y=\frac{x^2-3x}{x+8}$; 3) $y=(x^4+\sqrt{x})(x^3-5x)$;

4) $y=2x^3+4x^2+5x$; 5) $y=\frac{14}{x}-\frac{x}{14}$; 6) $y=7x^2+12x+\sqrt{2019}$.

65*. 1) $y=\frac{x^8}{x^{10}-1}$; 2) $y=\frac{x^3+x+1}{x^5+7}$; 3) $y=(x^{10}+x^{-10})(x^8+x^{-8})$.

66*. 1) $y=\frac{3^x\cdot\sin x}{\cos x}$; 2) $y=e^{5x}(\cos x-\sin x)$;

3) $y=x\mathrm{ctg}x$; 4) $y=\frac{\ln x}{x^2}$.

67*. Ҳосиларо дар нуқтаи x_0 ҳисоб кунед:

1) $f(x)=\frac{5x+1}{13x-5}$, $x_0=-2$; 2) $f(x)=\mathrm{ctg}x-2x+2$, $x_0=\frac{-\pi}{4}$;

3) $f(x)=x^2(\lg x-1)$, $x_0=1$; 4) $f(x)=\mathrm{ctg}x-\frac{1}{20}\ln x$, $x_0=1$.

68*. Ҳосилаи функсияи мураккабро ёбед:

1) $x^2\cdot\sin x$; 2) $\log_{15}\cos x$; 3) $\ln\mathrm{ctg}x$;

4) $\mathrm{tg}^{35}x$; 5) $e^{\mathrm{ctg}x}$; 6) $23^{\cos x}$;

7) $35^{\sin x}$; 8) $(x^2-10x+7)\ln\cos x$;

9) $\frac{x^5-6x+4}{e^x}$; 10) $e^{-3x}(x^4-3x^2+2)$; 11) $\ln\mathrm{tg}x$;

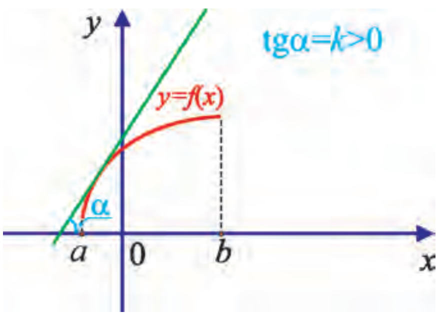
12) $\frac{x^3+7x+1}{e^{2x}}$; 13) $e^{5x}(x^5+8x+11)$; 14) $\ln\cos 2x$.

18–21 БО ЁРИИ ҲОСИЛА САНҶИДАНИ ФУНКСИЯ ВА СОХТАНИ ГРАФИКҲО

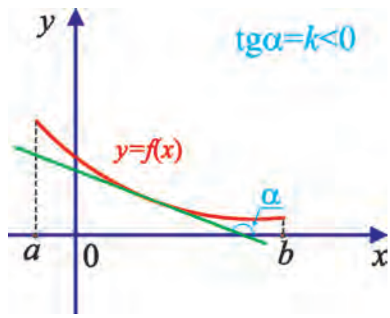
Афзоиш ва камшавии функсия. Бо функсияҳои афзуншаванда ва камшаванда шинос ҳастед. Акнун борои муайян намудани фосилаи зиёдшавӣ ва камшавӣ аз мафҳуми ҳосила истифода мебарем.

Теоремаи 1. Функсияи $y = f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ муайян гардида ва ҳосилааш мавҷуд бошад. Агар $x \in (a; b)$ барои $f'(x) > 0$ бошад, функсияи $y = f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ функсияи афзоянда мешавад (расми 20).

Теоремаи 2. Функсияи $y = f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ муайян гардида ва ҳосилааш мавҷуд бошад. Агар $x \in (a; b)$ барои $f'(x) < 0$ бошад, функсияи $y = f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ функсияи камшаванда мешавад (расми 21).



Расми 20.



Расми 21.

Теоремаҳои 1, 2- ро беисбот қабул мекунем.

Мисоли 1. Фосилаи камшавӣ ва зиёдшавии функсияро ёбед:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3.$$

Δ Ин функсия дар фосилаи $(-\infty; +\infty)$ муайян шудааст. Ҳосилаи он:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1).$$

$f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ нобаробариҳоро бо усули фосилавӣ ҳал кунед $(-\infty; -1)$ ва дар фосилаи $(2; +\infty)$ афзоиши функсия инчунин дар фосилаи $(-1; 2)$ камшавии функсияро дониста мегирем.

Ҷавоб: Дар фосилаи $(-\infty; -1)$ ва $(2; +\infty)$ функсия меафзояд; дар фосилаи $(-1; 2)$ бошад функсия кам мешавад. ▲

Мисоли 2. Фосилаи камшавӣ ва афзоиши функсияро ёбед: $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

△ Ин функсия дар фосилаи $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ муайян шудааст. Ҳосилаи он: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$; $f'(x)>0$, яъне нобаробарии $1-\frac{1}{x^2}>0$ -ро бо усули фосилаҳо ҳал карда ва мусбатҳои ҳосиларо $(-\infty; -1)$ дар фосилаи $(1; +\infty)$ меёбем. Худи ҳамин хел, $f'(x)<0$, яъне нобаробарии $1-\frac{1}{x^2}<0$ -ро бо усули фосилаҳо ҳал намуда ва иҷрои ин нобаробарро $(-1;0)$ дар фосилаи $(0;1)$ дониста мегирем.

Ҷавоб: функсия дар фосилаҳои $(-\infty; -1)$ ва $(1; +\infty)$ меафзояд; функсия дар фосилаҳои $(-1; 0)$ ва $(0; 1)$ кам мешавад. ▲

Нуқтаҳои статсионари функсияҳо. Функсияи $y=f(x)$ дар фосилаи $(a; b)$ муайян шуда бошад.

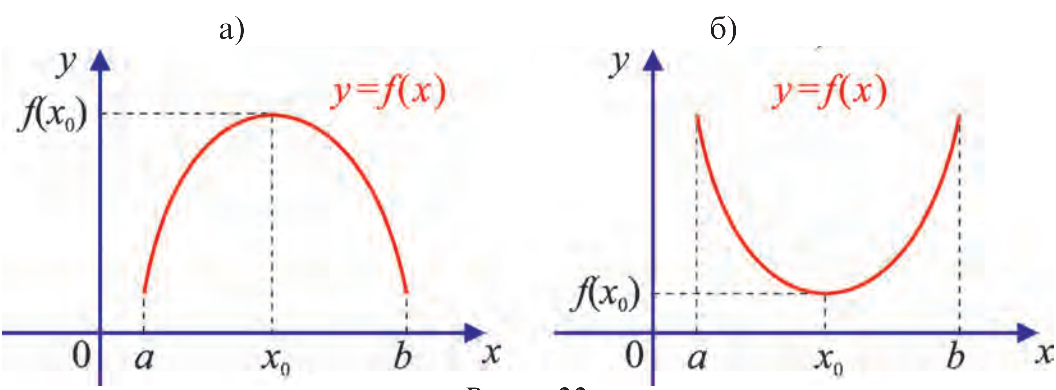
Таърифи 1. Нуқтаҳои ҳосилаи функсияи $y = f(x)$ -и ба 0 баробаршаванда *нуқтаҳои статсионар* номида мешавад.

Мисоли 3. Нуқтаҳои статсионари функсияҳоро ёбед: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$

△ Ҳосилаи функсияро ёфта, онро ба сифр баробар мекунем: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$. Ин муодиларо ҳал намуда, меёбем, ки $x_1= -1$, $x_2=2$ нуқтаҳои функсияи статсионар ҳастанд.

Ҷавоб: нуқтаҳои функсияи статсионар $x_1= -1, x_2= 2$. ▲

Максимум ва минимуми функсияҳои локалӣ. Барои муайян намудани максимум ва минимуми функсия аз ҳосила истифода мебаранд.



Расми 22.

Теоремаи 3. Функсияи $f(x)$ дар фосилаи $(a;б)$ муайян гардидааст ва $f'(x)$ мавҷуд; дар фосилаи $(a;x_0)$ $f'(x)>0$ ва дар фосилаи $(x_0;b)$ $f'(x)<0$ бошад, $x_0\in(a, b)$. Дар ин ҳолат нуқтаи x_0 локали максимуми функсияи f x мешавад.

Теоремаи 4. Функцияи $f(x)$ дар фосилаи $(a;b)$ муайян шудааст ва $f'(x)$ мавҷуд; $(a;x_0)$ дар фосилаи $f'(x)<0$ ва $(x_0;b)$ дар фосилаи $f'(x)>0$ бошад, $x_0 \in (a,\ b)$.

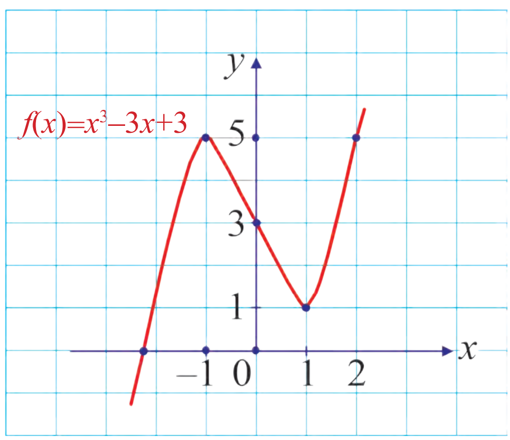
Дар ин ҳолат нуқтаи x_0 локали минимуми финксияи $f(x)$ мешавад.

Теоремаҳои 3, 4- ро беисбот қабул мекунем

Таърифи 2. Максимум ва минимумҳои локалии функсияро *экстремумҳои* он мегӯянд.

Мисоли 4. Нуқтаҳои максимум ва минимуми функсияро ёбед: $f(x)=x^3-3x+3$.

△ Ҳосилаи функсияро меёбем: $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. Ҳосила дар тамоми нуқтаҳо муайян шудааст ва дар нуқтаҳои $x=\pm 1$ ба сифр табдил меёбад. Барои ҳамин нуқтаҳои $x=\pm 1$ нуқтаҳои критикии функсия аст. Аз усули фосилавӣ истифода бурда, дар фосилаҳои $(-\infty;$ $-1)$ ва $(1;+\infty)$ $f'(x)>0$, дар фосилаи $(-1;1)$ бошад $f'(x)<0$ буданашро муайян мекунем. Аз ин мебарояд, ки нуқтаҳои $x=-1$ максимуми локалӣ ва $x=1$ минимуми локалӣ будааст (Расми 22).



Расми 23.

Ҷавоб: Нуқтаи $x=-1$ максимуми локалӣ $x=1$ минимуми локалӣ. ▲

Бо қиматҳои аз ҳама хурд ва аз ҳама калони функсия дар синфи 10 шинос шуда будем.

Функсияи $f(x)$ дар бурриши $[a;b]$ муайян гардида ва ҳосилаи он дар $(a;b)$ мавҷуд бошад. Қоидаи ёфтани қимати аз ҳама бузурги он чунин аст:

1) тамоми нуқтаҳои статсионари ин фосилаи функсия ёфта мешавад;

2) қиматҳои статсионарӣ, сарҳади нуқтаҳои a ва b ҳисоб мешавад;

3) қиматҳои ниҳоии он қимати аз ҳама бузурги фосилаи ҳамин функсия гуфта мешавад.

Қимати аз ҳама хурди функсияро ҳам ҳамин тавр меёбанд.

Мисоли 5. Қиматҳои аз ҳама хурд ва аз ҳама бузурги функсияи $f(x) = x^3 + 4{,}5x^2 - 9$ -ро дар фосилаи $[-4;\ 2]$ ёбед.

Δ Ҳосилаи функсияро меёбем: $f'(x) = 3x^2 + 9x$. Ҳосиларо ба сифр баробар карда, нуқтаҳои статсионари функсияҳоро меёбем: $f'(x) = 3x(x+3) = 0$, $x_1 = 0$ va $x_2 = -3$. Қиматҳои функсияҳои ёфтшудаи нуқтаҳои $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ инчунин $a = -4$, $b = 2$- ро меёбем:

$f(0) = 0^3 + 4{,}5 \cdot 0^2 - 9 = -9$, $\quad f(-3) = (-3)^3 + 4{,}5 \cdot (-3)^2 - 9 = 4{,}5$,

$f(-4) = (-4)^3 + 4{,}5 \cdot 4^2 - 9 = -1$, $\quad f(2) = 2^3 + 4{,}5 \cdot 2^2 - 9 = 17$.

Қимати аз ҳама бузурги функсия 17 ва аз ҳама хурд –9 будааст.

Ҷавоб: Қимати аз ҳама бузург 17 ва аз ҳама хурд –9. ▲

Бо ёрии ҳосила санҷидани функсия ва сохтани графики он. Барои сохтани графики функсия ба пайдарпайии зерин амал мекунем.

1. Соҳаи муайянкунии функсияро;
2. Нуқтаҳои статсионарии фуксияро;
3. Афзоиш ва камшавии функсияро;
4. Максимум ва минимуми локалӣ ва қиматҳои дар ҳамин нуқтаҳо доштаи функсияро;
5. Назар ба маълумоти ёфташуда графики функсияро месозем.

Дар сохтани график буридани графики функсия бо тирҳои координата ва ёфтани баъзе нуқтаҳои он мувофиқи мақсад аст.

Мисоли 6. Функсияи $f(x) = x^3 - 3x$-ро бо ёрии ҳосила санҷед ва графики онро созед.

1. Функсия дар фосилаи $(-\infty;\ +\infty)$ муайян шудааст.

2. Нуқтаҳои статсионарро меёбем:

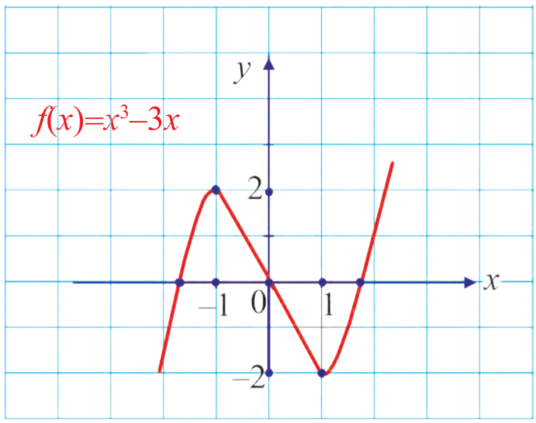
$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 0$. $x_1 = 1$ ва $x_2 = -1$ нуқтаҳои статсионаранд.

3. Фосилаҳои афзоиш ва камшавии функсияро меёбем:

Дар фосилаҳои $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$ барои он ки $f'(x) > 0$ мебошад, функсияи $f(x)$ дар ҳамин фосила месабзад ва дар фосилаи $(-1;\ 1)$ барои $f'(x) < 0$ буданаш функсияи $f(x) = x^3 - 3x$ дар фосилаи $(-1;\ 1)$ кам мешавад.

4. $x=-1$ бошад функсия ба масимуми локалӣ $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)=2$ ва $x=1$ бошад функсия ба минимуми локалӣ $f(1)=1^3-3\cdot 1=-2$ соҳиб аст.

5. Нуқтаҳои бо тири Ox буридашудаи функсияро меёбем: $x^3-3x=x(x^2-3)=0$. Аз ин $x=0$ ёки муодилаи $x^2-3=0$ -ро ҳосил мекунем. Муодиларо ҳал карда, нуқтаҳои бурриши графики функсияи $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$ -ро бо тири Ox меёбем. Дар натиҷа графики расми 24- ро ҳосил мекунем.



Расми 24.

? Савол ва супоришҳо

1. Фосилаҳои афзоиш ва камшавии функсияро чӣ хел меёбанд?
2. Ба нуқтаи статсионари функсия таъриф диҳед.
3. Максимуми локалӣ ва минимуми локалии функсия чӣ хел ёфта мешавад?
4. Қиматҳои аз ҳама бузург ва аз ҳама хурди функсия чӣ хел ёфта мешавад?
5. Бо ёрии ҳосила зинаҳои сохтани графики функсияро гӯед ва бо як мисол фаҳмонед.
6. Нуқтаҳои статсионари функсия оё нуқтаҳои экстремуми он шуда метавонад? Мисолҳо оред.
7. Функсияи $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$ ро бо ёрии ҳосила санҷед ва графики онро созед.

Машқҳо

69. Фосилаҳои афзоиш ва камшавии функсияро ёбед:

1) $f(x)=2-9x$;
2) $f(x)=\frac{1}{2}x-8$;
3) $f(x)=x^3-27x$;
4) $f(x)=\frac{x-1}{x}$;
5) $f(x)=x^2-2x+4$;
6) $f(x)=x(x^2-6)$;
7) $f(x)=-x^2+2x-3$;
8) $f(x)=\frac{1}{x^2}$;
9) $f(x)=x^4-2x^2$;
10) $f(x)=3x^4-8x^3+16$;
11) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$;
12) $f(x)=\sin x$;
13) $f(x)=\cos x$;
14) $f(x)=\operatorname{tg} x$;
15*) $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$.

70. Нуқтаҳои статсионари функсияро ёбед:

1) $f(x)=2x^2-3x+1$;
2) $f(x)=9x-\frac{1}{3}x^3$;
3*) $f(x)=|x-1|$;
4) $f(x)=x^2$;
5) $f(x)=8x^3+5x$;
6) $f(x)=3x-4$;
7*) $f(x)=|x|+1$;
8) $f(x)=2x^3+3x^2-6$;
9) $f(x)=3+8x^2-x^4$.

71. Максимум ва минимуми локалии функсияҳоро ёбед:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{2}x^4$;
2) $f(x)=(x-4)^8$;
3) $f(x)=4-3x^2-2x^3$;
4) $f(x)=\frac{5}{x}+\frac{x}{5}$;
5) $f(x)=x^4-2x^3+x^2-3$;
6) $f(x)=3\operatorname{tg}x$;
7) $f(x) = 2\sin x + 3$;
8) $f(x) = -5\cos x-7$;
9) $f(x)=x^4-x^3+4$.

72. Фосилаҳои афзоиш ва камшавии функсияро ёбед:

1) $f(x)=x^3-27x$;
2*) $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$;
3*) $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$;
4) $f(x)=5\sin x+13$;
5) $f(x)=15\cos x-7$;
6) $f(x)=-3\operatorname{tg}x$.

73. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсияро ёбед:

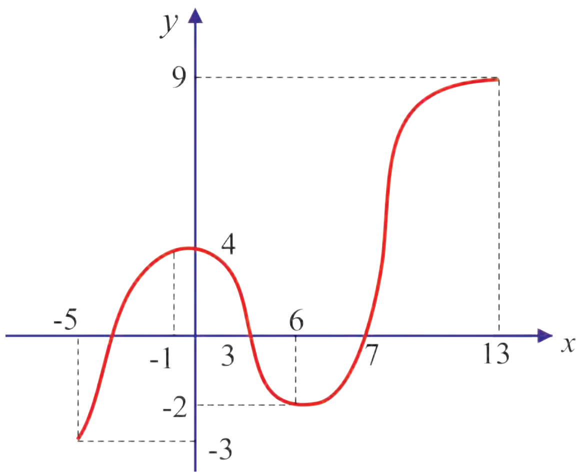
1) $f(x)=x^4-8x^2+3$, $x\in[-4;1]$;
2) $f(x)=3x^5-5x^3+1$, $x\in[-2;2]$;
3) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $x\in[1;2]$;
4) $f(x)=3x^3-6x^2-5x+8$, $x\in[-1;4]$.

74. Функсияро санҷед ва графики онро созед:

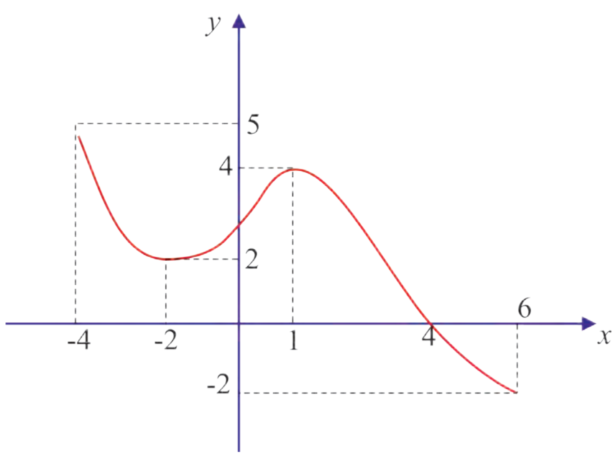
1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$; | 2) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1$; | 3) $y = x^4 - 4x^3 + 15$.

75*. Ба графики ҳосилаи функсия нигоҳ карда (расмҳои 25, 26), инҳоро ёбед:

1) нуқтаҳои статсионарро;
2) фосилаи афзоишро;
3) фосилаи камшавиро;
4) максимуми локалиро;
5) минимумҳои локалиро.



Расми 25.



Расми 26

Намунаи кори назоратӣ
Варианти I

1. Ҳосиларо ёбед: $f(x) = 20x^3 + 6x^2 - 7x + 3$..

2. $f(x) = x^2 - 5x + 4$ ва $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ бошад, $f(g(3))$ -ро ҳисоб кунед.

3. Барои функсияи $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 1$ инҳоро ёбед:

1) нуқтаҳои статсионарро;
2) фосилаи афзоишро;
3) фосилаи камшавиро;
4) максимуми локалиро;
5) минимумҳои локалиро.

4. Ҳосиларо ёбед: $(3x+5)^3+\sin^2 x$.

5. $f(x)=\sqrt{1-3x}$. бошад $f^1(\dfrac{1}{4})$ро ҳисоб намоед.

Варианти II

1. Ҳосиларо ёбед: $f(x)=10x^3+16x^2+7x-3$..

2. $f(x)=x^2+6x-3$ ва $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ бошад, $f(g(3))$ -ро ҳисоб кунед.

3. Барои функсияи $f(x)=x^3+2x^2-x+3$ инҳоро ёбед:

1) нуқтаҳои статсионарро;
2) фосилаи афзоишро;
3) фосилаи камшавиро;
4) максимуми локалиро;
5) минимумҳои локалиро.

4. Ҳосиларо ёбед: $(2x-6)^3 + \cos^2 x$.

5. $f(x)=\sqrt{1-2x}$ бошад $f^1(\dfrac{3}{8})$ ро ҳисоб намоед.

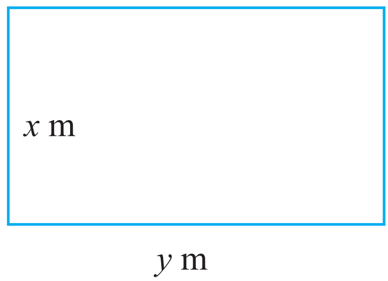
22–25 УСУЛҲОИ ҲИСОБИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ ДАР ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲОИ ЭКСТРЕМАЛИИ ДОРОИ МАЗМУНИ ГЕОМЕТРӢ, ФИЗИКАВӢ ВА ИҚТИСОДӢ

Масъалаҳои дорои мазмуни геометрӣ

Масъалаи 1. Атрофи қитъаи замини шакли чоркунҷаи росткунҷаро бо 100 м панҷара иҳота карданианд. Ин панҷара дар ҳадди ниҳоӣ барои иҳота кардани чанд метри мураббаъ қитъаи замин мерасад?

∆ Бари қитъаи замин x m ва дарозиаш y m бошад (расми 27).

Мувофиқи шарти масъала параметри қитъаи замин $2x+2y=100$. Аз ин $y=50-x$. Сатҳи қитъаи замин $S(x)=xy=x(50-x)=50x-x^2$.



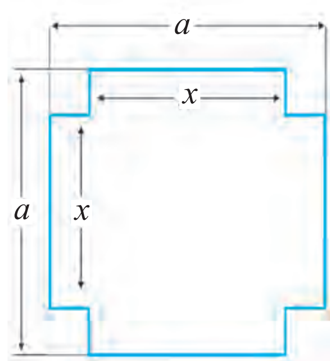
Расми 27.

Масъала функсияи $S(x)$-ро барои ёфтани қимати калонтарин меорад. Аввал нуқтаи статсионари функсияи $S(x)$-ро меёбем: $S'(x)=50-2x=0$, аз ин $x=25$. Барои дар фосилаи $(-\infty;\ 25)$ $S'(x)>0$ ва дар фосилаи $(25;\ +\infty)$ $S'(x)<0$ буданаш функсияи $S(x)$ дар $x=25$ ба қимати интиҳоӣ соҳиб мешавад ва $S(25)=625$. Бармеояд, ки бо ёрии 100 м панҷара дар ҳадди ниҳоӣ 625 м^2 қитъаи заминро иҳота кардан мумкин. *Ҷавоб:* 625 м^2. ▲

Умуман, дар байни ҳамаи чоркунҷаҳои рости сатҳаш додашуда бузургтаринаш квадрат аст.

Масъалаи 2. Аз картони шакли квадрат доштаи a см буда, қуттии болокушода тайёр карданианд. Барои ин аз нуги картон квадратчаҳои якхела бурида гирифта мешавад Барои ҳаҷми калонтарини қуттӣ дарозии тарафи асосии он бояд чанд сантиметр шавад?

△ Аз нӯги картон квадратчаҳои якхела бурида гирифта, гӯем ки қуттии кушоди асосаш x см дошта, сохтаанд (расми 28).



Расми28.

Тарафи буридашудаи квадратча $\frac{a-x}{2}$ см мешавад. Барои ҳамин ҳаҷми қуттии кушода $V(x)=\frac{a-x}{2}\cdot x\cdot x=-\frac{x^3}{2}+\frac{ax^2}{2}$ cm^3.

Бармеояд, ки масъалаи додашуда функсияи $V(x)=-\frac{x^3}{2}+\frac{ax^2}{2}$ дар бурриши $[0;\ a]$ барои пайдо кардани қимати калонтарин оварда шуд. Нуқтаҳои статсионари функсияҳои $V(x)$ -ро меёбем: $V'(x)=-\frac{3}{2}x^2+ax=0$.

Дар ин ҷо нуқтаҳои статсионари $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}a$ ёфта мешавад. Маълум, ки $V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{2}{27}a^3$ ва $V\left(\frac{2}{3}a\right)>V(0)=V(a)=0$. Бармеояд, $V(x)$ -ро дар буриши $[0;\ a]$ қимати аз ҳама калон $\frac{2}{27}a^3$ мешавад.

Ҷавоб: дарозии тарафи асоси қуттӣ $x=\frac{2}{3}a$ см. ▲

Масъалаҳои дорои мазмуни физикӣ

Масъалаи 3. Ҷисм бо қонунияти $s(t)=-\frac{t^4}{12}+t^3$ дар ҳаракат аст дар ($s(t)$ бо м , *t бо сония* чен мешавад). Инҳоро ёбед:

1) вақти ба суръати калонтарин ноил шуда (t_0);
2) суръати лаҳзавӣ дар вақти t_0;
3) масофаи дар вақти t_0 тайшуда.

∆ Суръати ҷисмро меёбем:

$$v(t)=s'(t)=\left(-\frac{t^4}{12}+t^3\right)'=-\frac{t^3}{3}+3t^2.$$

Аз физика маълум аст, ки ҳосилаи аз суръат гирифта, шитобро медиҳад, яъне:

$$a(t)=v'(t)=-t^2+6t.$$

1) барои муайян намудани вақти t_0 соҳибияти шитоби калонтарин функсияи $a(t)=v'(t)=-t^2+6t$-ро дар максимум месанҷем. Аввал муодилаи $a'(t)=-2t+6=0$ ҳал мекунем, аз ин дар фосилаи $t_0=3$. $(0;\ 3)$ $a'(t)>0$ ва дар фосилаи $(3;+\infty)$ $a'(t)<0$ буданашон дар $t=3$ $a(t)$ ба қимати калонтарин ноил мешавад.

2) суръати лаҳзави дар вақти t_0 чен мекунем: $v(3)=-\frac{3^3}{3}+3\cdot 3^2=18\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3) ба роҳи дар вақти t_0 тайшуда формулаи $s(t)=-\frac{t^4}{12}+t^3$ $t_0=3$-ро гузошта ҳисоб мекунем: $s(3)=-\frac{3^4}{12}+3^3=-\frac{27}{4}+27=\frac{81}{4}=20,25$ m.

Ҷавоб: 1) 3 s; 2) $18\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 3) 20,25 m. ▲

Масъалаи 4. Ҷисм бо қонунияти $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50$ ҳаракат карда истодааст (масофа бо метр $s(t)$, вақт бо сония t ҳисоб мешавад). Инҳоро ёбед:

1) вақти (t_0) ба суръати хурдтарин расида;
2) шитоб дар вақти t_0;
3) масофаи дар вақти t_0 тайшуда

△ Суръат ва шитоби ҷисмро меёбем:

$$v(t)=s'(t)=\left(\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50\right)'=t^2-2t+4,$$

$$a(t)=v'(t)=\left(t^2-2t+4\right)'=2t-2.$$

1) вақти t_0 ба суръати хурдтарин ноилшударо муайян мекунем:

$$v'(t)=(t^2-2t+4)'=2t-2=0, \text{ аз ин } t_0=1.$$

дар фосилаи (0; 1) барои $v'(t)<0$ ва дар фосилаи $(1;+\infty)$ барои $v'(t)>0$ буданаш дар $t_0=1$ будан $v(t)$ ба қимати аз ҳама хурд мерасад.

2) шитобро дар вақти t_0 ҳисоб мекунем: $a(1)=2\cdot1-2=0$ m/s^2.

3) масофаи дар вақти t_0 тайшударо ба формулаи $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50$ $t_0=1$- ро гузошта ҳисоб мекунанд, яъне $s(1)=\frac{1^3}{3}-1^2+4\cdot1+50=53\frac{1}{3}$ m.

Ҷавоб: 1) 1 s; 2) 0 m/s^2; 3) $53\frac{1}{3}$ m. ▲

Масъалаи 5. Ба кураи ҳавоӣ дар фосилаи вақти $t\in[0;\ 8]$ ба ҳаҷми $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ (m^3) ҳаво пур карданд. Инҳоро ёбед:

1) ҳаҷми ҳаво дар ибтидои вақт;
2) ҳаҷми ҳаво дар $t=8$ дақиқа;
3) суръати ҳаво пур кардан дар $t=4$ дақиқа;

△ 1) барои ёфтани ҳаҷми ҳаво дар ибтидои вақт ба формулаи $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ m^3 $t=0$ -ро мегузоранд, яъне $V(0)=2$ m^3.

2) барои ёфтани ҳаҷми ҳаво дар вақти $t=8$ дақиқа ба формулаи $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ m $t=8$ гузошта мешавад:

$$V(8)=2\cdot 8^3-3\cdot 8^2+10\cdot 8+2=1024-192+80+2=914\ \text{m}^3;$$

3) суръати ҳавопуркуниро меёбем:

$$v'(t)=\left(2t^3-3t^2+10t+2\right)'=6t^2-6t+10\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min.}}\right).$$

Пас, $v'(4)=6\cdot 4^2-6\cdot 4+10=96-24+10=82\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min}}\right)$.

Пас, $a(3)=12\cdot 3-6=30\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min}^2}\right)$.

Ҷавоб: 1) 2 m^3; 2) 914 m^3; 3) $82\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ▲

Масъалаҳои дорои мазмуни иқтисодӣ

Масъалаи 6. Карима барои дӯхтани курта супориш гирифт. Дар як моҳ x то курта дӯзад, $p(x)=-x^2+100x$ ҳазор сӯм даромад мекунад. Инҳоро ёбед:

1) барои гирифтани даромади калонтарин чанд то курта дӯхтан даркор?

2) даромади калонтарин чӣ қадар мешавад?

△ 1) максимуми функсияи $p(x)=-x^2+100x$ -ро месанҷем:

$p'(x)=(-x^2+100x)'=-2x+100=0$, аз ин дар буриши $x_0=50$. (0; 50) $p'(x)>0$ ва дар фосилаи $(50;+\infty)$ барои $p'(x)<0$ буданаш $x_0=50$ бошад функсия ба қимати калонтарин соҳиб мешавад. Бармеояд, ки барои гирифтани даромади аз ҳама калон 50 -то курта дӯхтан лозим аст.

2) барои ёфтани даромади калонтарин ба ифодаи $p(x)=-x^2+100x$ $x_0=50$-ро мегузорем:

$p(50)=-50^2+100\cdot 50=-2500+5000=2500$(ҳазор сӯм)$=2500000$ сӯм.

Ҷавоб: 1) 50 -то курта; 2) 2 500 000 сӯм. ▲

? Савол ва супоришҳо

Ҳосиларо татбиқ намуда, ҳал карда, ба масъалаи мазмуни 1) геометрӣ; 2) физикӣ; 3) иқтисодӣ дошта мисол оред.

Машқҳо

76. Атрофи қитъаи замини шакли чоркунҷаи ростро иҳота карданиянд. Бо ёрии 300 м панҷара чанд метри мураббаъ қитъаи заминро иҳота кардан мумкин?

77. Атрофи қитъаи замини шакли чоркунҷаи ростро иҳота карданиянд. Бо ёрии 480 м панҷара зиёда аз чанд метри мураббаъ майдони заминро иҳота кардан мумкин?

78.* Аз картони квадратшакли бараш 120 см қуттии болокушод тайёр карданд. Ин ҷо аз гӯшаи картон квадратчаҳои якхела бурида гирифтанд. Барои ҳаҷми ниҳоии қуттӣ квадратчаҳои буридашуда чанд сантиметр буданаш лозим?

79.* Зарфи консерва дар шакли силиндр буда, ҳаҷми дохилаи пурраи он ба 216 π см^2 баробар аст. Барои ба зарф ба қадри калонтарин об ғунҷонидан баландӣ ва радиуси асоси банка чӣ хел бояд бошад?

80. Масоҳати майдони росткунҷашакли 6400 m^2 аст. Тарафҳои майдон чӣ хел бошад барои иҳотаи он ба ҳадди хурдтарин панҷара лозим мешавад?

81.* Ба кураи радиусаш 5 м конуси ибтидоии ҳаҷми беруна кашида шудааст. Баландии конусро ёбед.

82.* Аз металл параллелепеди росткунҷаи асосаш аз квадрат иборати ғунҷоишаш 13,5 *л* бударо сохта истодаанд. Андозаҳои зарф чӣ хел бошад, барои сохтани он ба қадри аз ҳама кам металл меравад?

83. Ҷисм бо қонунияти $s(t)=-\dfrac{t^4}{4}+5t^3$ дар ҳаракат аст, ($s(t)$ бо метр, вақт бо сония t ҳисоб карда мешавад). Инҳоро ёбед:

1) вақти t_0 ба суръати калонтарин ноил шудан;
2) суръати лаҳзавӣ дар вақт t_0;
3) роҳи дар мобайни вақти t_0 тайнамуда.

84. Ҷисм бо қонунияти $s(t)=-\dfrac{t^4}{2}+12t^3$ дар ҳаракат аст ($s(t)$ бо метр, вақт бо сония t ҳисоб карда мешавад).

1) ба суръати калонтарин ноилшавии вақти t_0;
2) суръати лаҳзавиро дар вақти t_0;
3) роҳи дар мобайни вақти t_0 тайнамударо ёбед.

85. Ҷисм бо қонунияти $s(t)=\frac{t^3}{9}-2t^2+40t+50$ дар ҳаракат аст (масофа $s(t)$ бо метр, вақт t бо сония ҳисоб карда мешавад).
1) вақти t_0 ба суръати калонтарин ноил шудан;
2) суръати лаҳзавиро дар вақт t_0;
3) масофаи дар мобайни вақти t_0 тайнамударо ёбед

86. Ҷисм бо қонунияти $s(t)=\frac{t^3}{2}-3t^2+8t+5$ дар ҳаракат аст ($s(t)$ бо метр, вақт бо сония t ҳисоб карда мешавад). Инҳоро ёбед:
1) вақти t_0 ба суръати ниҳоӣ ноил шудан;
2) суръати лаҳзавиро дар вақт t_0;
3) роҳи дар мобайни вақти t_0 тайнамуда.

87. Ба кураи ҳаво дар фосилаи $t\in[0;10]$ дақиқа $V(t)=5t^3+3t^2+2t+4$ (m^3) ҳаво пур карда мешавад. 1) ҳаҷми ҳаворо дар ибтидои вақт;
2) ҳаҷми ҳаворо дар $t=10$ дақиқа;
3) суръати ҳавопуркуниро дар $t=5$ дақиқа;

88. Ба кураи ҳаво дар фосилаи $t\in[0;15]$ дақиқа $V(t)=t^3+13t^2+t+20$ (m^3) ҳаво пур карда мешавад. 1) ҳаҷми ҳаворо дар ибтидои вақт;
2) ҳаҷми ҳаворо дар $t=15$ дақиқа;
3) суръати ҳавопуркуниро дар $t=10$ дақиқа;

89. Муслима барои дӯхтани шим супориш гирифт. Ӯ дар як моҳ x то шим дӯзад, $p(x)=-2x^2+120x$ (ҳазор сӯм) даромад мегирад. Инҳоро ёбед:
1) барои гирифтани даромади ниҳоӣ чӣ қадар шим дӯхтан даркор?
2) даромади калонтарин чӣ қадар мешавад?

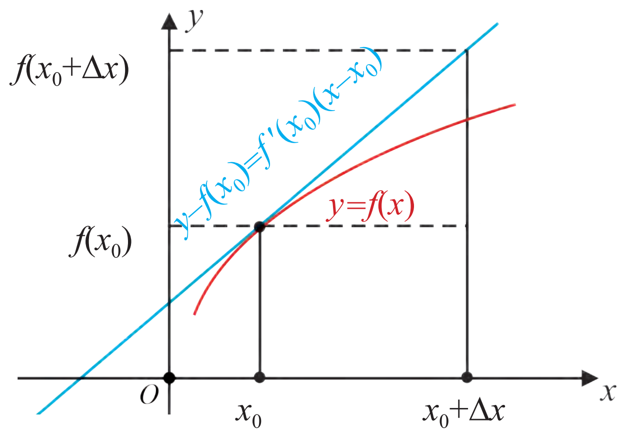
90. Мухлиса барои дӯхтани ҷома фармоиш гирифт. Ӯ дар як моҳ x то ҷома дӯзад, $p(x)=-3x^2+96x$ (ҳазор сӯм) даромад мегирад. Инҳоро ёбед:
1) барои гирифтани даромади ниҳоӣ чӣ қадар ҷома дӯхтан даркор?
2) даромади ниҳоӣ чӣ қадар мешавад?

26–28 ҲИСОБНАМОИИ ТАҚРИБӢ

Функсияи $y=f(x)$ дар нуктаи x_0 ба ҳосилаи маҳдуд $f'(x_0)$ соҳиб шавад.

Дар нуктаи абсиссадори x_0 баробарии расандаи аз графики функсияи $y=f(x)$ гузаранда чунин $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ навишта мешавад.

Дар наздики нуктаи x_0 графики функсияи $y=f(x)$-ро бо буриши мувофиқи расанда иваз карда мешавад (нигаред ба расми 29):



Расми 29.

Афзуншавандаи $x-x_0$ -ро Δx гуфта нишон диҳем (яъне $x=x_0+\Delta x$ гуфта гирем) ба муносибати тақрибии зерин соҳиб мешавем:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \text{ ёки}$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (1)$$

Формулаи тақрибии (1) *формулаи афзуншавандаҳои хурд* номида мешавад.

Эзоҳ. Ба сифати нуқта x_0 қиматҳои $f(x_0), f'(x_0)$ барои нуқтаи ченшавандаро ҷудо кардан тавсия мешавад. Дар баробари ин нуқтаи x ба x_0 ҳар қадар наздик бошад, муайянтар шудани ин тағйирёбиро қайд менамоем.

Акнун мо ба формулаи афзуншавиҳои ибтидоӣ такя намуда, ҳисобнамоии тақрибиро иҷро менамоем.

Мисоли 1. Қимати тақрибии функсияи $f(x)=x^7-2x^6+3x^2-x+3$-ро дар нуқтаи $x=2{,}02$ ҳисоб кунед.

△ Нуқтаи ба x=2,02 наздикбудаи нуқтаи x_0=2 -ро гирем, дар ин нуқта қимати функсия $f(x)$ ба осонӣ ёфта мешавад: $f(x_0)=f(2)=13$.

Ҳосилаи ин функсияро ёбед: $f'(x)=7x^6-12x^5+6x-1$.

Дар ин ҳол

$f'(x_0)=f'(2)=75$, $\Delta x=x-x_0=2{,}02-2=0{,}02$ мешавад.

Ин ҷо мувофиқи формулаи (1)

$f(2{,}02)=f(2+0{,}02)\approx 13+75\cdot 0{,}02=14{,}5$.

Бо ёрии калкулятор, ёки дагар воситаҳои ҳисоббарор қимати $f(2{,}02)\approx 14{,}57995$ -ро ҳосил карданамон мумкин. ▲

Мисоли 2. Қимати тақрибии решаи $\sqrt{1{,}02}$ -ро ҳисоб кунед.

△ Функсияи $f(x)=\sqrt{x}$ -ро дида мебароем. Ҳосилаи онро меёбем:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$x_0=1$ гуфта гирем, $f(x_0)=f(1)=\sqrt{1}=1$,

$f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$, $\Delta x=x-x_0=1{,}02-1=0{,}02$ мешавад.

Ин ҷо мувофиқи формулаи (1)

$$\sqrt{1{,}02}=\sqrt{1+0{,}02}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=1{,}01.$$

Бо ёрии калкулятор, ёки дагар воситаҳои ҳисоббарор қимати $\sqrt{1{,}02}\approx 1{,}0099504938...$ -ро ҳосил карданамон мумкин. ▲

Мисоли 3. Қимати $\sqrt[3]{7.997}$ -ро тақрибӣ ҳисоб мекунем.

△ Функсияи $f(x)=\sqrt[3]{x}$ - ро дида мебароем. Ҳосилаи онро меёбем:

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

$x_0=8$ гуфта гирем, $f(x_0)=f(8)=\sqrt[3]{8}=2$,

$$f'(x_0)=f'(8)=\frac{1}{3}8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12},$$

$\Delta x=7{,}997-8=-0{,}003$ мешавад.

Ин ҷо мувофиқи формулаи (1)

$$\sqrt[3]{7{,}997}=\sqrt[3]{8+(-0{,}003)}\approx 2-\frac{0{,}003}{12}=1{,}9997.$$

Бо ёрии калкулятор, ёки дагар воситаҳои ҳисоббарор қимати $\sqrt[3]{7.997} \approx 1,9997499687...$ -ро ҳосил намуданамон мумкин. ▲

Мисоли 4. Қимати sin 29° -ро тақрибӣ ҳисоб кунед.

△ Қимати $f(x) = \sin x$ мебинем. Ҳосилаи онро меёбем: $f'(x) = \cos x$

$x_0 = \frac{\pi}{6}$ гуфта гирем, $f(x_0) = f(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

$f'(x_0) = f'(\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\Delta x = \frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180}$ мешавад.

Ин ҷо мувофиқи формулаи (1)

$$\sin 29° = \sin(\frac{\pi}{6} + (-\frac{\pi}{180})) \approx \sin\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} \approx 0,484... .$$

Бо ёрии калкулятор, ёки дагар воситаҳои ҳисоббарор қимати $\sin 29^{\circ} \approx 0,4848096202...$ -ро ҳосил карданамон мумкин. ▲

Мисоли 5. Барои ҳисоби логарифмҳо формулаи афзоишҳои хурдро меорем.

△ $f(x)=\ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$. Мувофиқи (1) $\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0}\cdot\Delta x$ формулаи афзоиши хурдро ҳосил мекунем.

Агар $x_0 = 1$ ва $\Delta x = t$ бошад, $\ln(1+t) \approx t$ мешавад.

Аз ин масалан, қимати ln1,3907= ln(1+0,3907) ≈ 0,3907-ро мегирем.

Агар $x_0 = 0$, яъне $\Delta x = x - x_0 = x$ бошад, формулаи афзоиши хурд (1) дар намуди

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (2)$$

мешавад. ▲

Супориши берун аз синф. Дар асоси *формулаи* (2), x ба ҳадди ниҳоӣ хурд бошад $\sin x \approx x$, $\operatorname{tg} x \approx x$, $e^x \approx 1 + x$,

$(1+x)^m \approx 1+mx$, аз ҷумла, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x$

формулаҳои тақрибиро ҳосил мекунем.

Мисоли 6. Ифодаи $\frac{1}{0,997^{30}}$ -ро тақрибан ҳисоб кунед.

△ Аз формулаи $(1+x)^m \approx 1+mx$ истифода мебарем:

$$\frac{1}{0,997^{30}}=(1-0,003)^{-30}\approx 1+(-30)(-0,003)=1+0,09=1,09.$$

Бо ёрии калкулятор, ёки дагар воситаҳои ҳисоббарор қимати $\frac{1}{0,997^{30}}\approx 1,0943223033...$ - ро ҳосил менамоем. ▲

Аз формулаи тақрибии $(1+x)^m \approx 1+mx$ истифода бурда, усули зуд ҳисобнамоии решаҳоро таклиф кардан мумкин.

Дарҳақиқат, n – адади натуралӣ буда, адади $|B|$ нисбати $|A^n|$ ба қадри кофӣ хурд бошад.

Дар ин ҳолат

$$\sqrt[n]{A^n+B}=A\left(1+\frac{B}{A^n}\right)^{\frac{1}{n}}\approx A\left(1+\frac{B}{nA^n}\right)$$

ёки

$$\sqrt[n]{A^n+B}\approx A+\frac{B}{nA^{n-1}}.$$

Масалан, $\sqrt[3]{131}=\sqrt[3]{125+6}=5+\frac{6}{3\cdot 5^2}=5,08.$

Бо ёрии калкулятор, ёки дагар воситаҳои ҳисоббарор қимати $\sqrt[3]{125}=5,0788...$ -ро ҳосил карданамон мумкин.

Дар асоси формулаи (2), x ба қадри кофӣ хурд бошад, қимати $\cos x$ -ро тақрибан ҳисоб кунем.

барои $(\cos x)'=-\sin x$ буданаш $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$

формулаи $\cos x\approx\cos 0-(\sin 0)x=1$, яъне $\cos x\approx 1$ намудро мегирад.

Намоён аст, ки чунин формулаи “тақрибӣ” моро қаноатбахш намекунад.

Барои ҳамин, роҳи дигарро пеш мегирем. Аз айнияти асосии тригонометрӣ баробарии $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ ҳосил мекунем.

Чуноне ки дар боло қайд кардем, x ба қадри кофӣ хурд бошад $\sin x\approx x$ мешавад. Ҳамин тавр, $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}\approx\sqrt{1-x^2}$

Равшан аст, ки x ба таври кофӣ хурд бошад x^2 хурд мешавад.

Ҳамин тавр, аз формулаи $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$ бевосита формулаи $\sqrt{1-x^2} \approx 1-\frac{x^2}{2}$ мебарояд, яъне формулаи $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$ бамаврид аст.

Мисоли 7. $\cos 44°$ -ро тақрибан ҳисоб кунед.

△ барои $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ будан

$$\cos 44^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{180}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{180} =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{180}\right). \quad \cos\frac{\pi}{180} \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0,9998476...,$$

$\sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} = 0,0174532....$Ҳамин тавр, $\cos 44^\circ \approx 0,7193403....$

Бо ёрии калкулятор, ёки дагар воситаҳои ҳисоббарор қимати $\cos 44° \approx 0,7193339...$-ро ҳосил мекунем.

? Савол ва супоришҳо

1. Формулаи афзоишҳои хурдро нависед.
2. Оид ба татбиқи формулаи афзоишҳои хурд мисолҳо биёред.

Машқҳо

91. Қимати тақрибии функсияи $f(x)$ - ро дар нуқтаҳои x_1 ва x_2 ҳисоб кунед:

а) $f(x)=x^4+2x$, $x_1=2,016$, $x_2=0,97$;

b) $f(x)=x^5-x^2$, $x_1=1,995$, $x_2=0,96$;

d) $f(x)=x^3-x$, $x_1=3,02$, $x_2=0,92$;

e) $f(x)=x^2+3x$, $x_1=5,04$, $x_2=1,98$.

Аз формулаи тақрибии $(1+x)^m \approx 1+mx$, қимати ифодаи ададиро ҳисоб кунед (**92–93**):

92. а) $1,002^{100}$; б) $0,995^6$; с) $1,03^{200}$; д) $0,998^{20}$.

93. а) $\sqrt{1,004}$; б) $\sqrt{25,012}$; с) $\sqrt{0,997}$; д) $\sqrt{4,0016}$.

Бо истифода аз формулаи тақрибӣ ҳисоб кунед (**94–97**):

94. а) tg 44°; б) cos 61°; с) sin 31°; д) ctg 47°.

95. а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+0,04\right)$; б) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-0,02\right)$;

с) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+0,03\right)$; д) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+0,05\right)$.

96. а) $\dfrac{1}{1,003^{20}}$; б) $\dfrac{1}{0,996^{40}}$; с) $\dfrac{1}{2,0016^{3}}$; д) $\dfrac{1}{0,994^{5}}$.

97. а) ln0,9; б) $e^{0,015}$; с) $\dfrac{1}{0,994^{5}}$.

Қимати тақрибии нуқтаҳои нишондодаи $y=f(x)$ -ро ҳисоб кунед (**98 – 106**):

98. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1,012$.

99. $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x=1,97$.

100. $y=x^3$, $x=1,021$.

101. $y=x^4$, $x=0,998$.

102. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1,03$.

103. $y=x^6$, $x=2,01$.

104*. $y=\sqrt{1+x+\sin x}$, $x=0,01$.

105*. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$, $x=0,01$.

106*. $y=\sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}$, $x=1,02$.

29–32 МОДЕЛОНӢ БО ЁРИИ ҲОСИЛА

Дар синфи 10 (мавзӯи **79–81**) ҷарайёни зиёдшавии шумораи бактерияҳоро омӯхтем. Акнун ба ин ҳодиса дигархелтар назар мекунем.

Масъалаи 1. Ҳар як бактерия баъд аз вақти муайян (дар якчанд соат, ёки, дақиқаҳо) ба ду ҷудо мешавад ва шумораи бактерияҳо ду баробар меафзояд. Баъди вақти навбатӣ ду бактерияи мазкур ҳам ба ду ҷудо шуд ва миқдори популятсия(шумораи умумии бактерияҳо) боз ду маротиба афзуд... Ин ҷарайёни афзоиш дар шароити мусоид (манбаҳои барои популятсия зарур, ҷой, хӯрок, об, қувват ва ҳоказоҳо) бардавом мегардад, гӯем.

С***уръати афзоиши*** бактерияҳоро ба шумораи умумии бактерияҳо мусовӣ гӯён фараз кунем.

Шумораи популятсияи бактерияҳо дар вақти ихтиёрӣ t нисбатан чӣ хел дигар мешавад?

△ $b(t)$ гуфта, дар фосилаи вақти t шумораи умумии популятсияи бактерияҳоро муайян намоем.

Тибқи маънои ҳосила, суръати афзоиши бактерияҳо ба $b'(t)$ баробар.

Мувофиқи фарзияамон, дар вақти ихтиёрии t миқдори $b'(t)$ ба миқдори $b(t)$ пропортсионал, яъне муносибати

$$b'(t)=kb(t) \qquad (1)$$

бамаврид аст. Дар ин ҷо k – коэффитсенти пропортсионалӣ.

Дар ибтидо адади пропортсионалӣ $b_0 = b(0)$ дар вақти $t=0$ бошад.

Маълум аст, ки, $b(t)=b_0e^{kt}$ функсияро (1) - қаноат мекунонад.

Дарҳақиқат, $b'(t)=(b_0e^{kt})'=kb_0e^{kt}=kb(t)$.

Аввал 10 миллион бактерия бошад, (b_0=10 млн), адади чунин бактерияҳо баъди як соат ба $b(1)=10e^{k}=20$ (млн) баробар мешавад, яъне e^k=2. Аз ин ба $k=\ln 2$ соҳиб мешавем.

Адади популятсияи бактерияҳоро дар фосилаи вақт t меёбем:

$b(t)=10e^{(\ln 2)t}=10\cdot 2^{t}$ (млн).

Ин натиҷа ба натиҷаи дар синфи 10 гирифтаамон рӯ ба рӯ меафтад.▲

Маълумоти таърихӣ. Дар асри 18 олими англис Томас Малтус мувофиқи мулоҳизаи боло фикр ронда, барои афзоиши шумораи аҳолӣ дар рӯйи замин муносибати

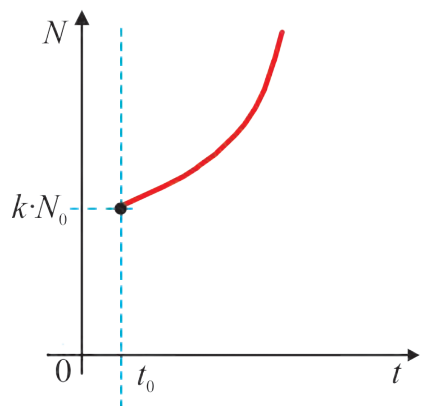
$$N'(t)=kN(t) \qquad (2)$$

-ро ҳосил кард, ки ин ҷо шумораи аҳолӣ дар вақти $N(t)$ дар лаҳзаи t.

Ин ҷо шумораи ибтидоии аҳолӣ $N_0=N(t_0)$ дар вақти t_0 бошад. Дар ин ҳолат функсияи $N(t)=N_0e^{k(t-t_0)}$ муодилаи (2)-ро қонеъ мекунад.

Дарҳақиқат, $N'(t)=N_0(e^{k(t-t_0)})'=kN_0e^{k(t-t_0)}=kN(t)$.

Қонунияти $N(t)=N_0e^{k(t-t_0)}$ ***афзоиши экспонентсиалии*** аҳолиро**,** яъне ифодаи ҷарайёни бошиддату беисти афзоишро ба инобат гирифта, бо гузашти вақт барои инсоният норасоии захираи хӯрокаро “башорат“ кардани Томас Малтусро қайд менамоем (нигаред ба расми 30).



Расми 30.

Масъалаи 2. Экология муносибати байниҳамдигарии организми зиндаро ба муҳити беруна меомӯзад. Афзоиш, ёки бо сабабҳои гуногун дар кадом ҳамбастагӣ будани вобастагии суръати тағйирёбии адади популятсияҳоро нисбати вақт омӯзед.

△ Адади популятсияи вақти $N(t)$ дар лаҳзаи t бошад, дар он ҳолат агар вақти байниҳамдигарии адади популятсия ба шумораи ҷонварони таваллудшаванда A, шумораи нобудшавандаро B гӯем, бо асоси қотеъ гуфтан мумкин аст, ки суръати тағйирёбии нисбии вақт N муносибати

$$N'(t)=A-B \qquad (3)$$

-ро қонеъ мегардонад.

Тадқиқотчиён вобастагии A ва B -ро ба N чунин тавсиф мекунанд.

а) ҳолати аз ҳама содда: $A=aN(t)$, $B=bN(t)$. Ин ҷо a ва $b-$коэффитсиенти якхелаи вақти таваллуд ва вафот.

Дар ин ҳолат муносибат (3)-ро дар намуди

$$N'(t) = (a-b)N(t) \tag{4}$$

навиштан мумкин.

Шумораи популятсияи ибтидоӣ $N_0=N(t_0)$ дар вакти t_0 бошад.

Дар ин ҳолат функсияи $N(t)=N_0e^{(a-b)(t-t0)}$- ро қонеъ мекунад(санҷед).

б) ҳолати $A=aN(t)$, $B=bN^2(t)$ ҳам дучор мешавад.

Ин ҷо муносибати

$$N'(t)=aN(t) - bN^2(t) \tag{5}$$

ҳосил мешавад.

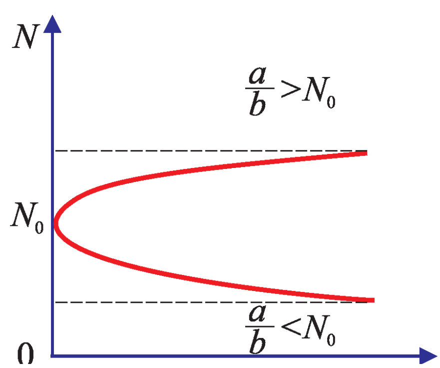
Санҷидан мумкин, функсияи $N(t)=\dfrac{N_0 a/b}{N_0+[a/b-N_0]e^{-a(t-t_0)}}$ (5)

муодиларо қонеъ мекунад. ▲

Муносибати (4) -ро дар соли 1845, олими аҳолишиноси Белгия Ферхюлст дар ҳолати задухӯрди дохилии популятсияро ба ҳисоб гирифтан кашф кард. Ин натиҷа нисбати муносибати (2) -и Малтус ривоҷи популятсияро мушаххастар тавсиф мекунад.

Саволе ба миён меояд, ки афзуншавӣ ва камшавии популятсия ба ададҳои a ва b ҷӣ вобастагӣ дорад?

Дар накшаи зерин барои ҳолати $\dfrac{a}{b}>N_0$ ва $\dfrac{a}{b}<N_0$ графики функсияи намуди $N(t)=\dfrac{N_0 a/b}{N_0+[a/b-N_0]e^{-a(t-t_0)}}$ тасвир шудааст.



Расми 31.

Намоён аст, ки бо гузашти вақт адади популятсия ба адади $\dfrac{a}{b}$ наздик мешавад. Ин ҳолат ҳодисаи омезишро дар худ таҷассум менамояд.

Қаҷхатаи дар сурат тасвиршуда аз ҷониби Малтус қаҷхатаи *логистик* нимида шуда, он дар соҳоти гуногуни ҳаёти инсон ба назар мерасад.

Муносибати намуди пайвасткунандаи функсия ба ҳосилаи ҳамин функсия $y'(x)=F(x;\ y)$-ро муодилаи дифференсиалӣ мегӯянд.

Муносибатҳои (1) – (5) дар боло овардашуда ба муодилаҳои дифференсиалӣ мисол аст

Ҳар як функсияи муодилаи дифференсиалиро қонеъкунанда ҳалли он гуфта мешавад Дар математикаи олӣ дар шартҳои муайян муодилаи дифференсиалии намуди $y'(x)=F(x, y)$ қонеъкунандаи шарти ибтидоии $y(x_0)=y_0$ вуҷуд доштани ҳалли ягонаи $y(x)$ исбот шудааст.

Масъалаи 3. Вақтро дар лаҳзаи t ба вақти $x(t)$ вобаста будани шумораи харидороне, ки дар бораи маҳсулоти фурӯшӣ хабардор шудаанд,омӯзед. (Ин масъала барои муайян намудани самарадории реклама муҳим аст.)

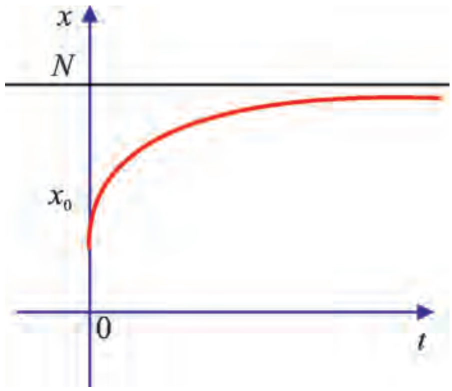
△ Шумораи умумии харидоронро бо N ишора мекунем, шумораи аз фурӯши маҳсулот бехабар $N-x(t)$ мешавад.

Суръати афзоиши шумораи харидорони аз фурӯши маҳсулот бохабар ба $x(t)$ ва ба $N–x(t)$ пропортсионал ҳисобем, ба муодилаи дифференсиалии зерин соҳиб мешавем:

$x'(t)=kx(t)(N–x(t))$, дар ин ҷо $k > 0$ – коэффитсенти пропортсионалӣ.

Ҳалли ин муодила аз $x(t)=\dfrac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$ иборат аст, ин ҷо $P=\dfrac{1}{e^{NC}}$, C – адади доимӣ.

Намоён аст, ки дар ҳама ҳолат t бо гузашти вақт ҳадди $Pe^{–Nkt}$ хурд шудан мегирад ва ин ҷо қимати ифодаи, $x(t)=\dfrac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$ ба N наздик мешавад (нигаред ба расми 32). ▲



Расми 32-.

Масъалаи 4. Ҷисми доимии массааш m, ғунҷоиши гармиаш c дар лаҳзаи ибтидоӣ ба ҳарорати T_0 соҳиб шавад. Ҳарорати ҳаво доимӣ ва ба τ $(T > \tau)$ баробар аст. Ба фарқи миёни ҳарорати ҳаво ва ҷисм, гармии дар вақти хурди беохир додаи ҷисм, инчунин ба вақт пропортсионал буданро ба этибор гирифта, қонунияти хунукшавиро ёбед.

△ Ҳангоми хунукшавӣ ҳарорати ҷисм аз T_0 то ба τ паст мешавад. Ҳарорати ҷисм дар лаҳзаи вақти t ба $T(t)$ баробар бошад. Дар фосилаи вақти беохири хурд миқдори гармии додаи ҷисм, мувофиқи гуфтаи боло ба

$$Q'(t)=-k(T-\tau)$$

баробар, дар ин ҷо k –и коэффитсенти пропортсионалӣ аст.

Аз тарафи дуюм, аз физика маълум аст, ки ҳангоми аз ҳарорати T то ҳарорати τ хунук шудани ҷисм ба миқдори гармии додашудаи $Q=mc(T(t)-\tau)$ баробар аст. Ҳосиларо ҳисоб мекунем:

$$Q'(t)=mcT'(t). \qquad (6)$$

Барои $Q'(t)$ ҳар ду ифодаи ёфташударо муқоиса карда, муодилаи дифференсиалии $mcT'(t)=-k(T-\tau)$ -ро ҳосил мекунем.

$$T(t)=\tau+Ce^{-\frac{k}{mc}t}$$

функсияи (6) муодилаи дифференсиалиро қонеъ мекунад (худатон санҷед!), дар ин ҷо C – адади ихтиёрии доимӣ.

Шарти ибтидоӣ ба ёфтани ($t=0$ da $T=T_0$) C имкон медиҳад:

$$C=T_0-\tau.$$

Барои ҳамин қонуни хунукшавии ҷисм чунин навишта мешавад:

$$T(t)=\tau+(T_0-\tau)\,e^{-\frac{k}{mc}}.$$

Ҷавоб: $T(t)=\tau+(T_0-\tau)\,e^{-\frac{k}{mc}}$ ▲.

Масъалаи 5. Ҳарорати нони аз танӯр баромада (канда) дар мобайни 20 дақиқа аз 100° ба 60° фаромад. Ҳарорати муҳити беруна 25°. Ҳарорати нон дар чанд дақиқа то ба 30° паст мешавад?

△ Аз ҳалли масъалаи боло истифода бурда, қонуни хунукшавии нонро дар намуди зерин навишта метавонем:

$$T(t)=\tau+(T_0-\tau)\,e^{-\frac{k}{mc}}=25+\left(100-25\right)e^{at}=25+75e^{at},$$

дар ин ҷо a – коэффитсенти номаълум.

Барои ёфтани a дар t=20 аз баробарии T(20)=60 истифода мебарем:

$$T(20)=25+75e^{20a}=60,$$

$$75e^{20a}=35,\quad (e^a)^{20}=\frac{35}{75}=\frac{7}{15},\quad e^a=\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Ҳамин тавр, хунукшавии нон ба қонунияти $T=25+75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}$ тобеъ будааст.

Вақти пастшавии ҳарорати нон то ҳарорати 30° - ро меёбем:

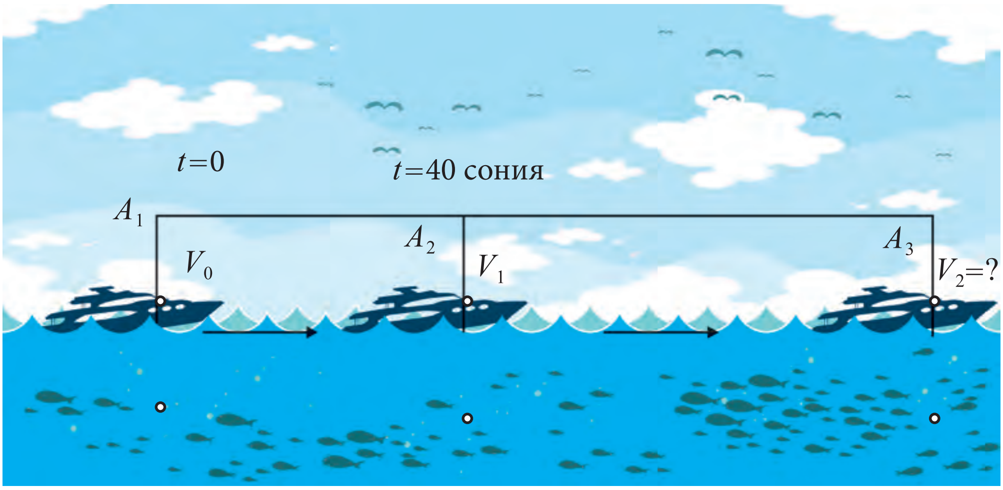
$$30=25+75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}},\quad \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}=\frac{5}{75}=\frac{1}{15}$$

барои $$\ln\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}=\frac{t}{20}(\ln(7)-\ln(15))$$

буданаш $$t^*=\frac{-20\ln 15}{\ln 7-\ln 15}\approx\frac{-20\cdot 2{,}7081}{-0{,}762}\approx 71.$$

Ҷавоб: Дар 1 соату 11 дақиқа ҳарорати нон то ба 30° паст мешавад.

▲**Масъалаи 6.** Завраки мотордор дар оби ором бо суръати 20 км/соат дар ҳаракат аст. Пас аз вақти маълум мотор аз кор монд. Баъди гузаштани 40 сония вақти аз кор мондани мотор суръати заврақ 8 км/соат шуд. Муқобилияти об бо суръат пропортсионал бошад, баъди 2 дақиқа гузаштани вақти бозистодани матор суръати завракро ёбед.



Расми 33.

△ Ба заврақ қувваи $F=-kv$ таъсир расонида истодааст. Мувофиқи қонуни Нютон $F=mv'(t)$. Ин ҷо $mv'(t)=-kv$

Ин муодиларо функсияи нишондиҳандагии $v(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}$ қонеъ мекунад. Дар t=0 дар шарти $v=20$ омада C=20 мебароянд.

Аз он $v(t)=20e^{-\frac{r}{m}t}$. $t=40$ сония s $=\frac{1}{90}$ соат бошад суръати заврақ ба 8 км/соат баробар, ин ҷо $8=20e^{-\frac{r}{m}\cdot\frac{1}{90}}$ ёки $e^{\frac{r}{m}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{90}$ инчунин

$t=2$ дақ $=\frac{1}{30}$ соат бошад.

$v=20\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right]^{-\frac{1}{30}}=20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}=\frac{32}{25}\approx 1,28$ (км/с) буданашро меёбем.

Ҷавоб: Баъди гузаштани 2 дақиқа вақти хомӯш шудани мотор суръати тахминии вақт ба 1,28 км/соат баробар мешавад. ▲

Масъалаи 7. Дар натиҷаи коҳиши радиоактивӣ массаи моддаи радиоактивӣ $m(t)$ - ро нисбати қонунияти тағйирёбии вақт ёбед. Дар ин ҷо $m(t)$ грамм, t – солҳо ҳисоб мешавад.

△ Фараз мекунем суръати коҳиш бо масса пропортсионал аст, ба муодилаи дифференсиалии

$$m'(t)=-\alpha\, m(t) \tag{7}$$

соҳиб мешавем. Ҳалли муодила будани функсияи $m(t)=Ce^{-\alpha t}$ -ро санҷиданамон мумкин.

Дар шарти ибтидоӣ $m(t_0) = m_0$ ба қонунияти $m(t) = m_0 e^{-\alpha\ (t-t_0)}$ соҳиб мешавем.

Ҷавоб: $m(t) = m_0 e^{-\alpha\ (t-t_0)}$. ▲

Моделҳои иқтисодӣ. Талаб ва таклиф фаҳмиши амиқи (асоси)-и иқтисодиёт аст.

Талаб (талаб ба маҳсулот ва хизматҳо) – харидор, хоҳиши истеъмолгар барои хариди мавод ва неъматҳои гуногун аз бозор; эҳтиёҷи таъмини ба бозор баромадан ва имкониятҳои пулӣ.

Ба тағйирёбии миқдори талаб якчанд омил таъсир мерасонад. Аз байни онҳо аз ҳама асосиаш омили нарх аст. Пастшавии нархи маҳсулот ба зиёдшавии миқдори маҳсулоти харидашаванда ва баръакс зиёдшавии нарх ба камшавии миқдори харид оварда мерасонад.

Таклиф – дар вақти муайян ва бо нархҳои муайян маҳсулот ва хизматҳои ба бозор баромада ва баромаданаш мумкин дар он ифода меёбад; таклиф – хоҳиши ба фурӯши маҳсулоти худ дар бозор доштаи истеҳсолгарон (фурӯшандагон). Дар бозор байни нархи маҳсулот ва миқдори таклиф вобастагии бевосита мавҷуд аст: ҳар қадар нарх баланд бошад, дар ҳолати дигаргун нашудани шароитҳо, барои фурӯш ҳамон қадар бештар маҳсулот таклиф мешавад, бо пастшавии нарх ҳаҷми таклиф ҳам кам мешавад.

Мазмуни асосии талаб ва таклиф тавассути нарх вуҷуд доштани алоқамандӣ ба ҳамдигар аст. Ин алоқамандӣ – қонуни талаб ва таклиф қонуни объективии иқтисодиёти бозор ба шумор меравад. Мувофиқи қонуни талаб ва таклиф, фақат миқдоран ба талаб ва таклифи дар бозорбуда не, балки аз ҷиҳати таркибӣ ҳам ба якдигар бояд мувофиқ ояд, дар ҳамин вақт ба мувозинат дар бозор ноил шудан мумкин. Ин қонун қонуни тағйирёбӣ буда, ба дараҷаи қувваи идоракунанда ва тартибдароранда бардошта мешавад. Мувофиқи он дигаргуниҳои талаби бозор дарҳол ба истеҳсолгар бояд расонида шавад. Ба нисбати талабу таклифи бозор нигоҳ карда, суръати истеҳсолот ва сохтори он ташкил меёбад.

Масъалаи зеринро мебинем.

Фермер дар давоми муддати тӯлонӣ барои фурӯхтан меваҳоро ба бозор мебарорад. Дар охири ҳар ҳафта ӯ суръати дигаршавии нархҳоро мушоҳида карда, барои ҳафтаи оянда нархи нави меваҳои ба бозор барорандаашро тахмин мекунад.

Ҳамин хел истеъмолгарон ҳам суръати дигаргуншавии нархро мушоҳида карда, миқдори хариди меваҳо барои ҳафтаи ояндаро муайян мекунанд.

Нархи меваҳо барои ҳафтаи ояндаро бо p, суръати тағйирёбии нархро бошад бо p' ишора кунем.

Бо боварӣ метавон гуфт, таклиф ҳам талаб ҳам бо нархи маҳсулот ва суръати дигаршавии он вобаста аст. Ин пайвастагӣ чӣ хел мешавад?

△ Намуди аз ҳама соддаи чунин пайвастагиҳо ин гуна мешудааст: $y = ap' + bp + c$, дар ин ҷо a, b, c – ададҳои ҳақиқӣ.

Масалан, бо q талабро, бо s бошад таклифро ишора кунем, барои онҳо пайвастагиҳои боло бо ёрии муодилаҳои $q = 4p' - 2p + 39$, $s = 44p' + 2p - 1$ ифода намудан мумкин.

Дар ин ҳолат баробарии ҳамдигарии талабу таклиф бо ёрии муносибати $4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1$ ифода меёбад.

Ин ин баробарӣ муодилаи дифференсиалии намуди $p' = -\dfrac{p-10}{10}$ ҳосил мекунем.

Агар нархи ибтидоиро $p(0) = p_0$ гуфта ишора кунем, дигаргуншавии нархро бо қонунияти $p = (p_0 - 10)e^{-\frac{t}{10}} + 10$ ҳосил мекунем ▲

Сармоя. Фараз намоем, як намуд маҳсулот бо нархи p фурӯхта мешавад, функсияи $Q(t)$-ро дар тӯли вақти t тағйирёбии миқдори маҳсулоти истеҳсолшуда гӯем, дар он ҳолат дар давоми вақти t баробари $pQ(t)$ даромад гирифта мешавад. Бигузор, як қисми даромади аз истеҳсолот ба даст омада, ба сармояи истеҳсолот сарф шавад, яъне

$$I(t) = mpQ(t) \tag{8}$$

m – меъёри сармоя, адади тағйирнаёбанда ва $0 < m < 1$.

Агар бозор ба пуррагӣ таъмин гашта бошад ва маҳсулоти истеҳсолшуда пурра фурӯхта шуд гуфта тасаввур намоем, ин ба боз ҳам зиёдшавии суръати истеҳсолот оварда мерасонад.

Суръати истеҳсолот бошад ба зиёдшаии сармоя пропортсионал, яъне

$$Q' = l \cdot I(t), \tag{9}$$

дар ин ҷо l – коэффитсенти пропортсионалӣ.

формулаи (8) -ро ба (9) гузошта муодилаи дифференсиалии

$$Q' = kQ, \quad k = lmp \tag{10}$$

-ро ҳосил мекунем.

C – адади ихтиёрии тағйирнаёбанда бошад фунсияи намуди $Q = Ce^{kt}$ муодилаи дифференсиалии (10) -ро қонеъ менамояд.

Фараз намоем, дар лаҳзаи ибтидоии $t=t_0$ ҳаҷми истеҳсолнамоии маҳсулот Q_0 дода шудааст. Дар ин ҳолат аз ин шарт C -и тағйирнаёбандаро ёфтан мумкин:

$Q_0 = Ce^{kt_0}$, аз ин $C = Q_0 e^{-kt_0}$.

Дар натиҷа тағйирёбии ҳаҷми истеҳсолот бо қонунияти $Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}$ -ро дониста мегирем.

Савол ва супоришҳо

1. Ҷарайёни пас аз вақти маълум ба ду тақсимшавии бактерияҳоро бо ёрии ҳосила моделӣ намоед.
2. Масъалаи доир ба афзоиши аҳолӣ дар рӯйи замини Томас Малтусро фаҳмонед.
3. Каҷхатаи логистикии Томас Малтусро фаҳмонед.
4. Масъалаи доир ба самарадории рекламаро бо ёрии ҳосила моделӣ намоед.

Машқҳо

Аз ҳалли масъалаи 4 истифода бурда, машқҳоро иҷро намоед **(107–108)**:

107. Порчаи оҳани ҳарораташ 25°С буда, ба печ гузошта шуд. Ҳарорати печ аз 25°С сар карда, ҳар дақиқа бо суръати якмароми 20°С бардошта мешавад. Фарқи ҳарорати печ ва оҳан T°С бошад оҳан дар ҳар дақиқа бо суръати $10 \cdot T$°С тафсонида мешавад. Ҳарорати порчаи оҳанро баъд аз 30 дақиқа ёбед.

108. Ҳарорати ибтидоии ҷисм 5°С. Ҷисм дар давоми N дақиқа то 10°С тафсид. Ҳарорати муҳити атроф 25°С аст. Кай ҷисм то 20°С метасфад?

Аз ҳалли масъалаи 7- и матн истифода бурда, машқҳоро иҷро намоед:

109. Мувофиқи таҷриба дар давоми 1 сол аз ҳар грамм радий 0,44 мг модда коҳиш меёбад.

а) баъди чанд сол 20 фоизи ин радий коҳиш меёбад?

б) аз ин радий баъди 400 сол чанд фоиз боқӣ мемонад?

Аз мулоҳизаҳои ҳалли масъалаи 6 -и матн истифода бурда машқҳоро иҷро кунед **(110–111):**

110. Заврақ зери таъсири муқовимати об ҳаракати худро оҳиста мегардонад. Муқовимати об бо суръати заврақ пропортсионал аст.

Суръати ибтидоии заврақ 1,5 м/с, баъди 4 сония суръати он 1 м/с ро ташкил кард. Баъди чанд сония суръати заврақ 2 маротиба кам мешавад?

111. Зарфи ҳаҷмаш 10 *л* бо ҳаво пур шудааст (80% азот, 20% кислород). Ба ҳамин зарф дар 1 сония бо суръати 1 литр азот мефиристанд. Он ба таври мунтазам омезиш ёфта, бо ҳамин шитоб аз зарф баромада истодааст. Баъди чӣ қадар вақт дар зарф омехтаи азотии 95% ҳосил мешавад?

Нишондод: бо $y(t)$ дар вақти t ҳиссаи азотро ишора кунем,функсия $y(t)$ муносибати $y' \cdot V = a(1-y)$ қонеъ мегардонад. Дар ин ҷо V ҳаҷми гармшавӣ, a- суръати ҳаводиҳӣ.

! Намунаи кори назоратӣ

1. Зарфи металлии болокушодаи шакли параллелепипеди росткунҷаи асосаш квадрат сохтан мехоҳанд. Ҳаҷми зарф бояд 270 *л* шавад. Андозаҳои зарф чӣ гуна бошад дар сохтани он аз ҳама кам металл сарф мешавад?

2. Ҷисм бо қонунияти $s(t) = -\dfrac{t^4}{4} + 72t^3$ дар ҳаракат аст

(масофа $s(t)$ бо метр, *вақт* t бо сония ҳисоб карда мешавад).

1) вақти шитоби калонтарини ба даст омада (t_0);

2) суръати лаҳзавии вақт t_0;

3) масофаи дар мобайни вақти t_0 тайшударо ёбед.

3. Бо истифода аз формулаи тақрибии ҳисоб $\ln 0{,}92$ -ро ёбед.

4. Бо истифода аз формулаи тақрибии ҳисоб sin(–1, 2)-ро ёбед.

5. Даромади ҳаррӯзаи тадбиркори истеҳсолкунандаи маҳсулот бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$P(x) = -3x^2 + 42x - 6$ (ҳазор сӯм) дар ин ҷо x – адади маҳсулот.

Инҳоро муайян кунед:

1) барои гирифтани даромади калонтарин тадбиркор бояд чанд то маҳсулот истеҳсол кунад?

2) даромади калонтарини тадбиркор чанд сӯмро ташкил мекунад?

33–36 ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲО

112. Мувофиқи қонуни ҳаракати ҷисм суръати хурдтарин ва калонтарини $s=s(t)$ -ро ёбед:

1) $s=13t$; 2) $s=17t-5$; 3) $s=t^2+5t+18$; 4) $s=t^3+2t^2+5t+8$; 5) $s=2t^3+5t^2+6t+3$; 6) $s=13t^3+2t^2$; 7) $s=t^3+t^2+3$.

113. Ба графики функсияи додашуда: 1) $x_0=-1$; 2) $x_0=2{,}2$; 3) $x_0=0$ расандаи дар нуқтаи абсиссадор гузаронидаро ёбед:

1) $f(x)=12x^2+5x+1$; 2) $f(x)=13x+4$; 3) $f(x)=60$; 4) $f(x)=x^3+4x$.

114. Барои функсияи додашудаи $y=-7x+2$ муодилаи расандаи ба хати рост параллелбударо нависед:

1) $f(x)=5x^3-2x^2+16$; 2) $f(x)=-4x^2+5x+3$; 3) $f(x)=-8x+5$.

115. Нуқтаҳои расандаашон ба графики функсияҳои додашудаи $f(x)$ ва $g(x)$ параллелро ёбед:

1) $f(x)=2x^2-3x+4$, $g(x)=12x-8$;
2) $f(x)=18x+19$, $g(x)=-15x+18$;
3) $f(x)=2x+13$, $g(x)=4x-19$;
4) $f(x)=2x^3$, $g(x)=4x^2$;
5) $f(x)=2x^3+3x^2$, $g(x)=15x-17$;
6) $f(x)=2x^4$, $g(x)=4x^3$.

116. 1) графики функсияи $y=\dfrac{1}{x}$ дар нуқтаи $x=-\dfrac{1}{2}$ гузарандаи муодилаи расандаро созед. 2) параболаи $y=x^2$ ба абсиссаҳои мувофиқи нуқтаҳои $x=1$ va $x=3$ пайваст шудаанд. Расандаи ба порчаи ин 2 нуқтаро пайвасткунанда параллели парабола аз кадом нуқта мегузарад?

3) ҷисм бо қонунияти $s(t)=\dfrac{2}{9}\cdot\sin\dfrac{\pi t}{2}+3$ дар ҳаракат аст. (s-бо сантиметр, t-бо сония). Суръати ҷисмро дар 1- сония ёбед.

117. Ҳосилаи функсияро дар нуқтаи додашуда ҳисоб кунед:

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=-\dfrac{1}{2}$; 2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=-\pi$;

3) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=-2$;

4) $f(x)=-\sin x$,, $x_0=-\frac{\pi}{3}$.

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=5$;

6) $f(x)=\sin x$,, $x_0=\frac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x_0=-2$;

8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$,, $x_0=-\frac{\pi}{8}$.

118. Суръат ва шитоби вақти додашударо ёбед:

1) $s(t)=5t^2-t+50$ $t_0=2$;

2) $s(t)=t^3+12t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=2t+t^3$, $t_0=5$;

4) $s(t)=8\sin t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

119. Ҳосилаи функсияи абсиссааш дар нуқта нишондодаро ҳисоб кунед:

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=\frac{1}{2}$;

2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=\pi$;

3) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=2$;

4) $f(x)=-\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$.

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=-5$;

6) $f(x)=\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $x_0=2$;

8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=-\frac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$, $x_0=\frac{\pi}{8}$;

10) $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

120. Суръат ва шитоби вақти додашударо ёбед:

1) $s(t)=3t^2-2t+10$, $t_0=2$;

2) $s(t)=t^3-6t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=5t+2t^3$, $t_0=5$;

4) $s(t)=8\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

Ҳосилаи функсияи додашударо ёбед (**121–122**):

121. 1) $f(x)=-x^2+x+30$; | 2) $f(x)=\sin x-\cos x$; | 3) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$;

4) $f(x)=4^x-\sin x$; | 5) $f(x)=8\cos x$; | 6) $f(x)=\ln x-10x^2+x-1$.

122. 1) $y = x^4$; 2) $y = \frac{x-1}{x+2}$; 3) $y = x - \frac{20}{x}$; 4) $y = x^2 \ln x$;

5) $y = x^3 \sin x$; 6) $y = e^x \sin x$; 7) $y = \frac{x+1}{4x^2}$; 8) $y = 2(10x-1)\sin x$.

123. Ададҳои барои функсияи $f'(-\frac{\pi}{2}), f'(\frac{\pi}{4})$ додашударо ҳисоб кунед:

1) $f(x) = e^x \cos x$; 2) $f(x) = 3x + 1$; 3) $f(x) = 2x^2 + x + 3$;

4) $f(x) = \sin x + x^2$; 5) $f(x) = \sin x + \cos x$; 6) $f(x) = \sin x$;

7) $f(x) = \cos x + x^4$; 8) $f(x) = \sin 3x + \cos 3x$.

124. Ҷисм бо қонунияти $x(t) = -\frac{t^3}{6} + 6t^2 + 15$ дар ҳаракат аст.

1) вақти нол будани шитоб t_0; 2) суръати ҳамин вақтро t_0 ёбед.

125*. Функсияи $f(x) = x^2 - 13x + 2$ бо тири Ox дар рӯйи кадом кунҷ бурида мешавад?

126. Адади $f'(0)$ ёбед: 1) $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$; 2) $f(x) = (x+10)^6$.

127. $y'(x)$-ро ёбед: 1) $y(x) = \sin^2 x$; 2) $y(x) = \cos^2 x$; 3) $y(x) = \operatorname{tg}^2 x$.

128. Фосилаи афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёбед.

1) $f(x) = 3 + 7x$; 2) $f(x) = x^3 + 17x$; 3) $f(x) = \frac{1}{4}x + 18$;

4) $f(x) = \frac{x+21}{x}$; 5) $f(x) = x^2 + 5x - 14$; 6) $f(x) = x(x^2 + 8)$;

7) $f(x) = -x^2 - 4x + 6$; 8) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$;

9) $f(x) = x^3 - 12x^2 - 17x - 23$; 10) $f(x) = 3x^4 + 18x^3 - 6$;

11) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 19x + 22$; 12) $f(x) = x^4 + 7x^2$.

129. Нуқтаҳои статсионари функсияро ёбед:

1) $f(x) = 3x^2 - 7x + 9$; 2) $f(x) = 19x - \frac{1}{7}x^3$; 3) $f(x) = 5x^3$;

4) $f(x) = 8x^2$; 5) $f(x) = 7x - 14$; 6) $f(x) = 27 - x^3$;

7) $f(x) = 12x^3 + 13x^2 - 16$; 8) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$.

130. Максимум ва минимумҳои локалии функсияро ёбед:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{4}x^4$; 2) $f(x)=14+13x^2-12x^3$;

3) $f(x)=x^4-3x^3+x^2+9$; 4) $f(x)=2x^4-x^3+7$.

131. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавӣ ва максимум ва минимумҳои локалии функсияҳоро ёбед:

1) $f(x)=x^3-64x$; 2) $f(x)=2x^3-24$; 3) $f(x)=4x^3-108x$.

132. Қимати аз ҳам хурд ва аз ҳама калони функсияро ёбед:

1) $f(x)=x^4-3x^2+2$, $x\in[-4;\ 1]$; 2) $f(x)=x^5+6x^3+1$, $x\in[-1;\ 2]$;

3) $f(x)=\frac{x}{x+4}$, $x\in[1;\ 5]$; 4) $f(x)=x^3+6x^2+5x+8$, $x\in[-3;\ 4]$.

133. Графики функсияро созед:

1) $y=x^3-2x^2+3x-2$; 2) $y=\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3$; 3) $y=x^4+4x^3$.

134. Барои иҳота намудани атрофи майдони кишти шакли чоркунҷадошта 1000 метр панҷара хариданд. Бо ёрии ин панҷара ба миқдори калонтарин чанд метри мураббаъ майдонро иҳота намудан мумкин?

135. Аз картони шакли квадратидоштаи тарафҳояш 16 дм буда қуттии болокушода тайёр карданд. Ин ҷо аз нӯги картон квадратчаҳои якхела бурида гирифтанд. Барои дар ҳаҷми ниҳоӣ шудани қуттӣ асоси он бояд чанд сантиметр бошад?

136*. Зарфи консерва дар силиндр буда, сатҳи пурраи он ба 512π см^2 баробар аст. Барои ба қадри калонтарин дар зарф ғунҷидани об радиус ва баландии асоси банка бояд чӣ гуна бошад?

137. Сатҳи майдони росткунҷашакл 3600 м^2. Тарафҳои майдон чӣ хел бошад, барои онро иҳота намудан ба қадри камтарин панҷара зарур мешавад?

138*. Ба кураи ҳавоии радиусаш 8 дм буда, ҳаҷми аз ҳама хурди берунаи конус кашида шудааст. Баландии ҳамин конусро ёбед.

139*. Дар зарфи металлии шакли параллелепеди росткунҷаи асосаш квадратбуда 32 *л* моеъ меравад. Андозаҳои зарф чӣ гуна бошад барои сохтани он металли аз ҳама кам сарф мешавад?

140. Ҷисм бо қонунияти $s(t)=-\frac{t^4}{4}+10t^3$ дар ҳаракат аст.

(s(t) бо метр, t бо сония ҳисоб мешавад).

1) вақти шитоби калонтарини ба даст омада (t_0);

2) суръати лаҳзавии вақт t_0;

3) масофаи дар мобайни вақти t_0 тайшударо ёбед.

141. Ба кураи ҳавоӣ $t\in[0;10]$ дар фосилаи $V(t) = t^3+3t^2+2t+4$ m³ ҳаво равон карданд.

1) вақти ибтидоии ҳаҷми ҳаво;

2) ҳаҷми ҳаво дар $t=10$ дақиқа;

3) суръати ҳавофиристиро дар $t=5$ дақиқа;

142. Акром барои дӯхтани шим супориш гирифт. Агар дар як моҳ x дона шим дӯзад, $p(x)=-2x^2+240x$ (ҳазор сӯм) даромад мегирад.

1) барои гирифтани даромади ниҳоӣ чӣ қадар шим дӯхтан даркор?

2) даромади калонтарин чанд сӯм мешавад?

143. Ҳосилаи функсияро ёбед:

1) $y=e^{3x}$; 2) $y=e^{\sin x}$; 3) $y=\sin(3x+2)$; 4) $y=(2x+1)^4$;

5) $y=\frac{x-2}{x^2+1}$; 6) $y=\frac{\ln x}{x}$; 7) $y=\operatorname{arctg}2x$; 8) $y=x^2\cdot\cos x$.

144. Барои функсияҳои $f(x)=e^{2x}$ ва $g(x)=4x+2$ функсияи мураккаби $F(x)$-ро созед:

1) $F(x)=f(g(x))$; 2) $F(x)=f(x)^{g(x)}$;

3) $F(x)=g(f(x))$; 4) $F(x)=\sqrt{g(g(x))}$.

145. Ҳосилаи функсияи мураккабро ёбед:

1) $y=(x^2+1)^5$; 2) $y=\ln\cos x$;

3) $y=\sqrt{5x-7}$; 4) $y=\sqrt{\operatorname{tg}(2x-3)}$;

5) $y=\operatorname{arctg}(3x-4)$; 6*) $y=\sin(\operatorname{arctg}2x)$;

7) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$; 8*) $y=e^{\sin(\cos x)}$.

146. Фосилаи афзоиш ва камшавии функсияро ёбед:

1) $y=2+x-x^2$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x\ge 0)$;

3) $y=3x-x^3$; 4) $y=2x-\sin x$;

5) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$; 6) $y=\dfrac{x^2}{2^x}$;

7) $y=(x-1)^3$; 8) $y=(x-1)^4$.

147. Нуқтаҳои статсионари функсия, максимум ва минимумҳои локалиро ёбед:

1) $y=x^3-6x^2+9x-4$; 2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

3) $y=x+\dfrac{1}{x}$; 4) $y=\sqrt{2x-x^2}$.

148. Қиматҳои калонтарин ва хурдтарини фосилаи нишондодашудаи функсияро ёбед:

1) $f(x)=2^x$, $[-1;5]$; 2) $f(x)=x^2-4x+6$, [–3; 10];

3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, [0,01; 100]; 4) $f(x)=\sqrt{5-4x}$, $[-1;1]$;;

5) $f(x)=\cos x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$; 6) $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$, [–10; 10];

7) $f(x)=\sin x$, $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$; 8) $f(x)=\left|x^2+3x+2\right|$, [–15; 10].

149. Функсияро санчед ва графики онро созед:

1) $y=3x-x^3$; 2) $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$; 3) $y=(x+1)(x-2)^2$;

4) $y=x+\dfrac{1}{x}$; 5) $y=\sqrt{16-x^2}$; 6) $y=\sqrt{x^2-9}$;

7) $y=x^2-5|x|+6$; 8) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2$

БОБИ II
ИНТЕГРАЛ ВА ТАТБИҚҲОИ ОН

37–39

МАФҲУМИ ФУНКСИЯИ ИБТИДОӢ ВА ИНТЕГРАЛИ НОМУАЙЯН

Агар нуқта аз оғози ҳаракат сар карда, дар байни вақти t масофаи $s(t)$-ро тай карда бошад, баробарии суръати лаҳзавии он ба ҳосилаи функсияи $s(t)$-ро медонем: $v(t)=s'(t)$. Масъалаи *акс* дар амалиёт: суръати ҳаракати нуқтаи додашуда, мувофиқи $v(t)$ масъалаи ёфтани роҳи тайкардаи он $s(t)$ низ дучор мешавад. Чунин функсия $s(t)$-ро ёфтан лозим, ки ҳосилаи он $v(t)$ бошад. Агар $s'(t)=v(t)$ бошад, функсияи $s(t)$ -ро ба функсияи $v(t)$ *функсияи ибтидоӣ* мегӯянд. Умуман чунин таъриф доровардан мумкин:

Агар барои x - и ихтиёрии ба $(a;\ b)$ дахлдор $F'(x)=f(x)$ бошад, функсияи $F(x)$ дар фосилаи $(a;\ b)$ ба $f(x)$ *функсияи ибтидоӣ* гуфта мешавад.

Мисоли 1. a – ягон адади додашуда ва $v(t)=at$ бошад, функсияи

$s(t)=\frac{1}{2}at^2$ ба функсияи $v(t)$ ибтидоӣ аст, чунки $s'(t)=(\frac{at^2}{2})'=at=v(t)$.

Мисоли 2. $f(x)=x^2$, $x\in(-\infty;\ \infty)$, бошад, функсияи $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ ба $f(x)$ дар $(-\infty;\ \infty)$ функсияи ибтидоӣ мешавад, чунки

$$F'(x)=(\frac{1}{3}x^3)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x).$$

Мисоли 3. $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, ин ҷо $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$, барои функсияи $F(x)=\mathrm{tg}x$ функсияи ибтидоӣ мешавад, чунки $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Мисоли 4. $f(x)=\frac{1}{x}, x>0$, бошад, функсияи $F(x)=\ln x$ ба $\frac{1}{x}$ функсияи ибтидоӣ мешавад, чунки $F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

Масъалаи 1. Айнан функсияи ибтидоии ягона будани функсияҳои $F_1(x)=\frac{x^4}{4}$, $F_2(x)=\frac{x^4}{4}+17$, $F_3(x)=\frac{x^4}{4}-25$ ба функсияи $f(x)=x^3$-ро исбот намоед.

△ Мувофиқи ҷадвали ҳосила навишта метавонем:

1) $F_1'(x)=(\frac{x^4}{4})'=4\cdot\frac{x^3}{4}=x^3=f(x);$

2) $F_2'(x)=(\frac{x^4}{4}+17)'=(\frac{x^3}{4})'+(17)'=4\cdot\frac{x^3}{4}+0+x^3=x^3=f(x);$

3) $F_3'(x)=(\frac{x^4}{4}-25)'=(\frac{x^4}{4})'-(25)'=4\cdot\frac{x^3}{4}-0=x^3=f(x).$

Аз ин масъала ба чунин хулоса омадан мумкин: функсияи ихтиёрии $F(x)=\frac{x^4}{4}+C$ (C – ягон адади тағйирнаёбанда) барои $f(x)=x^3$ ҳам функсияи ибтидоӣ шуда метавонад. Дарҳақиқат,

$$F'(x)=(\frac{x^4}{4}+C)'=(\frac{x^4}{4})'+C'=4\cdot\frac{x^3}{4}+0=x^3=f(x)\ .▲$$

Аз ин масъала боз ба чунин хулоса омадан мумкин: барои функсияи додашудаи $f(x)$ функсияи ибтидоии яккиматаи он номуайян мемонад.

Агар функсияи $F(x)$ ба $f(x)$ дар ягон масофа функсияи ибтидоӣ бошад, тамоми ибтидоиҳои функсияи $f(x)$-ро дар намуди $F(x)+C$ (C – адади ихтиёрии тағйирнаёбанда) навишта мешавад.

Тамоми функсияҳои намуди $F(x)+C$ маҷмӯи $f(x)$ -ро *интеграли номуайян* мегӯянд ва чунин $\int f(x)dx$ ишора мекунанд.

Ҳамин тавр, $\int f(x)dx=F(x)+C.$

$\int$ – ишораи интеграл, $f(x)$ – функсияи таҳти интеграл, $f(x)dx$ бошад ифодаи таҳти интеграл гуфта мешавад.

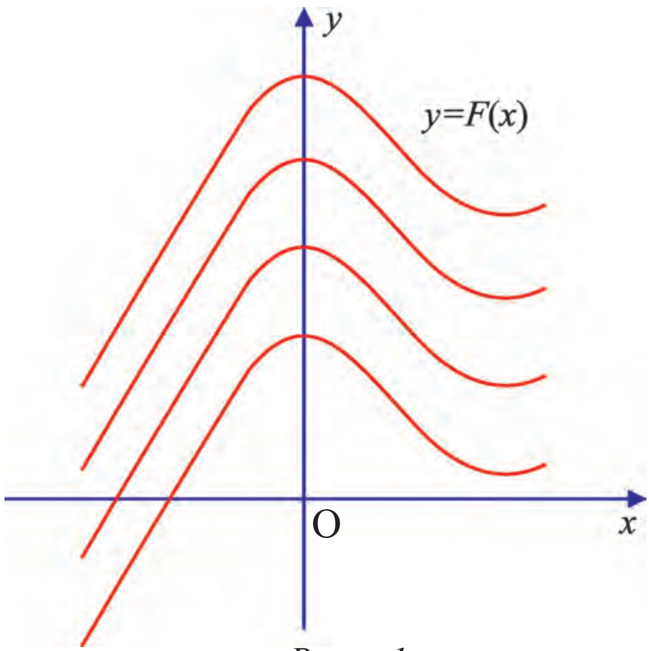
Мисоли 5. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$, чунки мувофиқи ҷадвали ҳосилаҳо,

$$(\frac{a^x}{\ln a}+C)'=(a^x)'\cdot\frac{1}{\ln a}+C'=a^x\cdot\ln a\cdot\frac{1}{\ln a}+0=a^x.$$

Мисоли 6. $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1,$

Чунки $(\frac{x^{k+1}}{k+1} + C)' = \frac{1}{k+1} \cdot (x^{k+1})' + C' = \frac{k+1}{k+1} \cdot x^k + 0 = x^k$. $k = -1$ бошад, дар $x>0$ тибқи мисоли 4, $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$

Графики функсияи $y = F(x) + C$-ро аз графики функсияи $y = F(x)$ аз ҷунбонидани тири атрофи Oy ҳосил мекунанд (расми 1). Аз ҳисоби интихоби C ҳамчун адади тағйирнаёбанда графики функсияи ибтидоиро барои аз нуқтаи додашуда гузаштан ноил шудан мумкин.



Расми 1.

Масъалаи 2. Функсияи ибтидоии аз графики функсияи $f(x)=x^2$дар нуқтаи $A(3;\ 10)$ гузарандаро ёбед.

△Тамоми функсияҳои ибтидоии функсия $f(x)=x^2$ дар намуди

$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ мешавад, чунки $F'(x) = (\frac{x^3}{3} + C)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + C' = x^2 + 0 = x^2.$

Адади доимии C -ро аз нуқтаи (3; 10)-и графики функсияи

$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ гузаранда интихоб мекунем:

дар $x=3$ будан $F(3)=10$ бояд бошад. Аз ин $10=\frac{3^3}{3}+C$, $C=1$. Ҳамин тавр, функсияи ибтидоии ҷустуҷӯшуда $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$ мешавад.

Ҷавоб: $\frac{x^3}{3}+1$. ▲

Масъалаи 3. Функсияи ибтидоии аз нуқтаи $A(8;15)$ -и графики функсияи $f(x)=\sqrt[3]{x}$ гузарандаро ёбед.

△Томоми функсияҳои ибтидоӣ $f(x)=\sqrt[3]{x}$ дар намуди $F(x)=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+$ + C мешавад, чунки

$$F'(x)=\left(\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+C\right)'=\frac{3}{4}(x^{\frac{4}{3}})'+C'=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}+C'=x^{\frac{1}{3}}+0=\sqrt[3]{x}.$$

Адади тағйирнаёбанда C-ро чунон интихоб мекунем, ки графики функсияи $F(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$ аз нуқтаи $A(8,\ 15)$ гузарад, яъне баробарии $F(8)=15$ иҷро шавад. $x^{\frac{4}{3}}=x\sqrt[3]{x}$ бошад $15=\frac{3}{4}\cdot 8\cdot\sqrt[3]{8}+C$, аз ин $C=3$. Ҳамин тавр, функсияи ибтидоии ҷустуҷӯӣ $F(x)=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$ мешавад.

Ҷавоб: $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$. ▲

Масъалаи 4*. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$ буданашро нишон диҳед.

Δ $x>0$ дар $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$, чунки $(\ln x+C)'=\frac{1}{x}+0=\frac{1}{x}$;

$x<0$ дар $\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C$, чунки $(\ln(-x)+C)'=\frac{(-1)}{(-x)}+0=\frac{1}{x}$. ▲

? Савол ва супоришҳо

1. Функсияи ибтидоӣ чист? Мисолҳо оред.
2. Функсияи ибтидоии як барои функсияи додашудаи $f(x)$ қимат дорад? Барои чӣ?
3. Графики функсияи ибтидоӣ $F(x)$ -ро аз нуқтаи додашуда чи гуна гузаронидан мумкин? Бо мисол фаҳмонед.

Машқҳо

1. Дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ $R=(-\infty;\infty)$ функсияи $f(x)$ барои функсияи $F(x)$ функсияи ибтидоӣ буданашро исбот кунед:

1) $F(x)=x^2-\sin 2x+2018$, $\quad f(x)=2x-2\cos 2x$;

2) $F(x)=-\cos\frac{x}{2}-x^3+28$, $\quad f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$;

3) $F(x)=2x^4+\cos^2x+3x$, $\quad f(x)=8x^3-\sin 2x+3$;

4) $F(x)=3x^5+\sin^2x-7x$, $\quad f(x)=15x^4+\sin 2x-7$.

Тамоми функсияҳои ибтидоии функсияҳои зеринро бо истифодаи ҷадвали ҳосилаҳо ёбед (**2–6**):

2. 1) $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$; 2) $f(x)=6x^5$; 3) $f(x)=x^{10}$; 4) $f(x)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x}$;

5) $f(x)=\sin x$; 6) $f(x)=\cos x$; 7) $f(x)=\sin 2x$; 8) $f(x)=\cos 2x$;

3. 1) $f(x)=4^x$; 2) $f(x)=\pi^x$; 3) $f(x)=e^x$; 4) $f(x)=a^x$;

5) $f(x)=a^{2x}$; 6) $f(x)=e^{\pi x}$; 7) $f(x)=10^{3x}$; 8) $f(x)=e^{2x+3}$.

4. 1) $f(x)=\frac{1}{2x+3}$; 2) $f(x)=\frac{1}{4x-5}$; 3) $f(x)=\frac{1}{2x+7}$;

4) $f(x)=\frac{1}{ax}$; 5) $f(x)=\frac{1}{ax+b}$; 6) $f(x)=\frac{a}{ax-b}$.

5. 1) $f(x)=\sin 3x$; 2) $f(x)=\sin(2x+5)$; 3) $f(x)=\sin(4x+\pi)$;

4) $f(x)=\cos 5x$; 5) $f(x)=\cos(3x-2)$; 6) $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$.

6. 1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^5}$; 3) $f(x)=(3x+2)^2$; 4) $f(x)=(2x-1)^3$.

7. Функсияи ибтидоии аз нуқтаи онро нишондодаи A гузарандаро барои функсияи мавҷудаи $f(x)$ ёбед:

1) $f(x)=2x+3$, $\quad A(1;\ 5)$; $\qquad$ 2) $f(x)=-x^2+2x+5$, $\quad A(0;\ 2)$;

3) $f(x)=\sin x$, $\quad A(0;\ 3)$; $\qquad$ 4) $f(x)=\cos x$, $\quad A(\frac{\pi}{2};5)$.

Барои функсияи додашудаи $f(x)$ чунин функсияи ибтидоии онро ёбед графики ин функсияи ибтидоӣ y бо хати рост фақат ба як нуқтаи умумӣ соҳиб бошад (**8–9**):

8. 1) $f(x)=4x+8,\ y=3;$ 2) $f(x)=3-x,\ y=7,$

3) $f(x)=4{,}5x+9,\ y=6{,}8;$ 4) $f(x)=2x-6,\ y=1.$

9*. $f(x)=ax+b,\ y=k.$

Нишондод: Аз шарти масъалаи $F(x)=\dfrac{ax^2}{2}+bx+C,$ ва муодилаи квадратии $\dfrac{ax^2}{2}+bx+C=k$ C ро ёбед.

$C=\dfrac{2ak+b^2}{2a}=k+\dfrac{b^2}{2a}$ мешавад.

10*. Барои $f(x)$ чунин функсияи ибтидоиро ёбед, ки он аз графики функсияи ибтидоии нуқтаҳои нишондодашудаи гузарад:

1) $f'(x)=\dfrac{16}{x^3},$ $A\,(1;\,10)$ va $B\,(4;\,-2);$

2) $f'(x)=\dfrac{54}{x^4},$ $A(-1;\,4)$ va $B\,(3;\,4);$

3) $f'(x)=6x,$ $A(1;6)$ va $B(3;\,30);$

4) $f'(x)=20x^3;$ $A(1;9)$ va $B(-1;\,7).$

Нишондод: Мувофиқи $f'(x)$ додашуда $f(x)+C_1$ ёфта мешавад. Сипас барои $f(x)+C_1$ функсияи ибтидоии $F(x)=\int f(x)dx+C_1x+C_2$ ёфта мешавад. Нуқтаҳои додашударо ба координатаҳои охири баробарӣ гузошта, барои ёфтани ададҳои C_1 ва C_2 ба системаи муодилаҳои хатӣ оваронида мешавад.

11*. Барои функсияи додашудаи $f(x)$ чунин функсияи ибтидоиро ёбед, ки он графики функсияи ибтидоии $f(x)$ -ро дар нуқтаи нишондодашудаи графики ҳосилааш абсиссадор буррад:

1) $f(x)=(3x-2)^{\frac{1}{3}},\ x_0=1;$ 2) $f(x)=(4x+5)^{\frac{1}{4}},\ x_0=-1;$

3) $f(x)=(7x-5)^{\frac{1}{7}},\ x_0=1;$ 4) $f(x)=(kx+b)^{\frac{1}{k}},\ x_0=\dfrac{1-b}{k}.$

12. Барои функсияи додашудаи $f(x)$ функсияи ибтидоии аз нуқтаи нишондодашуда гузарандаро ёбед:

1) $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$, $A(3;\ 7)$;
2) $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$, $A(0;\ 1)$;
3) $f(x)=\cos x$, $A(\dfrac{\pi}{2};8)$;
4) $f(x)=\sin x$, $A(\pi;10)$.

13. Функсияи $F(x)$ дар тири ададӣ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ буданашро нишон диҳед:

1) $F(x)=k\cdot e^{\frac{x}{k}}$, $f(x)=e^{\frac{x}{k}}$, $k\neq 0$;
2) $F(x)=C+\sin kx$, $f(x)=k\cdot\cos kx$, C – адади доимӣ;
3) $F(x)=C+\cos kx$, $f(x)=-k\cdot\sin kx$, C – адади доимӣ;
4) $F(x)=\dfrac{1}{5}\sin(5x+12)$, $f(x)=\cos(5x+12)$.

14. Функсияи ибтидоии дар нуқтаи нишондодашуда аз функсияи $f(x)$ гузарандаро ёбед:

1) $f(x)=\sin 3x$, $A(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{1}{3})$;
2) $f(x)=\cos 5x$, $A(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{4}{5})$;
3) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$, $A(\dfrac{\pi}{3};1)$;
4) $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}$, $A(\pi;\dfrac{9}{2})$.

15. Функсияи ибтидоии додашудаи аз нуқтаи $(x_o;\ y_o)$ гузарандаи он ба ҳалли маҷмӯъи муодилаҳо барои функсияи $f(x)$-ро ёбед:

1) $f(x)=3x^2$; $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=3,\\ 4\log_2 x-\log_2 y=2;\end{cases}$

2) $f(x)=4x^3$; $\begin{cases}5^x+5^y=30,\\ 3\cdot 5^x-2\cdot 5^y=15;\end{cases}$

3) $f(x)=\cos x$; $\begin{cases}x+y=\dfrac{3\pi}{2},\\ 4x-3y=-\pi.\end{cases}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{5x+e}$; $\begin{cases}2^x+3^y=4,\\ 3\cdot 2^x-3^y=0.\end{cases}$

40–43 ҶАДВАЛИ ИНТЕГРАЛҲО. ҚИМАТҲОИ СОДДАТАРИНИ ИНТЕГРОНӢ

Ҷадвали интегралҳоро бо ёрии ҷадвали ҳосилаҳо месозем.

№	**Функсия** $f(x)$	**Функсияи ибтидоӣ** $F(x)+C$
1	$x^p, \quad p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1}+C$
2	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert+C$
3	e^x	e^x+C
4	$\sin x$	$-\cos x+C$
5	$\cos x$	$\sin x+C$
6	$(kx+b)^p, \quad p \neq -1, \quad k \neq 0$	$\dfrac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
7	$\dfrac{1}{kx+b}, \quad k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$
8	$e^{kx+b}, \; k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}e^{kx+b}+C$
9	$\sin(kx+b), \quad k \neq 0$	$-\dfrac{1}{k}\cos(kx+b)+C$
10	$\cos(kx+b), \quad k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}\sin(kx+b)+C$
11	$1/\cos^2 x$	$\mathrm{tg}x+C$
12	$1/\sin^2 x$	$-\mathrm{ctg}x+C$
13	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
14	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}x+C$
15	$f(kx+b)$	$\dfrac{1}{k}F(kx+b)+C$
16	$f(g(x))g'(x)$	$F(g(x))+C$

Ягон X дар фосила муайян шудааст. Барои функсияи $F(x)$ ба функсия $f(x)$ функсияи ибтидоӣ будан, ҳарду функсия ҳам – $F(x)$ ва $f(x)$ – айнан дар фосилаи X бояд муайян шуда бошанд.

Масалан, $\frac{1}{5x-8}$ интеграли фосилвии функсияи $5x-8>0$, яъне $x>1,6$ муофиқи ҷадвал, ба $\frac{1}{5}\ln(5x-8)+C$ баробар.

Аз коидаҳои дифференсиронӣ истифода бурда, *қоидаҳои интегрониро* баён кардан мумкин.

Функсияҳои $F(x)$ ва $G(x)$ дар ягон фосила, бо усули мувофик, ба функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ функсияҳои ибтидоӣ бошад. Ин коидаҳо мувофиқ аст:

Қоидаи 1: Функсияи $a\cdot F(x)$ ба функсия $a\cdot f(x)$ функсияи ибтидоӣ мешавад, яъне

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot F(x)+C.$$

Қоидаи 2: Функсияи $F(x)\pm G(x)$ ба функсия $f(x)\pm g(x)$ функсияи ибтидоӣ мешавад, яъне:

$$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx=F(x)\pm G(x)+C.$$

Мисоли 1. Интеграли функсияи $f(x)=5\sin(3x+2)$ -ро ёбед.

Δ Интеграли ин функсияро мувофиқи қоидаи 1 ва банди 9-и ҷадвали интегралҳо меёбем:

$$\int f(x)dx=\int 5\sin(3x+2)dx=5\int\sin(3x+2)dx=$$

$$=5\cdot(-\frac{1}{3}\cos(3x+2))+C=-\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C,$$

чунки мувофиқи ҷадвали интегралҳо $\int\sin(3x+2)dx=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C.$

Ҷавоб: $-\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C.$ ▲

Мисоли 2. Интеграли функсияи $f(x)=8x^7+2\cos 2x$ -ро ёбед.

△ Интеграли ин функсияро мувофиқи қоидаҳои 1 ва 2 инчунин бандҳои 1 ва 10 - и ҷадвали интегралҳо меёбем:

$$\int f(x)dx=\int(8x^7+2\cos 2x)dx=8\int x^7dx+2\int \cos 2xdx$$

$$=8\cdot\frac{1}{8}x^8+2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C=x^8+\sin 2x+C.$$

Ҷавоб: $x^8+\sin 2x+C.$ ▲

Мисоли 3. Интеграли $\int\frac{xdx}{x^2+8}$ -ро ҳисоб кунед.

△ Дар ҳалли чунин мисолҳо *иваз кардани тағйирёбанда* мувофиқ аст.

Агар $x^2+8=u$ гӯем, $du=2xdx$, $xdx=\frac{1}{2}du$ мешавад. Дар ин ҳолат

$$\int\frac{xdx}{x^2+8}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+8)+C.$$

Санҷиш: Аз функсияи ибтидоии ёфтшуда, ҳосила гирем, бояд функсияи зеринтеграл $\frac{x}{x^2+8}$ ҳосил шавад. Дарҳақиқат,

$$\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+8)+C\right)'=\frac{1}{2}(\ln(x^2+8))'+C'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+8}\cdot(x^2+8)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+8}=\frac{x}{x^2+8}.$$

Ҷавоб: $\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+8)+C.$ ▲

Мисоли 4. $\int e^{\sin x}\cos xdx$ интегралро ҳисоб кунед.

Δ $\sin x=t$ гузаришро иҷро мекунем. Дар ин ҳолат $dt=\cos xdx$ ва интеграли додашуда намуди $\int e^t dt$ - ро мегирад. Мувофиқи банди сеюми ҷадвали интегралҳо $\int e^t dt=e^t+C$ мешавад. Яъне, $\int e^{\sin x}\cos xdx=e^{\sin x}+C.$

Санҷиш. $(e^{\sin x}+C)'=(e^{\sin x})'+C'=e^{\sin x}(\sin x)'+0=e^{\sin x}\cos x$ – дода шудааст функсияи зеринтегралиро ҳосил кардем.

Ҷавоб: $e^{\sin x}+C.$ ▲

Мисоли 5. $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx$ интегралро ҳисоб намоед.

△ Ин ҷо $2\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 8x + \sin 2x$ айният ёрдам медиҳад. Дар ин ҳолат

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}(-\cos 8x) + \frac{1}{4}(-\cos 2x) + C = -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Ҷавоб: $-\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$ ▲

Мисоли 6*. $\int \cos mx \cos nx dx$ интегралро ҳисоб намоед.

△ $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$ ба айният ва банди 10-уми ҷадвали интегронӣ мувофиқ аст:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C.$$

Ҷавоб: $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C.$ ▲

Мисоли 7. $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ интегралро ҳисоб намоед.

△ Барои функсияи зеринтеграл баробариҳои зерин ҷоиз аст:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

Дар ин ҷо

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C,$$

Ҷавоб: $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$ ▲

8-misol. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ интегралро ҳисоб намоед.

△ Барои ҳисобнамоии ин интеграл $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ va $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$ буданаш истифода мебарем. Дар ин ҳолат

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2} + C = \mathrm{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Санҷиш: $(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C)'=(\mathrm{tg}\frac{x}{2})'+C' = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot(\frac{x}{2})'+0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+\cos x}$

– функсияи зеринтеграл ҳосил мешавад.

Ҷавоб: $\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$ ▲

Мисоли 9. $\int \sin^2 2x dx$ интегралро ҳисоб намоед.

△ Барои ҳисоб кардани интеграл аз айнияти $2\sin^2 2x = 1-\cos 4x$ истифода мебарем.

$$\int \sin^2 2xdx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4xdx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

Ҷавоб: $\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$ ▲

? Савол ва супоришҳо

1. Аз ҷадвали интегралҳо 4 мисоли худатон хостаро ҷудо намоед ва онро исбот кунед.
2. Қоидаҳои соддаи интегрониро баён кунед. Бо мисолҳо фаҳмонед.
3. Тарзи ивазнамоии тағйирёбанда чист? Дар ҳисоб кардани интеграли $\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$ ин тарзро истифода баред ва ҷараёни ҳалли мисолро фаҳмонед.

Машқҳо

Яке аз функсияи ибтидоии додашударо ёбед (**16–18**):

16. 1) $3x^5-4x^3$; 2) $8x^7-5x^4$; 3) $\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}$; 4) $\frac{5}{x^4}+\frac{3}{x^5}$;

5) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x}$; 6) $7\sqrt[3]{x}-5\sqrt{x}$; 7) $5x^4+4x^3-2x^2$.

17. 1) $5\cos x-3\sin x$; 2) $7\sin x+4\cos x$; 3) $2\cos x-a^x$;

4) $5e^x+2\cos x+1$; 5) $4+2\cdot e^{-x}-7\sin x$; 6) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{x}-e^{-x}$.

18. 1) $(x-2)^3$; 2) $(x+5)^4$; 3) $\frac{1}{\sqrt{x-5}}$; 4) $\frac{6}{\sqrt[3]{x+7}}$;

5) $4\cos(x+5)+\frac{8}{x-7}$; 6) $2\sin(x-3)-\frac{4}{x-2}$; 7) $(3x+7)^4+\frac{1}{x^5}$.

Функсияҳои ибтидоии тамоми функсияҳои додашударо ёбед(**19–20**):

19. 1) $\cos(5x+3)$; 2) $\sin(7x-6)$; 3) $\cos(\frac{2x}{3}+1)$;

4) $\sin(\frac{5x}{7}-2)$; 5) $e^{\frac{2x+3}{4}}$; 6) e^{3-2x};

7) $\frac{4}{\cos^2 x}$; 8) $\frac{3}{\cos^2 4x}$; 9) $\frac{5}{\sin^2 5x}$.

20. 1) $\frac{4}{x^5}-(1-2x)^3$; 2) $(3x+2)^4-\frac{1}{x^6}$; 3) $x+\frac{2}{\cos^6 x}-1$;

4) $2x-\frac{3}{\sin^2 x}+6$; 5) $(1+3x)(x-1)$; 6) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+2\sin(3x-1)$.

21. Графики барои функсияи $f(x)$ додашудаи функсияи ибтидоии аз нуқтаи $A(x;y)$ гузарандаро ёбед:

1) $f(x)=\sin 4x,\ A(\frac{\pi}{4};7)$; 2) $f(x)=\cos 5x,\ A(\frac{\pi}{4};4)$;

3) $f(x)=3x^2+\frac{2}{\sqrt{x+2}},\ A(-1;0)$; 4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\ A(2;0)$;

5) $f(x)=\cos^2 3x+\sin^2 3x+\frac{1}{4}\sin 4x,\ A(\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8})$;

6) $f(x)=\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x-2\cos\frac{x}{2},\ A(2\pi;2\pi)$;

7) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{5-2x}}+4x,\ A(2;6)$; 8) $f(x)=6x^2-\frac{1}{2\sqrt{2-x}},\ A(-2;4)$.

Интегралҳоро ёбед (**22–28**):

22. 1) $\int(x^3-\sin 2x-3)dx$; 2) $\int(x^4+\cos 3x+4)dx$;

3) $\int(x^2-\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})dx$; 4) $\int(4x^3+\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{3})dx$.

23*. 1) $\int(\frac{8}{\sin^2 x}+6\cos^2 x+2)dx$; 2) $\int(\frac{6}{\cos^2 x}-8\sin^2 x+3)dx$;

3) $\int\sin 2x\cos 2x dx$; 4) $\int(\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x)dx$;

5) $\int(\sin 2x\cdot\sin 4x+\cos 2x\cos x)dx$; 6) $\int\cos^2 5x dx$.

24*. 1) $\int\sin 5x\cos 3x dx$; | 2) $\int\cos 2x\cos 3x dx$; | 3) $\int\sin 7x\sin 3x dx$.

25*. 1) $\int\frac{x}{x+1}dx$; | 2) $\int\frac{dx}{x^2-7x+12}$; | 3) $\int\frac{(x-3)dx}{x^2-4x+3}$; | 4) $\frac{(x+4)dx}{x^2-16}$.

26. 1) $\int\frac{x^5+x^3-2}{x^2+1}dx$; | 2) $\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$; | 3) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$;

4) $\frac{dx}{1-\cos 2x}$; | 5) $\int\frac{dx}{4(x^2-4)}$; | 6) $\int(1-2\sin^2 5x)dx$.

27. 1) $\int(x^3-1)^4x^2dx$; | 2) $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^3}$; | 3) $\int\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^3 x}dx$;

4) $\int\frac{\mathrm{ctg}x}{\sin^2 x}dx$; | 5) $\int\sin^3 x dx$; | 6) $\int\cos^3 x dx$.

28*. 1) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; | 2) $\int x\cdot\sqrt{x-4}dx$; | 3) $\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x+1}}$;

4) $\int(\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}^4x)dx$; 5) $\int(\mathrm{ctg}^2x+\mathrm{ctg}^4x)dx$.

Графики барои функсияи $f\ (x)$ додашудаи фунсияи ибтидоии аз нуқтаи $A(x;y)$ гузарандаро ёбед: **(29–30)**:

29. 1) $f(x)=\frac{3}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}$, $A(\pi;\ 4)$;

2) $f(x)=\frac{3}{5}\cdot\sin 5x$, $A(\frac{\pi}{2};3)$;

3) $f(x)=2\sin 5x+2\cos\frac{x}{2}$, $A(\frac{\pi}{3};0)$;

30. 1) $f(x)=3x^2-2x+8$, $A(1;\ 9)$;

2) $f(x)=4x^3-3x^2+2x+1$, $A(-1;\ 4)$;

3) $f(x)=5x^4+3x^2+2$, $A(-2;\ 1)$.

31. Интегралро ёбед:

1) $\int(x^2-1)(x+2)dx$; 2) $\int(x+2)(x^2-9)dx$; 3) $\int(x^2+1)(x^3-1)dx$;

4) $\int\frac{1-4x^2+\sqrt{1-2x}}{1-2x}dx$; 5) $\int\frac{9x^2-4-\sqrt{3x+2}}{3x+2}dx$;

6) $\int(e^{5-2x}-2^x)dx$; 7) $\int(e^{3x+2}+10^x)dx$.

32. Интегралро ҳисоб намоед:

1) $\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$; 2) $\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$; 3) $\int\frac{dx}{x^2+10x+26}$.

Намуна: $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$ интегралро ҳисоб намоед.

△ $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{1+(x+2)^2}$; $x+2=u$ гӯем, $1+(x+2)^2=1+u^2$

$x'=u'$ ва мувофиқи бандҳои 14-15- уми ҷадвали интегралҳо

$$I=\int\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{arctg}u+C=\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

Санҷиш:

$$(\operatorname{arctg}(x+2)+C)'=(\operatorname{arctg}(x+2))'+C'=\frac{1}{1+(x+2)^2}+0=$$
$$=\frac{1}{1+(x+2)^2}=\frac{1}{x^2+4x+5}.$$

Ҷавоб: arctg$(x+2)+C$. ▲

Яке аз қоидаҳои интегронӣ *интегронии хурдсозӣ аст*.

Қоидаи 3*. Агар дар ягон фосилаи X функсияҳои давомдори $f(x)$ ва $g(x)$ ба ҳосилаи $f'(x)$ ва $g'(x)$ соҳиб бошад, дар ин ҳолат формулаи

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \qquad (1)$$

мавқеъ дорад. Ин формуларо формулаи таҷзияи интегронӣ меноманд. Исботи ин формуларо ва афзоиши функсияҳои $f(x)$ ва $g(x)$ аз ҳастии қоидаи афзоиши дифферентсиалӣ бармеояд

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ ва } \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

Равиши истифода аз формула: 1) ифодаи зеринтеграл $f(x)$ ва $g'(x)$ -ҳо дар намуди афзоиш навишта гирифта мешавад; 2) барои ҳисоби осон (мувофиқи) интегралҳои ифодаҳои $g'(x)$ ва $g(x)f'(x)$ дар назар дошта шудааст.

Мисоли 1. $\int x \cdot e^x dx$ интегралро ҳисоб намоед.

△ Дар ин ҷо $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$ гуфтан мувофиқ, чунки

$g(x) = \int g'(x)dx = \int e^x dx = e^x$, $\quad f'(x) = 1$. Дар ин ҳол мувофиқи (1),

$$\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C.$$

Ҳамин тавр, $\int xe^x dx = e^x \cdot (x-1) + C$.

Ҷавоб: $e^x(x-1)+C$. ▲

Мисоли 2. $\int \ln x dx$ интегралро ҳисоб намоед.

△ Функсияи зеринтегралии $\ln x$ -ро афзоиши $f(x)=\ln x$ ва $g'(x)=1$ гуфта меҳисобем: $\ln x = f(x) \cdot g'(x)$.

Дар ин ҳолат $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \int 1 \cdot dx = x + C$.

мувофиқи формулаи (1),

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C =$$

$$= x(\ln x - 1) + C = x \cdot (\ln x - \ln e) + C = x \cdot \ln\frac{x}{e} + C.$$

Ҳамин тавр, $\int \ln x dx = x \cdot \ln \frac{x}{e} + C.$

Санҷиш:

$$(x \ln \frac{x}{e} + C)' = (x \ln \frac{x}{e})' + C' = x' \cdot \ln \frac{x}{e} + x(\ln \frac{x}{e})' + 0 =$$

$$= \ln \frac{x}{e} + x \cdot \frac{e}{x} \cdot \frac{1}{e} = \ln x - \ln e + 1 = \ln x - 1 + 1 = \ln x.$$

Ҷавоб: $x \cdot \ln \frac{x}{e} + C.$ ▲

Мисоли 3. $\int x \cos x dx$ интегралро ҳисоб намоед.

△ Барои ҳисоби интеграл $f(x) = x,\ g'(x) = \cos x$ гуфтан ҷоиз. Дар ин ҳолат $f'(x) = 1,\ g(x) = \int \cos x dx = \sin x$ (дар ин ҷо аз функсияҳои ибтидоӣ якеашро гирифтем, барои ҳамин адади доимии C -ро нанавиштем). Мувофиқи формулаи таҷзияи интегронӣ,

$$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Ҷавоб: $x \sin x + \cos x + C.$ ▲

Интегралҳоро ҳисоб намоед (**33–35**):

33*. 1) $\int x \sin x dx$; 2) $\int x^2 \cos x dx$; 3) $\int x \ln x dx$; 4) $\int 2x \ln x dx$.

34*. 1) $\int x \cos 2x dx$; 2) $\int x \sin 3x dx$; 3) $\int x \sin \frac{x}{3} dx$; 4) $\int x \cos \frac{x}{4} dx$.

35*. 1) $\int 2^x \cdot x dx$; 2) $\int 3^x \cdot x dx$; 3) $\int 5^x \cdot x dx$; 4) $\int \mathrm{tg}^2 nx dx$;

5) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$; 6) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$; 7) $\int (3^x + 4^x)^2 dx$;

8) $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx$; 9) $\int \frac{e^{4x} - 1}{e^{2x} - 1} dx$; 10) $\int \frac{e^x dx}{\pi + e^x}$;

11) $\int x \cdot e^{-x^2} dx$; 12) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; 13) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

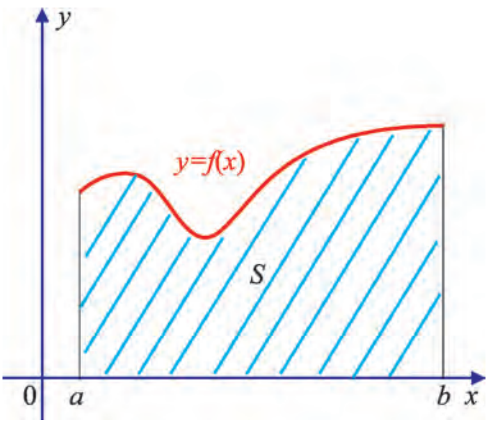
44–46

ИНТЕГРАЛИ МУАЙЯН. ФОРМУЛАИ НЮТОН ЛЕЙБНИТС

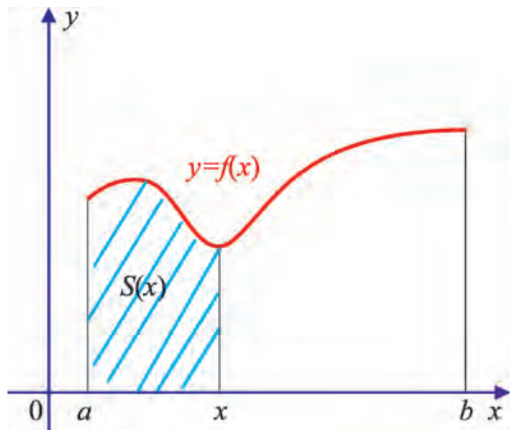
Шакли дар расми 2 тасвиршударо *трапетсияи каҷхата* мегӯянд. Ин шакл аз боло бо графики функсияи $y = f(x)$, аз зер бо порчаи$[a, b]$, аз паҳлӯ бошад бо порчаҳои ростхатаи $x=a$, $x=b$ маҳдуд шудаанд. Порчаи $[a, b]$ -ро асоси трапетсияи каҷхата мегӯянд.

Саволе ба миён меояд, ки рӯяи трапетсияи каҷхатаро бо кадом формула ҳисоб мекунем.

Ин рӯяро S гуфта гирем. Рӯяи S -ро бо ёрии функсияи ибтидоии функсияи $f(x)$ ҳисоб кардан мумкин будааст. Доир ба ин мулоҳизаҳоро меорем.



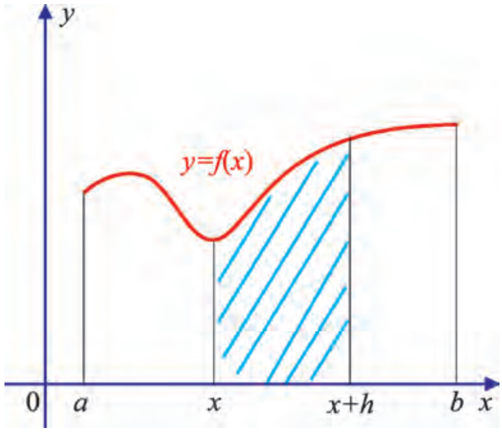
Расми 2.



Расми 3.

Бар асоси $[a; x]$ рӯяи трапетсияи каҷхатаро $S(x)$ гуфта мегирем. (расми 3), ин ҷо x дар порчаи $[a; b]$ дар нуқтаи ростомада: $x=a$ бошад порчаи $[a; x]$ ба нуқта табдил меёбад, барои ҳамин дар $S(a)=0$; $x=b$ будан $S(b)=S$.

Функсияи ибтидоии функсияи $f(x)$ шудани $S(x)$, яъне $S'(x)=f(x)$ буданро нишон медиҳем.



Расми 4.

△ Камшавии $S(x+h)-S(x)$- ро аз назар мегузаронем, ин ҷо $h>0$ (дар ҳолати $h<0$ ҳам чунин намоён мешавад). Асоси ин камшавӣ $[x;\ x+h]$ буда ба рӯяи трапетсияи каҷхата баробар аст (расми 4). Агар h адади хурд бошад, дар ин ҳолат тақрибан ба $f(x)\cdot h$ баробар, яъне

$S(x+h)-S(x)\approx f(x)\cdot h$. Пас, $\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}\approx f(x)$.

Қисми чапи ин баробарии тақрибӣ дар $h\to 0$ будан мувофиқи таърифи ҳосила ба $S'(x)$ майл мекунад. Барои ҳамин дар $h\to 0$ будан баробарии $S'(x)=f(x)$ ҳосил мешавад. Ҳамин тавр, рӯяи $S(x)$ барои функсияи $f(x)$ функсияи ибтидоӣ будааст.▲

Функсияи ибтидоӣ $S(x)$ аз функсияи дигари ихтиёрии ибтидоӣ $F(x)$ бо адади доимӣ фарқ мекунад, яъне

$$F(x)=S(x)+C.$$

Дар ин баробарӣ $x=a$ дар $F(a)=S(a)+C$ ва $S(a)=0$ будан барои $C=F(a)$. Дар ин ҳолат баробарии (1) -ро чунин навиштан мумкин:

$S(x)=F(x)-F(a)$. Дар ин ҷо $x=b$ бошад $S(b)=F(b)-F(a)$ буданашро меёбем.

Яъне, *рӯяи трапетсияи каҷхатаро* (расми 2) бо ёрии формулаи зерин ҳисоб кардан мумкин:

$$S=F(b)-F(a), \qquad (2)$$

дар ин ҷо функсияи $F(x)$ –функсияи ибтидоии дилхоҳи функсияи додашудаи $f(x)$ аст.

Ҳамин тавр, барои ҳисоб кардани рӯяи трапетсияи каҷхатаи функсияи $f(x)$ барои ёфтани функсияи ибтидоӣ $F(x)$, яъне функсия $f(x)$ -ро ба интегронидан меоварад.

Фарқи $F(b)–F(a)$ ба функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a; b]$ *интеграли муайян номида мешавад* ва чунин ишора мешавад: $\int_a^b f(x)dx$

(хонда мешавад: „ интеграл аз a то b эф аз дэ икс“), яъне

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Формулаи (3) формулаи *Нютон-Лейбнитс ном дорад*. Мувофиқи формулаи (2) ва (3):

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4)$$

Дар ҳисоби интеграл, одатан, чунин ишора медароранд:

$F(b)–F(a)=F(x)\Big|_a^b$. Дар он ҳол формулаи (3) -ро чунин навиштан мумкин:

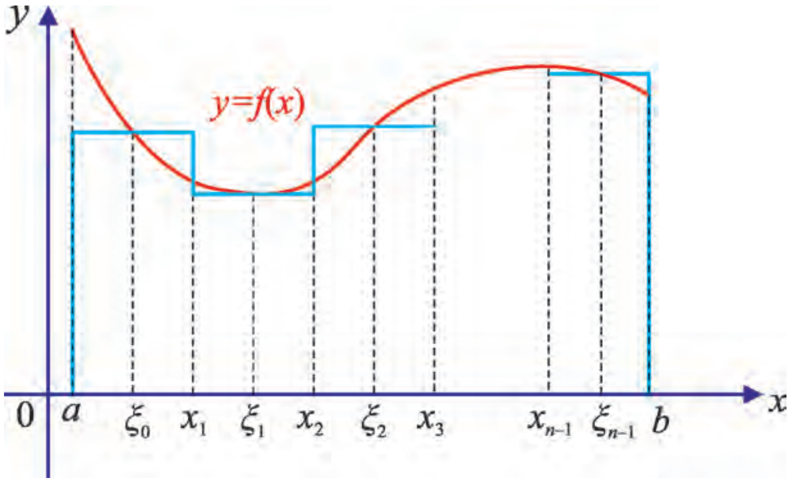
$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \qquad (5)$$

Дар ҳамин ҷо *маълумоти таърихии мухтасарро гуфтан ҷоиз*.

Масъалаи чен кардани шакли рӯяи каҷхатҳои маҳдуд ба донистани интеграли муайян оварда расонд. Функсияи доимии $f(x)$ бо ёрдами порчаи $[a, b]$ нуқтаҳои $a=x_0$, x_1.., x_{n-1}, ... $x_n= b$ муайяншуда байни ҳам баробар ба порчаҳои $[x_k; x_{k+1}]$ (k=0, 1, ... n–1) тақсим шуда ва аз ҳар як порча $[x_k; x_{k+1}]$ нуқтаи ихтиёрӣ ξ_k гирифта шудааст. Дарозии порчаи $[x_k, x_{k+1}]$ $\Delta x_k=x_{k+1}–x_k$-ро додаанд, қимати функсияи $f(x)$ дар нуқтаи ξ_k ба $f(\xi_k)$ ҷамъ шудааст ва ин сумма

$$S_n=f(\xi_0)\Delta x_0+f(\xi_1)\Delta x_1+\ldots+f(\xi_{k-1})\Delta_{n-1} \qquad (6)$$

сохта шудааст, дар ин ҷо ҳар як асоси ҷамъшуда Δx_k ва баландиаш $f(\xi_k)$ буда рӯяи чоркунҷаи рост аст. S_n суммаи каҷхатаи рӯяи трапетсия ба S тақрибан баробар: $S_n\approx S$ (расми 5).



Расми 5.

Сумма (6) ба функсияи $f(x)$ дар порчаи $[a, b]$-ро *суммаи интеграл* мегӯянд. Агар n ба беохирӣ майл кунад ($n \to \infty$), Δx_k ба сифр майл намояд ($\Delta x_k \to 0$), дар он ҳол суммаи интеграл S_n ба ягон адад моил мешавад. Айнан ҳамин адад ба функсияи $f(x)$ интегрони порчаи $[a, b]$ номида мешавад.

Мисоли 1. Рӯяи трапетсияи каҷхатаи дар расми 6 тасвиршударо ёбед.

△ Мувофиқи формулаи (4) $S = \int_1^4 x^2 dx$. Ин интегралро бо формулаи Нютон-Лейбнитс (3) ҳисоб мекунем. Функсияи $f(x)=x^2$ яке аз функсияҳои ибтидоӣ

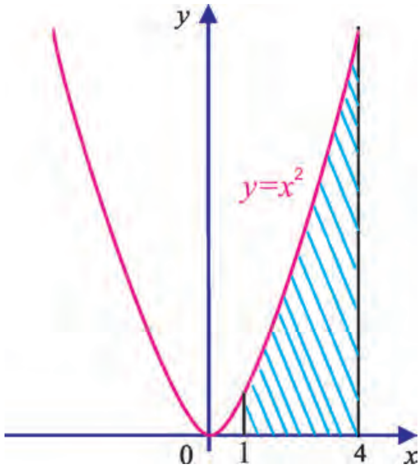
$F(x) = \frac{x^3}{3}$ буданаш маълум.Ҳамин тавр,

$$S = \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_1^4 = \frac{1}{3}(4^3 - 1^3) = \frac{1}{3} \cdot 63 = 21 \text{ (кв. воҳид)}.$$

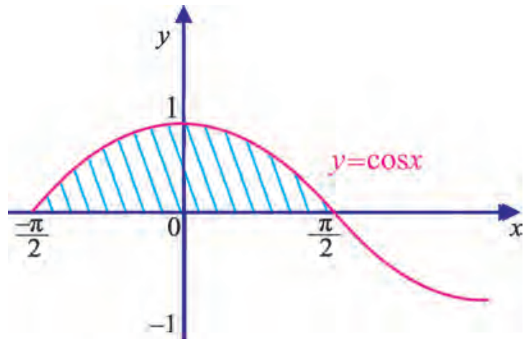
Ҷавоб: $S = 21$ кв. воҳид. ▲

Мисоли 2. Рӯяи соҳаи штрихшудаи расми 7-ро ёбед.

△ Соҳаи штрихшуда трапетсияи каҷхата буда, он аз боло бо графики функсияи $y=\cos x$ аз поён бошад бо порчаи $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ иҳота шудааст. $y=\cos x$ – функсияи ҷуфт, соҳа ба тири Oy нисбатан симметрӣ аст. Мувофиқи ҳамин маълумот, масоҳати соҳа ба масоҳати $S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ду баробар мусовӣ аст гуфтан мумкин.



Расми 6.



Расми 7.

Мувофиқи формулаи Нютон-Лейбнитс ва формулаи (5):

$$S=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin(\frac{-\pi}{2})=1-(-1)=1+1=2 \text{ (кв воҳид).}$$

Ҷавоб. 2 кв.воҳид. ▲

Мисоли 3. $\int_0^{\pi}\cos x dx$ интеграли муайянро ҳисоб кунед.

∆ Мувофиқи формулаи Нютон-Лейбнитс ва формулаи (5):

$$\int_0^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0.$$

Ҷавоб: 0. ▲

Мисоли 4. $\int_{-1}^{2}(2x^2-3x+4)dx$ интеграли муайянро ҳисоб кунед.

△ Мувофиқи формулаи Нютон-Лейбнитс ва формулаи (5):

$$\int_{-1}^{2}(2x^2-3x+4)dx=(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x)\Big|_{-1}^{2}=\frac{22}{3}-(-\frac{37}{6})=\frac{81}{6}=13,5.\text{(кв. воҳид)}$$

Ҷавоб: 13,5 кв. воҳид. ▲

Мисоли 5. $S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2(3x+\frac{\pi}{6})\,dx$ интеграли муайянро ҳисоб кунед.

△ Аввал интеграли номуайянро меёбем:

$$\int \sin^2(3x+\frac{\pi}{6})dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos(6x+\frac{\pi}{3}))dx=\frac{1}{2}\cdot(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3})).$$

Дар он ҳол $S=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3}))\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}\sin(2\pi+\frac{\pi}{3}))-\frac{1}{2}(0-\frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{3})=$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}.$$

Ҷавоб: $S=\frac{\pi}{6}$. ▲

Мисоли 6. $\int\limits_2^6\sqrt{2x-3}\ dx$ интеграли муайянро ҳисоб кунед.

△ Аввал интеграли номуайянро меёбем:

Мувофиқи ҷадвали интеграл $\int\sqrt{2x-3}dx=\frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$
Дар он ҳол

$$\int\limits_2^6\sqrt{2x-3}dx=\frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6=\frac{1}{3}\cdot\left((2\cdot6-3)^{\frac{3}{2}}-(2\cdot2-3)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\cdot(27-1)=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}.$$

Ҷавоб: $8\frac{2}{3}$. ▲

Интеграли муайян ба хусусиятҳои зерин соҳиб аст:

1. $\int\limits_a^a f(x)dx=0.$ Дарҳақиқат, $\int\limits_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)=0.$

2. $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx.$

▲ $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a);\ \int\limits_b^a f(x)dx=F(a)-F(b)=-\big(F(b)-F(a)\big).$

Ҳамин тавр, $-\int\limits_b^a f(x)dx=F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(x)dx.$ ▲

3. $a, b, c -$ ададҳои ҳақиқӣ бошад, $\int\limits_b^a f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (хусусияти аддитивии интеграли муайян).

4. $f(x),\ x \in R,$ функсияи ҷуфт бошад, дар он ҳол $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int\limits_0^a f(x)dx$

5. Агар $f(x) \geq 0,\ x \in [a,b]$ бошад, $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$ мешавад.

6. $x \in [a,b]$ da $f(x) < g(x)$ бошад, дар он ҳол $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$ мешавад.

? Савол ва супоришҳо

1. Интеграли муайян чист?

2. Масъалаи ҳисоби рӯяи каҷхатаи трапетсияро гӯед. Бо мисолҳо фаҳмонед.

3. Формулаи Нютон–Лейбнитс чист ? Мазмуну моҳияти онро гӯед .

4. Хоссаҳои интеграли муайянро гӯед. Бо мисолҳо фаҳмонед.

Машқҳо

Интегралҳои муайянро ҳисоб кунед (**36–41**):

36. 1) $\int\limits_0^2 3x^2dx;$ 2) $\int\limits_0^2 2xdx;$ 3) $\int\limits_{-1}^4 5xdx;$ 4) $\int\limits_1^2 8\cdot x^3dx;$

5) $\int\limits_1^e \frac{1}{x}dx;$ 6) $\int\limits_3^4 \frac{1}{x^2}dx;$ 7) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^4}dx;$ 8) $\int\limits_0^1 \sqrt{2x}dx;$

9) $\int\limits_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}dx;$ 10) $\int\limits_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$ 11) $\int\limits_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}};$ 12) $\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}dx.$

37. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2x+\frac{\pi}{4})dx;$ 2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2xdx;$

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\cos 3xdx;$ 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)dx.$

38. 1) $\int\limits_0^{\ln 2} e^{2x}dx;$ 2) $\int\limits_0^{2} e^{4x}dx;$ 3) $\int\limits_1^{3} (e^{2x}-e^{x})dx.$

39. 1) $\int\limits_{-1}^{1} (x^2+3x))(x-1)dx;$ 2) $\int\limits_{-1}^{0} (x+2)(x^2-3)dx;$

3) $\int\limits_1^{3} (x+\frac{1}{x})^2 dx;$ 4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}(1-\frac{1}{x})dx.$

40*. 1) $\int\limits_1^{6} \frac{dx}{\sqrt{3x-2}};$ | 2) $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{x+1}};$ | 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin^4 2x+\cos^4 2x)dx.$

41*. 1) $\int\limits_1^{5} x^2\cdot\sqrt{x-1}dx;$ | 2) $\int\limits_1^{5} \frac{x^2-6x+10}{x-3}dx;$ | 3) $\int\limits_0^{1} \frac{x^2+2x+4}{x+1}dx.$

42*. 1) чунин ададҳои a ва b -ро ёбед ки, функсияи $f(x)=a\cdot 2^x+b$ шартҳои

$f'(1)=2,\ \int\limits_0^{3} f(x)dx=7$ -ро қонеъ намояд.

2) тамоми ададҳои $b>1$-ро дар ичрои нобаробарии $\int\limits_1^{b} (b-4x)dx \geq 6-5b$ ёбед.

43*. 1) тамоми ададҳои b-ро дар ичрои нобаробарии

$\int\limits_1^{2} (b^2+(4-4b)x+4x^3)dx \leq 12$ -ро ёбед.

2) барои кадом ададҳои $a>0$ нобаробарии $\int\limits_{-a}^{a} e^x dx > \frac{3}{2}$ ичро мешавад?

44. Чунин интихоб кунед, ки баробариҳо функсияи $f(x)$-ро дар қимати ихтиёрии a ичро карда тавонад:

1) $\int\limits_0^{a} f(x)dx = 2a^2-3a;$ 2) $\int\limits_0^{a} f(x)dx = 4a-a^2;$

3) $\int\limits_0^{a} f(x)dx = \frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2;$ 4) $\int\limits_0^{a} f(x)dx = a^2+a+\sin a.$

Интегралҳоро ҳисоб кунед (**45–46**):

45. 1) $\int_{0}^{1}(e^{-x}+1)^2dx$; 2) $\int_{-2}^{-1}10^x\cdot 2^{-x}dx$; 3) $\int_{0}^{1}(e^{-x}-1)^2dx$;

4) $\int_{-3}^{-1}3^{-x}6^xdx$; 5) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{-3x}dx$; 6) $\int_{\ln 3}^{\ln 5}e^{2x}dx$.

46*. 1) $\int_{0}^{1}\frac{2^x+3^x}{6^{x+1}}dx$; 2) $\int_{0}^{1}\frac{2^{x-1}+5^{x-1}}{10^x}dx$; 3) $\int_{0}^{\sqrt{e-1}}\frac{2xdx}{x^2+1}$;

4) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{e+2}}\frac{2xdx}{x^2-2}$; 5) $\int_{0}^{1}\frac{3^x+4^x}{12^x}dx$; 6) $\int_{0}^{2}4^{-x}\cdot 8^xdx$.

47. Рӯяи трапетсияи каҷхатаи бо хатҳои рости $x=a$, $x=b$, тири Ox ва графики функсияи $y=f(x)$ маҳдудро ёбед. Расми мувофиқро кашед:

1) $a=1$, $b=2$, $f(x)=x^3$; 2) $a=2$, $b=4$, $f(x)=x^2$;

3) $a=-2$, $b=1$, $f(x)=x^2+2$; 4) $a=1$, $b=2$, $f(x)=x^3+2$;

5) $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{2\pi}{3}$, $f(x)=\sin x$; 6) $a=\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\cos x$.

48. Рӯяи шакл бо тири Ox ва параболаи додашуда маҳдудшударо ёбед:

1) $y=9-x^2$;	2) $y=16-x^2$;	3) $y=-x^2+5x-6$;
4) $y=-x^2+7x-10$;	5) $y=-x^2+4x$;	6) $y=-x^2-3x$.

Рӯяи бо хатҳои зерин маҳдудшаклро ёбед. Расми мувофиқро кашед (**49–50**):

49. 1) $y=-x^2+2x$, $y=0$; 2) $y=-x^2+3x+18$, $y=0$;

3) $y=2x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$; 4) $y=-x^2+2x$, $y=x$.

50. 1) $y=-2x^2+7x$, $y=3{,}5-x$; 2) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$;

3) $y=x^2$, $y=0$, $y=-x+2$; 4) $y=2\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

5) $y=\frac{1}{a}\cdot x^2, y=a\cdot\sqrt{x}$; 6) $y=2^x, y=2, x=0$;

7) $y=|\lg x|, y=0, y=2, x=0$.

Намунаи кори назоратӣ
Варианти I

1. Ҳамаи функсияҳои ибтидоии функсия $f(x)=\frac{x^3}{2}-\cos 3x$ -ро ёбед.

2. Агар $F(\frac{3}{2})=1$ бошад, функсияи ибтидоии $F(x)$-ро дар функсияи $f(x)=\frac{6}{(4-3x)^2}$ ёбед.

3. Ҳисоб кунед: $\int_{-1}^{2}(x^2-6x+9)dx.$

4. Ҳисоб кунед: $\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{3}dx.$

5. Рӯяи трапетсияи каҷхатаи тири Ox, $x=-1$ ва $x=2$ бо хатҳои рост ва параболаи $y=9-x^2$ маҳдудро ҳисоб кунед.

Варианти II

1. Тамоми функсияҳои ибтидоии функсияи $f(x)=\frac{x^4}{3}+\sin 4x$ -ро ёбед.

2. Агар $F\left(\frac{1}{2}\right)=2$ бошад, функсияи ибтидоии$F(x)$-ро дар функсияи $f(x)=\frac{3}{(2-5x)^3}$ ёбед.

3. Ҳисоб кунед: $\int_{-3}^{1}(x^2+7x-8)dx$

4. Ҳисоб кунед: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx$

5. Рӯяи трапетсияи каҷхатаи тири Ox, $x=-2$ ва $x=3$ бо хатҳои рост ва параболаи $y=x^2-1$ маҳдудро ҳисоб кунед.

ҶАВОБҲО
БОБИ I

1. *а*) Басомади набз – ин ишораи дар як дақиқа чанд маротиба задани дилро нишондиҳанда. Ҳамин тавр, дар як дақиқа дили Мадина 67 маротиба мезанад. *б*) 4020. **2.** *а*) $\approx 0{,}00150\,\dfrac{\text{хато}}{\text{калима}}$. Сифат афзуд. *б*) $\approx 0{,}15$. **3.** Маъруф пурсамар меҳнат кард. **4.** ***а)*** $\approx 0{,}000177\ \dfrac{\text{мм}}{\text{км}}$. **5.** $89\dfrac{\text{км}}{\text{соат}}$ ёки $89\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. **6.** а) $0{,}1\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; б) $0{,}9\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ с) $0{,}5\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. **7.** а) $3{,}1\ \dfrac{\text{дона}}{\text{г}}$; $4{,}22\ \dfrac{\text{дона}}{\text{г}}$; б) Андоза аз 2 грамм то 8 грамм зиёд шавад адади ҳашаротҳо зуд кам мешавад, баъд камшавиаш паст мешавад. **8.** а) 7; б) 7; с) 11; д) 16; е) 0; ё) 5. **9.** а) 5; б) 7; с) с. **10.** а) –2; б) 7; с) –1; д) 1. **11.** а) –3; б) –5; с) –1 д) 6; е) –4; ё) –8; ж) 1; з) 2; і) 5. **13.** а) $3x^2$ б) $-\dfrac{1}{x^2}$ с) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; д) 0. **15.** а) 2; б) $6x+5$; с) $6x^2+8x+6$. **16*.** а) $f'(x)=a$; б) $f'(x)=2ax+b$; с) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. **20.** 1) $4x^3$; 2) $-2x^{-3}$; 3) $-3x^{-4}$. **21.** 2) $-x^{-2}+1$; 4) $4x^3+3x^2+2x-1+x^{-2}+2x^{-3}$. **22.** 2) 1; 4) $-\dfrac{1}{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)}$.

23. 2) 53,25. **24.** 2) –3; 4) 2. **25.** 2) $-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{4}$; 4) $2x-\dfrac{2}{x^3}$. **26.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $2x$.

27. 3) $-\dfrac{2x^9+4x^3}{(x^6-1)^2}$; 4) $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$; 6) $4x^3-4$; 8) $7x^6+3x^2-3x^{-4}-7x^{-8}$. **28.** 2) 0; 4) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$; 6) $\dfrac{1}{x\ln 2}$; 8) $1+\ln x$; 10) $2e^x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$. **29.** 2) $2e^x\cos x$; 4) $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; 6) $5+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 8) $3(2+x)^2$. **30.** 2) 11. **31.** 2) 0. **32.** 2) $-\dfrac{1}{\cos^2 x}$; 4) $-\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 6) $2x\sin x+x^2\cdot\cos x$; 8) $x\cos x$. **33.** 2) 1. **34.** 2) $n\pi$, $n\in z$; 4) 1. **35.** 1) $\dfrac{1}{x^2}-1$; 2) $4x^2-1$. **36.** 2) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; 4) $\dfrac{x+2}{x}$. **37.** 2) x^4; 4) x^2-1. **38.** 2) x^3+3x^2+3x+1; 4) x^6+1.

39. x^2-2x. **43.** 2) $e^{\sin x}\cos x$; 4) $\sin 2x$; 6) $\dfrac{4}{4x-1}$; 8) $20(2x-1)^9$. **44.** 3) $-\mathrm{tg}x$; 8) $-30x^2\cos^{29}x\cdot\sin x+2x\cos^{30}x$; 9) $\dfrac{5\mathrm{ctg}x}{x}-\dfrac{5\ln x}{\sin^2 x}$. **45.** 2) $y=3x-4$; $y=3x-4$; $y=3x-4$. 4) $y=-x-2$; $y=8x+16$; $y=-4x$. **46.** 2) $y=7x-6$. **47.** 2) вуҷуд надорад; 4) 0 ва $\dfrac{2}{3}$; 6) 0 ва $\dfrac{3}{4}$. **48.** 1) $y=-x$; $y=-x+21$; $y=-x+1$. **49.** 2) 0,1; 0,331. **50.** 2) а) 0,2718;

б) 9,06. 4) а) 0,938127; б) 31, 2709. **51.** 2) а) 0; b) 0. 4) а) 0,119401; б) 11,9401 . **52.** 1) 4; 2) –7; 3) 6; 4) 19/28; 5) 0. **53.** 2) 29; 4) $32x–3$; 6) $18–2x$; 8) $48x^2+10x–2$. **54.** 1) а) 15; б) 15; с) 15; д) 15; 4) а) –29; б) 12; с) 5; д) –1. **55.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $1–x^{-2}$. **56.** 1) 12; 2) 3. **57.** 15м/сония. **58.** 3) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}+\text{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{1}{x\ln 3}$; 10) $7^x x^7\ln 7+7^x\cdot 7x^6$; 12) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x$; 14) $8–2^x$. **59.** 2) 4; 4) 2. **60.** 2) Ø. **61.** 1 ва 2 . **62.** 2) $-2x^{-3}-1$. **63.** 2) 2,75. **64.** 2) $\frac{x^2+16x-24}{(x+8)^2}$; 4) $6x^2+8x+5$; 6) $14x+12$. **65.** 2) $\frac{-2x^7-4x^5-5x^4+21x^2+7}{(x^5+7)^2}$.

66. 2) $e^{5x}(4\cos x–6\sin x)$; 4) $\frac{1-2\ln x}{x^3}$. **67.** 2) –4; 4) $-\frac{1}{\sin^2 1}-\frac{1}{20}$.

68. 1) $2x\sin x+x^2\cos x$; 2) $-\frac{\text{tg}x}{\ln 15}$; 4) $\frac{35\text{tg}^{34}x}{\cos^2 x}$; 8) $(2x–10)\ln\cos x–(x^2–10x+7)\text{tg}x$.

69. 3) афзоиш: (–∞; –3) U (3; –∞) камшавӣ: (–3;3).
4) афзоиш: (–∞; 0) U (0; +∞); камшавӣ: Ø.
6) афзоиш: $(-\infty;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$; камшавӣ: $-\sqrt{2};\sqrt{2}$.
8) афзоиш: (–∞; 0); камшавӣ: (0; +∞).
9) афзоиш: (–1; 0) U (1; +∞); камшавӣ: (–∞; –1) U (1; +∞).
10) афзоиш: (2; +∞); камшавӣ: (–∞; 2).
14) афзоиш: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi),\ n\in\mathbb{Z}$; камшавӣ: Ø.

70. 2) –3; 3 . 4) 0. 6) Ø. 8) 0; –1.

71. 2) минимуми локалӣ $x=4$; максимуми локалӣ вучуд надорад.
4) минимуми локалӣ $x=5$; максимуми локалӣ $x=–5$.
6) минимуми локалӣ $x=0,75$; максимуми локалӣ вучуд надорад.
8) минимуми локалӣ $x=2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$; максимуми локалӣ $x=\pi+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

72. 2) меафзояд (–1; 1); кам мешавад: (–∞; –1) U (1; +∞).
4) меафзояд: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi)\mathbb{Z}$; кам мешавад: $(-\frac{\pi}{2}+2n\pi;\frac{3\pi}{2}+2n\pi),\ n\in\mathbb{Z}$;
6) меафзояд: Ø ; кам мешавад: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi;\frac{\pi}{2}+n\pi),\ n\in\mathbb{Z}$.

73. 2) қимати калонтарин: 57; қимати хурдтарин: –55.
4) қимати калонтарин: 84; қимати хурдтарин: $-\frac{28}{9}$.

76. 5625m². **80.** 80 м. **83.** 1) 5 сония; 2) 250 м/сония; 3) $\frac{1875}{4}$ м.

87. 1) 4м³; 2) 5324 м³; 3) 407 $\frac{\text{м}^3}{\text{дақ}}$;

89. 1) 30; 2) 1800000 сум.

91. д) 24,52, –0,1; е) 40,52, 9,86. **93.** г) 2,0004. **94.** е) 0,9302.

95. д) 0,526. **96.** д) 0,1247. **112.** 1) калонтар 13; хурдтар 13. 3) калонтар вуҷуд надорад; хурдтар 5. 5) калонтар вуҷуд надорад; хурдтар $\frac{11}{6}$.

113. 2) $y=13x+4$; $y=13x+4$; $y=13x+4$. **114.** 1) вуҷуд надорад. **115.** 3) вуҷуд надорад.

117. 1) –1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $-\sqrt{2}$.

118. 1) 19; 10; 2) 27;30; 3) 77; 30; 4) 0; –8.

119. 1) 1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $\sqrt{2}$; 10) 0.

120. 1) 10; 6. 2) 15; 18. 3) 225; 80.

121. 1) $-2x+1$; 2) $\cos x+\sin x$; 4) $4^x\ln4-\cos x$; 6) $\frac{1}{x}-20x+1$. **122.** 1) $4x^3$; 3) $1+\frac{20}{x^2}$; 6) $e^x(\sin x+\cos x)$;8) $20\sin x+2(10x-1)\cos x$.

123. 1) $\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$; 0; 2) 3; 3; 3) $-2\pi+1$; $\pi+1$. 4) $-\pi$; $\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 1; 0; 6) 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $1-\frac{\pi^3}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi^3}{16}$. 8) 3; $-3\sqrt{2}$.

124. 1) 12; 2)72. **126.** 1) 0; 2) 600 000. **127.** 2) $-\sin 2x$.

128. 2) афзоиш: $(-\infty; +\infty)$; камшавӣ: Ø.
4) афзоиш: Ø; камшавӣ: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
6) афзоиш: $(-\infty; +\infty)$; камшавӣ: Ø.
8) афзоиш: $(0; +\infty)$; камшавӣ: $(-\infty; 0)$.

129. 2) $\sqrt{\frac{133}{3}}$; $-\sqrt{\frac{133}{3}}$. 4) 0; 6) 3; –3; 8) 0; $-\frac{13}{18}$.

130. 2) минимуми локалӣ: $x = 9$. максимуми локалӣ: вуҷуд надорад.

131. 2) калонтар: 81; хурдтар: –6. **134.** 62 500 m^2.

143. 1) $3e^{3x}$; 2) $e^{\sin x}\cos x$; 3) $3\cos(3x+2)$; 4) $8(2x+1)^3$;

144. 1) e^{8x+4}; 2) e^{8x^2+4x}; 3) $4e^{2x}+2$; 4) $\sqrt{16x+10}$.

145. 1) $10x(x^2+1)^4$; 3) $\frac{5}{2\sqrt{5x-7}}$; 8) $-e^{\sin(\cos x)}\cdot\cos(\cos x)\cdot\sin x$.

146. 1) меафзояд: $(-\infty; 0,5)$; кам мешавад: $(0,5; -\infty)$;
3) меафзояд: $(-1; 1)$; кам мешавад: $(-\infty; -1)\cup(1;+\infty)$.
4) меафзояд: $(-\infty; +\infty)$; кам мешавад: Ø.
7) меафзояд: $(-\infty; +\infty)$; кам мешавад: Ø.
8) меафзояд: $(1; +\infty)$; кам мешавад: $(-\infty; 1)$.

147. 1) нуқтаҳои статсионар: 1 ва 3; максимуми локалӣ: 0; минимуми локалӣ: –4.

БОБИ II

2. 2) x^6+C; 4) $x^{\frac{3}{2}}+C$; 6) $\sin x+C$; 8) $\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **3.** 2) $\frac{\pi^x}{\ln\pi}+C$; 4) $\frac{a^x}{\ln a}+C$; 6) $\frac{e^{\pi x}}{\pi}+C$. **4.** 4) $\frac{1}{a}\ln x+C$. **5.** 4) $\frac{1}{5}\sin 5x+C$; 6) $\frac{1}{2}\cos 2x+C$.
6. 4) $\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$. **7.** 2) $-\frac{1}{3}x^3+x^2+5x+2$; 4) $\sin x+4$. **8.** 1) $2x^2+8x+11$; 2) $-\frac{x^2}{2}+3x+2,5$; 3) $\frac{9}{4}x^2+9x+15,8$; 4) $x^2-6x+10$. **10.** 1) $\frac{8}{x}-2x+4$; 2) $\frac{9}{x^2}+2x-3$; 3) x^3-x+6; 4) x^5+7x+1. **11.** 1) $\frac{1}{4}\cdot(3x-2)^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{5}\cdot(4x+5)^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{5}$; 3) $\frac{1}{8}\cdot(7x-5)^{\frac{8}{7}}+\frac{7}{8}$; 4) $\frac{1}{k+1}\cdot(kx+b)^{\frac{k+1}{k}}+\frac{k}{k+1}$.
12. 1) $5\ln|x-2|+7$; 2) $3\ln|x+1|+1$; 3) $\sin x+7$; 4) $-\cos x+9$. **14.** 2) $\frac{1}{5}\cdot\sin 5x+\frac{3}{5}$; 4) $-3\cos\frac{x}{3}+6$. **15.** 1) x^3-4; 2) x^4-15. **16.** 2) x^8+x^5; 4) $-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^4}$.

17. 2) $-7\cos x+4\sin x$; 4) $5e^x+2\sin x$. **18.** 2) $\frac{1}{5}(x+5)^5$; 4) $9\cdot(x+1)^{\frac{2}{3}}$;

6) $-2\cos(x-3)-4\ln|x-2|$. **19.** 2) $-\frac{1}{7}\cdot\cos(7x-6)+C$; 4) $-\frac{7}{5}\cos(\frac{5x}{7}-2)+C$; 6) $-\frac{1}{2}\cdot e^{3-2x}+C$; **20.** 2) $\frac{1}{15}\cdot(3x+2)^5+\frac{1}{5}x^{-5}+C$; 4) $x^2+3\operatorname{ctg}x+6x+C$. **21.** 2) $\frac{1}{5}\sin 5x+3\frac{4}{5}$;

4) $x^4-\sqrt{x-1}-15$. **22.** 2) $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}\sin 3x+4x+C$; 4) $x^4+3\sin\frac{x}{3}-3\cdot\cos\frac{x}{3}+C$.
23. 2) $\frac{-1}{4}\cos 4x+C$; **24.** 1) $\frac{-1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 4x$; **25.** 2) $\ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+C$, 4) $\ln|x-4|+C$.
26. 2) $x-\operatorname{arctg}x+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C$. **27.** 2) $-\frac{1}{4(1+x^2)^2}+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2x+C$.
28. 2) $\frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}}+C$. 4) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+C$. **29.** 2) $-\frac{3}{25}\cos 5x+3$. **31.** 4) $x+x^2-\sqrt{1-2x}+C$. **33.** 1) $\sin x-x\cos x+C$; 2) $x^2\cdot\sin x-2\sin x+2x\cos x+C$; 3) $\frac{1}{2}\cdot x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$; 4) $x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

34. 1) $\frac{1}{2}\cdot\left(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$; 3) $9\sin\frac{x}{3}-3x\cdot\cos\frac{x}{3}+C$.

36. 4) 30. **37.** 4) $\frac{1}{4}$. **38.** 2) $\frac{1}{4}\cdot(e^{8}-1)$. **39.** $\frac{1}{8}$. **40.** 2) 2. **41.** 1,5+ln2. **42.** 1) $a=\frac{1}{\ln 2}$, $b=\frac{7(\ln^2 2-1)}{3\ln^2 2}$; 2) $b=2$. **43.** 1) $b=3$; 2) $a>\ln 2$. **44.** 1) $f(x)=4x-3$; 2) $f(x)=4-2x$; 3) $f(x)=x^2-3x$; 4) $f(x)=1+2x+\cos x$. **45.** 2) $\frac{4}{5\ln 5}$; 6) 8. **46.** 2) $\frac{0,4}{\ln 5}+\frac{0,1}{\ln 2}$; 4) 1. **47.** 2) $\frac{56}{3}$; 4) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **48.** 2) $85\frac{1}{3}$. **49.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 121,5; 3) $\frac{10}{3}$; 4) $\frac{1}{6}$.

50. 1) 9; 2) 9; 3) 4,5;

Адабиётҳои истифодабурда ва тавсияшаванда

1. Ш.А. Алимов и др. Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10–11 класса. Учебник для базового и профильного образования, Москва, “Просвещение”, 2016.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. А.Н. Колмогоров и др., Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10-11 классов. Москва, “Просвещение”, 2018.
4. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа.

часть 2 учебное пособие, Ташкент, “Ilm ziyo”, 2016.

5. A.U. Abduhamidov ва boshqalar. Algebra ва matematik analiz asoslari, 1- qism, Toshkent, “O‘qituvchi”, 2012.
6. Н.П. Филичева. Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. “Рязань”. 2009.
7. М.И. Исроилов. Ҳисоблаш методлари. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1988.
8. Г.К. Муравин и др. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, “Дрофа”, 2006.
9. Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, “Просвещение”, 2004.
10. Г.П. Бевз и др., Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 класса. Киев, 2011.
11. http://www.ams.org/mathweb/ – Internetda matematika (ingliz tilida).
12. Журнали “Математика в школе” .
13. Fizika, matematika ва informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001- yildan boshlab chiqa boshlagan).
14. M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov Matematikadan qiziqarli ва olimpiada Масъалаилари. I qism, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.
15. Matematikadan qo‘llanma, I ва II qismlar. O‘qituvchilar барои qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1979.
16. M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev. O‘quvchilarni matematik olimpia-dalarga tayyorlash. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1993.
17. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi bazirligi-po axborot ta’lim portali.
18. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
19. http://www.problems.ru – Matematikadan Масъалаилар izlash tizimi (rus tilida).
20. http://matholymp.zn.uz – O‘zbekistonda ва dunyoda matematik olimpiadalar.

МУНДАРИҶА

Боби I. ҲОСИЛА ВА ТАТБИҚИ ОН

Боби II. ИНТЕГРАЛ ВА ТАТБИҚҲОИ ОН

ГЕОМЕТРИЯ

БОБИ I. СИСТЕМАИ КООРДИНАТАҲО ВА ВЕКТОРҲО ДАР ФАЗО

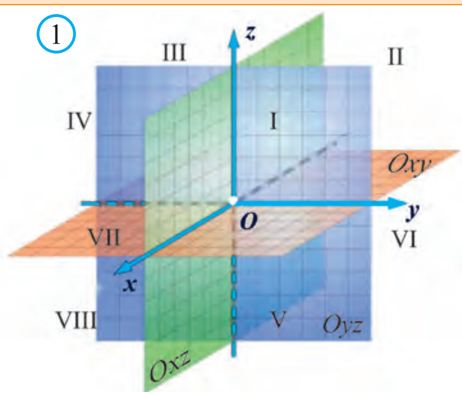
1. СИСТЕМАИ КООРДИНАТҲО ДАР ФАЗО

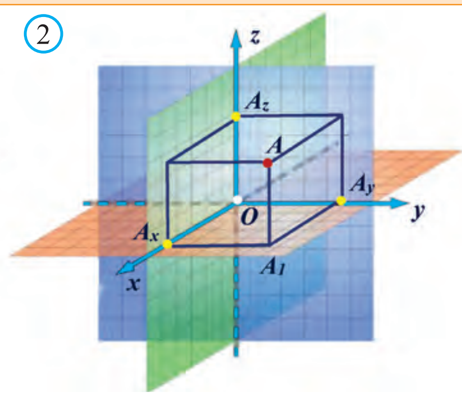
1.1. Системаи координатаҳои декарт дар фазо

Бо системаи координатаҳои декарт дар ҳамворӣ дар синфҳои поёнӣ шинос шудаед. Системаи координатаҳодар фазо ҳам ба ҳамворӣ монанд мешавад. Дар нуқтаи O се тири координатаи буриши ибтидои координатааш аз ҳамин нуқта будаи байни худ перпендикуляри Ox, Oy ва Oz -ро дида мебароем.

Тавассути ҳар як ҷуфти ин хатҳои рост ҳамвориҳои Oxy, Oxz ваOyz -ро мегузаронем (расми 1). Системаи координатаҳои росткунҷаи декарт дар фазо ҳамин тавр дохил карда мешавад ва дар он

нуқтаи O – ибтидои *координатаҳо*
хатҳои рости Ox, Oy ва Oz – *тирҳои координата*,
абсиссаҳои Ox , *ординатаҳои Oy* ва тири Oz – тири аппликатаҳо,
ҳамвориҳои Oxy, Oyz ва Oxz *–ро координатаҳои ҳамвориҳо меноманд*.





Координатаҳои ҳамвориҳо фазоро ба 8 то *октанта* (*нимчаҳоряк*) тақсим мекунад (расми 1).

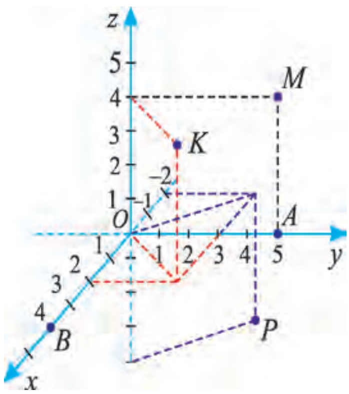
Дар фазо нуқтаи ихтиёрии A дода шуда бошад. Аз ин нуқта ба ҳамвориҳои координатаи Oxy, Oyz ва Oxz ҳамвориҳои перпендикуляр мегузаронем (расми 2). Яке аз ин ҳамвориҳо тири Ox -ро дар нуқтаи A_x бурида мегузарад.

Тири координатаи x *-ро ба* нуқтаи A дар нуқта A_x координатаи x ёки *абсиссаи он* мегӯянд.

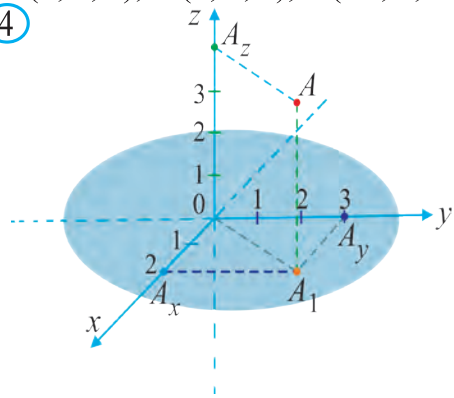
Координатаи (*ординатаи*) *y*, *координатаи* (*ординатаи*) *z* ҳам дар нуқтаи *A* ҳамин тавр муайян мешавад.

Координатаҳои нуқтаи *A* ба тарзи $A(x;\ y;\ z)$ ёки кӯтоҳтар $(x;\ y;\ z)$ ишора мешавад. Нуқтаҳои дар расми 3 тасвиршуда ба координатаҳои зерин соҳиб аст: $A(0;\ 5;\ 0)$, $B(4;\ 0;\ 0)$, $M(0;\ 5;\ 4)$, $K(2;\ 3;\ 4)$, $P(-2;\ 3;\ -4)$.

3



4



Масъалаи1. Дар фазо системаи координатаҳои декарт даровarда шудааст. Дар он ҷойи нуқтаи $A(2;\ 3;\ 4)$ -ро муайян кунед.

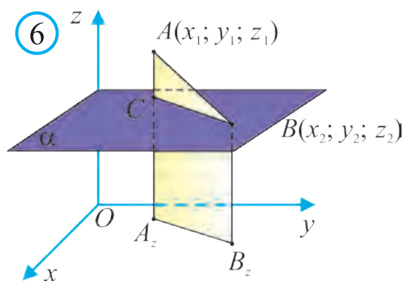
Ҳал. *Аз ибтидои* координата ба самти мусбати тирҳои *Ox* ва *Oy*, бурришҳои $OA_x = 2$ ва $OA_y = 3$ - ро мегузаронем (расми 4).

Аз нуқтаи A_x ростхатаи дар ҳамвории *Oxy* хобида ва ба тири *Oy* параллел мегузаронем. Аз нуқтаи A_y ростхатаи дар ҳамвории *Oxy* хобида ва ба тири *Ox* параллел мегузаронем.. Нуқтаи бурриши ин хатҳои ростро бо A_1 ишора мекунем. Аз нуқтаи A_1 ба ҳамвории *Oxy* перпендикуляр мегузаронем ва ба он дар самти мусбати тири *Oz* бурриши $AA_1 = 4$-ро мегузорем. Нуқтаи ҳосилшудаи $A(2;\ 3;\ 4)$ нуқта ҷустуҷӯӣ мешавад.

Барои дастгоҳҳои замонавии бо барномаҳои рақамӣ ва роботҳои автоматкунонидашуда аз системаи координатаҳо истифода бурда, барномаҳо месозанд ва дар асоси онҳо ба металлҳо коркард мегузаронанд (расми 5).

5

6



1.2. Масофаи миёни ду нуқта

Ду нуктаи $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ дода шуда бошад. 1. Аввал ҳолати хати рости AB ба тири Oz параллел набударо мебинем (расми 6). Тавассути нуқтаҳои A ва B хатҳои ба тири Oz параллел мегузаронем. Онҳо ҳамвории Oxy дар нуқтаҳои A_z ва B_z бурида гузарад.

Координатаи z -и ин нуқтаҳо ба 0 баробар буда, координатаҳои x ва y бошад бо таври мувофиқ ба нуқтаҳои A, B -и координатаҳои x ва y баробар аст.

Акнун бо воситаи нуқта B ба ҳамвории Oxy параллел ҳамвории α мегузаронем. Он хати рости AA_z-ро дар ягон нуқтаи C бурида мегузарад.

Мувофиқи теоремаи Пифагор: $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Лекин $CB = A_zB_z$, $A_zB_z^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ ва $AC = |z_2 - z_1|$.

Аз барои ҳамин $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

2. Буриши AB ба тири Oz параллел, яъне $AB = |z_2 - z_1|$ бошад ҳам формулаи боло мувофиқ мешавад, чунки дар ин ҳолат $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Яъне, *A ва B масофаи байни нуқтаҳо*:

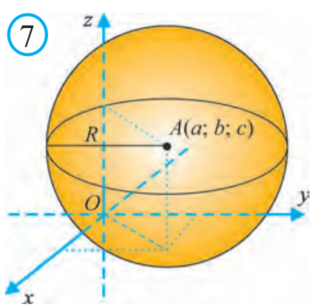
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

Эзоҳ. Формулаи (1) агар масоҳати параллелепипеди ростхата $a = |x_2 - x_1|$, $b = |y_2 - y_1|$, $c = |z_2 - z_1|$ бошад, дарозии диагонали онро ифода мекунад.

Муодилаи сфера ва кура. Маълум, ки аз нуқтаи $A(a;\ b;\ c)$ тамоми нуқтаҳои дар масофаи R хобидаи $M(x; y; z)$ сфераро ташкил мекунанд. (расми 7). Дар он мувофиқи формулаи (1), дар нуқтаи марказаш $A(a;$ $b;\ c)$ ба радиуси R баробари дар сфера хобидаи координатаҳои тамоми нуқтаҳои $(x - a)^2 + (y - Б)^2 + (z - c)^2 = R^2$ муодиларо қонеъ менамояд.

Ин ҷо аён аст, ки дар нуқтаи $A(a;\ b;\ c)$, маркази ба радиуси R баробар будаи муодилаи кура ин тавр $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \le R^2$ ифода мешавад

7



Масъалаи 2. Сатҳи секунҷаи ABC дар нуқтаҳои $A(9; 3; -5)$, $B(2; 10; -5)$, $C(2; 3; 2)$-ро ёбед.

Ҳал: ABC сатҳи секунҷа $P = AB+AC+BC$. Аз формулаи масофаи ду нуқта $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ истифода бурда, тарафҳои секунҷаро меёбем:

$$AB=\sqrt{(2-9)^2+(10-3)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

$$AC=\sqrt{(2-9)^2+(3-3)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

$$BC=\sqrt{(2-2)^2+(3-10)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2}.$$

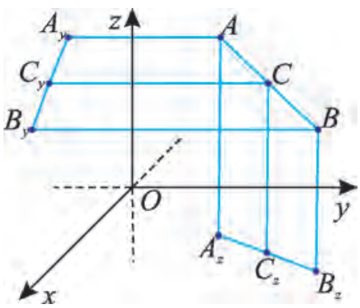
Яъне, ABC секунҷаи баробартараф ва сатҳи он: $P=3\cdot 7\sqrt{2}=21\sqrt{2}$.

Ҷавоб: $21\sqrt{2}$. □

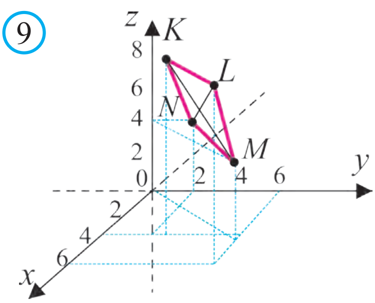
1.3. Координатаҳои миёнаи бурриш

$A(x_1; y_1; z_1)$ ва $B(x_2; y_2; z_2;)$ – нуқтаҳои ихтиёрӣ буда, AB миёнаи бурриш бошад $C(x; y; z)$ (расми 8).

8



9



Бо воситаи нуқтаҳои A, B ва C *хатҳои рости ба тири Oz* параллел мегузаронем. Онҳо ҳамвории Oxy -ро дар нуқтаҳои $A_z(x_1; y_1; 0)$, $B_z(x_2; y_2; 0)$ ва $C_z(x; y; 0)$ буррида гузарад. Мувофиқи теоремаи Фалес нуқтаи C_z миёнаи буриши A_zB_z мешавад.

Дар он мувофиқи формулаи ёфтани координатаҳои миёнаи бурриш дар ҳамворӣ $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

Барои ёфтани z ба ҷойи ҳамвории Oxy ҳамвории Oxz ёки Oyz - ро гирифтан кифоя аст.

Ин ҷо барои z ҳам мисли боло формула ҳосил мекунем.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Монанди ҳамин, буриши додашудаи AB дар нисбати λ ($AP : PB = \lambda$) тақсимкунандаи координатаҳои нуқтаи $P(x_1; y_1; z_1)$ бо воситаи координатаҳои нуқтаҳои A ва B бо ёрии формулаҳои

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

ёфта мешавад. Дурустии онҳоро мустақил нишон диҳед.

Масъалаи 3. Дар нуқтаҳои қуллаҳояш $M(3;\ 6;\ 4)$, $N(0;\ 2;\ 4)$, $K(3;\ 2;\ 8)$, $L(6;\ 6;\ 8)$ буда,параллелограмм будани чоркунҷаи *MNKL* -ро исбот намоед (расми 9).

Исбот: Дар ҳалли масъала аз параллелограмм будани чоркунҷаи диагоналҳояш дар нуқтаи буриш ба ду ҳиссаи баробар тақсимшаванда истифода мебарем.

MK координатаҳои буриши миёна:

$$x = \frac{3+3}{2} = 3; \qquad y = \frac{6+2}{2} = 4; \qquad z = \frac{4+8}{2} = 6.$$

NL координатаҳои буриши миёна:

$$x = \frac{0+6}{2} = 3; \qquad y = \frac{2+6}{2} = 4; \qquad z = \frac{4+8}{2} = 6.$$

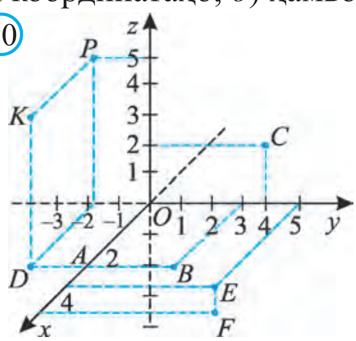
Як хел будани миёнаҳои бурриши координатаҳои *MK* ва *NL* -ро мебинем. Буришҳои мазкур дар нуқтаи бурранда ва буриш ба дуи баробар тақсим шудани онҳор маълум мекунад.

Яъне,чоркунҷаи *MNLK* – рараллелограмм. □

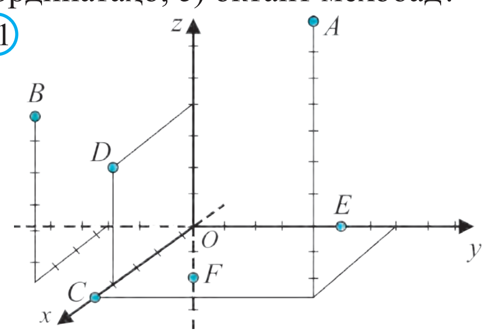
Масъалаҳо оиди мавзӯъ ва супоришҳои амалӣ

1. Координатаҳои нуқтаҳои дар расми 10 тасвиршударо муайян кунед. **2.** Дар фазо координатаҳои системаи декарт дохил шуда, дар он нуктаҳои $A(0;\ 3;\ 1)$, $B(-2;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 8)$, $D(0;\ -9;\ 0)$, $E(5;\ -1;\ 2)$, $F(-6;\ 2;\ 1)$ дода шудааст. Ин нуқтаҳо дар кадом *а*) тири координатаҳо; *б*) ҳамвории координатаҳо; *с*) октант мехобад?

10



11



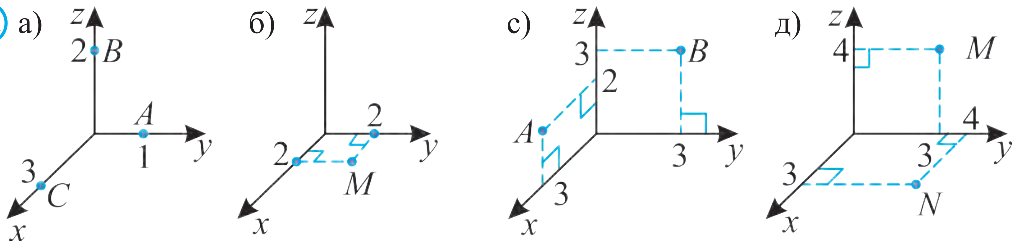
3. Координатаҳои нуқтаҳои расми 11 -ро ёбед.

4. Координатаҳои дар расми 12 ишорашудаи нуқтаҳоро ёбед.

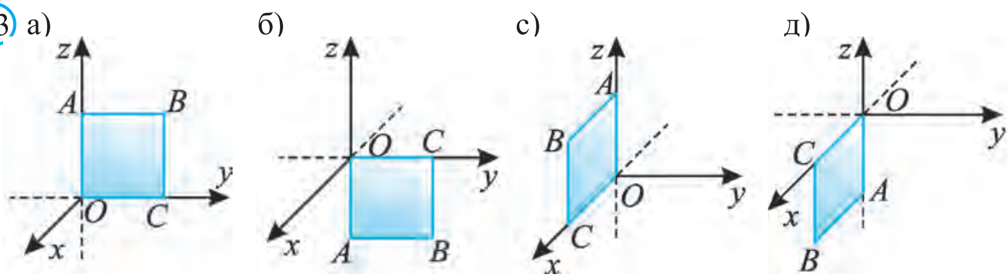
5. Дар расми13 квадрати диагоналаш ба $\sqrt{2}$ баробар тасвир шудааст. Координатаҳои қуллаи онро ёбед.

6. Координатаҳои проексияи координатаи ҳамвориҳои нуқтаи A (3;2;4) - ро ёбед.

12



13



7. Дар фазо системаи координатаҳои декарт ворид шуда, дар он нуқтаҳои A (–1; 2; –3), B(0; 1; 2), C(0; 0; 5), D(–2; 2; 0), E(5; –1; 0), F(0; 2; 0), G(9; 0; 0), H(9; 0; 2), I(6; 3; 1), J(–6; 3; 5), K(–6; –2; 3), L(6; –2; 4), M(6; 3; –9), N(–6; 3; –8), O(–6; –3; –6), P(6; –3; –2) дода шуда бошад. Ин нуқтаҳо дар кадом тири координатаҳо, ҳамвории кординатаҳо ва октант меҳобад? Ҷадвали зеринро мувофиқи намунаҳои додашуда пурра кунед.

Ҷойи нуқта	Хусусияти нуқтаи координатаҳо	Нуқта
Тири Ox	$y=0$, $z=0$ фарқи координатаи x аз нол	G(9; 0; 0)
Тири Oy		
Тири Oz		
Ҳамвории Oxz	$z=0$, x ва y фарқи координатаҳо аз нол	D(–2; 2; 0)
Ҳамвории Oyz		
Ҳамвории Oxz		
Октанти 1	$x>0$, $y>0$, $z>0$	I(6; 3; 1)
Октанти 2		
Октанти 3		
Октанти 4		
Октанти 5		
Октанти 6		
Октанти 7		
Октанти 8		

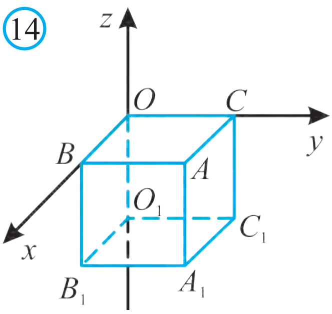
8. Масофаи байни нуқтаҳои $A(2; 0; -3)$ ва $B(3; 4; 0)$ -ро ёбед.

9. Аз нуқтаи $A(3; 3; 3)$ масофаи а) то ҳамвориҳои координата; б) то тирҳои координата; с) то сари координата бударо ёбед.

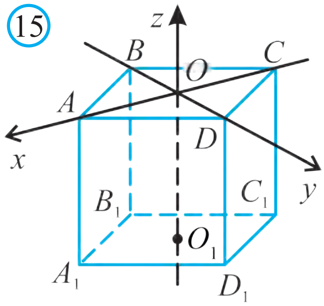
10. Аз нуқтаи $M(2; -3; 1)$ масофаҳои то ҳамвориҳои координата бударо ёбед.

11. Аз ҳамвориҳои координата дар масофаи 3 воҳид аз ҳар кадоме дур шудани ҷойи нуқтаро муайян кунед.

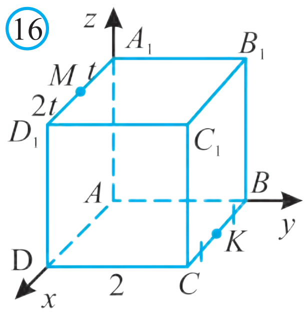
14



15



16



12. Агар $OA = 2\sqrt{2}$ бошад, координатаҳои қуллаии кубро, ки дар расми 14 тасвир шудааст ёбед.

13. Кадоме аз нуқтаҳои $C(2; 5; -1)$ ва $D(2; 1; -6)$ ба қуллаи координата наздик ҷой гирифтааст?

14. Сатҳи секунҷаро дар нуқтаҳои қуллааш $A(1;2;3)$, $B(2;3;1)$, $C(3;1;2)$ буда ёбед.

15. Секунҷаи қуллаҳояш дар нуқтаҳои $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 4)$, $C(3; 4; 5)$ буда мавҷуд аст?

16. Қуллаи параллелограмм будани нуқтаҳои $A(-2; 0; 5)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(1; 1; -3)$, $D(0; -1; -1)$ -ро исбот намоед.

17. Навъи секунҷаи ABC -ро муайян намоед, параметр ва рӯяи онро ёбед: а) $A\ (3; 0; 0)$, $B\ (0; 3; 0)$, $C\ (0; 0; 3)$; б) $A\ (2; 0; 5)$, $B\ (3; 4; 0)$, $C\ (2; 4; 0)$; с) $A\ (2; 4; -1)$, $B\ (-1; 1; 2)$, $C\ (5; 1; 2)$.

18. Координатаҳои дар ҳамвории Oxy хобида ва дар нуқтаҳои $A(0; 1; -1)$, $B(-1; 0; -1)$, $C(0; -1; 0)$ дар дурии баробар хобидаро ёбед.

19. Нуқтаҳои $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 1)$, $C(-1; -1; 1)$, $C_1(-1; -1; -1)$ тегаҳои куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бошад, координатаҳои боқимондаи қуллаи онро ёбед.

20. Мунтазам будани қуллаҳои пирамидаи $SABC$ дар нуқтаҳои $S(0; 0; 0)$, $A\ (2; 0; 0)$, $B\ (0; 2; 0)$, $C\ (0; 0; 2)$ бударо исбот намоед.

21. Муодилаҳои сфера ва кураро, ки дар аввал марказаш ба координатаҳои радиуси 5 баробар аст нависед.

22. Муодилаҳои кураро дар маркази нуқтаи A (1; 2; 4), ки радиусаш ба 3 баробар аст, нависед.

23. Қуллаҳои диаметри дар нуқтаҳои A (–2; 1; 3), B (0; 2; 1) хобидаи муодилаи сфераро нависед.

24. Аз коғази ғафс модели куб созед. Як нӯги онро ибтидои координата, теғаҳои баромадаи онро ҳамчун сифати воҳиди ҷамъшавандаҳо гирифта, қуллаҳои дигари координатаҳои онро ёбед.

25. Координатаҳои порчаи миёнаи AB -ро ёбед:

1) $A(-1; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$; 2) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 2; 2)$; 3) $A(-2; 4; 2)$, $B(2; -4; 2)$, 4) $A(1{,}2; -3; 6{,}3)$, $B(-2{,}6; 3{,}2; -5{,}1)$; 5) $A(\sqrt{3}; 2; 1-\sqrt{2})$, $B(3\sqrt{3}; 1; 1+\sqrt{2})$.

26. Координатаҳои миёнаи теғаҳои куб ва марказҳои тарафҳои дар расми 15 тасвирёфтаро ёбед.

27. Нуқтаҳои $A(3;-1;4)$, $B(-1;1;-8)$, $C(2;1;-6)$, $D(0;1;2)$ дода шудааст. Координатаҳои миёнаи порчаҳои а) AB ва CD; б) AC ва BD -ро ёбед.

28. Нуқтаҳои $M(1;-1;2)$ ва $N(-3;2;4)$,порчаи AB-ро ба се қисми баробар ҷудо мекунад.Теғаҳои координатаҳои порчаи AB- ро ёбед.

29. $ABCD$ тарафҳои чоркунҷа ва ба таври мувофиқ ба тарафҳои чоркунҷаи рости $A_1B_1C_1D_1$ параллел аст. Исбот намоед, ки $ABCD$ чоркунҷаи рост мебошад?

30. Аз чоркунҷаи рости $ABCD$ ба ҳамвории нӯги A -и он хати рости перпендикуляри AK гузаронида шудааст. Масофаҳои аз нуқтаи K то қуллаҳои дигари чоркунҷаи ростбуда 6 см, 7 см ва 9 см аст. Дарозии порчаи AK -ро ёбед.

31*. Дар фазо нуқтаҳои $A(3; 0; -1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(5; -2; -1)$ дода шудааст. Дар ҳамвории Oyz *аз* нуқтаҳои A, B, C нуқтаи дар дарозии баробар ҷойгиршударо ёбед.

32. Агар тегаҳои параллелограмми $ABCD$: а) $A(-2; -4; 3)$, $B(3; 1; 7)$, $C(4;2;-5)$; Б) $A(4; 2; -1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-6; 2; 1)$; с) $A(-1; 7; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(9; -3; -8)$ бошад, координатаҳои қуллаи D -ро ёбед.

33. Координатаҳои порчаи CK дар тақсими нисбии $CK:KM=\lambda$ аз нуқтаи $M(x; y; z)$ -ро ёбед. а) $C(-5; 4; 2)$, $K(1; 1;-1)$ ва $\lambda=2$; Б) $C(1; -1; 2)$, $K(2; -4; 1)$ ва $\lambda=0{,}5$; с) $C(1; 0; -2)$, $K(9; -3; 6)$ ва $\lambda=\frac{1}{3}$.

34. Координатаҳои дар қуллаҳои нуқтаҳои $A(3; 2; 4)$, $B(1; 3; 2)$, $C(-3; 4; 3)$ будаи медианаи секунҷаи нуқтаи буришаш M -ро ёбед.

35. Координатаҳои дар қуллаҳои нуқтаҳои $A(5; 6; 3)$, $B(3; 5; 1)$, $C(0; 1; 1)$ будаи қуллаи L -и биссектрисаи секунҷаи BL -ро ёбед.

36*. Дарозии биссектрисаи дар қуллаи нуқтаҳои $A(4; 0; 1)$, $B(5; -2; 1)$, $C(4; 8; 5)$ будаи секунҷаи AL -ро ёбед.

37*. Секунҷаи дар қуллаи нуқтаҳои $A(1;\ 3;\ -1)$, $B(3;\ -1;\ 1)$, $C(3;\ 1;\ -1)$ бударо ёбед. Инчунин: а) баландии аз тарафи калон фаровардашударо; б) кунҷҳояшро; с) рӯяашро ёбед.

38*. Аз маълумоти оиди куби дар расми 16 тасвиршуда истифода бурда, дарозии порчаи MK -ро ёбед.

Маълумоти таърихӣ

Абӯ Райҳон Берунӣ

Абӯ Райҳон Берунӣ дар мукотиботи худ бо табиби машҳур ва математик Абӯ Алӣ ибни Сино чунин савол медиҳад:,,Чаро Арасту ва дигар (файласуф)-он тарафҳоро шашто медонанд?”

Берунӣ куби шашрӯяро гирифта, ,,оиди ҷисмҳои ба тарафҳои дигари ададӣ соҳиб буда” сухан мегӯяд ва ,,бетараф будани ҷисми курашакл”- ро илова мекунад.

Ибни Сино бошад, "дар ҳама ҳолат ҳам тарафҳоро шашто ҳисобидан зарур аст, зеро дар ҳар як ҷисм, қатъи назар аз шакли он се ченак — дарозӣ, чуқурӣ ва паҳноӣ мавҷуд аст”, гуфта ҷавоб медиҳад.

Дар ин ҷо Сино бо ишораи ,,шаш тараф” се "координата" - и гирифтаро дар назар дорад.

Берунӣ дар асари ,,Қонуни Масъудӣ” маънои муайяни математикии шаш тарафро меорад: ,,Тарафҳо шашто, чунки онҳо ҳудуди ҳаракатҳо оиди ченакҳои ҷисмҳоянд. Ченакҳо се то, ин дарозӣ, паҳноӣ ва чуқурӣ буда, қуллаҳои онҳо бошад аз ченакҳо ду маротиба зиёд аст”.

Муаллиф дар ибтидои асар ҳолати ҷисмҳои равшанидиҳандаи осмонӣ нисбати сфераи осмон бо воситаи ду координата – паҳнои эклиптӣ ва дурӣ, ёки тавассути худи ҳамин хел координатаҳо, вале экватори осмон, ёки нисбати горизонт муайян мекунад. Аммо дар масъалаи муайян кардани ҷойгиршавии байниҳамдигарии ситораҳо ва дигар равшанидиҳандагон ҳолатҳои ҳамдигарро пӯшонидани онҳоро ҳам ба эътибор гирифтан рост меояд. Дар ҳамин ҳолат ба координатаи сеюми фазо эҳтиёҷ пайдо мешавад. Ҳамин эҳтиёҷ Беруниро ба пешниҳод намудани ғояи координаҳои фазоӣ овард.

2. ВЕКТОРҲОИ ФАЗО ВА АМАЛҲО ДАР БОЛОИ ОНҲО

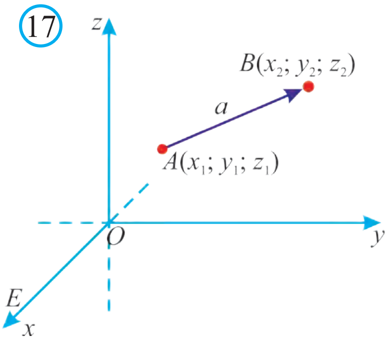
2.1. Векторҳои фазо

Мафҳуми вектор дар фазо ҳамчун дар ҳамворӣ дохил карда мешавад.

Вектор дар фазо гуфта, *ба порча равона карданро мегӯянд*.

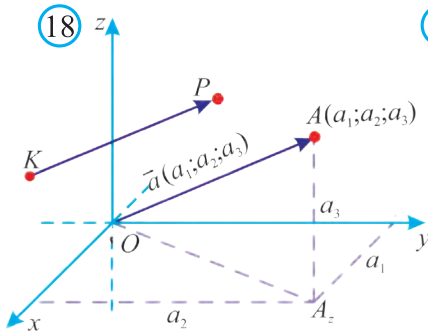
Мафҳумҳои асосӣ доир ба векторҳо дар фазо: дарозии вектор(модулӣ), равияи вектор, баробарии вектор дар ҳамворӣ барин таъриф мешавад.

17



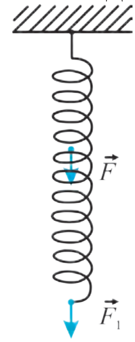
$\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$

18



$\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

19



Ибтидои *координатаҳои* вектор дар нуқтаи $A(x_1; y_1; z_1)$ ва интиҳои он дар нуқтаи $B(x_2; y_2; z_2)$ буда, ба ададҳои $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ гуфта мешавад (расми 17).

Як қатор хусусиятҳои вектор ба ҳамвориҳо ҳам монанд аст, ки онҳоро беисбот меорем.

Ҳамчун дар ҳамворӣ векторҳои баробар мувофиқи координатаҳо баробар мешавад ва баръакс, координатаҳои мувофиқ баробар бошад векторҳо баробар мешавад.

Ин векторро барои бо координатаҳои он ифода кардан асос мешавад. Векторҳо ба тарзи $\overline{AB}(a_1; a_2; a_3)$ ёки $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ боз кӯтоҳтар $(a_1; a_2; a_3)$ ишора мешавад (расми 18).

Вектор бе координатаҳо ба тарзи $\overline{AB}$ (ёки кӯтоҳтар $\overline{a}$) ҳам ишора мешавад. Дар он ибтидо дар навбати аввал, интиҳояш бошад дар навбати дуюм навишта мешавад.

Вектори координатаҳояш ба нол баробар *вектори нол (сифр)* номида мешавад ва ба тарзи $\overline{0}(0; 0; 0)$ ёки $\overline{0}$ ишора мешавад ва ин вектор равиш надорад.

Агар ибтидои координатаи O ва ададҳои a_1, a_2 ва a_3 координатаҳои нуқтаи A, яъне $A(a_1; a_2; a_3)$ бошад, ин ададҳо координатаҳои вектори $\overline{OA}$ ҳам мешаванд: $\overline{OA}(a_1; a_2; a_3)$.

Лекин ибтидои фазоии координатаҳои дар нуқтаи $K(c_1;\ c_2;\ c_3)$, охираш дар нуқтаи $P\ (c_1+a_1;\ c_2+a_2;\ c_3+a_3)$ будаи вектори $\overline{KP}$ ҳам бо ин координатаҳо ифода мешавад: $\overline{KP}\ (c_1+a_1-c_1;\ c_2+a_2-c_2;\ c_3+a_3-c_3) = \overline{KP}$ $(a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Аз ин бармеояд, ки векторро дар нуқтаи дилхоҳи фазои координатаҳо ҷойгиршуда тасвир кардан мумкин. Дар геометрия мо ҳамин тавр бо векторҳои *озод* сарукор дорем. Дар физика бошад, одатан, векторҳо ба ягон *нуқта гузошта* мешавад. Масалан, дар кадом нуқта гузошта шудани пурҷини қувва F - и расми 19 дорои аҳамият аст.

Дарозии вектор гуфта, порчаи ба дарозии тасвиркунандаи он равоншударо мегӯянд (расми 17). Дарозии вектори $\overline{a}$ бар тарзи $|\overline{a}|$ ифода мешавад. Дарозии векторҳои $\overline{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ тавассути координатаҳои он бо формулаи $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ ифода меёбад.

Масъалаи 1. Нуқтаҳои $A\,(2;\ 7;\ -3)$, $B\,(1;\ 0;\ 3)$, $C\,(-3;\ -4;\ 5)$ ва $D\,(-2;\ 3;\ -1)$ дода шудааст. Кадоме аз векторҳои $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AD}$ ва $\overline{BD}$ ба ҳамдигар баробар мешаванд?

Ҳал: Координатаҳои мувофиқи векторҳои баробар баробар мешаванд. Барои ҳамин координатаҳои векторҳоро меёбем:

$\overline{AB} = (1-2,\ 0-7,\ 3-(-3)) = (-1,\ -7,\ 6);$

$\overline{DC} = (-3-(-2),\ -4-3,\ 5-(-1)) = (-1,\ -7,\ 6).$

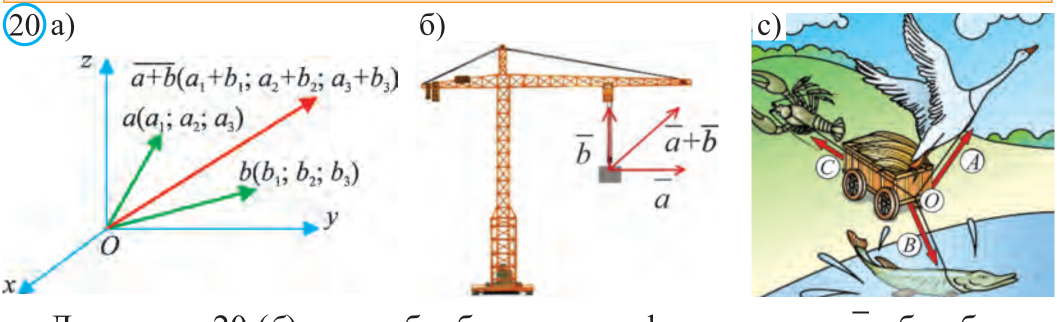
Яъне, $\overline{AB} = \overline{DC}$. $\overline{BC} = \overline{AD}$ буданашро мустақил нишон диҳед. □

2.2. Амалҳо аз болои векторҳои фазо

Амалҳо аз болои векторҳо. Амалҳои ҷамъшавӣ, афзуншавии ададӣ ва афзуншавии скалярии векторҳо монанди ҳамворӣ муайян мешавад.

Суммаи векторҳои $\overline{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ ва $\overline{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ гуфта, вектори $\overline{a}+\overline{b} = (a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$ -ро меноманд (расми 20).

20 а) б) с)



Дар расми 20 (*б*) крани борбардор мувофиқи вектори $\overline{a}$, бор бошад нисбати кран мувофиқи вектори $\overline{b}$ дар ҳаракат бошад. Дар натиҷа бор мувофиқи вектори $\overline{a}+\overline{b}$ ҳаракат мекунад. Ҳамин тавр, бо кадом сабаб аробаро аз ҷой ҷубонда натавонистани қаҳрамонҳои масали нависандаи рус Криловро, ки дар расми 20 (*c)* тасвир шудааст, ҳис намудед.

Хосиятҳои суммаи векторҳо.

Хосиятҳои зерин барои векторҳои ихтиёрии $\overline{a}$, $\overline{b}$ ва $\overline{c}$ бамаврид:

а) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ – қонуни ҷойивазкунии ҷамъшавии векторҳо;

б) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$ – қонуни тақсимоти ҷамъшавии векторҳо.

Қоидаи секунҷаи ҷамъшавии векторҳо.

Барои нуқтаҳои ихтиёрии A, B ва C (расми 21): $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

Қоидаи параллелограмми ҷамъшавии векторҳо.

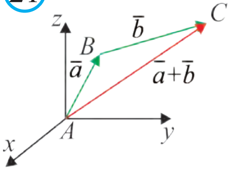
Агар $ABCD$ – параллелограмм (расми 22) бошад, $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

Қоидаи бисёркунҷаи ҷамъшавии векторҳо.

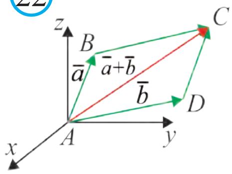
Агар нуқтаҳои A, B, C, D ва E қуллаи бисёркунҷа бошад(расми 23),

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE}$ мешавад.

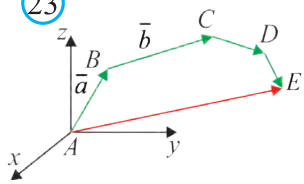
21



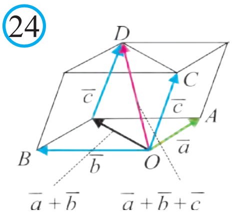
22



23



24



Қоидаи параллелепипеди ҷамъшавии векторҳои дар як ҳамворӣ нахобида. Агар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед (расми 24) бошад,

$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA_1}=\overline{AC}$ мешавад.

Ҳосили зарби вектори $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ *ба адади* λ гуфта, вектори $\lambda\overline{a}=(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$-ро мегӯянд (расми 25).

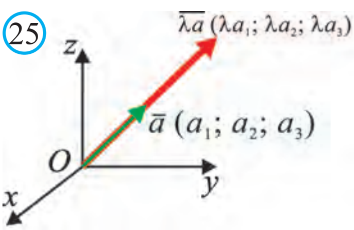
Векторҳои $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ инчунин бароиададҳои λ ва μ

а) $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$ б) $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$;

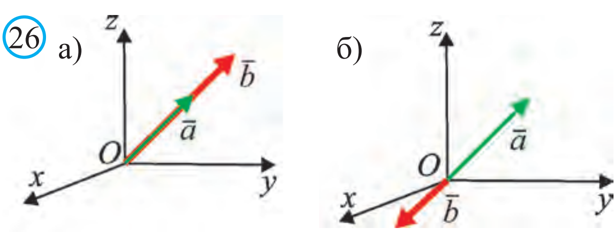
с) $|\lambda\overline{a}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$ ва $\lambda\overline{a}$ самти вектор

$\lambda>0$ бошад, $\overline{a}$ бо самти вектор як хел ва $\lambda<0$ бошад, $\overline{a}$ ба вектор муқобилсамт мешавад.

25



26



2.3. Векторҳои коллинеар ва компланар

Векторҳои аз вектори сифр фарққунандаи $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ дода шуда бошад.

Векторҳои $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ як хел, ёки муқобилсамт равона бошад , онҳо *векторҳои коллинеар* ном доранд (расми 26).

<u>Хосияти 1.</u> Барои векторҳои $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ баробарӣ мувофиқ бошад $\overline{a} = \lambda\overline{b}\ (\lambda \neq 0)$, онҳо байни ҳам коллинеар мешаванд ва акси он.

Агар $\lambda > 0$ бошад, векторҳои $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ аз як тараф ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$), агар $\lambda < 0$ бошад, ба самти муқобил ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$) равона мешавад.

<u>Хосияти 2.</u> Векторҳои $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ ва $\overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ байни ҳам коллинеар бошанд, координатаҳои онҳо байни ҳам пропорционал мешаванд: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ ва ё акси он.

Масъалаи 2. Дар ибтидои нуқта $A\ (1;\ 1;\ 1)$ ва интиҳои Oxy дар ҳамвории нуқтаи B буда ва ба вектори $\overline{a}(1;\ 2;\ 3)$ вектори коллинеарро ёбед.

Ҳал: Координатаҳои нуқтаи B агар $B(x;\ y;\ z)$ бошад. Нуқтаи B барои дар ҳамвории Oxy хобиданаш $z=0$. Дар он $\overline{AB}\ (x-1;\ y-1;\ -1)$ мешавад.

Мувофиқи шарт, векторҳои $\overline{AB}\ (x-1;\ y-1;\ -1)$ ва $\overline{a}(1, 2, 3)$ коллинеар аст. Яъне, координатаҳои онҳо байни худ пропорционал мешавад.

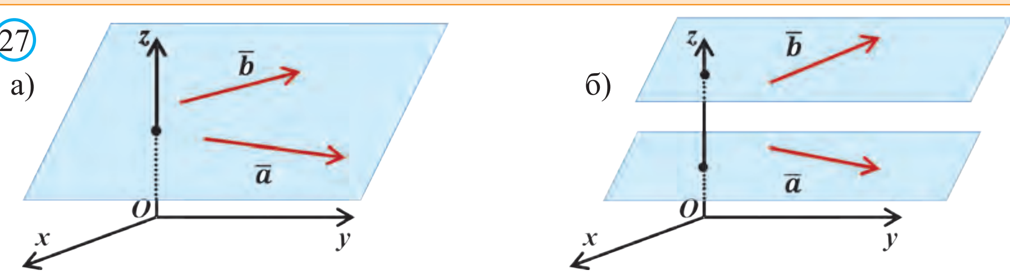
Аз онҳо пропорционалҳои $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{3}$ ҳосил мекунем.

Аз онҳо $x = \frac{2}{3},\ \ y = \frac{1}{3}$ буданашро меёбем.

Дар он $\overline{AB}\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$ мешавад.

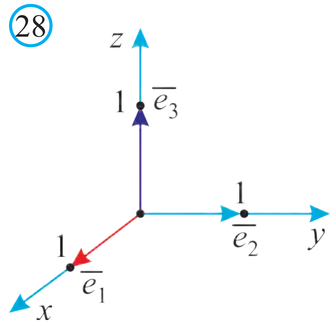
Векторҳои дар як ҳамворӣ ёки ҳамвориҳои параллел хобидаро *векторҳои компланар* мегӯянд (расми 27).

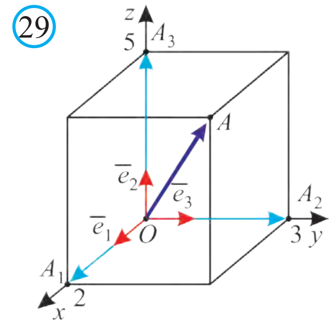
27



Векторҳои $\overline{e_1}(1;\ 0;\ 0)$, $\overline{e_2}(0;\ 1;\ 0)$ ва $\overline{e_3}(0;\ 0;\ 1)$-ро *ортҳо* меноманд (расми 28).

Вектори ихтиёрии $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ дар намуди $\overline{a} = a_1\overline{e_1} + a_2\overline{e_2} + a_3\overline{e_3}$ ба тарзи ягона доир ба *ортҳо кушодан* мумкин (расми 29).





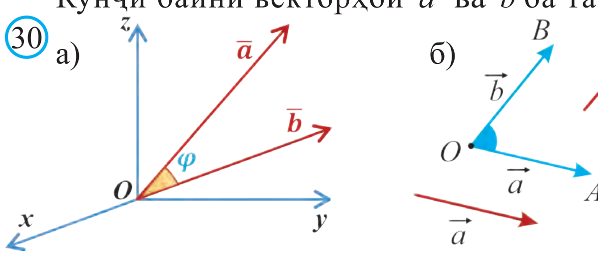
Ҳамчунин, се вектори ғайрикомпланари $\overline{OA}, \overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ дода шуда бошад, вектори ихтиёрии $\overline{OD}$ -ро дар намуди зерин ба таври ягона ифода намудан мумкин: $\overline{OD} = a_1 \cdot \overline{OA} + a_2 \cdot \overline{OB} + a_3 \cdot \overline{OC}$.

Дар ин ҷо a_1, a_2, a_3 ададҳои ҳақиқии номаълум. Инро *векторро бо векторҳои дигари додашуда кушодан мегӯянд.*

2.4. Ҳосили зарби скалярии векторҳо

Векторҳои аз нол фарқкунандаи *кунҷи байни векторҳои* $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ гуфта, самти аз нуқтаи векторҳо баромадаи O і $OA = \overline{a}$ ва $OB = \overline{b}$ ба кунҷи миёни порчаҳоро мегӯянд (расми 30).

Кунҷи байни векторҳои $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ ба тавзи $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$ ишора мешавад.



Ҳосили зарби скалярии векторҳои $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ гуфта, дарозии байни кунҷи косинуси ҳосили зарби ин векторҳоро мегӯянд.

Агар яке аз векторҳо вектори нол бошад, ҳосили зарби скалярии онҳо ба нол баробар мешавад. Ҳосили зарби скалярӣ ба тарзи $\overline{a} \cdot \overline{b}$ ёки $(\overline{a}\,;\,\overline{b})$ ишора мешавад. Мувофиқи таъриф

$$(\overline{a}\,;\,\overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi. \qquad (1)$$

Аз таъриф аён аст, ки ҳосили зарби скалярии векторҳои $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ ба нол баробар бошанд, онҳо *перпендикуляр* мешаванд ва баръакс.

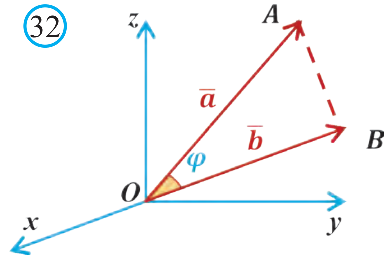
Дар физика зери таъсири қувваи $\overline{F}$ ба масофаи $\overline{s}$ ҷунбонидани кори иҷрошудаи A (расми 31) ба ҳосили зарби скалярии векторҳои $\overline{F}$ ва $\overline{s}$ баробар мешавад:

$$A = (\overline{F}\,,\,\overline{s}) = |\overline{F}| \cdot |\overline{s}| \cos\varphi.$$

Хосият. $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ ва $b(b_1;\ b_2;\ b_3)$ барои векторҳои $(\bar{a};\ \bar{b})=$ $=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Исбот. Ибтидои координатаи векторҳои $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ -ро ба нуқтаи O мегузорем (расм 32). Дар он $\overline{OA}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$ ва $\overline{OB}=(b_1;\ b_2;\ b_3)$ мешавад. Агар векторҳои додашуда коллинеар набошад, ABO аз секунҷа иборат мешавад ва барои он теоремаи косинусҳо бамаврид аст:

32



$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\varphi. \text{ Дар он}$$

$OA\cdot OB\cdot\cos\varphi=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2)$ мешавад. Лекин, $OA^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$,

$$OB^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2 \quad \text{ва} \quad AB^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2.$$

$$\text{Яъне, } (\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2-AB^2)=$$

$$=\frac{1}{2}({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2-$$

$$-(b_3-a_3)^2)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Агар векторҳои додашуда коллинеар набошад ҳам дар ҳолати ($\varphi=0°$, $\varphi=180°$) мувофиқ будани ин баробариро мустақил нишон диҳед. □

Хосиятҳои зарби скалярии векторҳо

1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ – хосияти ҷойивазнамоӣ.
2. $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$ – хосияти тақсимшавӣ.
3. $\lambda\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\lambda\cdot\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\lambda\cdot\bar{b})$ – хосияти гурӯҳбандӣ.
4. Агар векторҳои a ва b векторҳои яксамти коллинеар бошад, $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\,|\bar{b}|$ мешавад, чунки $\cos 0°=1$.
5. Агар муқобилсамт бошад, $\bar{a}\cdot\bar{b}=-|\bar{a}|\,|\bar{b}|$, чунки $\cos 180°=-1$.
6. $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}||\bar{a}|\cos 0°=|\bar{a}|^2\Rightarrow\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$.
7. Вектори $\bar{a}$ ба вектори $\bar{b}$ перпендикуляр бошад, $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ мешавад.

Натиҷаҳо:

а) $\bar{a}=(a_1;a_2;a_3)$ дарозии вектори: $|\bar{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$; (1)

б) $\bar{a}=(a_1;a_2;a_3)$ ва $\bar{b}=(b_1;b_2;b_3)$ косинуси кунҷи байни векторҳо:

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}}; \quad (2)$$

c) $\overline{a}=(a_1;a_2;a_3)$ ва $\overline{b}=(b_1;b_2;b_3)$ шарти перпендикулярии векторҳо:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \qquad (3)$$

Масъалаи 3. Нуқтаҳои $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(1;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 0)$, $D(2;\ -3;1)$ дода шудааст. Масофаи векторҳои $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ -и кунҷи косинусро ёбед.

Ҳал. Координатаҳои векторҳои $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ -ро, пас дарозиҳояшро ёбед:

$\overline{AB} = (1-0;\ -1-1;\ 2-(-1)) = (1, -2, 3),$

$$\overline{CD} = (2-3;\ -3-1;\ 1-0) = (-1, -4, 1).$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14},$$

$$\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2} = \sqrt{18}.$$

Яъне, $\cos\varphi = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|AB|\cdot\left|\overline{CD}\right|} = \dfrac{1\cdot(-1)+(-2)(-4)+3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}} = \dfrac{5}{\sqrt{63}}.$

Масъалаи 4. $\overline{a}(1;2;0)$, $\overline{b}(1;-\dfrac{1}{2};0)$ кунҷи байни векторҳоро ёбед.

Ҳал: $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \dfrac{1\cdot 1+2\left(-\dfrac{1}{2}\right)+0\cdot 0}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}\sqrt{1^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+0^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{5}\sqrt{\dfrac{5}{4}}} = 0.$

Яъне, $\varphi = 90°$. $\square$

Масъалаи 5. $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$ ва кунҷи байни ин векторҳо ба $\dfrac{2\pi}{3}$ баробар бошад, $|\overline{a}+\overline{b}|$ -ро ёбед.

Ҳал: $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = \sqrt{\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2} = \sqrt{\overline{a}^2+2\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)+\overline{b}^2} = \sqrt{\left|\overline{a}\right|^2+2\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\phi+\left|\overline{b}\right|^2} =$

$$= \sqrt{9+25+2\cdot 15\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{34-15} = \sqrt{19}$$

Масъалаи 6. Агар $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}$ ва $\overline{b}=-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ бошад, 1) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{d}=2\overline{a}-\overline{b}$ координатаҳо ва дарозии веторҳоро ёбед.

Ҳал: Паҳншавии векторҳои $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ -ро ба координатаҳои ҷустуҷӯии ифодаи вектор мегузорем: 1) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}=\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}$.

Яъне, $\overline{c}=\overline{(1;2;-2)}$. Дар он $|\overline{c}| = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$;

2) $\overline{d}=2\overline{a}-\overline{b}=2(2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k})-(-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k})=4\overline{i}+6\overline{j}-8\overline{k}+\overline{i}+\overline{j}2\overline{k}=$
$=5\overline{i}+7\overline{j}-10\overline{k}$.

Яъне, $\overline{d}=(5;7;-10)$. Дар он $\left|\overline{d}\right| = \sqrt{5^2+7^2(-10)^2} = \sqrt{174}$. $\square$

Масъалаи 7. Кунҷи байни векторҳои $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ ба 30° баробар ва $|\overline{a}| = \sqrt{3}$ $|\overline{b}|=2$ бошад, ҳосили зарби $(2\overline{a} + 3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})$ - ро ёбед.

Ҳал: Аввал ҳосили зарби векторҳои $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ -ро меёбем:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos 30° = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Баъд мувофиқи хосияти тақсимоти зарби векторҳо, ифодаҳои додашудаи векторҳоро монанди бисёрҳадро ба бисёрҳад зарб кардан зиёд менамоем:

$$(2\overline{a}+3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})=-4\overline{a}^2 +2(\overline{a}, \overline{b})-6(\overline{a}, \overline{b})+3\overline{b}^2=-4\overline{b}^2-4(\overline{a}, \overline{b})+3\overline{b}^2.$$

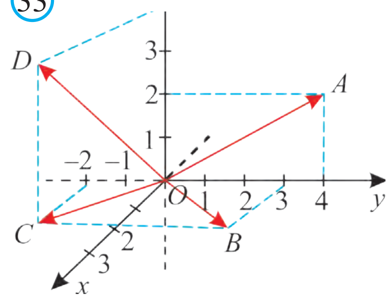
$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2=9$, $\overline{b}=|\overline{b}|^2=4$, $(\overline{a}, \overline{b})=3$ буданро ба ҳисоб гирем, ҳосили зарби ҷустуҷӯшуда $(2\overline{a}+3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})=-4\cdot 9-4\cdot 3+3\cdot 4=-36.$

Масъалаҳо доир ба мавзӯъ ва супоришҳои амалӣ

39. Координатаҳои векторҳои дар расми 33 бударо муайян кунед.

40. $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$ ва нуқтаҳои $O(0;\ 0;\ 0)$ дода шудааст. Координатаҳои векторҳои $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{BO}, \overline{CO}$ ва $\overline{AB}$ -ро муайян кунед.

33



41. Агар $\overline{AB}$ $(a;\ b;\ c)$ бошад, Координатаҳои вектори $\overline{BA}$ -ро номбар кунед.

42. Агар а) $A\,(1;\ 2;\ 3)$, $B\,(3;\ 7;\ 6)$; Б) $A\,(-3;\ 2;\ 1)$, $B(1;-4;\ 3)$ бошад, координатаҳои вектори $\overline{AB}$ -ро ёбед.

43. Дарозии векторҳои $\overline{a}\,(1;-1;1)$, $\overline{b}\,(0;\ 2;-4)$, $\overline{c}\,(2;3;-1)$, $\overline{d}\,(1;2;5)$-ро ёбед.

44. Агар $\overline{a}\,(2;\ 1;\ 3)$ ва $\overline{b}\,(-1;\ x;\ 2)$ ба дарозии векторҳо баробар бошад, x -ро ёбед.

45. Координатаҳои вектори $\overline{a}\,(c;\ 2c;\ -c)$ -ро дар дарозии ба $\sqrt{54}$ баробар ёбед.

46. Нуқтаҳои A, B, C, D, E ва F қуллаҳои шашкунҷаи мунтазам бошад, бо воситаи онҳо ба векторҳои : а) дуто баробар; б) дуто ба як самт; с) дуто муқобилсамт ва баробар; д) дуто муқобилсамт ва нобаробар буда, мисол биёред.

47. Дар кадом қиммати k: а) $\overline{a}\,(4;\ k;\ 2)$; б) $\overline{a}\,(k-1;1;4)$; с) $\overline{a}\,(k;\ 1;\ k+2)$; д) $\overline{a}\,(k-1;\ k-2;\ k+1)$ дарозии вектор ба $\sqrt{21}$ баробар мешавад?

48. Сето нуқта дода шудааст: $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$.Чунон нуқтаи $D(x;\ y;\ z)$-ро ёбед, ки векторҳои $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ баробар бошанд.

49. Сето нуқта дода шудааст: $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 2;\ -1)$. Агар а) векторҳои $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ баробар; б) суммаи векторҳои $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ ба нол баробар бошад, нуқтаи $D\ (x;\ y;\ z)$ ро ёбед.

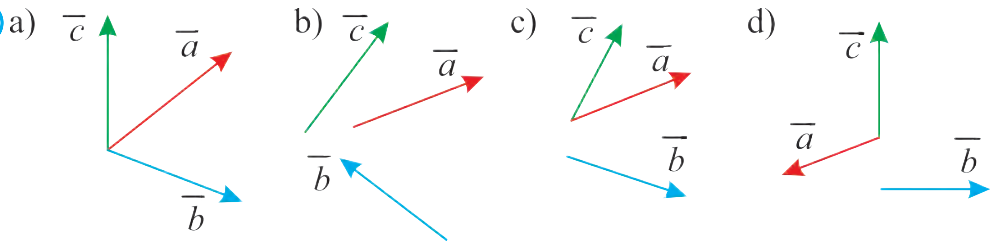
50*. Векторҳои $(2;\ n;\ 3)$ ва $(3;\ 2;\ м)$ дода шудааст. Дар кадом қимматҳои $м$ ва n ин векторҳо коллинеар мешаванд?

51. Нуқтаи B -и ибтидояш дар нуқтаи $A(1;\ 1;\ 1)$ ва охираш дар ҳамвории Oxy буда ва вектори ба вектори $a(1;-2;\ 3)$ коллинеарро ёбед.

52*. $ABCD$ нӯгҳои параллеограмм а) $A(-2;-4;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ 7)$, $C(4;\ 2;\ -5)$; б) $A(4;\ 2;-1)$, $B(1;-3;-2)$, $C(-6;\ 2;\ 1)$; с) $A(-1;\ 7;\ 4)$, $B(1;\ 5;\ 2)$, $C(9;-3;\ -8)$; д) $A(-2;-4;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ 7)$, $C(4;\ 2;-5)$ бошад, нӯги координатаҳои D -ро ёбед.

53. Мувофиқи қоидаи параллелепипед паҳншавии векторҳоро, ки дар расми 34 тасвир шудааст ёбед.

34

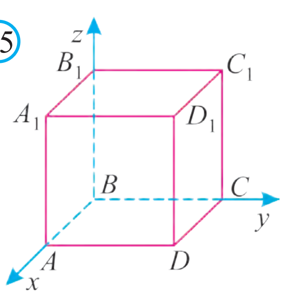


54. Агар $A(6;7;8)$, $B(8;2;6)$, $C(4;3;2)$, $D(2;8;4)$ ва $M(3;5;2)$, $N(7;1;2)$, $P(3;-3;2)$, $K(-1;1;2)$ бошад, кадоме аз чоркунҷаҳои $ABCD$ ва $MNPK$ ромб ва кадоме квадрат мешаванд?

55. Дар куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дар расми 35 тасвиршуда: а) $\overline{AB}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{AC}$ ба векторҳо баробар; б) $\overline{A_1D_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{BD}$ ба векторҳо муқобилсамт; с) $\overline{BA}$, $\overline{AA_1}$ ба векторҳо коллинеар; д) $\overline{AB}$ ва $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ ва $\overline{A_1C}$ ба ҷуфти векторҳо компланарро муайян кунед.

56. Агар 1) $\overline{a}(1;-\ 4;0)$, $\overline{b}(-\ 4;0;8)$; 2) $\overline{a}(0;2;5)$, $\overline{b}(4;\ \ 3;\ \ 0)$ бошад, координатаҳо ва дарозии вектори $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$ -ро ёбед.

35



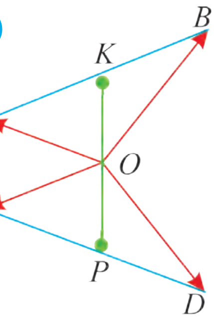
57. Агар 1) $\overline{a}(1;\ -4;\ 0)$, $\overline{b}(-4;\ 8;\ 0)$; 2) $\overline{a}(0;\ -2;\ 7)$, $\overline{b}(0;\ 4;\ -1)$ бошад, координатаҳо ва дарозии вектори $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ -ро ёбед.

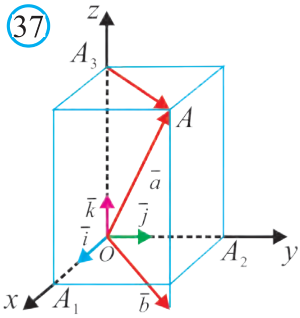
58. Агар $\overline{b}(-4;\ 8;\ 2)$ бошад, координатаҳо ва дарозии вектори а) $2\overline{b}$; б) $-3\ \overline{b}$; с) $-1{,}5\ \overline{c}$; д) $0\cdot\overline{b}$ -ро ёбед.

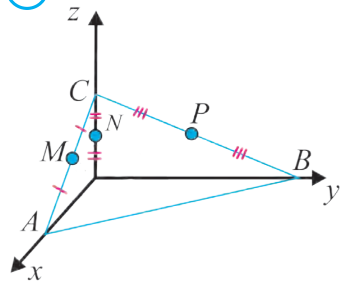
59. Векторҳои $\overline{a}(1; -1; 1)$, $\overline{b}(0; 2; -4)$, $\overline{c}(2; 3; -1)$, $\overline{d}(1; 2; 5)$ -ро мувофиқи ортҳо кушоед.

60*. Векторҳои $\overline{a}(1; -1; 1)$, $\overline{b}(0; 2; -4)$, $\overline{c}(2; 3; -1)$, $\overline{d}(1; 2; 5)$ дода шудааст. $|\overline{a} + 2\overline{b}|$, $|\overline{a} - 3\overline{b}|$, $|\overline{c} - 2\overline{d}|$, $|3\overline{a} + 4\overline{d}|$ -ро ёбед.

61*. Нуқтаҳои ҳархелаи дар хатҳои рости K ва P хобида, мобайни порчаҳои AB ва CD ва нуқтаи O мобайни порчаи KP бошад (расми 36), исбот кунед, ки $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{0}$ аст.

36


37


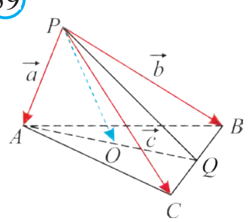
38


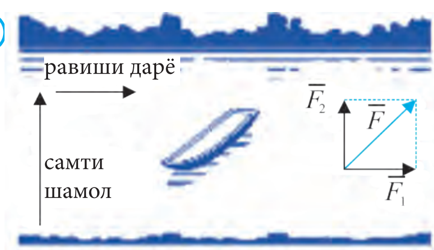
62. Аз расми 37 координаитаҳои векторҳои $OA_1 = 2$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 3$. $\overline{a}$, $\overline{b}$ ва $\overline{A_3A}$ муайян кунед.

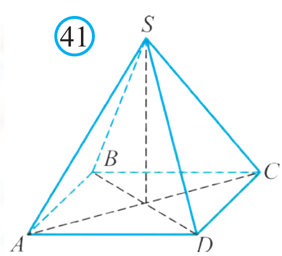
63. Аз расми 38 $OA = 4$, $OB = 9$, $OC = 2$, нуқтаҳои M, N ва P, мувофиқи самт AC, OC ва CB миёни порчаҳо.Координатаҳои векторҳои $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{PC}$, $\overline{MC}$ ва $\overline{CN}$ -ро ёбед.

64. Нуқта Q миёни қуллаи BC -и тетраэдри $PABC$ ва нуқтаи O миёнаи порчаи AQ бошад (расми 39), вектори $\overline{PO}$ -ро бо воситаи векторҳои $\overline{PA} = \overline{a}$, $\overline{PB} = \overline{b}$ ва $\overline{PC} = \overline{c}$ ифода намоед.

65*. Ба завраки дар расми 40 тасвиршуда мавҷи дарё бо қувваи $\overline{F_1} = 120\ N$ ва шамоли аз соҳил вазида бо қувваи $\overline{F_2} = 100\ N$ таъсир мекунад. Барои завракро дар дарё ноҷунбон як хел нигоҳ доштан кадом қувва лозим аст?

39


40


41


66. Ҳосили зарби скаляр: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; с) 0; д) $-\frac{1}{2}$; е) b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ро дар кунҷи баробари байни векторҳои воҳид ёбед.

67. Ҳосили зарби скаляри векторҳои а) $\overline{a}$ (1; –1; 1), $\overline{b}$ (0; 2; –4); б) $\overline{c}$(2; 3; –1), $\overline{d}$ (1; 2; 5); с) $\overline{e}$(1; –1; 1), $\overline{f}$(0; 2; – 4); д) $\overline{г}$(2; 3;–1), $\overline{h}$(1; 2; 5) -ро ёбед.

68. ABC дар кунҷҳои $\angle A = 50°$, $\angle C = 90°$. а) $\overline{BA}$ ва $\overline{BC}$; б) $\overline{CA}$ ва $\overline{AB}$; с) $\overline{AB}$ ва $\overline{BA}$ кунҷи байни векторҳоро ёбед.

69. Дарозии векторҳо ба $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ ва кунҷи байни онҳо мувофиқи а) 5, 12, 50°; б) 3, $\sqrt{2}$, 45°; с) 5, 6, 120°; д) 4, 7, 180° бошад, ҳосили зарби скалярии онҳоро ёбед.

70. Дар кадом қиматҳои n векторҳо перпендикуляр мешаванд?
а) $\overline{a}(2; –1; 3)$, $\overline{b}(1; 3; n)$; б) $\overline{a}(n; –2; 1)$, $\overline{b}(n; –n; 1)$;
с) $\overline{a}(n; –2; 1)$, $\overline{b}(n; 2n; 4)$; д) $\overline{a}(4; 2n; –1)$, $\overline{b}(–1; 1; n)$.
скаляри векторҳои а) $\overline{a} + \overline{b}$ ва $\overline{a} - \overline{b}$; б) $\overline{a} + 2\overline{b}$ ва $3\overline{a} - \overline{b}$; с) $2\overline{a} + \overline{b}$ ва $3\overline{a}$b $- 2\overline{b}$ -ро ёбед.

72. Нуқтаҳои A (1; 0; 1), B (–1; 1; 2), C (0; 2; –1) дода шудааст. Дар тири координатаҳои Oz чунон нуқтаи D -ро ёбед, ки векторҳои $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ перпендикуляр бошанд.

73*. $(\overline{a}, \overline{b}) \leq |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$ буданашро асоснок кунед. Ин векторҳо чӣ гуна бошад баробарӣ бамаврид мешавад?

74*. Тамоми қуллаҳои пирамидаи $SABCD$ байни худ баробар (расми 41) ва асосаш аз квадрат иборат. Кунҷҳои байни векторҳои а) $\overline{SA}$ ва $\overline{SB}$; б) $\overline{SD}$ ва $\overline{AD}$; с) $\overline{SB}$ ва $\overline{SD}$; д) $\overline{AS}$ ва $\overline{AC}$; е) $\overline{AC}$ ва $\overline{AD}$ ро ёбед.

75*. Векторҳои дарозиаш ба як баробари $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ бо ҷуфтҳои худ кунҷи 60° -ро ташкил мекунанд.Кунҷи байни векторҳои а) $\overline{a}$ ва $\overline{b} + \overline{a}$; б) $\overline{a}$ ва $\overline{b} - \overline{c}$ -ро ёбед.

76. Нуқтаи O нуқтаи буриши диагоналҳои квадрати $ABCD$ аст. Квадрати дар қуллаи B ба диагонал параллел ва бо хати рости DA дар нуқтаи F хати рости бурранда гузаронида шудааст. Вектори $\overline{BF}$ -ро бо векторҳои $\overline{DO}$ ва $\overline{DC}$ ифода намоед.

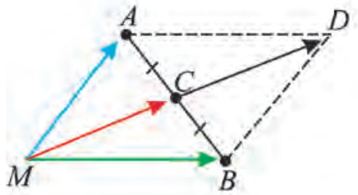
77. Нуқтаи O нуқтаи буриши медианаҳои секунҷаи ABC бошад, вектори $\overline{OC}$ -ро доир ба векторҳои $\overline{AB}$ ва $\overline{AC}$ паҳн кунед.

78*. Нуқтаи C ортаи порчаи AB бошад (расми 42), дар он барои нуқтаи ихтиёрии M будани $\overline{MC} = \frac{1}{2}(\overline{MA} + \overline{MB})$ -ро исбот намоед.

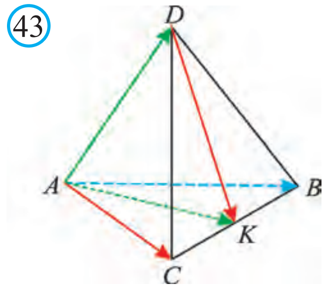
79. Нуқтаи K миёнаи тетраэдри $ABCD$ -и қуллаи BC бошад (расми 43), вектори $\overline{DK}$ -ро доир ба векторҳои $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ ва $\overline{AC}$ паҳн кунед.

80*. Нисбати самти ҷунбиши ҷисми дар кунҷи 30° гузошта, бо таъсири қувваи $\overline{F} = 20N$ ҷисм 3 м меҷунбад. Кори дар ин ҳолат иҷрошударо ёбед.

42



43



81*. Нисбати самти ҷунбиши ҷисми дар кунҷи 60° гузошта, бо таъсири қувваи $\overline{F}=50N$ ҷисм 8 м меҷунбад. Кори дар ин ҳолат иҷрошударо ёбед.

82*. (Нобаробарии Кошӣ–Буняковский) Барои ададҳои ихтиёрии $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ мувофиқ будани нобаробарии $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$ -ро бо истифода аз векторҳо исбот намоед.

3. ИВАЗКУНИҲО ДАР ФАЗО ВА МОНАНДӢ

3.1. Ивазкуниҳои геометрӣ дар фазо

Ҳар як нуқтаи шакли F -и дар фазо додашуда бо ягон равиш кӯчонида шавад, шакли нави F_1 ҳосил мешавад. Агар дар ин кӯчидан (аксгардонӣ) аз нуқтаҳои ҳархелаи шакли якум ба нуқтаҳои ҳархелаи шакли дуюм кӯчад, ин кӯчишро *ивазнамоии шакли геометрӣ* меноманд.

Тамоми фазоро ҳамчун шакли геометри нигарем, дар бораи шакливазнамоӣ сухан гуфтан мумкин.

Чуноне ки мебинед, фаҳмиши ивазнамоии геометрӣ дар фазо монанди дар ҳамворибуда дароварда мешавад. Инчунин, як қатор хосиятҳои дар поён дохилшаванда ва исботи онҳо ҳам ба монанди ҳамворӣ аст. Аз ҳамин сабаб, барои исботи ин хосиятҳо намеистем ва онҳоро мустақил иҷро намуданро тавсия медиҳем.

3.2. Ҳаракат ва кӯчиши параллел

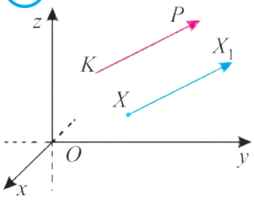
Шакливазкунии нигаҳдорандаи миёни нуқтаҳо *ҳаракат* номида мешавад. Хосиятҳои зерини ҳаракатро овардан мумкин.

Дар ҳаракат ростхата ба ростхата, нур ба нур порча ба порчаи ба он баробар, кунҷ ба кунҷи ба он баробар, секунҷа ба секунҷаи ба он баробар, ҳамворӣ ба ҳамвории ба он баробар ва тетраэдр ба тетраэдри ба он баробар мекӯчад (акс мегардад).

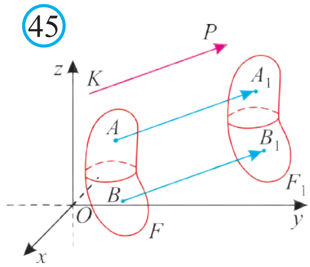
Бо ёрдами ягон ҳаракат дар фазо шаклҳое, ки аз яке ба дигаре кӯчида метавонад *шаклҳои баробар* мегӯянд.

Мисоли соддатарин дар ҳаракат ин кӯчиши параллелӣ аст.

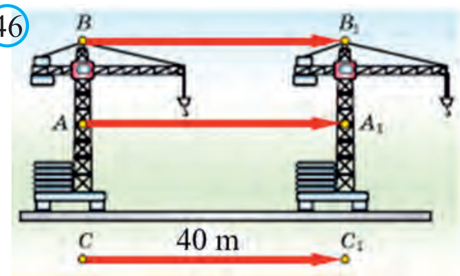
44



45



46



Дар фазо ягон вектори $\overline{KP}$ ва нуқтаи ихтиёрии X дода бошад (расми 44). Агар нуқтаи X_1 шарти $\overline{XX_1} = \overline{KP}$ -ро қонеъ кунад, нуқтаи X ба нуқта X_1 дар атрофи вектори $\overline{KP}$-ро *параллел кӯчидан* меноманд.

Агар дар фазо ҳар як нуқтаи шакли додашудаи F дар атрофи вектори $\overline{KP}$ кӯчонида шавад (расми 45), шакли нави F_1 ҳосил мешавад. Дар ин ҳолат шакли F *ба шакли* F_1 -ро *параллел кӯчонидан* меноманд. Дар параллел кӯчонидан ҳар як нуқтаи шакли F ба як хел самт, ба як хел масофа кӯчонида мешавад.

Ҳар як нуқтаи крани борбардори дар расми 46 тасвирёфта нисбати ҳолати ибтидоӣ ба 40 м параллел кӯчидааст.

Равшан аст, ки параллелкӯчонӣ ҳаракат аст. Барои ҳамин, дар параллелкӯчонӣ хати рост ба хати рост, нур ба нур, ҳамворӣ ба ҳамворӣ, буриш ба буриши баробар мекӯчад ва ғайра.

Агар гӯем ки дар параллелкӯчонии вектори $\overline{KP} = (a;\ b;\ c)$ шакли F ба нуқтаи $X(x;\ y;\ z)$ шакли F_1 ба нуқтаи $X_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ гузарад. Дар он, вақт мувофиқи таъриф ба зеринҳо соҳиб мешавем:

$x_1 - x = a,\ \ y_1 - y = b,\ \ z_1 - z = c$ ёки $x_1 = x + a,\ \ y_1 = y + b,\ \ z_1 = z + c.$
Ин баробариҳо *формулаи параллелкӯчонӣ* номида мешавад.

Масъалаи 1. Дар параллелкӯчонии атрофи вектори $\overline{p} = (3;\ 2;\ 5)$ нуқтаи $P\,(-2;\ 4;\ 6)$ ба кадом нуқта мекӯчад?

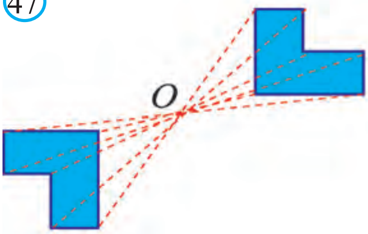
Ҳал. Аз формулаи параллелкӯчонии боло истифода мебарем:
$x_1 = -2 + 3 = 1,\ \ y_1 = 4 + 2 = 6,\ \ z_1 = 6 + 5 = 11.$ *Ҷавоб:* $P_1(1;\ 6;\ 11)$. □

3.3. Симметрияи марказӣ дар фазо

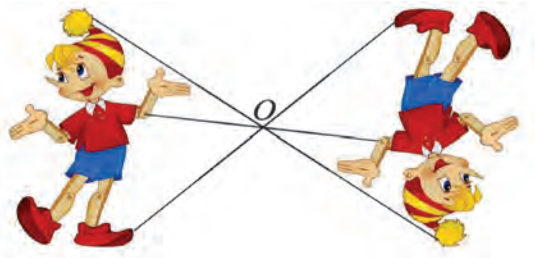
Нуқтаҳои дар фазо додашудаи A ва A_1 -ро ба нуқтаи O нисбатан симметрӣ мегӯянд, агар $\overline{AO} = \overline{OA_1}$ бошад, яъне нуқтаи O мобайни порчаи AA_1 бошад. Агар ҳар як нуқтаи дар фазо додашудаи шакли F -и нуқтаи O ба нуқтаи нисбатан симмерӣ кӯчад (расми 47), ин ҷойивазнамоиро *симметрия нисбати нуқтаи O* меноманд. Дар расмҳои 48, 49 шаклҳои симметрӣ нисбати нуқтаи O тасвир шудааст. Симметрия нисбати нуқта ҳаракат аст.

Агар шакли F ба нуқтаи O дар ҷойивазнамоии нисбатан симметрӣ ба худаш кӯчад, он *шакли маркази симетрӣ* номида мешавад.

47

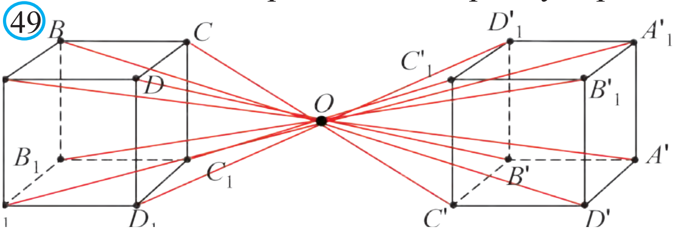


48

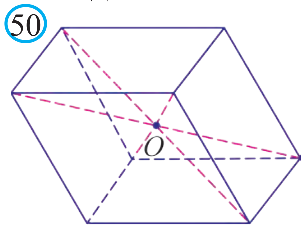


Масалан, нуқтаи бурриши диагоналҳои параллелепипед (расми 50) нисбати O шакли маркази симмерӣ шуморида мешавад.

49



50



Масъалаи 2. Ба нуқтаи O (2; 4; 6) дар нисбати симметрияи марказӣ нуқтаи A = (1; 2; 3) ба кадом нуқта мегузарад?

Ҳал. $A_1 = (x; y; z)$ нуқтаи ҷустуҷӯӣ бошад. Мувофиқи таъриф,нуқтаи O мобайни порчаи AA_1. Яъне, $2 = \frac{x+1}{2}$, $4 = \frac{y+2}{2}$, $6 = \frac{z+3}{2}$.

Дар ин баробариҳо $x = 4 - 1 = 3$, $y = 8 - 2 = 6$, $z = 12 - 3 = 9$.

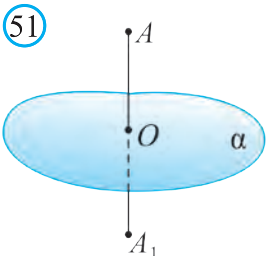
Ҷавоб: $A_1(3; 6; 9)$.□

3.4. Симмерия нисбати ҳамворӣ

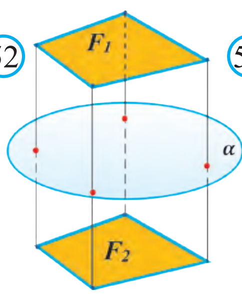
Нуқтаҳои дар фазо додашудаи A ва A_1 *симметрия нисбати ҳамворӣ* гуфта мешавад, агар ҳамвории ба порчаи AA_1 перпендикуляр буда, онро баробар ба ду тақсим кунад (расми 51). Дар расми 52 шаклҳои нисбат ба ҳамворӣ симметрия будаи F_1 ва F_2 оварда шудааст. Равшан аст, ки сурат ва баданамон дар нисбати ҳамвории оина симметрӣ мешавад. (расми 53).

Симмерия нисбати ҳамворӣ ҳаракат аст.

51

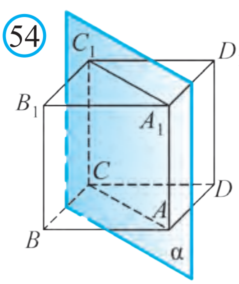


52



53

54



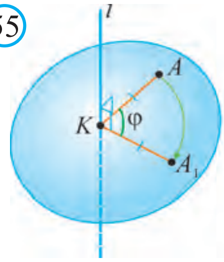
Яъне, дар симметрияи нисбати ҳамворӣ порча ба порчаи ба худ баробар, хати рост ба хати рост ва ҳамворӣ ба ҳамворӣ акс меёбад.

Агар шакли F дар ҷойивазнамоии симметрӣ нисбати ҳамворӣ ба худаш кӯчад, онро ба ҳамворӣ *шакли нисбатан симетрӣ* меноманд.

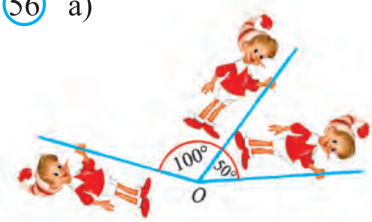
Масалан, ҳамвориҳои α -и аз қуллаҳои куби AA_1ва CC_1 гузарандаи дар расми 54 тасвирёфта ба ҳамворӣ шакли нисбатан симметрӣ мешавад.

3.5. Симметрия нисбати чархзанӣ ва тир

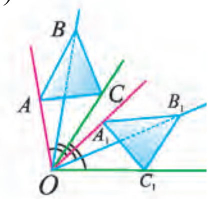
55



56 a)

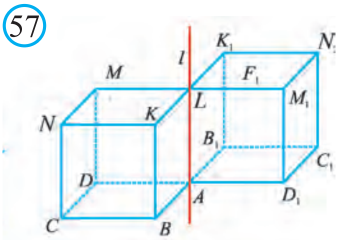


b)



Бигӯем, дар фазо нуқтаҳои A ва A_1 ва хати рости l дода шуда бошад. Агар l ба хати рости фаромадаи AK ва A_1K перпендикулярҳои баробар ва байни худ кунҷи φ ташкил намояд, дар ин ҳолат *l нисбати хати рост ба кунҷи φ дар натиҷаи гардиш* нуқтаи A ба нуқта A_1 гузашт мегӯянд (расми 55).

57



Агар дар фазо ҳар як нуқтаи додашудаи шакли F -ро нисбатан ба хати рости l ба кунҷи φ гардонем, шакли нави F_1 ҳосил мешавад. Дар ин ҷо шакли F нисбат ба хати рости l ба кунҷи φ чарх занад ба шакли F_1 гузашт мегӯянд. Дар расми 56 шаклҳои аз чунин чархзанӣ пайдошуда нишон дода шудааст.

Масалан, куби дар расми 57 тасвиршударо ба хати рости l нисбатан ба кунҷи 180° чарх занонида куби навро ҳосил мекунем.

Гардиш нисбати хати рост ҳам ҳаракат мешавад.

Гардиши хати рост нисбати l дар кунҷи 180° *l нисбати хати рост симметрия* номида мешавад.

Ҳамворӣ, тир ва маркази симметрияи шаклро *элементҳои симметрияи он* номида мешавад.

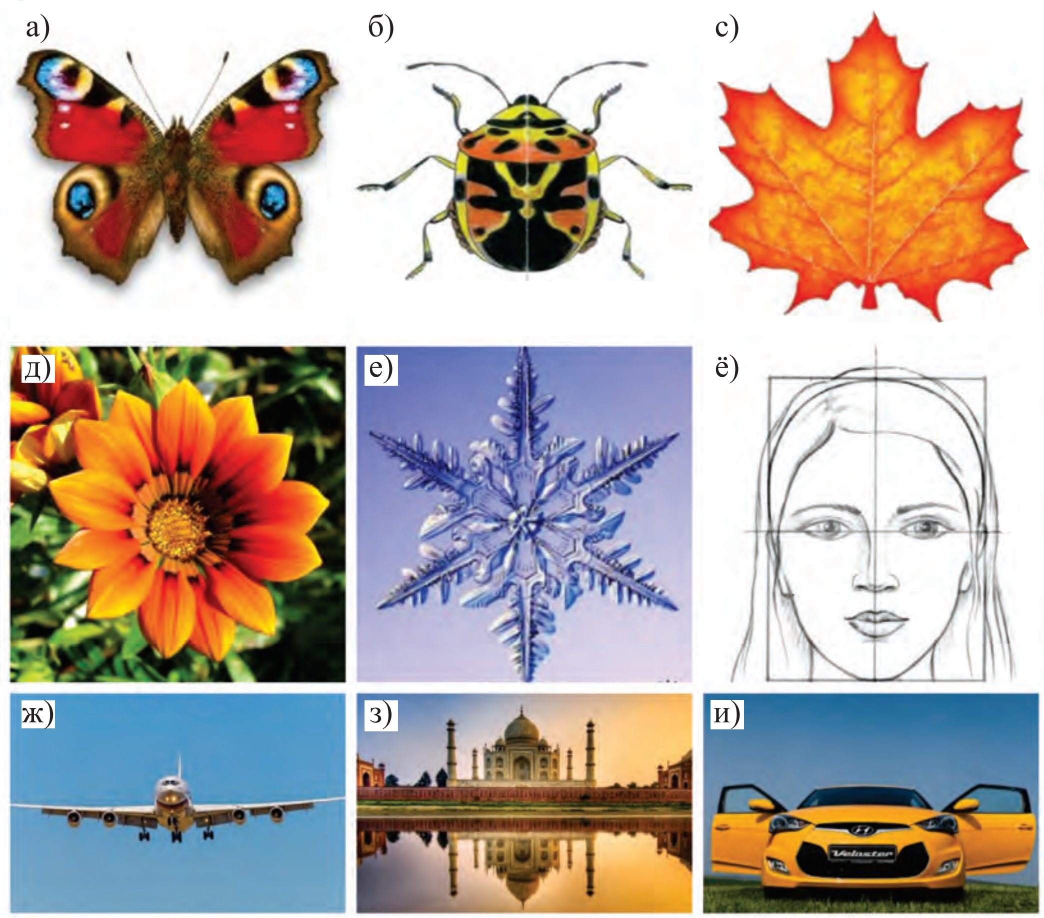
Дар нуқтаи $A(x;\ y;\ z)$ ҳамвориҳои координата, тирҳои координата ва нуқтаҳои симметрӣ нисбати ибтидои координата ба координатаҳои зерин соҳиб мешавад:

Элементи симметрия	**Координатаҳои нуқтаи симметрӣ**
Ҳамвории Oxy	$(x;\ y;\ -z)$
Ҳамвории Oxz	$(x;\ -y;\ z)$
Ҳамвории Oyz	$(-x;\ y;\ z)$

Тири Ox	$(x; -y; -z)$
Тири Oy	$(-x; y; -z)$
Тири Oz	$(-x; -y; z)$
Тири O	$(-x; -y; -z)$

3.6. Симметрия дар табиат ва техника

58

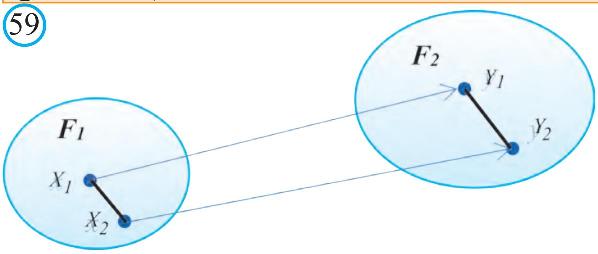


Дар табиат симметрияро дар ҳар қадам рӯ ба рӯ шудан мумкин. Масалан, аксари мавҷудоти ҷондор, хусусан, сохти инсон ва ҳайвон, барги набототот ва гулҳо симметрӣ сохта шудааст (расми 58).Чунин, унсурҳои беҷони табиат ҳам ҳастанд; масалан, заррахои барф, кристалҳои намак, сохти молекулиярии моддаҳо ҳам аз шаклҳои аҷоиби симметрӣ иборат аст. Албатта, ин беҷиз нест, чунки шаклҳои симметрӣ дар баробари зебо будан, ба кадом маъное аз ҳама мукаммал ва мақбул ба ҳисоб мераванд. Чунин бошад, гуфта метавонем, ки ҳусн ва мукаммалии табиат дар асоси симметрия бунёд шудааст. Эҷодкороне ҳамчун муҳандис, меъмор ва бунёдкор аз ин зебоӣ ва мукаммалии табиат андоза гирифта, биною иншоот, дастгоҳу механизмҳо, воситаҳои техникӣ ва нақлиёти бунёднамудаи зиёди онҳо ҳам симметрӣ офарида шудааст. Дар ин кор ёрдами фанни геометрия ба онҳо беқиёс аст.

3.7. Монандии шаклҳои фазовӣ

Дар фазо $k \neq 0$ ва шакли F_1 -ро ба шакли F_2 ивазкунии акснамоӣ дода шуда бошад. Дар ин акснамоӣ шакли F_1 -ро дар нуқтаҳои ихтиёрии X_1 ва X_2 ва шакли акснамудаи онҳо F_2 барои нуқтаҳои Y_1 ва Y_2 $X_1Y_1 = k \cdot X_2Y_2$ бошад, ин ивазнамоӣ *ивазнамоии монандӣ* номида мешавад (расми 59).

59



60

Дида истодаем, ки фаҳмиши ивазнамоии монанд дар фазо ҳамчун дар ҳамворӣ дароварда мешавад. Инчунин, таърифи навъҳои қатори зерини он, хосиятҳо ва исботи онҳо ҳам ба хосиятҳои ҳамворӣ монанд аст. Аз ин боис, ба исботи ин хосиятҳо намеистем ва мустақилона иҷро намудани онро тавсия медиҳем.

Ивазнамоии монандӣ дар фазо хати ростро ба хати рост, нурро ба нур, порчаро ба порча ва кунҷро ба кунҷ инъикос мекунонад. Ҳамчунин, ин ивазнамоӣ ҳамвориро ҳам ба ҳамворӣ инъикос мекунонад.

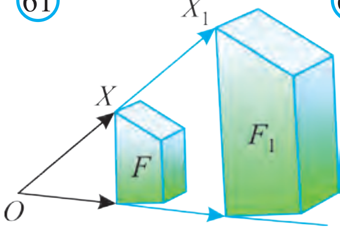
Яке аз ду шаклҳои дар фазо додашуда, ба дуюмаш бо воситаи ивазнамоии монандӣ инъикос ёбад, онҳоро *шаклҳои монанд* меноманд.қонеъкунанда ба нуқтаи X_1 ивазкунандаи инъикоскунанда нисбати нуқтаи *O гомотетияи коэффитсиентдори k* меноманд (расми 61). Нуқтаи *O маркази гомотетия*, адади k бошад *коэффитсиенти гомотетия* меноманд.

Ҳар як нуқтаи шакли F бо ҳамин усул инъикос ёбад, дар натиҷа шакли F_1 ҳосил мешавад ва дар ин *гомотетия шакли F ба шакли F_1 инъикосёфта* меноманд.

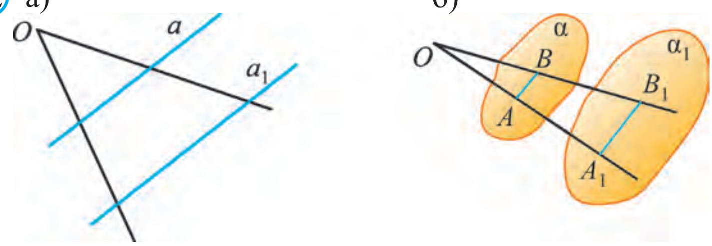
Мебинем, ки таърифи гомотетия дар фазо ба ҳамворӣ буда қариб як хел аст. Инчунин, як қатор хосиятҳои он ҳам ҳаст, ки онҳо ва исботи Дар фазо шакли F, нуқтаи O ва фарқи k дар адади сифр $(k \neq 0)$ дода шуда бошад. Шакли F -ро нуқтаи ихтиёрии X шарти $\overline{OX_1} = k\,\overline{OX}$

-ро онҳо ҳам ба ҳамворибуда монанд аст. Аз ин сабаб, ба исботи ин хосиятҳо намеистем ва мустақил иҷро намудани онро тавсия медиҳем.

61



62 а) б)



Нисбати нуқтаи O гомотетияи коэффитсиентдори k ивазнамоии монандӣ аст.

Коэффитсиенти гомотетияи k аз ноли ихтиёрӣ адади фарққунанда буда, дар $k=1$ шакли F худаш ба худаш инъикос меёбад, дар $k=-1$ бошад, шакли F ба нуқтаи O ба шакли нисбатан симметрии F_1 инъикос мешавад. Дар ҳолатҳои дигар гомотетия масофаҳои мобайни нуқтаҳоро нигоҳ намедорад, яъне он ҳаракат намешавад. Дар натиҷаи гомотетия масофаи байни нуқтаҳо як хел ҷониби адади k меафзояд, яъне андозаҳои шакл дигар мешавад, лекин шакли он дигар намешавад.

Дар гомотетияи аз маркази он нагузаранда а) хати рост - параллел ба хати рост (расми 62.а); б) ҳамворӣ бошад ба ҳамвории ба он параллел инъикос мешавад (расми 62.б).

Дар гомотетия хати рости аз маркази гомотетия гузаранда, ёки ҳамворӣ худ ба худ инъикос мешавад.

Масъалаҳо оиди мавзӯъ ва супоришҳои амалӣ

83. Дар кӯчиши параллелии атрофи вектори $\overline{p}=(-2;\ 1;\ 4)$ нуқтаи а) (3; –2; 3); б) (0; 2; –3); с) (2; –5; 0) ба кадом нуқта мекӯчад?

84. Дар кӯчиши параллелӣ нуқтаи A(4; 2; –8) ба нуқтаи (3; 7; –5) мекӯчад. Кӯчиши паралелӣ атрофи кадом вектор амалӣ мешавад?

85. Дар параллелкӯчонӣ : а) хати рост ба хати рост; б) нур ба нур; с) ҳамворӣ ба ҳамворӣ; д) порча ба порчаи ба он баробар кӯчиданро исбот намоед.

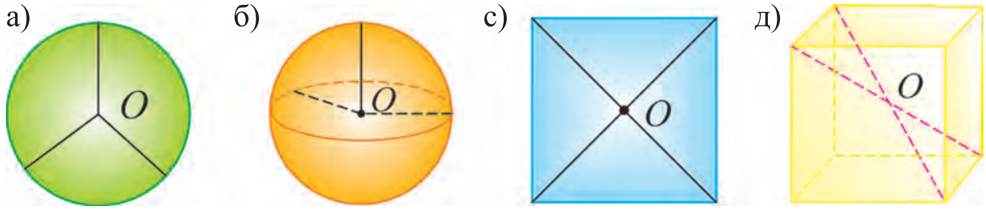
86. Ба нуқтаи нисбатан симметрияи марказибудаи O (–2; 3; –1) нуқтаи A (4; 2; –3) аз кадом нуқта мегузарад?

87. Дар шаклҳои дар расми 63 тасвиршуда маркази симметрия будани нуқтаи O - ро асоснок намоед.

88. Нуқтаҳои нисбати ибтидои координата дар симметрияи марказибудаи (–2; 5; –9), (2; 2; –7), (–6; 12; –2) аз кадом нуқтаҳо мегузарад?

89*. Ҳаракат будани маркази симметрияро исбот намоед.

63 а) б) с) д)



90*. Нисбати ҳамворӣ дар ҳаракат будани симметрияро исбот кунед.

91. Нуқтаи буриши диагонали параллелепипед (расми 50) нисбат ба *O* маркази симметришакл буданашро исбот намоед.

92. Нуқтаҳои (1; 2; –3), (0; 2; –3), (2; 2; –3) ба ҳамвориҳои координата нисбатан дар симметриябуда ба кадом нуқтаҳо мегузарад?

93. Нуқтаи (2; 4; –1) ҳангоми инъикоси координатаи ҳамвории нисбатан симметрӣ ба нуқтаи (2; –4; –1) гузашт. Инъикоснамоӣ нисбати кадом координатаи ҳамворӣ ба амал бароварда шуд?

94. Дар асоси намунаи 1 катакчаҳои холии дар ҷадвали зерин бударо пур кунед.

№	Нуқтаи додашуда	Нуқтаи симметрӣ	Ба чӣ нисбатан симметрӣ?
1	(1; 2; 3)	(1; 2; –3)	нисбати ҳамвории *Oxy*
2	(2; 4; –1)		нисбати ҳамвории *Oxz*
3		(1; 2; 3)	ҳамворӣ *Oyz*
4	(–1; –2; –3)	(–1; 2; 3)	
5	(–1; 6; 3)		тири *Oy*
6		(–3; 8; –2)	тири *Oz*
7	(4; 1; –2)		нуқтаи *O*

95. Шаклҳои дар расми 49 тасвирёфта ба нуқтаи *O* маркази симметрӣ буданашро асоснок намоед.

96*. Ҳаракат будани гардиш нисбат ба хати ростро нишон диҳед.

97. Нисбат ба нуқтаи *O* ивазкунандаи монандӣ будани гомотетияи коэффитсиенти k -ро нишон диҳед.

98. Нисбати ҳамвории *Oxy дар* симметрияии ихтиёрӣ аз нуқтаи $(x; y; z)$ ба нуқтаи $(x; y; -z)$ гузаштанро нишон диҳед.

99. Нисбати ҳамвории *Oxy дар* симметрияии ихтиёрӣ аз нуқтаи $(x; y; z)$ ба нуқтаи $(x; -y; z)$ гузаштанро нишон диҳед.

100. Дар параллелкӯчонӣ нуқтаи (1; 2; –1) ба нуқтаи (1; –1; 0) гузашт. Ибтидои координата дар ин ивазнамоӣ аз кадом нуқта мегузарад?

101. Дар параллелкӯчонӣ нуқтаи (3; 4; –1) ба нуқтаи (2; –4; 1) гузашт. Дар ин ивазнамоӣ ибтидои координата ба кадом нуқта мегузарад?

102*. Аз нуқтаи $A(2; 1; 0)$ ба нуқтаи B $(1; 0; 1)$ аз нуқтаи C $(3; –2; 1)$ ба нуқтаи D $(2; –3; 0)$ кӯчиши параллел гузарандан имконпазир аст?

103*. Аз нуқтаи A $(–2; 3; 5)$ ба нуқтаи B $(1; 2; 4)$ аз нуқтаи C $(4; –3; 6)$ ба нуқтаи D $(7;–2;5)$ кӯчиши параллел гузарондан имконпазир аст?

104. Муайян кунед, ки объектҳои ҷондору беҷони дар расми 58 тасвиршуда ба сифати ҷисми фазоӣ чӣ гуна шакли симметриро соҳибанд? Маркази симметрӣ, тири симметрӣ ва ҳамвориҳои симметрии онҳоро (агар мавҷуд бошад) кашида нишон диҳед.

105. Аз лӯхтакчаҳои якхелаи дар расми 60 тасвиршуда, нисбат ба лӯхтаки аз ҳама бузург коэффитсентҳои монандиро муайян кунед.

106. Дарозии қуллаи тетраэдри мунтазам ба 12 см баробар. Қуллаи тетраэдри гомотетики коэффитсиентдори тетраэдри: а) 3; б) –4; с) $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{3}$; буда, ба чӣ баробар аст?

107. Секунҷаи ихтиёрии ABC –ро кашед ва ягон нуқтаи O-ро ишора кунед. Дар гомотетияи секунҷаи ABC секунҷаи марказаш аз нуқтаи O гузаранда ва коэффитсиенташ ба: а) 2; б) –3; с) $-\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{4}$ баробар бударо созед.

108. Тетраэдри ихтиёрии $SABC$ кашед. Тетраэдри дар гомотетияи тетраэдри $SABC$ -и марказаш аз нуқтаи S ва коэффитсиенташ ба: а) 1,5; б) –2; с) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{4}$ баробарбударо созед.

109. Куби ихтиёрӣ кашед. Шакли фазовии геометрии дар гомотетияи ин куб, ки марказаш дар ягон қуллаи куб ва коэффитсиенташ ба: а) 2; б) –2; с) $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{2}$ баробарбударо созед.

110. Нуқтаи координатаҳои марказаш аз ибтидои координата гузаранда ва коэффитсиенташ ба: а) 2,5; б) –2,5; с) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{4}$ баробарбударо дар гомотетияи нуқтаи $A(–2; 3; 5)$ ёбед.

111. Координатаҳои нуқтаи аз маркази нуқтаи $O(–1;2;2)$ ва коэффитсиенташ ба: а) 0,5; б) –2; с) $\frac{1}{4}$; д) $-\frac{1}{4}$ баробарбуда дар гомотетияи нуқтаи $A(2; 4; 0)$ гузарандаро ёбед.

112. Дар нуқтаҳои қуллаҳояш $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$ буда тетраэдри: а) марказаш дар нуқтаи O, коэффитсиенташ ба 1 баробар; б) марказаш дар нуқтаи A, коэффитсиенташ ба 2 баробарбударо дар қуллаи координатаҳои тетраэдри аз гомотетия гузаранда ёбед.

113*. Дар гомотетия инъикоси аз маркази он нагузарандаи: а) хати рости ба хати рости ба худ параллел, б) ҳамвории ба ҳамвории ба худ параллелро нишон диҳед.

114*. Дар гомотетия ба ҳам инъикосшавии хати рост ёки ҳамворӣ аз маркази он гузарандаро нишон диҳед.

МАШҚҲОИ АМАЛӢ ДОИР БА ТАКРОРИ БОБИ 4

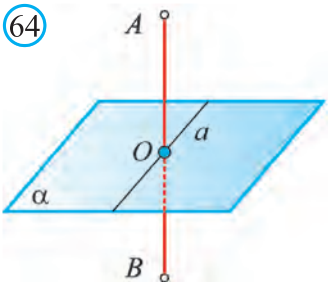
4.1. Санҷиши тестии 1

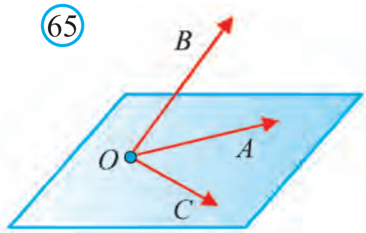
1. Нуқтаҳои $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ дода шудааст. z_2-z_1 чиро мефаҳмонад?

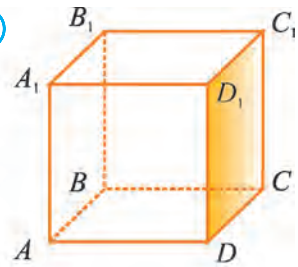
А) AB координатаи миёнаи порчаро; Б) AB дарозии порчаро;
С) $\overline{AB}$ дарозии векторро; Д) $\overline{AB}$ яке аз координатаҳои векторро.

2. Дар расми 64 $AB\perp\alpha$, $a\subset\alpha$, $AO=OB$ бошад,

А) нуқтаҳои A ва B ба нуқтаи O нисбатан симмерӣ мешавад;
Б) нуқтаҳои A ва B ба хати рости a нисбатан симметрӣ мешавад;
С) нуқтаҳои A ва B ба ҳамвории α нисбатан симметрӣ мешавад;
Д) порчаи AB ба хати рости a нисбатан симметрӣ мешавад;

64


65


66


3. Дар расми 65 нуқтаи B дар ҳамвории AOC намехобад. Дар он векторҳои OA, $\overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ …

А) коллинеар; Б) компланар;
С) самти якхела; Д) компланар нестанд.

4. Нуқтаҳои $M(-7;\ 1;\ 4)$ ва $N(-1;\ -3;\ 0)$ дода шудааст. Координатаҳои буриши миёнаи MN ёбед.

А) $(-4; -1; 4)$; Б) $(-4; -1;2)$; С) $(-4; -2; 2)$; Д) $(-3; 2; 2)$.

5. Нуқтаҳои $A(0; -3; 2)$ ва $B(4; 0; -2)$ дода шудааст. Миёнаи порчаи AB ба чӣ дахл дорад?

А) ба тири Ox ; Б) ба тири Oy; С) ба тири Oz; Д)ба ҳамвории Oxy.

6. Масофаи аз нуқтаи $A(3; 4; -3)$ то тири Oz бударо ёбед.

А) 3; Б) 5; С) $2\sqrt{3}$; Д) $\sqrt{34}$.

7. Ҷамъи векторҳои $\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}$ - ро ёбед.

А) $\overline{O}$; Б) $\overline{CF}$; С) $\overline{DF}$; Д) $\overline{CE}$.

8. Дар кадом қимати $м$ векторҳои $\overline{a}(м; 4; -3)$ ва $\overline{b}(4; 8; -6)$ коллинеар мешавад? А) 2; Б) 5; С) 1; Д) 3.

9. Нуқтаи O дар ҳамвории α намехобад. Дар гомотетияи марказаш нуқтаи O буда, ҳамвории α аз ҳамвории фарққунандаи β мегузарад. Агар хати рост a ба ҳамвории α дахлдор бошад, …

А) $\alpha \parallel \beta$ мешавад; Б) ҳамвории α бо ҳамвории β бурида мешавад;
С) $a\subset\beta$ мешавад; Д) $\alpha\perp\beta$ мешавад.

10. Хати рости AB ба ҳамвории BCD перпендикуляр аст. Зарби скалярии кадом векторҳо ба нол баробар мешавад?

А) $\overline{CA}$ ва $\overline{CB}$; Б) $\overline{BD}$ ва $\overline{AD}$; С) $\overline{AC}$ ва $\overline{BC}$; Д) $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$.

11. Куби қуллааш ба 1 баробарбудаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шудааст (расми 66). $(\overline{AB}+\overline{BC})\cdot\overline{BB}$ -ро ёбед.

А) 1; Б) 0; С) –1; Д) 0,5.

12. Дар кадом қимати p кунҷи байни векторҳои $\overline{a}(1; 1; 0)$ ва $\overline{b}(0; 4; p)$ ба 60° баробар мешавад?

А) 4; Б) 4 ёки –4; С) 16; Д) 16 ёки –16.

13. Куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шудааст. Дар параллелкӯчонӣ порчаи A_1D ба порчаи D_1C мегузарад. Дар ин кӯчидан ҳамвории AA_1B_1 ба кадом ҳамворӣ мегузарад?

А) DB_1B; Б) DCC_1; С) AA_1C_1; Д) ABC.

14. Ҳамвории α ба секунҷаи дар он нахобандаи ABC ҳамвории симметрӣ аст. Кадом тасдиқ дуруст?

А) $(ABC)\perp\alpha$; Б) ABC секунҷаи баробарпаҳлӯ;

С) секунҷаи ABC симметрияи марказӣ дорад;

Д) секунҷаи ABC тири симметрия дорад.

15. Куби $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дода шудааст. $\overline{A_1B_1}+\overline{BC}-\overline{DD_1}$ -ро ёбед.

А) $\overline{A_1C}$; Б) $\overline{BD_1}$; с) $\overline{B_1D}$; Д) $\overline{AC_1}$.

16. Кадом ивазнамоии геометрӣ ду хати шикастаи яке аз хатҳои ростро ба дигараш мегузаронад?

А) кӯчиши параллел; Б) нисбати ҳамворӣ симметрӣ;

С) чархзанӣ; Д) гомотетия.

17. Ба нуқтаи $M(-1; 2; -4)$ аз ҳамвории Oyz нуқтаи нисбатан симметрӣ бударо ёбед. А) (1; –2; 4); Б) (1; 2; –4); С) (–1; –2; –4); D) (–1; 2; 4).

18. Дар параллелкӯчонӣ вектори $\overline{AB}$ аз вектори $\overline{DC}$ мегузарад. Кадом тасдиқ нодуруст аст?

А) $\overline{AB}=\overline{DC}$; Б) миёнаи порчаи AC ва BD рӯ бу рӯ меафтад;

С) $\overline{AB}, \overline{AC}$ ва $\overline{DC}$ векторҳои компланар; Д) $ABCD$ параллелограмм.

19. Нуқтаи В(–3; 2; –5) аз ҳамвории Oyz дар кадом масофа хобидааст?

А) 2; Б) 5; С) 3; Д) $\sqrt{34}$.

20. Нуқтаҳои А(1; –2; 0), В(1;–4; 2) С(3; 2; 0) теғаҳои секунҷаи ABC. Дарозии медианаи CM –ро ёбед.

А) $2\sqrt{3}$; Б) $3\sqrt{2}$; С) $\sqrt{6}$; Д) 18.

21. Агар векторҳои коллинеар бошад m+n -ро ёбед.

А) 3; Б) 5; С) –4; Д) 9.

22. Нуқтаҳои А(–1; –9; –3) ва В(0;–2; 1) дода шудааст. Векторро мувофиқи векторҳои координата (ортҳо) паҳн намоед.

A) $(\overline{BA}) = \overline{i} + 9\overline{j} - \overline{k}$; B) $(\overline{BA}) = \overline{i} - 9\overline{j} + \overline{k}$;
C) $(\overline{BA}) = -\overline{i} - 9\overline{j} - 4\overline{k}$; D) $(\overline{BA}) = \overline{i} + 9\overline{j} - 4\overline{k}$.

23. Нуқтаҳои ва дода шудааст. Кунҷи байни векторҳои АС ва *BD* –ро ёбед.

A) 150°; B) 30°; C) 45°; D) 90°.

24. $|\overline{a}| = 6$, $|\overline{a}+\overline{b}| = 11$, $|\overline{a}-\overline{b}| = 7$ буданаш маълум бошад, $|\overline{b}|$ ро ёбед.

А) 11; Б) 18; С) 20; Д) 7;

25. Трапетсияи А*BCD* асосҳояш *BC* ва *AD* дода шудааст. Агар $\overline{AB}(-7;4;5)$, $\overline{AC}(3;\ 2;\ -1)$, $\overline{AD}(20;\ -4;\ -12)$, *M* ва *N*- ба таври мувофиқ *AB ва CD* миёни тарафҳо бошад, суммаи координатаҳои вектори $\overline{MN}$ ро ёбед.

А) 1; Б) 2; С) 3; Д) 4;

4.2. Масъалаҳо

115. Координатаҳои буриши миёнаи қуллаҳо дар нуқтаҳои *A*(1; –2; 4) ва *B*(3; –4; 2) бударо ёбед.

116. Нуқтаи *A*(*x*; 0; 0) ба нуқтаҳои *B*(1; 2; 3) ва *C*(–1; 3; 4) дар дурии баробар маълум бошад, *x* -ро ёбед.

117. Агар нӯги як порча дар нуқтаи *A*(1; –5; 4), миёнааш дар нуқтаи *C*(4; –2; 3) бошад, координатаҳои нӯги дуюми он чӣ гуна мешавад?

118. Нуқтаи нисбати ҳамвории *Oxz* симмерӣ будаи нуқтаи *A*(1; 2; 3) -ро ёбед.

119. Нуқтаи нисбати ибтидои координатаҳо ба нуқтаи *A*(1; 2; 3) симметрия бударо ёбед.

120. Нуқтаи ба ҳамвории *Oxy* дар нуқтаи (1; 2; 3) нисбатан симметрӣ бударо ёбед.

121. Нуқтаи ба тири *Oy* дар нуқтаи (2; –3; 5) нисбатан симметриро ёбед.

122. Кадоме аз нуқтаҳои додашуда дар ҳамвории *Oyz* мехобад?
A(2; –3; 0); *B*(2; 0; –5); *C*(1; 0; – 4); *D*(0; 9; –7); *E*(1; 0; 0).

123. Кадоме аз нуқтаҳои додашуда дар ҳамвории *Oyz* мехобад?
A(– 4; 3; 0); *B*(0; –7; 0); *C*(2; 0; –8); *D*(2; –4; 6); *E*(0; – 4; 5)?

124. Масофаи аз нуқтаи $A(-3;\ 8;\ 3\sqrt{33})$ то тири *Ox* бударо ёбед.

125. Нуқтаҳои *A*(3; –2; 5) ва *B*(–4; 5; –2) дода шудааст. Координатаҳои вектори $\overline{AB}$ -ро ёбед.

126. Интиҳои вектори $\overline{a}(1;\ -2;\ 3)$ нуқтаи *B*(2; 0; 4) бошад, ибтидои ин векторро ёбед.

127. Нуқтаи *B*(0; 4; 2) охири вектори $\overline{a}(2;\ -3;\ 1)$ бошад, координатаҳои ибтидои ин векторро ёбед.

128. Дарозии вектори $\overline{a}(x;\ 1;\ 2)$ ба 3 баробар. Қиммати *x* -ро ёбед.

129. Модули вектори $\overline{a}(4;\ -12;\ z)$ ба13 баробар. Қиммати *z* -ро ёбед.

130. Агар $\overline{a}(6;\ 2;\ 1)$ ва $\overline{b}(0;\ -1;\ 2)$ бошад, дарозии вектори $\overline{c}=2\overline{a}-\overline{b}$ -ро ёбед.

131. Агар $\overline{p}(2;\ 5;\ -1)$ ва $\overline{q}(-2;\ 2)$ бошад, дарозии вектори $\overline{м}=4\overline{p}+2\overline{q}$ -ро ёбед.

132. Афзоиши скалярии векторҳои $\overline{a}(2;\ -3;\ 4)$ ва $\overline{b}(-2;\ -3;\ 1)$ -ро ёбед.

133. Афзоиши скалярии векторҳои $\overline{м}(-1;\ 5;\ 3)$ ва $\overline{n}(2;\ -2;\ 4)$ -ро ёбед.

134. Дар кадом қиммати *м* векторҳои $\overline{a}(1;\ м;\ -2)$ ва $\overline{b}(м;\ 3;\ -4)$ перпендикуляр мешаванд?

135. Дар кадом қиммати *n* векторҳои $\overline{a}(n;\ -2;\ 1)$ ва $\overline{b}(n;\ n;\ 1)$ перпендикуляр мешаванд?

136. Дар кадом қиммати *м* векторҳои $\overline{a}=м\overline{i}+3\overline{j}+4\overline{k}$ ва $\overline{b}=4\overline{i}+м\overline{j}-7\overline{k}$ перпендикуляр мешаванд?

137. Нуқтаҳои $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(-4;\ 1;\ 1)$ ва $D(-5;\ -5;\ 3)$ дода шудааст.Кунҷи байни векторҳои $\overline{AC}$ ва $\overline{BD}$ -ро ёбед.

138. Дар кадом қиммати *n* векторҳои $\overline{a}(2;\ n;\ 6)$ ва $\overline{b}(1;\ 2;\ 3)$ коллинеар мешаванд?

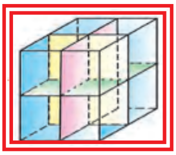
139. Дар кадом қиммати *м* векторҳои $\overline{a}(2;\ 3;-4)$ ва $\overline{b}(м;-6;\ 8)$ параллел мешаванд?

140. Дар кадом қиммати *м* ва *n* векторҳои $\overline{a}(-1;\ м;\ 2)$ ва $\overline{b}(-2;\ -4;\ n)$ коллинеар мешаванд?

141. Нуқтаҳои $A(2;\ 7;\ -3)$ ва $B(-6;\ -2;\ 1)$ дода шудааст. Вектори $\overline{BA}$ -ро мувофиқи координатаҳои векторҳо (ортҳо) кушоед.

4.3. Намунаи кори назоратии 1

1. Нисбат ба ҳамвории *Oxy* нуқтаи ба нуқтаи (1; 2; 3) симметрӣ бударо ёбед.
2. Агар $\overline{a}(6;\ 2;\ 1)$ ва $\overline{b}(0;\ -1;\ 2)$ бошад, дарозии вектори $\overline{c}=2\overline{a}-\overline{b}$ -ро ёбед.
3. Нуқтаҳои $A(2;-1;0)$ ва $B(-2;3;2)$ дода шудааст. Масофаи ибтидои координата то мобайни порчаи AB -ро ёбед
4. Нуқтаҳои $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(-4;\ 1;\ 1)$ ва $D(-5;\ -5;\ 3)$ дода шудааст. Кунҷи байни векторҳои $\overline{AC}$ ва $\overline{BD}$ –ро ёбед.
5. *(Масъалаи иловагӣ барои донишомӯзони хуб аз бар карда).* Дарозии секунҷаи қуллаҳояш дар нуқтаҳои $A(4;\ 5;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 0)$ ва $C(2;\ 1;\ -1)$ будаи медианааш BD – ро ёбед.



БОБИ II. ПРИЗМА ВА СИЛИНДР

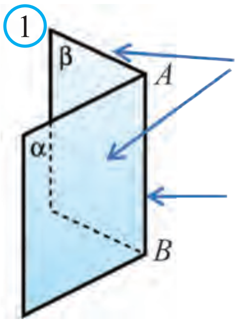
5. КУНҶҲОИ БИСЁРРӮЯ ВА БИСЁРРӮЯҲО

5.1. Кунҷҳои бисёррӯя

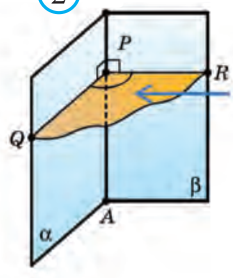
Дар синфи 10 бо кунҷи дурӯя шинос шуда будем.

Ду нимҳамвории (рӯяҳояш) α ва β ва шакли геометрии онҳоро аз хати рости (теғааш) умумии AB иборат иҳотанамуда кунҷи дурӯя номида мешавад (расми 1) ва ба тарзи (α β) ишора мешавад.

1



2

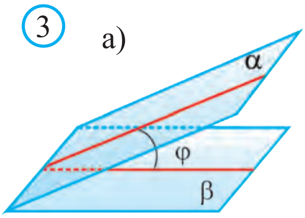


Аз нуқтаи ихтиёрии P - и теғаи кунҷи дурӯяи дар рӯяҳо хобидаи он ва аз ин теға нурҳои перпендикуляри PR ва PQ мебарорем. Кунҷи дурӯяи ∠QPR – ро секунҷаи хатдор номида мешавад (расми 2).

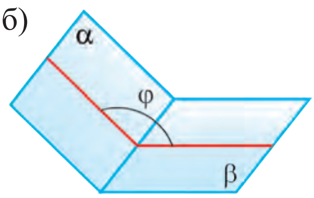
Кунҷи дурӯя мисли кунҷҳои ҳамвор ба рӯйихати кунҷи хатдор нигоҳ карда, тез, кунд, рост ва каҷ мешавад (расми 3). Монанди кунҷҳои ҳамвор ду кунҷи дурӯя ҳамсоя ва вертикалӣ буданаш мумкин (расми 4).

3

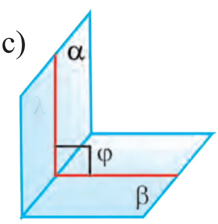
а)



б)

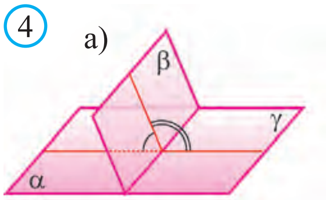


с)

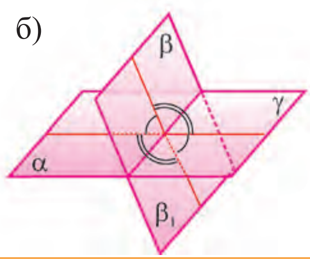


4

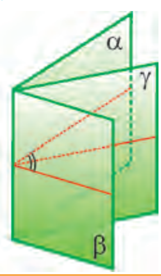
а)



б)



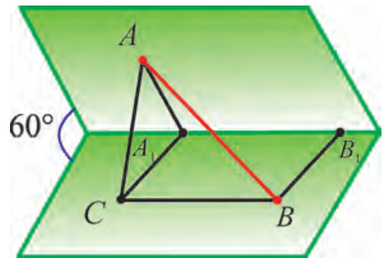
5



Нимҳамвории кунҷи дурӯяро ба ду баробар тақсимкунанда, *биссектори* он номида мешавад (расми 5).

Масъалаи 1. Кунҷи хатдори ба 60° баробар будаи кунҷи дурӯяи дар рӯяҳояш аз нуқтаҳои A ва B (расми 6) ба теғаи он перпендикуляри AA_1 ва BB_1 фароварда шудааст. Агар $AA_1 = 12$, $BB_1 = 10$ ва $A_1B_1 = 13$ бошад, порчаи AB ро ёбед.

6



Ҳал. Хатҳои рости $BB_1||CA_1$ ва $A_1B_1||CB$ -ро мегузаронем. Чоркунҷаи параллелограми A_1B_1BC ҳосил мешавад. Хати рости A_1B_1 ба ҳамвории секунҷаи A_1AC перпендикуляр мешавад, чунки он ба ду хати рости дар ҳамворӣ хобидаи A_1A ва A_1C перпендикуляр аст. Он вақт хати рости BC ҳам ба ин ҳамворӣ перпендикуляр мешавад.

Яъне,секунҷаи ABC секунҷаи росткунҷа будааст.

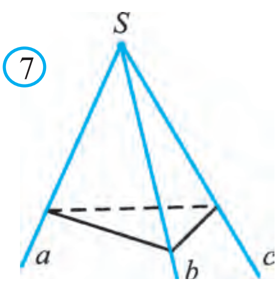
Мувофиқи теоремаи косинус:

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 60^{\circ} = 124.$$

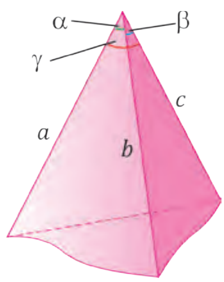
Мувофиқи теоремаи Пифагор: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{124 + 169} = \sqrt{293}$

Ҷавоб: $AB = \sqrt{293}$. □

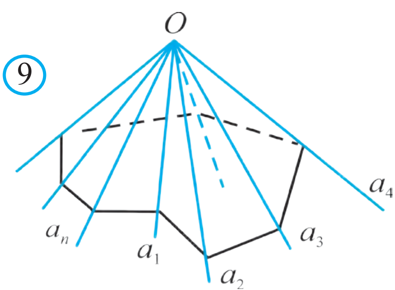
7



8



9



Дар фазо нурҳои аз як нуқта барояндаи a, b ва c се кунҷи ҳамвори (ab), (bc) ва (ac)–ро ташкил мекунад (расми 7). Ин шакли (abc)–и аз кунҷҳои ҳамвор ташкилёфтаро кунҷи серӯя меноманд. Кунҷҳои серӯяи кунҷҳои ҳамворро рӯяҳо, кунҷҳои бисёррӯяи онҳоро теғаҳо, қуллаи умумии кунҷи серӯяро бошад қулла меноманд. Кунҷҳои дурӯяи аз рӯяҳои кунҷи серӯя ташкилёфта кунҷҳои дурӯяи кунҷи серӯя номида мешавад.

Се кунҷи ҳамвори кунҷи серӯя (ab), (bc) ва (ac) ро кунҷҳои ҳамвор ҳам меноманд.

Кунҷҳои ҳамвори кунҷи серӯяро ба таври мувофиқ, α, β, γ гӯён ишора намоем (расми 8), барои онҳо нобаробарии секунҷа бамаврид аст, яъне аз ду суммаи дар ихтиёри онҳо монда хурд мешавад: $\alpha+\beta<\gamma$,

$\alpha+\gamma<\beta$, $\beta+\gamma<\alpha$ ва суммаи кунҷҳои ҳамвор аз 360° хурд мешавад: $\alpha+\beta+\gamma<360^{\circ}$.

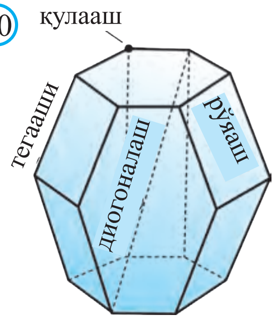
Мафҳуми кунҷи бисёррӯя ҳам чунин дароварда мешавад (расми 9).

5.2. Бисёррӯяҳо

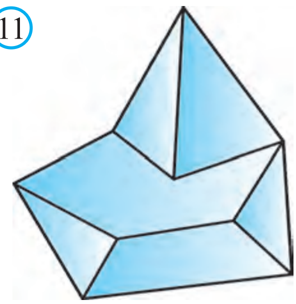
Эътибор дода бошед, то ин вақт ба сифати шакли фазоӣ хосиятҳои як қатор ҷисмҳо, хусусан бисёррӯяҳоро омӯхтем. Ин шаклҳои фазоиро сабаби *ҷисм* номиданамон, онҳоро ба сифати ягон ҷисми моддии фазоро ишғолкарда ва қисми бо сатҳ иҳоташуда тасаввур карадан мумкин аст. Ин ҷо баъзи мафҳумҳои ба бисёррӯя дахлдорро ёдовар мешавем.

Бисёррӯя гуфта, ҷисми бо бисёркунҷаҳои ҳамвор иҳоташударо меноманд (расми 10).

10

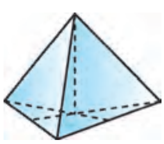
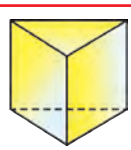
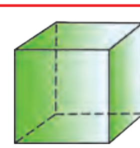


11



Бисёррӯя дар як тарафи ихтиёрии ҳамвории хобидаи рӯя хобад, онро *бисёррӯяи барҷаста* меноманд. Дар расми 10 бисёррӯяи барҷаста, дар расми 11 бошад бисёррӯяҳои ғайрибарҷаста тасвир ёфтааст.

Шумораи рӯяҳои бисёррӯяҳои ихтиёрии барҷастаро бо P, шумораи қуллаҳояшро бо $Қ$ ва шумораи тегаҳояшро бо T ишора намоем. Барои бисёррӯяҳои ба мо маълум ҷадвали зеринро пурра мекунем:

	Номи бисёррӯя	Р	Қ	Т	
	Пирамидаи секунҷа	4	4	6	
	Пирамидаи чоркунҷа	5	5	8	
	Призмаи секунҷа	5	6	9	
	Призмаи чоркунҷа	6	8	12	
	Пирамидаи n- кунҷа	$n+1$	$n+1$	$2n$	
	Призмаи *n-* кунҷа	$n+2$	$2n$	$3n$	

Аз ҷадвал барои ҳар як бисёррӯя $P + Қ - T = 2$ буданашро ҳис намудан мумкин. Маълум мешавад, ки ин муносибат барои ҳамаи бисёррӯяҳои барҷаста дуруст будааст. Инро бори аввал соли 1752 математики швейтсариягӣ Леонард Эйлер муайян намуд.

Теоремаи Эйлер. Барои бисёррӯяи барҷастаи ихтиёрӣ: муносибати $Р + Қ - Т = 2$ бамаврид мешавад, дар ин ҷо $Р$ – рӯяҳои бисёррӯя, $Қ$ – қуллаҳояш, $Т$ – бошад шумораи теғаҳояш.

Барои исботи ин теорема намеистем. Аз он ҷунин натиҷаҳо бармеояд. Онҳоро бо истифода аз теоремаи Эйлер мустақилона исбот намоед.

Натиҷаи 1. Шумораи кунҷҳои бисёррӯяи ҳамвор аз шумораи теғаҳои он ду маротиба зиёд.

Натиҷаи 2. Шумораи кунҷҳои бисёррӯяи ҳамвор доимо ҷуфт мешавад.

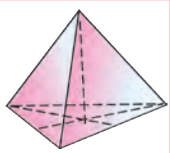
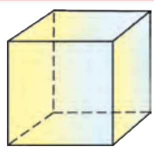
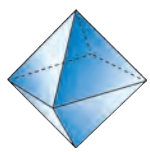
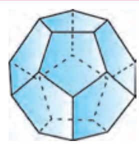
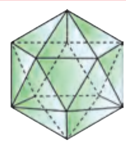
Натиҷаи 3. Агар аз ҳар як қуллаи бисёркунҷа теғаҳои якхелаи адади k наздик шавад, муносибати $Қ \cdot k = 2Т$ бамаврид мешавад.

Натиҷаи 4. Агар тамоми рӯяҳои бисёррӯя аз кунҷҳои якхелаи n ташкил ёфта бошад, муносибати $Р = 2Т$ бамаврид мешавад.

Натиҷаи 5. Суммаи кунҷҳои бисёррӯяи ҳамвор ба $360°(Р - Т)$ баробар.

Рӯяҳояш аз бисёркунҷаҳои мунтазами ба ҳамдигар баробар иборат ва бисёррӯяи барҷастае, ки аз ҳар қуллаи он теғаҳои шумораашт якхела бароварда шудааст *бисёррӯяи мунтазам* номида мешавад.

Маълум мешавад, бисёррӯяҳои мунтазам панҷ хел мешудааст (инро мустақил санҷида бинед). Инҳоянд:

Шакл					
Ном ва талқини он	Тетраэдри мунтазам (чоррӯя)	Куб, гексаэдр (шашрӯя)	Октоэдр (ҳаштрӯя)	Додекаэдр (дувоздаҳ-рӯя)	Икосаэдр (бистрӯя)
Рӯяҳояш	секунҷаи мунтазам	чоркунҷаи мунтазам	секунҷаи мунтазам	панҷкунҷаи мунтазам	секунҷаи мунтазам
Шумораи рӯяҳояш	4	6	8	12	20
Шумораи теғаҳояш	6	12	12	30	30
Шумораи қуллаҳо	4	8	6	20	12
Шумораи теғаҳои аз ҳар як қулла бароmada	3	3	4	3	5

Маълумоти таърихӣ

Ҳамаи бисёррӯяҳои мунтазам дар Юнони қадим маълум буд. Китоби охирон – 13–уми машҳури Уқлидус (Евклид) "Ибтидо" ба бисёррӯяҳои мунтазам бахшида шудааст. Ин бисёррӯяҳоро аксар ҷисмҳои Платон ҳам меноманд. Олими бузурги Юнони қадим Платон (солҳои 427–347 -и пеш аз милод) баён мекунад, ки дар тасвири идеалистии олам ин чорто ҷисм ба чор унсур (элимент)-и олам монандӣ дорад: тетраэдр – оташ, гексаэдр – Замин, икосаэдр – об, октаэдр – ҳаво, бисёррӯяи панҷум – додекаэдр бошад нишони сохтори олам ("моҳияти панҷум") гуфта шудааст.

Дар асри XVIII ба назарияи бисёррӯяҳо Леонард Эйлер (1707–1783) саҳми босазо гузошт. Соли 1758 теорема ва исботи Эйлер дар бораи қуллаҳои бисёррӯяи барҷаста ва муносибати байни шумораи рӯяҳо ва тегаҳо эълонамуда, дунёи рангбаранги бисёррӯяҳоро ба тартиб овард ва ҷозибаи зебоии геометриро аз назари алгебравӣ баён намуд.

Масъалаҳо доир ба мавзӯъ ва супоришҳои амалӣ

142. Кунҷи миёнаи ҳамворӣ 47°. Ченаки градуси кунҷи дурӯяи аз буриши ин ҳамвориҳо ҳосилшударо ёбед.

143. Ченаки градуси кунҷи дурӯя ба 52° баробар. Ченаки градуси кунҷи дурӯяи ба ин кунҷ ҳамсоя ба чӣ баробар мешавад?

144. Кунҷи ҳамвори 100° будаи кунҷҳои мобайни хатҳои рости ба рӯяҳои кунҷи дурӯя перпендикулярро ёбед.

145. Ченаки градуси кунҷи дурӯяи байни биссекторҳои кунҷҳои дурӯяи ҳамсоя ба чӣ баробар?

146. Нуқтаи *A* дар бессектори кунҷи дурӯяи ченаки градусаш ба 60° буда хобидааст. Агар ин нуқта дар масофаи10 см дар теғаи кунҷи дурӯя хобида бошад, дар он масофаи рӯяҳои кунҷи дурӯяро ёбед.

147. Нуқтаи *A* ба як рӯяи кунҷи дурӯяи ченаки градусаш 30° дахлдор бошад, дар рӯяи дуюм дар масофаи 6 см хобидааст. Аз ин масофа то нуқтаи теғаи кунҷи дурӯяро ёбед.

148*. Нуқта *A* аз рӯяҳои кунҷи дурӯяи рост дар масофаи 3 дм ва 4 дм хобидааст. Масофаи аз ин нуқтаи кунҷи дурӯя то теғаи онро ёбед.

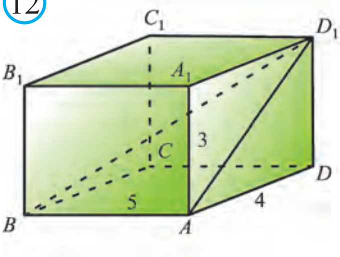
149*. Баробар будани тамоми кунҷҳои тетраэдри мунтазамро исбот намоед ва ченаки градуси онҳоро ёбед.

150. Кунҷи серӯяи кунҷҳояш ҳамвори: а) 30°; 60°; 20°; б) 45°; 80°; 130°; с) 30°; 60°; 20°; д) 20°; 60°; 70°; е) 76°; 34°; 110° вуҷуд дорад?

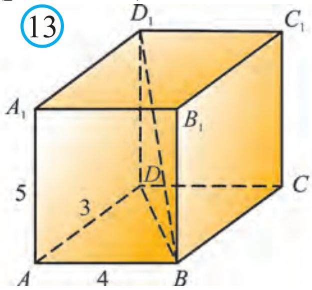
151*. Тамоми кунҷҳои дурӯяи барҷаста аз суммаи кунҷҳои ҳамвор 360° хурд буданашро исбот намоед.

152. Дар параллелепипеди кунҷи рост $AB=5$, $AD=4$ ва $AA_1=3$ бошад, кунҷи ABD_1 ро ёбед (расми 12).

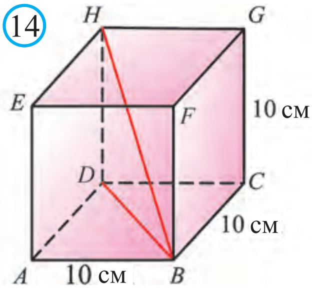
12



13



14



153. Дар параллелопеди кунҷи рост $AB=4$, $AD=3$ ва $AA_1=5$ бошад, кунҷи DBD_1 ёбед (расми 13).

154. Кунҷи DBH -и куби дар расми 14 бударо ёбед.

155*. Бисёррӯяи барҷастаи n -то қулла дошта ба суммаи тамоми кунҷҳои ҳамвории $360°(n-2)$ баробар буданашро исбот намоед.

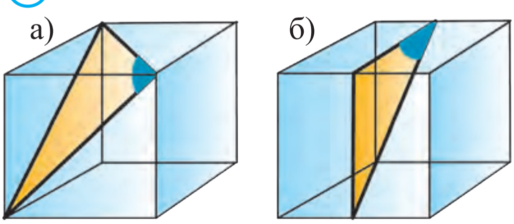
156*. Ду маротиба зиёд будани шумораи кунҷҳои ҳамвории бисёррӯя аз шумораи теғаҳои онро исбот намоед.

157*. Доим ҷуфт шудани шумораи кунҷҳои ҳамвори бисёррӯяро исбот намоед.

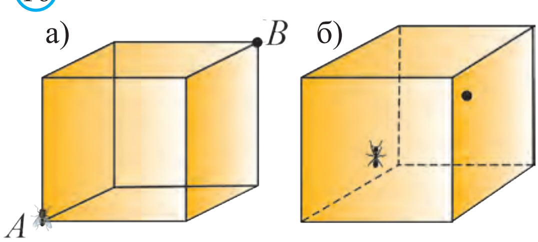
158*. Ба $360°(P-T)$ баробар будани суммаи кунҷҳои ҳамвори бисёррӯяро исбот намоед.

159. Дар кубҳои расми 15 бузургии кунҷҳои ҷудо нишондодашударо муайян кунед.

15



16



160*. Ба пашшаи дар сатҳи куби расмҳои 16: а) аз қуллаи A то қуллаи B; б)аз маркази рӯяи куб то маркази рӯяҳои муқобил роҳи аз ҳама наздикро нишон диҳед (нишондод: аз паҳншавии куб истифода баред).

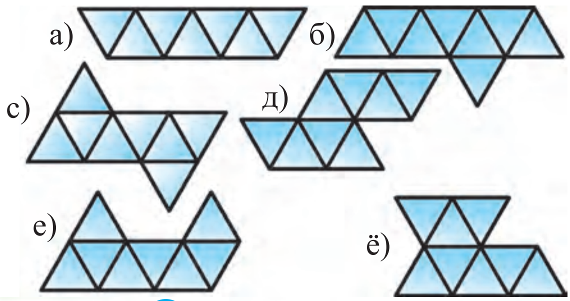
161. Оё шакли фазовии дар расми 17 тасвирёфта, бисёррӯяи мунтазам мешавад? Сатҳи он аз чанд квадрат иборат аст? Он чанд қулла ва теға дорад?

162. Кадоме аз паҳнои дар расми 18 тасвирёфта ба октоэдр дахл дорад?

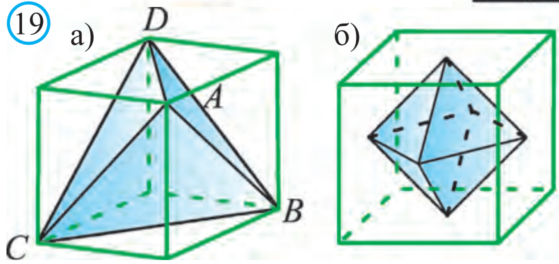
163. Бисёррӯяи ба дохили куб кашидашудаи дар расми 19 тасвирёфта: а) тетраэдри мунтазам; б) октаэдр буданашро асонок намоед.

17

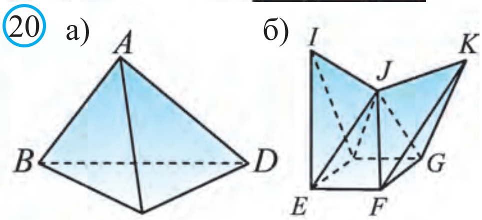
18



19



20



164. Шумораи қулла, теға ва рӯяҳои бисёррӯяи дар расми 20 тасвиршударо муайян кунед, онҳоро ба баробарии Эйлер гузошта санҷед.

165. Аз ҳар як қуллаи бисёррӯяи барҷаста сетоӣ теға мебарояд. Агар шумораи теғаҳои ин бисёррӯя ба: а) 12; б) 15 баробар бошад, он чанд қулла ва рӯя дорад?

166*. Бисёррӯяи 3 то рӯя ва дар ҳар рӯяаш 13 тоӣ теғадошта мавҷуд аст?

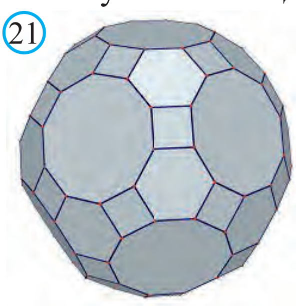
167. Аз ҳар қуллаи бисёррӯяи барҷаста чортои теға мебарояд. Агар шумораи теғаҳои ин бисёррӯя ба12 баробар бошад, он чанд қулла ва рӯя дорад?

168. Шумораи қуллаҳо, теғаҳо ва рӯяҳои а) тетраэдри мунтазам; б) куб; с) октоэдр; д)додекаэдр; е) икосаэдрро ёбед ва барои ин бисёррӯяҳо бамаврид будани муодилаи Эйлерро санҷед.

169. Шумораи рӯяҳои бисёррӯяи мунтазамро ёбед, агар шумораи қуллаҳояш 8 то, шумораи теғаҳояш 12 то бошанд ва номи онҳоро муайян намоед.

170. Шумораи рӯяҳои бисёррӯяи мунтазамро ёбед, агар шумораи қуллаҳояш 6 то, шумораи теғаҳояш 12 то бошанд ва номи онҳоро муайян намоед.

21



171. Шумораи теғаҳои бисёррӯяро ёбед, агар шумораи қуллаҳояш 10 то, шумораи рӯяҳояш 7 то бошад.

172. Шумораи рӯяҳои бисёррӯяро ёбед, агар шумораи қуллаҳояш 14 то, шумораи теғаҳояш 21 то бошад.

173. Бисёркунҷаи расми 21 62 то рӯя ва 120 то қулла дорад, шумораи теғаҳои онро ёбед.

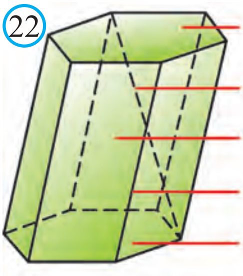
6. ПРИЗМА ВА САТҲИ ОН

6.1. Призма ва буриши он

Бо призмаҳо дар синфҳои поёнӣ шинос шуда будед. Ҳамин тавр бошад, ҳам доир ба онҳо баъзе мафҳум ва хосиятҳоро ёдовар мекунем.

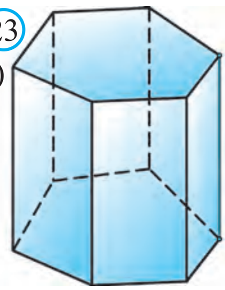
Призма гуфта бисёррӯяеро мегӯем, ки ду рӯяаш (асос) аз *n* кунҷаи баробар, боқимонда *n* то рӯяаш бошад аз параллелограммҳо иборат аст (расми 22).

22

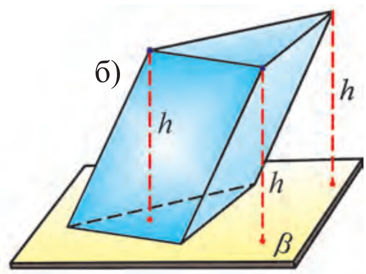


23

а)



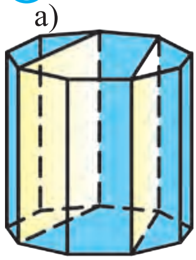
б)



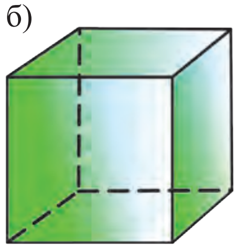
Ба асос перпендикуляр ёки перпендикуляр набудани рӯяҳои паҳлӯи призмаро ба назар гирифта, ба призмаҳои *рост* ёки *моил ҷудо* мекунанд. Дар расми 23.а призмаи шашкунҷаи рост, дар расми 23.б бошад призмаи секунҷаи моил тасвир шудааст. Маълум аст, ки рӯяҳои паҳлӯи призмаи рост аз чоркунҷаҳои рост иборат аст.

24

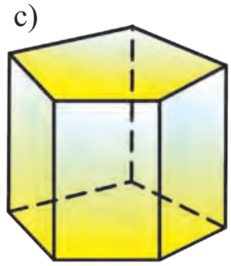
а)



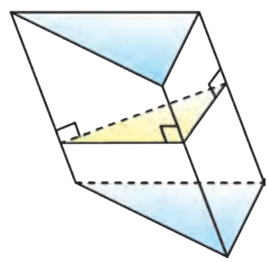
б)



с)



25



Призмаи рости асосаш аз бисёркунҷаи мунтазам иборат *призмаи мунтазам* номида мешавад (расми 24). Рӯяҳои паҳлӯи призмаи мунтазам аз чоркунҷаи рости баробар иборат аст.

Перпендикуляри аз асоси призма ба ягон нуқтаи асоси дуюм фароварда *баландии* призма номида мешавад (расми 23.б).

Буриши диаганалии призма гуфта, буриши асосҳои призмаи диагоналҳои мувофиқ гузаронидашударо меноманд (расми 24.а). Шумораи буришҳои диагонали призма ба як асоси шумораи диагоналҳои призма баробар аст.

Буриши перпендикулярии призма гуфта, буриши перпендикулярии тамоми паҳлӯи онро меноманд (расми 25).

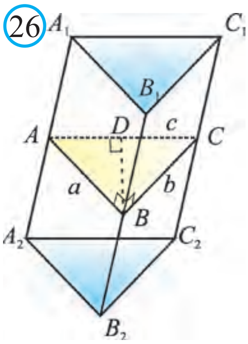
$\frac{n(n-3)}{2}$ то диагонал доштани кунҷи барҷастаи n - ро ба ҳисоб гирем, шумораи буриши диагоналии призмаи n-кунҷа ҳам $\frac{n(n-3)}{2}$ то мешавад.

Дар ҳар як буриши диагоналӣ ду диагонали призмаро гузаронидан мумкин. Яъне,призмаи n-кунҷа ҷамъ $n(n-3)$ то диагонал дорад.

Масъалаи 1. Масофаҳои байни теғаҳои паҳлӯи призмаи моили секунҷа ба тарзи мувофиқ, 7 см, 15 см ва 20 см. Масофаи калонтарини рӯяи рости рӯйи призмаро то теғаи рости дар муқобили он буда ёбед.

Ҳал. Маълум аст, ки масофаи байни хатҳои рости параллел ба дарозии перпендикуляри аз ягон нуқта ба дуюми гузаронидаи хатҳои рост баробар аст. Дар ин вақт дарозии паҳлӯҳои буриши перпендикуляри призмаи додашудаи ABC ба ин масофаҳо баробар мешавад (расми 26). Дар рӯяи аз ҳама калони рӯйи призма тарафи аз ҳама бузург AC=20 см мехобад. Масофаи аз теғаи B_2B_1 то ҳамвории $A_2A_1C_1C_2$ буда, ба баландии BD –и секунҷаи ABC баробар мешавад. Он гоҳ мувофиқи формулаи Герон:

26



$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2},$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+15+20}{2} = 21,$$

$$S_{ABC} = \sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)} = \sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1} = 42.$$

Аз тарафи дуюм, $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2}$. Он гоҳ, $42 = \frac{AC \cdot BD}{2}$ ёки $BD = 4{,}2$ см.

Ҷавоб: 4,2 см.

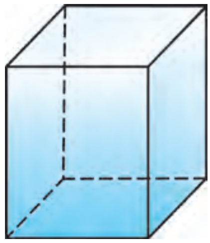
6.2. Параллелепипед ва куб

Призмаи асосҳояш аз параллелограмм иборат *параллелепипед* номида мешавад (расми 27). Параллелепипедҳо ҳам монанди призма рост (расми 27.а) ва моил (расми 27.б) шуданаш мумкин.

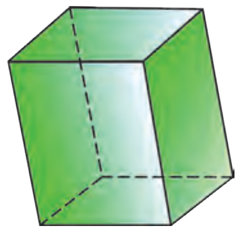
Рӯяҳои ба қуллаи умумӣ соҳиб набудаи параллелепипед *рӯяҳои муқобил* номида мешавад.

27

а)



б)



Параллелепипед:

– 12 то теға дорад, ҳар чортои он аз буришҳои баробар иборат аст (расми 28.а),

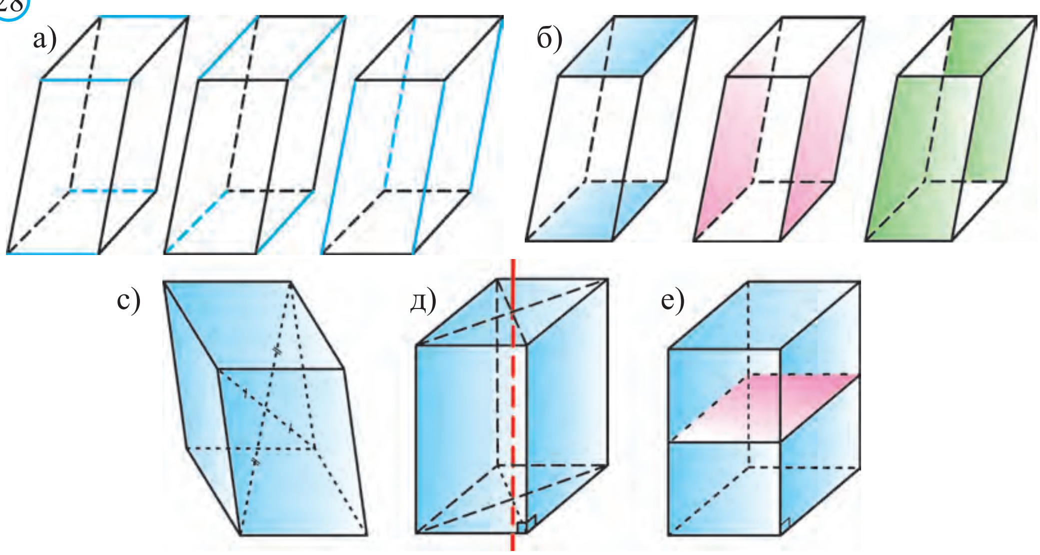
– 6 то рӯя дорад, рӯяҳои муқобили он байни худ параллел ва баробар мешавад (расми 28.б),

– 4 то диагонал дорад, онҳо дар як нуқта бирида мешавад ва дар нуқтаи бариш ба ду қисми баробар тақсим мешавад (расми 28.с),

– дар нуқтаи буриши диагоналҳо маркази симметрияи он мешавад (расми 28.с).

Параллелепипеди рост тири симметрӣ (расм 28.d) ва ҳамвории симметрӣ дорад (расм 28.е).

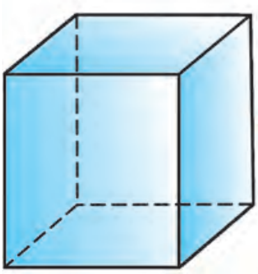
28



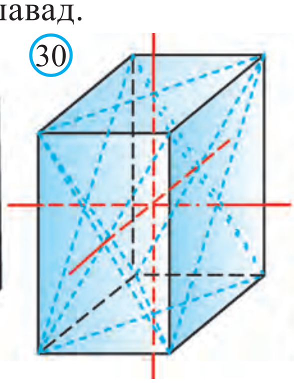
Параллелепипеди рости асосаш аз чоркунҷаи рост иборатро *параллелепипеди росткунҷа* меноманд (расми 29).

Аён аст ки, ҳамаи рӯяҳои параллелепипеди росткунҷа аз чоркунҷаи рост иборат мешавад.

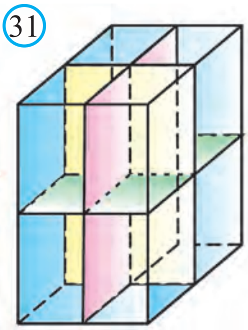
29



30

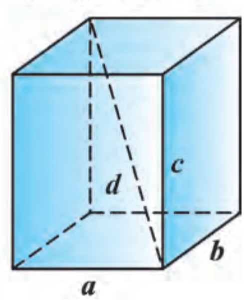


31



32

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Параллелепипеди росткунҷа се тири симметрӣ (расми 30) ва сето ҳамвории симметрӣ дорад (расм 31).

Се теғаи аз як қуллаи он баромадаи параллелепипеди росткунҷаро *ченакҳои* он меноманд.

Хосият: Ченакҳои квадрати диагонали d -и параллелепипеди росткунҷа: ба суммаи квадратҳои a, b ва c баробар аст (расми 32):

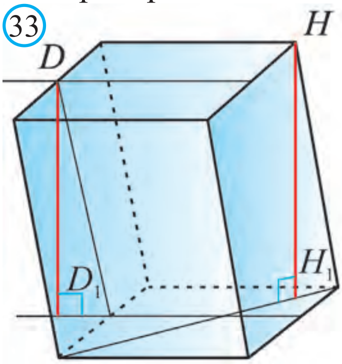
$$\boldsymbol{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}.$$

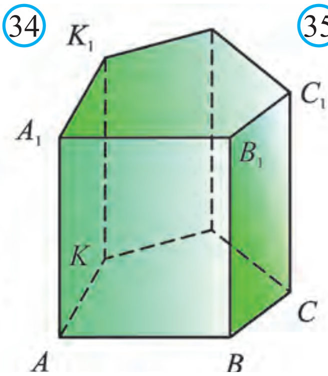
Параллелепипеди росткунҷаи ченакҳояш баробар *куб* номида мешавад. Аён аст ки, тамоми рӯяҳои куб аз квадратҳои баробар иборат мешавад. Куб ба як маркази симметрӣ, 9 то тири симметрӣ ва 9 то ҳамвории симметрӣ соҳиб аст.

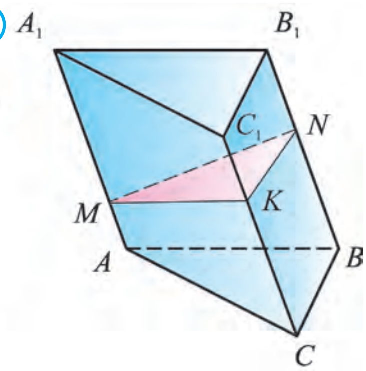
Дар боло як қатор хосиятҳои призмаро шуморида гузаштем. Баъзе аз онҳоро дар синфи 10 исбот намуда будем. Аз сабаби он ки исботи хосиятҳои боқимонда содда аст, онҳоро барои мустақил исбот намудан гузоштем.

6.3. Сатҳи пурра ва паҳлӯи призма

Дар расми 33 баландиҳои HH_1 ва DD_1 - и призмаи $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ тасвир ёфтааст. Аён аст ки, баландии призмаи мунтазам ба теғаи рости он баробар мешавад.

33


34


35


Сатҳи паҳлӯи призма (саҳеҳтар, масоҳати *сатҳи паҳлӯ*) ба ҷамъи масоҳати рӯяҳои паҳлӯӣ баробар аст, сатҳи пурра бошад ба ҷамъи масоҳати ду асос ва сатҳи паҳлӯ баробар аст.

$$\boldsymbol{S_{пурра} = S_{паҳлӯ} + 2S_{асос}}.$$

Теорема. Сатҳи паҳлӯи призмаи рост ба параметри асоси ҳосили зарби баландии он баробар аст:

$$\boldsymbol{S_{паҳлӯ} = P_{асос} \cdot h}.$$

Исбот. Баландии призмаи додашуда h, параметри асос $P=AB+BC+\ldots+KA$ бошад (расми 34). Аён аст ки, ҳар як паҳлӯи призмаи рост чоркунҷаи рост аст. Асоси ин чоркунҷаи рост ба тарафи мувофиқи призма, баландии он бошад ба баландии призма баробар аст.

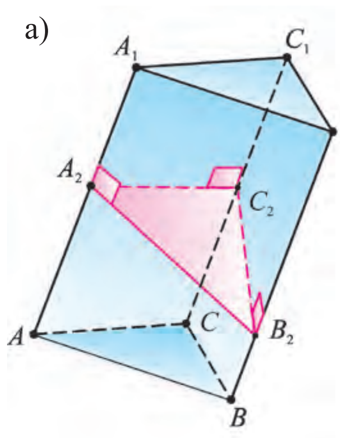
Яъне, $S_{паҳлӯ}=AB\cdot h+BC\cdot h+...+KA\cdot h=(AB+BC+...KA)\cdot h=P\cdot h.$ □

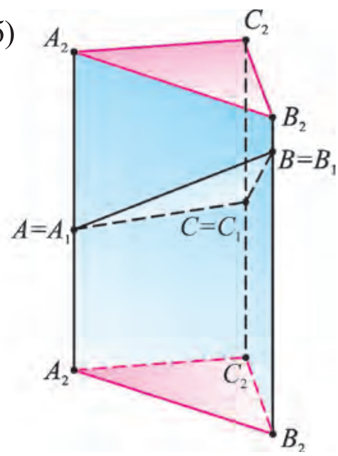
Теорема. Сатҳи паҳлӯи призма ба перпендикуляри периметри буриши он ба ҳосили зарби дарозии теғаи рост баробар аст: $\boldsymbol{S_{паҳлӯ}=P\cdot l}$.

Исбот. Периметри буриши перпендикуляр ба P баробар аст (расми 35). Буриш призмаро ба ду қисм тақсим мекунад (расми 36). Яке аз ин қисмҳоро гирифта, асосҳои призмаро болоиҳам афтанда, параллел мекӯчонем. Дар натиҷа призмаи рости нав ҳосил мешавад (расми 36.б). Аён аст ки, сатҳи паҳлӯи ин призма ба сатҳи паҳлӯи призмаи додашуда баробар аст. Асоси он аз буриши перпендикуляри додашуда иборат буда, теғаи рост ба l баробар мешавад.

Яъне, мувофиқи теоремаи дар боло исботшуда: $S_{паҳлӯ}=P\cdot l$ □

36 а) б)





Масъалаҳо оиди мавзӯъ ва супоришҳои амалӣ

174. Масоҳати як паҳлӯи тетраэдр 6 см^2 бошад, сатҳи пурраи онро ёбед.

175. Масоҳати як паҳлӯи октаэдр 5,5 см^2 бошад, сатҳи пурраи онро ёбед.

176. Масоҳати як паҳлӯи додекаэдр 6,4 см^2 бошад, сатҳи пурраи онро ёбед.

177. Масоҳати сатҳи пурраи куб 105,84 см^2 бошад, масоҳати ҳар як паҳлӯ ва дарозии теғаи онро ёбед.

178. Масоҳати сатҳи пурраи октоэдр $32\sqrt{3}$ см^2 бошад, масоҳати ҳар як паҳлӯи он ва дарозии теғаи онро ёбед.

179. Тарафҳои асоси росткунҷаи параллелепипед дар нисбати 7:24, масоҳати буриши диагонал ба 50 дм^2 баробар. Масоҳати сатҳи паҳлӯро ёбед.

180*. Теғаи рости параллелепипеди рост ба 1 м, тарафҳои асосҳо ба 23 м ва 11 м баробар аст. Асос нисбати диагоналҳо 2:3 барин. Масоҳати буриши диагоналро ёбед.

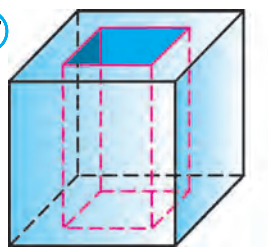
181. Тарафҳои асоси параллелепеди рост 3 см ва 5 см, яке аз диагоналҳои асос ба 4 см баробар. Яке аз диагоналҳои хурди параллелепипед бо ҳамвории асос кунҷи 60° ро ташкил мекунад. Дарозии диагоналҳои онро ёбед.

182. Теғаи рости параллелепипеди рост 5 м, тарафҳои асос 6 м ва 8 м, яке аз асосҳои диагонал ба 12 м баробар. Диагоналҳои параллелепипедро ёбед.

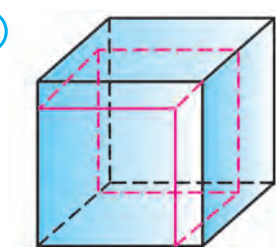
183*. Теғаи призмаи мунтазами секунҷа ба 3 баробар. Аз тарафи асос ва мобайни тир ҳамворӣ гузаронидаанд. Масоҳати буришро ёбед.

184. Баландии призмаи рости секунҷа 50 см, тарафҳои асос 40 см, 13 см ва 37 см. Сатҳи пурраи призмаро ёбед.

37



38



185*. Аз куби ягонаи дар расми 37 тасвирёфта тарафи асос ба 0,5 теғаи рост ба 1 баробар буда, призмаи чоркунҷаи мунтазам кофта гирифта шуд. Масоҳати сатҳи пурраи қисми боқимондаи кубро ҳисоб кенед.

186. Агар теғаи куб ба 1 воҳид афзояд, сатҳи пурраи он ба 54 воҳид зиёд мешавад. Теғаи кубро ёбед (расми 38).

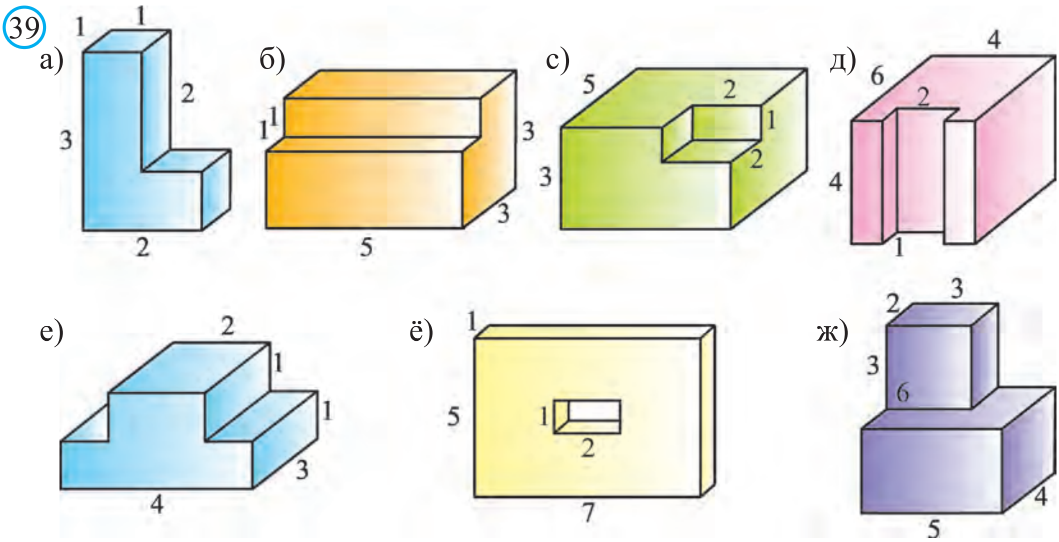
187. $ABCC_1B_1A_1$ асоси призмаи моили секунҷаи баробарпаҳлӯи ABC буда, дар он $AB=AC=10$ см ва $BC=12$ см. Қуллаи A_1 ба қуллаҳои A, B ва C дар масофаи баробар мехобад ва ба $AA_1=13$ см баробар. Сатҳи пурраи призмаро ёбед.

188. Сатҳи паҳлӯи призмаи чоркунҷаи мунтазам ба160, сатҳи пурра ба 210 баробар. Диагонали асоси призмаро ёбед.

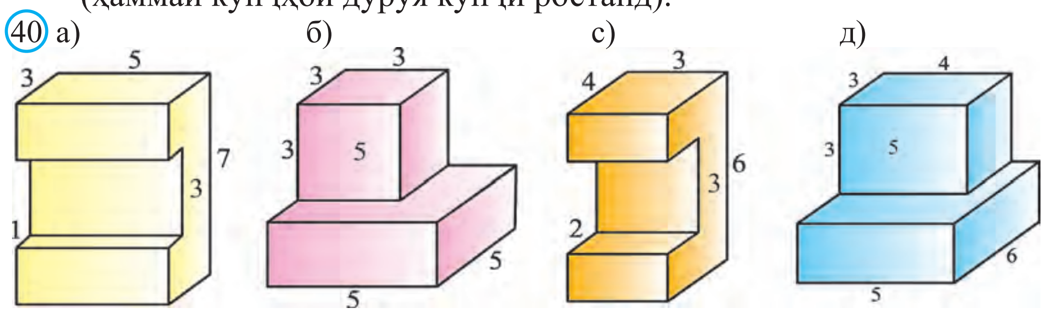
189. Теғаҳои паҳлӯи призмаи секунҷаи моилхобидаи масофаи байни хатҳои рости параллел 2 см , 3 см ва 4 см, теғаҳои паҳлӯ бошад ба 5 см баробар. Сатҳи паҳлӯи призмаро ёбед.

190. Ҷамъи дарозии теғаҳои куб ба 96 баробар. Сатҳи паҳлӯи онро ёбед.

191. Сатҳи пурраи бисёрруяҳои дар расми 39 тасвирёфтаро ҳисоб кунед (ҳаммаи кунҷҳои дурӯя кунҷи ростанд).



192. Сатҳи пурраи бисёррӯяҳои дар расми 40 тасвирёфтаро ҳисоб кунед (ҳаммаи кунҷҳои дурӯя кунҷи ростанд).



193. Теғаи рости призмаи мунтазами шашкунҷа 8 см, тарафи асос бошад 3 см. Ҷамъи дарозиҳои ҳамаи теғаҳои призмаро ёбед.

194. Тарафи асоси призмаи мунтазами чоркунҷа 6 см, баландии призма бошад 5 см. Масоҳати буриши диагонали онро ёбед.

195. Тарафи асоси призмаи мунтазами секунҷа 6 см, теғаи рост бошад 12 см. Масоҳати сатҳи паҳлӯи призмаро ёбед.

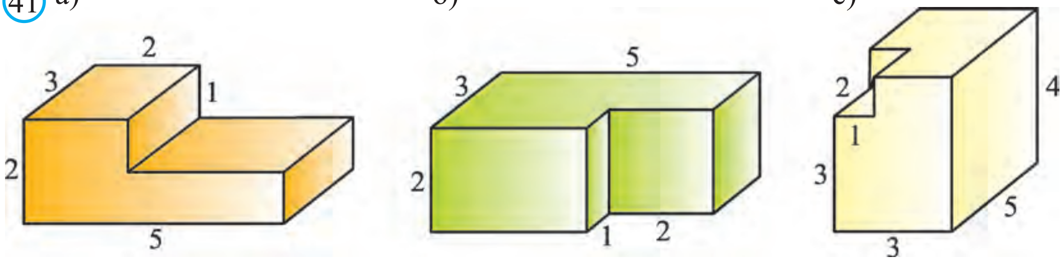
196. Масоҳати пурраи бисёррӯяи дар расми 41 тасвиршударо чен кунед (ҳамаи кунҷҳои дурӯя кунҷҳои рост).

197. Масоҳати пурраи бисёррӯяи дар расми 42 тасвиршударо чен кунед (ҳамаи кунҷҳои дурӯя кунҷҳои рост).

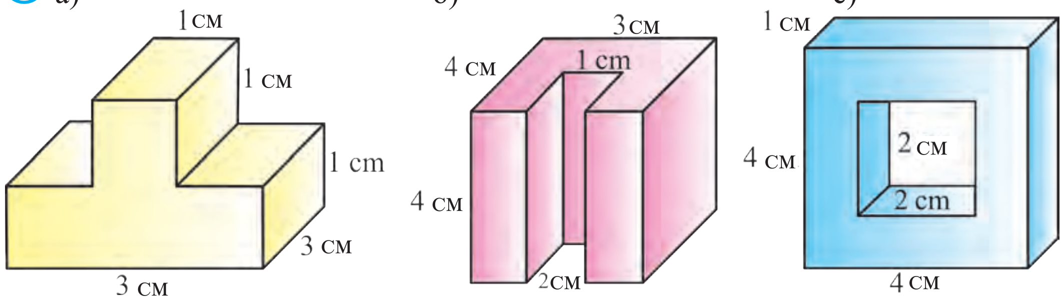
198*. Ченаки боми хонаи дар расми 43 тасвирёфта 6 м × 8 м. Боми он ба асос тахти кунҷи 45° моил аст. Масоҳати сатҳи бомро ёбед.

199. Теғаҳои аз як қуллаи параллелепипед бароянда ба таври мувофиқ, 6 см, 8 см ва 12 см. Суммаи дарозиҳои ҳамаи теғаҳои параллелепипедро ёбед.

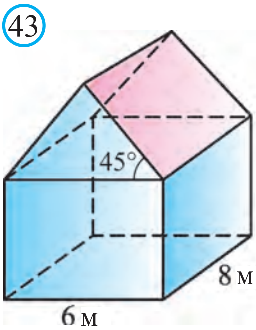
41 а) б) с)



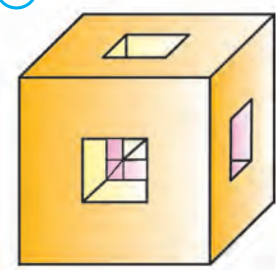
42 а) б) с)



43



44



45

200. Масоҳатҳои паҳлӯҳои аз як қуллаи параллелепипед бароянда ба таври мувофиқ 6 см^2, 12 см^2 ва 16 см^2. Масоҳати сатҳи пурраи параллелепипедро ёбед.

201*. Куби теғааш ба 3 см баробар буда, аз ҳар паҳлӯи он буриши яктарафа – асос ба 1 см баробар сӯрохиҳои квадратшакл кофта шудааст (расми 44). Масоҳати сатҳи пурраи ҷисми боқимондаи кубро ёбед.

202*. Сатҳи теғаҳои тӯби футбол ба 5 см баробар буда, аз 12 то панҷкунҷаи мунтазам ва 20 то шашкунҷаи мунтазам иборат аст (расми 45). Сатҳи пурраи тӯби футболро ёбед. Тӯб аз чарми сантиметри квадратиаш 60 сӯмӣ истеҳсол шудааст ва маълум аст, ки 10 фоизи он ба чок ва партов мебарояд, нархи чарми барои тӯб сарфшударо ёбед.

7. ҲАҶМИ ПРИЗМА

7.1. Мафҳуми ҳаҷм

Яке аз хусусиятҳои хоси ҷисми геометрӣ дар фазо ин мафҳуми ҳаҷм аст. Ҳар гуна предмет (ҷисм) кадом як қисми фазоро ишғол мекунад. Барои мисол, ғишт нисбати гӯгирд ҷойи зиёдтарро мегирад. Барои муқоисаи байни ин ҷисмҳо мафҳуми ҳаҷм дароварда мешавад.

Ҳаҷм нишондоди микдорӣ (ададӣ) аст, ки ба хосиятҳои зерини ҷисми фазоӣ соҳиб мебошад:

1. Ҳар гуна ҷисм ба ҳаҷми муайяни бо ададҳои мусбат ифодаёбанда соҳиб аст.

2. Ҳаҷми ҷисмҳои баробар ҳам баробар мешавад.

3. Агар ҷисм ба якчанд ҳисса тақсим шуда бошад, ҳаҷми он ба суммаи ҳаҷми ҳиссаҳо баробар мешавад.

4. Ҳаҷми куби теғааш ба як воҳиди дарозӣ баробар ба як баробар аст.

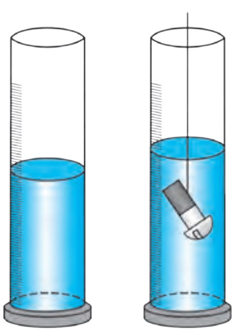
Ҳаҷм дарозӣ ва рӯя барин яке аз бузургиҳои ададӣ аст. Ба интихоби воҳиди ченаки дарозӣ нигоҳ карда, ҳаҷми *воҳиди куб* (теғааш дорои воҳиди дарозӣ) бо 1 см^3, 1 дм^3, 1 м^3 ва ҳоказо барин воҳидҳои ҳаҷм чен карда мешавад.

Ҳаҷми ҷисмҳоро бо усулҳои гуногун чен мекунанд, ёки ҳисоб менамоянд. Барои мисол, ҳаҷми деталҳои хурдро бо ёрдами зарфи ченакдор (шкаладор) ҳисоб кардан мумкин (расми 46). Ҳаҷми сатилро бошад бо ёрдами ба зарфи воҳиди ҳаҷмдор об рехта, пурра кардан чен кардан мумкин (расми 47). Лекин ҳаҷми ҳамаи ҷисмҳо ҳам бо чунин усулҳо чен карда намешавад. Дар ин ҳолатҳо ҳаҷм бо усулҳои гуногун ҳисоб карда мешавад. Дар поён доир ба ин усулҳо истода, баъзеяшонро бе исбот меорем.

7.2. Ҳаҷми параллелепипед

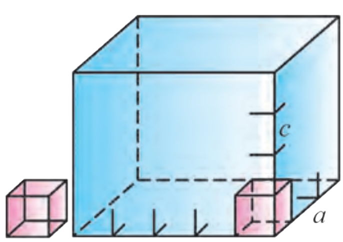
Теорема. Ҳаҷми параллелепипеди росткунҷа ба ҳосили зарби се ченаки он баробар аст (расми 48): $V = a \cdot b \cdot c$.

46

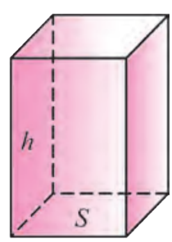


47

48



49

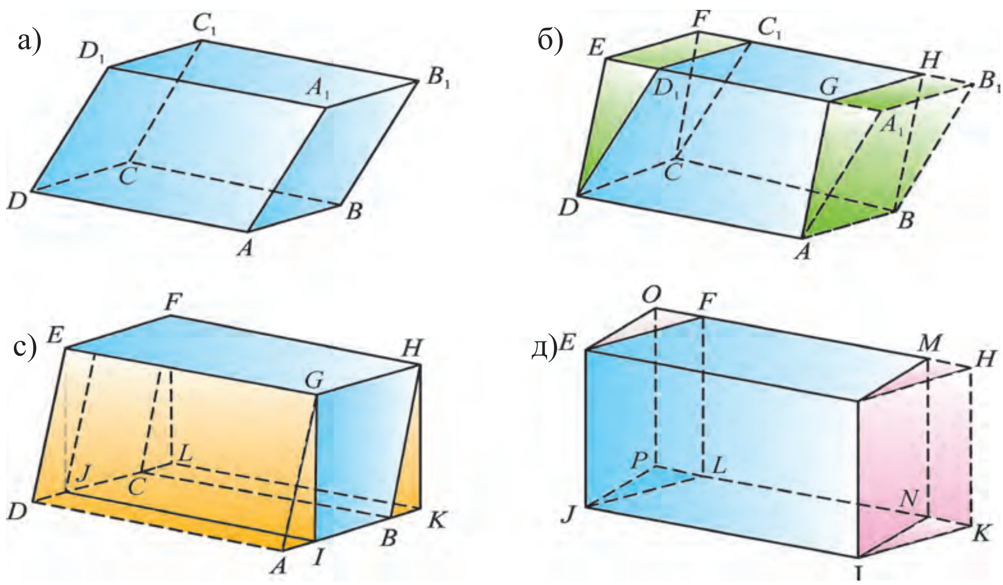


Натиҷа. Ҳаҷми параллелепипеди росткунҷа ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст (расми 49): $V = S \cdot h$.

Теорема. Ҳаҷми параллелепипеди ихтиёрӣ ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландӣ баробар аст (расми 50): $V = S \cdot h$.

Хосияти мазкур аз натиҷаи боло бармеояд. Параллелепипеди дар расмҳои 50 додашуда, чӣ гуна пуррашавии параллелепипеди росткунҷа тасвир ёфтааст. Аз ин истифода бурда хосиятро мустақил асоснок намоед.

50



7.3. Ҳаҷми призма

***Теорема.* Ҳаҷми призмаи рост ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландиаш баробар аст.** (расми 51): $V = S \cdot h$.

Исбот. *Ҳолати* 1. Призмаи рости асосаш аз секунҷаи росткунҷа иборат дода шуда бошад (расми 51). Ин призмаро бо призмаи ба он баробар то параллелопипеди росткунҷа пурра кардан мумкин(расм 51.б).

Ҳаҷми призмаи додашуда, масоҳати асос бар баландӣ ба тарзи мувофиқ V, S ва h бошад, ҳаҷми параллелепипеди росткунҷаи ҳосилшуда ба таври мувофиқ, масоҳати асос ва баландӣ $2V$, $2S$ ва h мешавад.

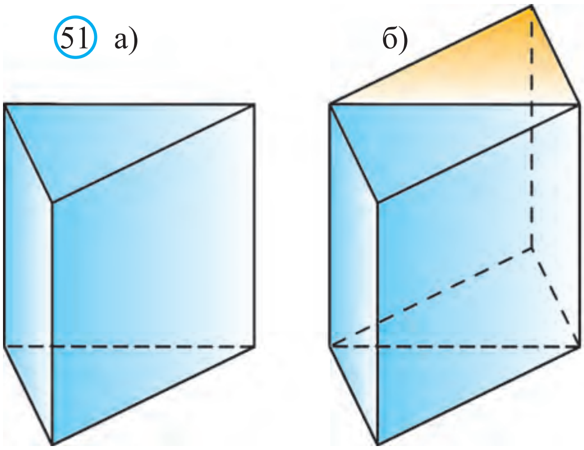
Яъне, $2V=2S \cdot h$ ёки $V=S \cdot h$ мешавад.

Ҳолати 2. Призмаи ихтиёрии n-кунҷа дода шудааст, Масоҳати асоси он S, баландиаш ба h баробар бошад. Асоси призма – n-кунҷаро бо диагоналҳои секунҷаҳо, ҳар як секунҷаро ба секунҷаҳои росткунҷа тақсим кардан мумкин (расми 52). Дар натиҷа, имконпазир будани тақсими призмаи додашудаи шуморааш маҳдуд ба росткунҷаи асосаш аз секунҷаҳо иборат ба призмаи ростро муайян мекунем. Баландии ин призма ба h баробар буда, асосҳои он ба суммаи додашудаи масоҳати призма баробар мешавад: $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_k$.

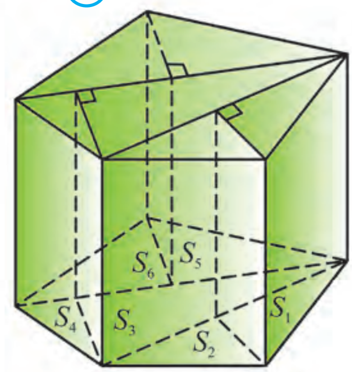
Ҳаҷми призмаи додашуда ба суммаи ҳаҷмҳои призмаҳои секунҷаи онро ташкилкарда иборат аст:

$$V = S_1h + S_2h + \ldots + S_kh = (S_1 + S_2 + \ldots + S_k)\, h = S \cdot h, \quad \text{ёки} \quad V = S \cdot h. \ \square$$

51 а) б)



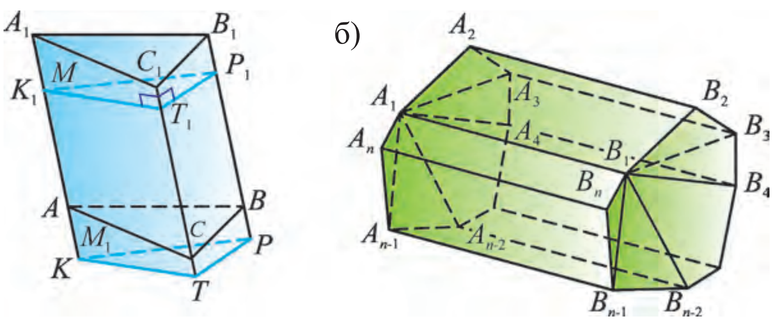
52



Теорема. Ҳаҷми призмаи ихтиёрӣ ба ҳосили зарби масоҳати асос бар баландиаш баробар аст: $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

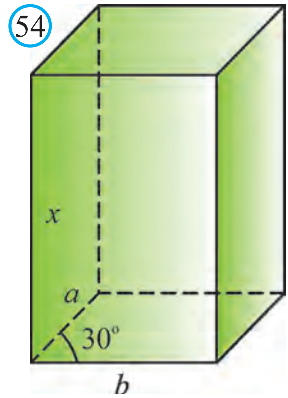
Ин теоремаро аз расми 53 истифода бурда, аввал барои призмаи секунҷа (расми 53.а), пас барои призмаи ихтиёрӣ (расми 5.3.б) мустақилона исбот кунед.

53 а) б)



Масъалаи 1. Тарафҳои асоси параллелепипеди рост ба a ва b баробар буда, онҳо байнихуд кунҷи $30°$ -ро ташкил мекунад. Агар масоҳати паҳлӯи параллелепипед ба S баробар бошад, ҳаҷми онро ёбед.

Ҳал: Баландии параллелепедро бо h ишора мекунем (расми 54). Дар он мувофиқи шарт:



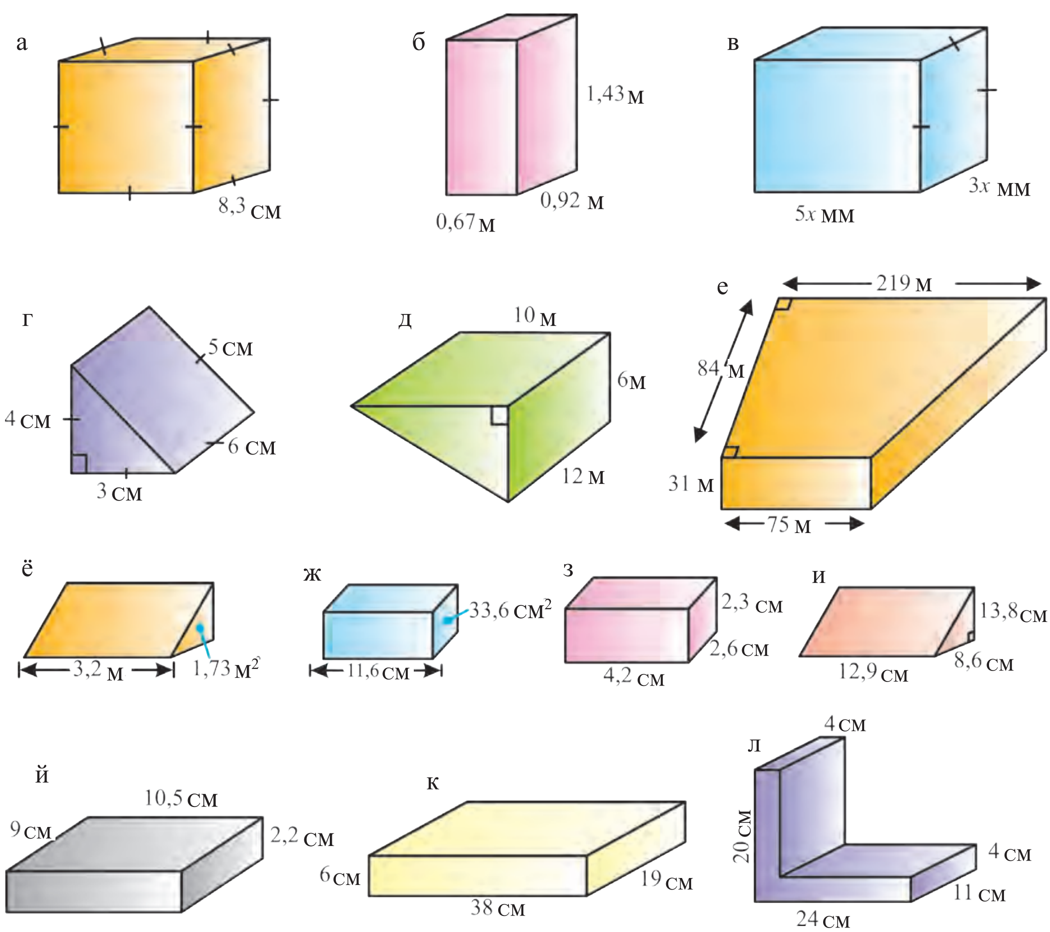
$$S = (2a+2в)\,h \quad \text{ёки} \quad h = \frac{S}{2(a+b)}.$$

$$S_{asos} = ab\sin 30° = \frac{ab}{2}.$$

$$V = S_{asos}\cdot h = \frac{ab}{2}\cdot\frac{S}{2(a+b)} = \frac{abS}{4(a+b)}.$$

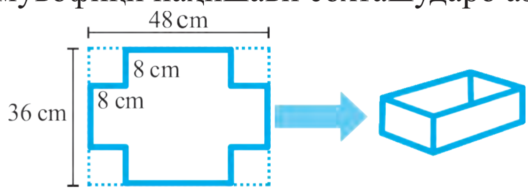
Масъалаҳо доир ба мавзӯъ ва супоришҳои амалӣ

203. Ҳаҷми бисёррӯяи дар расми 55тасвирёфтаро ёбед.

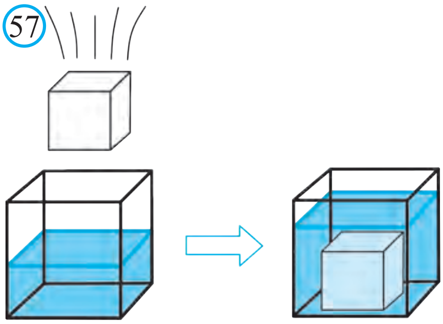


204. Ҳаҷми зарфи мувофиқи паҳншавӣ сохташударо аз расми 56 ёбед.

56



57



58

205*. Мувофиқи расми 57 масъала тартиб диҳед ва онро ҳал кунед.

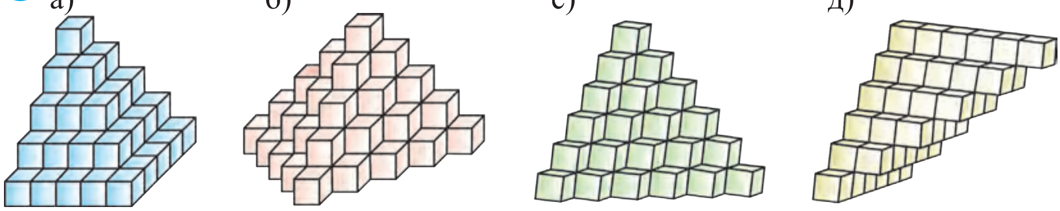
206. Ҷисми дар расми 58 додашудаи аз 88 то кубчаҳои воҳид сохта шудааст. Масоҳати пураи сатҳи ҷисмро ёбед.

207. Масоҳати паҳлӯи параллелепипеди росткунҷа ба 12 ва дарозии теғаи ба он перпендикуляр ба12 баробар аст. Ҳаҷми параллелепипедро ёбед.

208. Ҳаҷми кадоме аз шаклҳои фазовии дар расми 59 тасвиршуда, бузург аст, яъне аз кубчаҳои зиёди бисёррӯя ташкил ёфтааст?

59

а) б) с) д)



209. Ҳаҷми параллелепипеди росткунҷа ба 24 баробар ва дарозии яке аз теғаҳои он ба 3 баробар аст. Масоҳати паҳлӯи параллелепипеди ба ин теға перпендикулярро ёбед.

210. Ҳаҷми параллелепипеди росткунҷа ба 60 баробар ва рӯяи яке аз паҳлӯҳо ба 12 баробар. Дарозии теғаи параллелепипеди ба ин паҳлӯ перпендикулярро ёбед.

211. Дарозиҳои се теғаи аз як қуллаи параллелепипед бароянда ба 4, 6 ва 9 баробар. Теғаи куби ба он баробарбузургро ёбед.

212. Масоҳати сатҳи пурраи куб ба 18 баробар бошад, диагонали онро ёбед.

213. Ҳаҷми куб ба 8 баробар бошад, масоҳати сатҳи пураи онро ёбед.

214. Агар теғаҳои куб як воҳид афзояд, ҳаҷми он ба 19 воҳид меафзояд. Теғаи кубро ёбед.

215. Масоҳати пурраи рӯяи куб ба 24 баробар. Ҳаҷми онро ёбед.

216. Диагонали куб ба $\sqrt{12}$ баробар бошад, ҳаҷми онро ёбед.

217. Ҳаҷми куб ба $24\sqrt{3}$ баробар бошад, диагонали онро ёбед.

218. Ҳаҷми куби аввала аз дуюми 8 маротиба бузург. Масоҳати сатҳи пурраи куб аз дуюмӣ чанд маротиба бузург аст?

219. Ба зарфи (систернаи) шакли кубдоштаи теғааш 30 см чанд литр об меғунчад?

220. Теғаҳои аз як қуллаи параллелепипеди росткунҷа баромада ба 2 ва 6 баробар. Ҳаҷми параллелепипеди росткунҷа ба 48 баробар. Теғаи аз ҳамин қуллаи параллелепипед баромадаро ёбед.

221. Дарозии тарафҳои асосии параллелепипед $2\sqrt{2}$ см ва 5 см, кунҷи миёнаи онҳо ба 45° га баробар. Агар диагонали хурди параллелепипед ба 7 см баробар бошад, ҳаҷми онро ёбед.

222*. Асоси параллелепипеди *a* ва *b* буда, тарафҳояш кунҷи 30° ташкил мекунад. сатҳи пуррааш ба S баробар. Ҳаҷми онро ёбед.

223. Ченакҳои параллелепипеди росткунҷа 15 м, 50 м ва 36 м. Теғаи куби ба он баробарбузургро ёбед.

224. Тарафҳои асоси призмаи рости секунҷа ба 29, 25 ва 6, теғааш бошад ба баландии калони асос баробар. Ҳаҷми призмаро ёбед.

225. Ҳаҷми бисёррӯяи дар расми 39 тасвиршударо чен кунед (тамоми кунҷҳои дурӯя кунҷи рост).

226. Ҳаҷми бисёррӯяи дар расми 40 тасвиршударо чен кунед (тамоми кунҷҳои дурӯя кунҷи рост).

227. Масоҳати асоси параллелепипеди рост аз ромби 1 м^2 иборат аст. Масоҳати буриши диагонал,ба таври мувофиқ, 3 м^2 ва 6 м^2. Ҳаҷми параллелепипедро ёбед.

228. Ҳаҷми бисёррӯяи дар расми 41 тасвиршударо чен кунед (тамоми кунҷҳои дурӯя кунҷи рост).

229. Ҳаҷми бисёррӯяи дар расми 42 тасвиршударо чен кунед (тамоми кунҷҳои дурӯя кунҷи рост).

230. Ба роҳрави паҳниаш 3 м ва дарозиаш 20 м буда, ба ғафсии 10 см асфалт хобониданд. Барои роҳрав чӣ қадар асфалт кор фармуданд?

231*. Тарафи асоси параллелепипеди моил аз квадрати ба 1 м баробар иборат аст. Яке аз теғаҳои паҳлӯи он ба 2 м баробар аст ва ба ҳар як тарафи худи асос часпида кунҷи 60° ташкил мекунад. Ҳаҷми параллелепипедро ёбед.

232*. Тарафи рӯяҳои параллелепипед ба a баробар ва кунҷи тези 60° аз ромбҳои баробар иборат аст. Ҳаҷми параллелепипедро ёбед.

233. Ҳар як теғаи параллелепипед ба 1 см баробар. Як қуллаи параллелепипеди ҳар се кунҷаш барҷаста тез буда, ҳар яке ба $2a$ баробар аст. Ҳаҷми параллелепипедро ёбед.

234*. Дарозиҳои аз як қулла се теға баромадаи раллелепипед ба a, b, c баробар. Теғаҳои a ва b байни худ перпендикуляр, теғаи c бошад ба ҳар яки онҳо кунҷи α -роашкил мекунад. Ҳаҷми параллелепипедро ёбед (расми 60).

235. Ҳаҷми призмаи мунтазами асосаш а) сакунҷа; б) чоркунҷа; с) шашкунҷаи тарафаш a ва теғаи росташ b - ро ёбед.

236. Тарафҳои асоси параллелепипеди рост ба a см ва b см баробар буда, онҳо байни ҳам кунҷи α ташкил мекунад. Диагонали хурди параллелепипед ба d баробар бошад, ҳаҷми онро ёбед.

237. Теғаҳои паҳлӯи призмаи моили секунҷадор ба 15 м, масофаи мобайни онҳо бошад ба 26 м, 25 ва 17 м баробар аст. Ҳаҷми призмаро ёбед.

238. Диагонали призмаи мунтазами чоркунҷа ба 3,5 см, диагонали рӯяи рост ба 2,5 см баробар. Ҳаҷми призмаро ёбед.

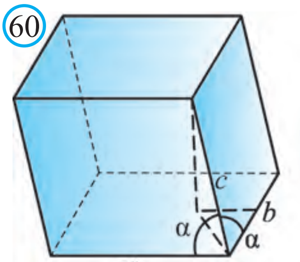
239. Тарафи асоси призмаи мунтазами секунҷа ба a, асосҳои сатҳи паҳлӯ ба суммаи масоҳатҳо баробар аст. Ҳаҷми онро ёбед.

240. Дар призмаи мунтазами шашкунҷа масоҳати буриши диагонали калонтарин ба 4 м^2, масофаи байни ду теғаи паҳлӯи муқобилсамт ба 2 м баробар аст. Ҳаҷми призмаро ёбед.

241*. Баъди ҳафт маротиба ҷома шустан андозаи собун ду маротиба кам мешавад (расми 61). Агар барои ҳар ҷомашӯӣ дар ҳаҷми якхела сарф шудани собун маълум бошад, собун боз барои чанд ҷомашӯӣ мерасад?

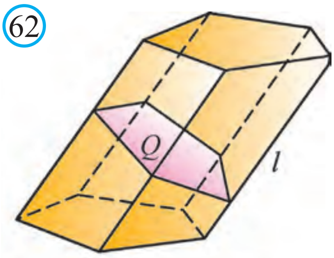
242*. Аз призмаи моил ба теғаҳои перпендикуляр ва тамоми теғаҳои паҳлӯ ҳамвории буранда гузаронида шудааст. Масоҳати буриши ҳосилшуда Q, теғаҳои паҳлӯӣ ба l баробар бошад, ҳаҷми призмаро ёбед (расми 62).

60



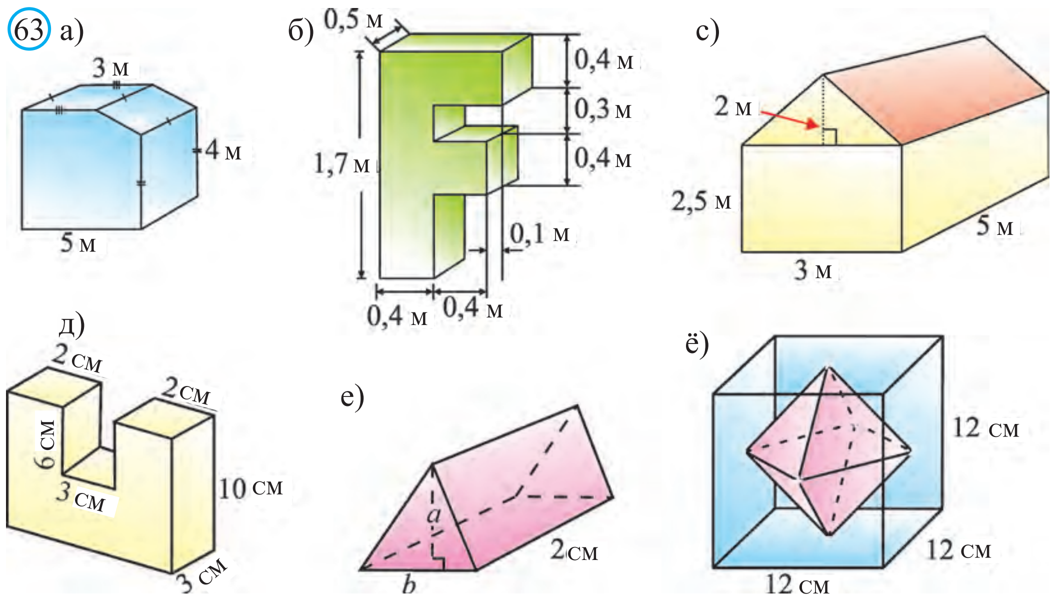
61

62



243. Тарафҳои асоси призмаи секунҷа ба 4 см, 5 см,7 см, теғаи паҳлӯ бошад ба баландии асос баробар аст. Ҳаҷми призмаро ёбед.

244. Ҳаҷми бисёррӯяи дар расми 63 тасвиршударо чен кунед.



245. Масоҳати асоси призмаи рости секунҷа ба 4 см², масоҳати рӯяҳои паҳлӯ ба 9 см², 10 см², 17 см² баробар бошад, хаҷми онро ёбед.

246*. Асоси призма секунҷаи баробарпаҳлӯ буда, як тарафи он 2 см, ду тарафи дигари он ба 3 см баробар. Теғаи рости призма ба 4 см баробар ва он бо ҳамвории асос кунҷи 45° ташкил мекунад. Теғаи ба ин призма баробарбузурги теғаи кубро ёбед.

247. Тарафи асоси призмаи моил ба a баробар буда, секунҷаи баробаркунҷ аст. Яке аз рӯяҳои паҳлӯ ба асос перпендикуляр ва диагонали хурд ба s баробар буда аз ромб иборат. Ҳаҷми призмаро ёбед.

248. Агар баландии призмаи рости чоркунҷа h, бо диагоналҳои асосаш ҳамворӣ кунҷҳои α ва β ташкил мекунад. Агар кунҷи диагоналҳои асос ба γ баробар бошад, ҳаҷми призмаро ёбед.

249*. Буриши асос 1,4 м вабаландиаш 1,2 м бошад қуввати обгузаронии қубури обгузари шакли секунҷаи баробарпаҳлӯ (ҳаҷми оби дар 1 соат ҷоришаванда) -ро ҳисоб кунед. Суръати ҷоришавии об 2 м/с.

250*. Буриши пойдевори роҳи оҳан дар шакли трапетсия буда, асоси поёнии он 14 м, асоси болоӣ 8 м ва баландиаш 3,2 м аст. Барои 1 км пойдевор сохтан чанд метри мукааб хок даркор аст?

251*. Вазни тахтаи чӯбини тарафаш 3,2 см ва ғафсиаш 0,7 см будаи шакли ҳашткунҷаи мунтазамдошта 17,3 г. Зичии чӯбро ёбед.

252. Чандто қуттии шакли параллелепипеди росткунҷаи андозаҳояш 30×40×50(см) бударо ба машинаи андозаи борхонааш 2×3×1,5 м ҷойгир кардан мумкин?

253*. Чанд адад плитаҳои пӯлодии шакли параллелопипеди росткунҷаи андозааш 420 мм × 240 мм × 90 мм, зичиаш 7,8 г/см^3 бударо бо мошинаи қуввати борбардориаш 3 т кашонидан мумкин?

254. Чанд адад ғишти шакли параллелопипеди росткунҷаи андозааш 250 мм × 120 мм × 65 мм, зичиаш 1,6 г/см^3 бударо бо мошинаи қуввати борбардориаш 3 т кашонидан мумкин?

255*. Чанд адад плитаҳои чӯянии шакли параллелопипеди росткунҷаи андозааш 820 мм × 210 мм × 120 мм, зичиаш 7,3 г/см^3 бударо бо крани борбардори қуввати борбардориаш 2 т бардоштан мумкин?

256. Аз чӯби чоркунҷаи рости қадаш 105 м ва андозаи буриши яктарафааш 30 см × 40 см иборат буда, чанд адад тахтаи қадаш 3,5 м, бараш 20 см ва ғафсиаш 20 мм мебарояд?

257. Андозаи ғишт 25 × 12 × 6,5 (см). Агар вазни ғишти дар ҳаҷми 1 м^3 буда, 1700 кг бошад, вазни як дона ғиштро бо граммҳо муайян кунед.

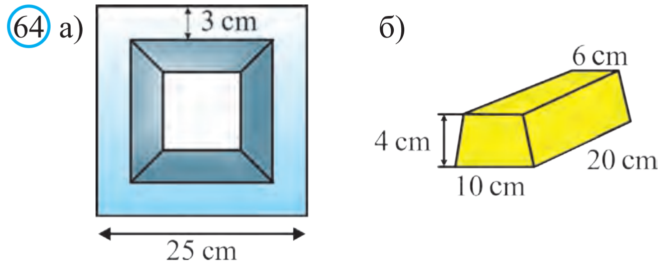
258. Мувофиқи меъёрҳои санитарӣ, барои ҳар як донишомӯзи синф 7,5 м^3 ҳаво рост меояд. Агар баландии синфхона 3,5 м ва он барои 28 донишомӯз мувофиқ бошад, майдони умумии синфхонаро ёбед.

259*. Майдони шаклаш чоркунҷаи рости қадаш 100 м, бараш 10 м бударо бо асфалти ғафсиаш 5 см пӯшонидан лозим. Агар вазни асфалти барои ҳаҷми 1 м^3 сарфшаванда 2,4 тонна ва қуввати боркашонии як мошини борбардор 5 тонна бошад, барои мумфарш намудани ин майдон чанд мошин асфалт лозим мешавад?

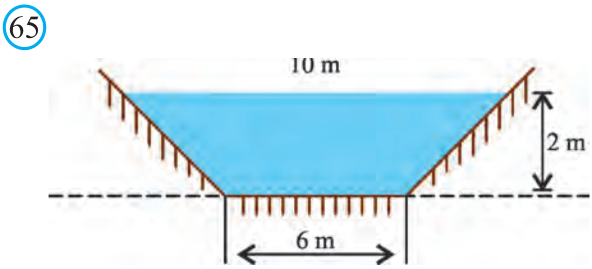
260*. Ба порчаи оҳани шакли параллелепипеди чоркунҷадори андозаҳояш 3 см, 4 см, 5 см буда, дар дастгоҳ коркард гузарониданд. Дар ин ҷарайён ҳар як теғаи он коста шуда, ба 42 см^2 кам шудани сатҳи пуррааш маълум аст. Ҳаҷми ин порчаи оҳан баъди сайқалёбӣ чӣ қадар мешавад?

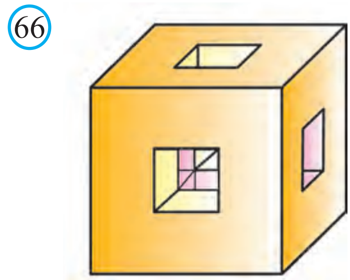
261*. Дар расми 64.а буриши қубури чӯянӣ тасвир ёфтааст. Дар асоси маълумоти дар расм додашуда вазни як метр дарозидоштаи чунин қубурро муайян кунед (зичии чӯян – 7,3 г/см^3).

262. Вазни тахтачаи тиллоӣ(ёмбӣ)-и андозаҳояш дар расми 64.б додашуда 12,36 кг бошад, зичии онро муайян кунед.



263*. Асосҳои канали буриши яктарафааш 10 м, 6 м ва баландиаш 2 м аз трапетсияи баробарпаҳлӯ иборат аст (расми 65). Суръати гузариши об 1 м/с бошад, дар як дақиқа аз ин канал ба кадом ҳаҷм об ҷорӣ мешавад?

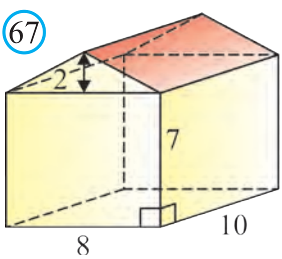


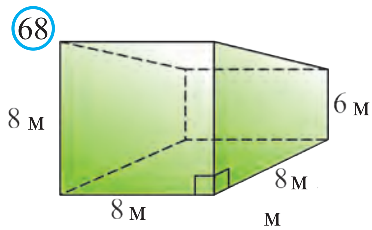


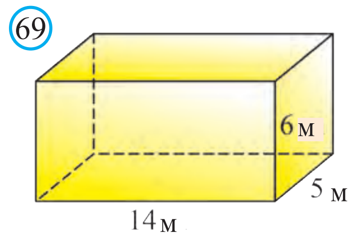
264*. Дар ҳар рӯяи куби аз мис сохташуда, ки теғааш ба 6 см баробар аст, ба асоси бурриши яктарафа сӯрохиҳои квадратшакли ба 2 см баробар кофта шудааст (расми 66). Агар зиччии муқоисавии мис 0,9 г/см^3 бошад, вазни боқимондаи кубро ёбед.

265. Блоки металии асосаш шакли параллелепипеди росткунҷадори андозааш 7 см ва 5 см. Вазни блок 1285 г ва зичии метал 7,5 г/см^3 бошад, балндии блокро ёбед.

266. Дар асоси маълумоти дар расми 67 додашуда ҳаҷми гаражро ёбед.







267. Чуқурии гулдони калони шакли параллелепипеди росткунҷадошта 2 фут, паҳноиаш 12 фут ва дарозаш 15 фут аст. Ҳаҷми гулдонро ёбед ва бо метри мукааб ифода кунед (1 фут = 30,48 см).

268. Анбори маҳсулоти дар расми 68 тасвирёфта призмаи трапетсияшакл аст. Дар асоси маълумоти дар расм оварда, ғунҷоиши анборро муайян кунед.

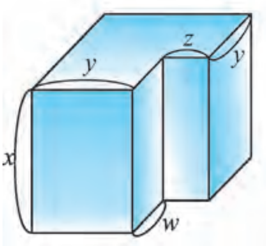
269*. Дар расми 69 андозаҳои қуттӣ дода шудааст. Асосҳои қуттӣ аз ашёи 1 метри квадратиаш 1000 сӯмӣ, рӯяҳои паҳлӯияш бошад аз ашёи 1 метри квадратиаш 2000 сӯмӣ сохта шудааст. Барои сохтани қуттӣ ашёи чандсӯма сарф шуд?

270. Ҳаҷми куб ба V баробар бошад, диагонали онро ёбед.

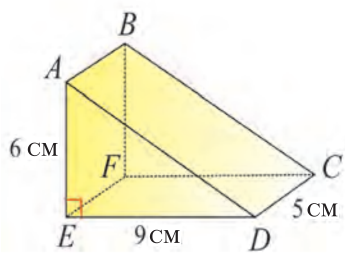
271. Аз параллелепипеди росткунҷаи калони дар расми 70 нишондодашуда барин параллелепипеди росткунҷаи хурд бурида гирифта шудааст. Дар асоси маълумоти додашуда ҳаҷми ҷисми ҳосилшударо ёбед.

272. Ҳаҷми пирамидаи дар расми 71 тасвиршударо ёбед.

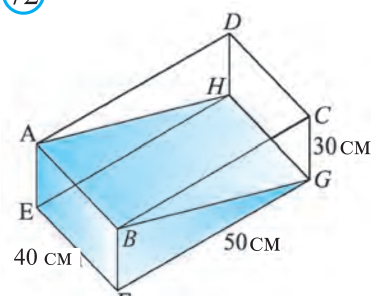
70



71



72

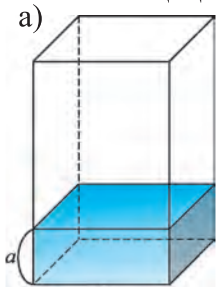


273*. Аквариуми шакли параллелепипеди росткунҷадори дар расми 72 тасвирёфта чӣ қадар об дорад?

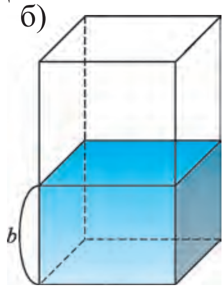
274*. Ба аквариумҳои якхелаи параллелипипедҳои росткунҷа дар расми 73 нишондода барин ба сатҳҳои гуногун об рехтаанд. Нисбати ҳаҷмҳои оби ба ин аквариумҳо рехта чӣ гуна мешавад?

73

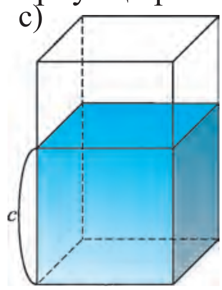
а)



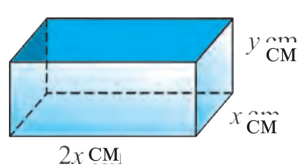
б)



с)



74



275*. **Таткиқот.** Корхона қуттиҳои болокушоди шакли параллелепипеди росткунҷадори ғунҷоишаш 1 литр, андозаҳои нисбии асосаш 1:2 ро истеҳсол карданист (расми 74). Барои истеҳсоли кам-харҷи қуттӣ, яъне барои аз ҳама кам шудани маҳсулоти ба он сарфшаванда андозаҳои он бояд чӣ гуна бошад? (Ба x қиматҳои гуногун дода, ҳаҷми кутиро ёбед ва бо муқоиса онҳоро ҳал карда бинед, ёки аз имкониятҳои ҳисоби дифференсиалӣ истифода баред).

276*. **Вазъияти муаммодор.** Геологҳо санги қимматбаҳо ёфтанд ва ҳаҷми онро бошад тахминан муайян карданианд. Онҳо дар соҳили кӯл истодаанд ва дар ихтиёри онҳо зарфи калони металии санг меғунҷида, якчанд сатилҳои ғунҷоишашон номаълум ва зарфи шишагини ғунҷоишаш 1 литр ҳаст. Геологҳо ин корро чӣ гуна ӯҳда мекунанд?

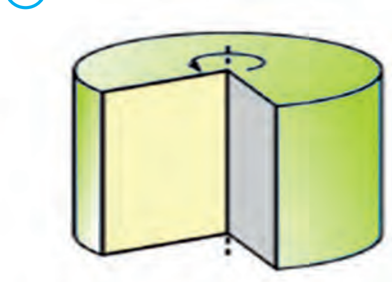
8. САТҲ ВА ҲАҶМИ СИЛИНДР

8.1. Сатҳи силиндр

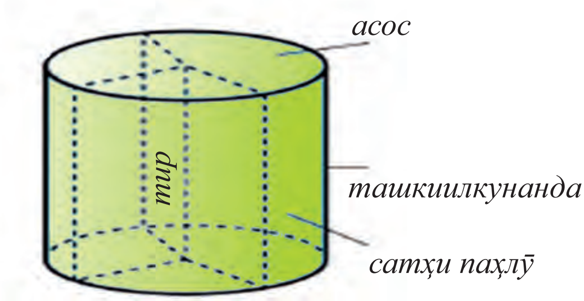
Яке аз сифатҳои муҳими шаклҳои фазо – ҷисмҳои чархзанӣ аст. Силиндр яке аз ҷисмҳои чархзанӣ буда, бо он дар синфҳои поёнӣ шинос шуда будед. Хосиятҳои он бо хосиятҳои призма монанд аст, аз ҳамин сабаб онҳоро паиҳам меомӯзем.

Ҷисме, ки дар натиҷаи чархзанӣ дар атрофи яке аз тарафҳои чоркунҷаи рост ҳосил мешавад силиндр (саҳеҳтараш, силиндри рости гирд) меноманд (расми 75). Дар ин чархзанӣ як тарафи чоркунҷаи рост беҳаракат мемонад. Онро *тири силиндр* мегӯянд. Тарафи ба ин тарафи чоркунҷа муқобил хобидаи аз чархзании сатҳ ҳосилшуда – *сатҳи паҳлӯи силиндр*, худи тараф бошад *ташкилдиҳандаи силиндр* номида мешавад. Тарафҳои боқимондаи чоркунҷа дар ин чархзанӣ ду доираи баробар ҳосил мекунанд, ки, онҳоро *асосҳои силиндр* меноманд (расми 76).

75



76

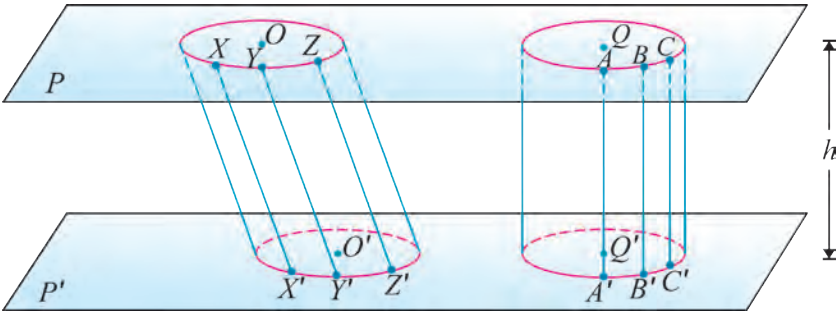


Ёдрас. Ҷисми аз чархзании атрофи як тарафи чоркунҷаи рост ҳосил мешавад дар асл *силиндри рости гирд* меноманд. Мафҳуми силиндр бошад ба маънои васеъ чунин дохил мешавад.

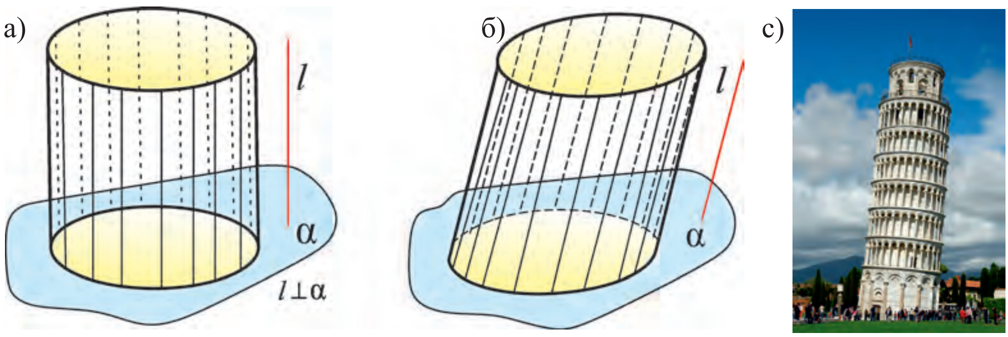
Фарз намоем, дар фазо ягон шакли ҳамвори F_1 дар як параллелкӯчонӣ ба шакли F_2 гузарад. Ҷисмеро, ки ин ду шакл ва дар параллелкӯчонии мазкур нуктаҳои ба ҳамдигар гузаранда аз буриши пайвасткунанда иборат аст *силиндр* номида мешавад (расми 77).

Агар кӯчиши параллел ба шакли ҳамвории пахни F_1 перпендикуляр бошад, силиндр *силиндри рост* (расми 78) аст, дар ҳолати акс *силиндри моил* (расми 78.б) меномем. Минораи Пиза, ки дар расми 78.с тасвир ёфтааст дар шакли силиндри моил аст.

77



78



Агар шакли F_1 аз доира иборат бошад, силиндрро *силиндри гирд* меноманд.

Силиндри гирди рост ҷисми чархзанӣ мешавад. Дар оянда бо силиндрҳои гирди рост кор мебарем ва онҳоро кӯтоҳакак силиндрҳо меномем.

Асосҳои силиндр аз доираҳои байни худ баробар иборат буда, онҳо дар ҳамвориҳои параллел мехобанд. Перпендикуляри аз нуқтаи як асоси силиндр ба асоси ҳамвории дуюм фаровардаро *баландии* он меноманд.

Масофаи мобайни ин ҳамвориҳои параллел ба баландии силиндр баробар мешавад. Тири силиндр баландии он ҳам аст.

Ташкилкунандагони силиндр бошанд байни худ параллел ва баробар мешаванд. Инчунин, ташкилкунандагони тири силиндр ва дарозии баландӣ байни худ баробар мешаванд.

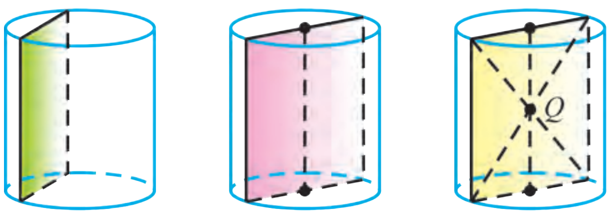
Аз буриши силиндр бо тири ба он параллели ҳамворӣ ҳосилгардида буриши чоркунҷаи рост иборат мешавад (расми 79.а). Ду тарафи он ташкулкунандагони силиндр, ду тарафи боқимонда бошад ба таври мувофиқ ба асосҳо хорда (ватар)ҳои параллеланд.

Хусусан, *тири буриш* ҳам чоркунҷаи рост мешавад. Он бурриши аз тири силиндр бо воситаи бурриши ҳамворӣ ҳосилшаванда аст (расми 79.б).

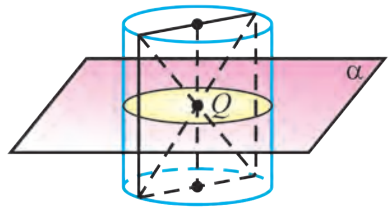
Диагоналҳои бурриши тири ташкилкунандаи маркази асос аз миёнаи бурриши нуқтаи Q мегузарад. Барои ҳамин ҳам, ин нуқтаи Q аз маркази симметрияи силиндр иборат мешавад (расми 79.с).

Ҳамвории ба тири силиндр перпендикуляр аз нуқтаи Q гузаранда аз ҳамвории симметрии силинд иборат мешавад (расми 80). Ҳамвориҳои аз тири силиндр гузаранда ҳам симметрияи ҳамвориҳои он мешавад (расми 81).

79 а) б) с)



80



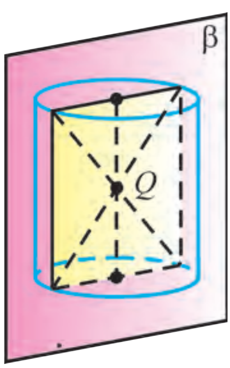
Масъалаи 1. Масоҳати бурриши тири силиндр аз квадрати ба Q баробар иборат аст. Масоҳати асоси силиндрро ёбед.

Ҳал. Тарафҳои квадрат ба $\sqrt{Q}$ баробар. Он ба диаметри асоси силиндр баробар аст. Дар он масоҳати асоси силинд ба: $S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$ баробар. □

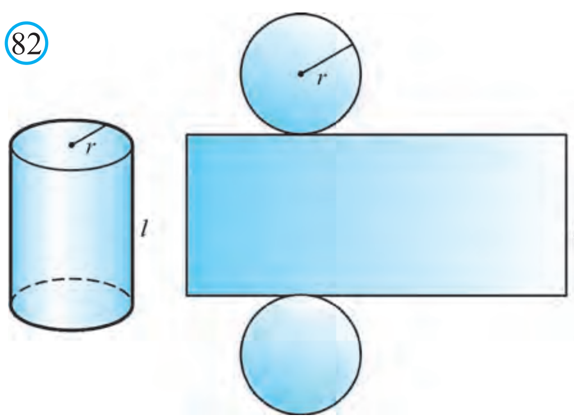
Теорема. Масоҳати сатҳи паҳлӯи силиндр ба ҳосили зарби дарозии давра асос бар баландиаш баробар аст: $\boldsymbol{S_{паҳлӯ} = 2\pi rl}$.

Теоремаи мазкурро дар асоси расми 82 мустақилона исбот намоед.

81



82



Натиҷа. Сатҳи пурраи силиндр бо сатҳи паҳлӯяш ба суммаи масоҳати ду асос баробар аст: $S_{пурра} = S_{паҳлӯ} + 2S_{асос}$ ёки

$$S_{пурра} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(l + r).$$

Силиндри ихтиёрӣ дода шуда бошад. Ба яке аз асосҳои он бисёркунҷаи $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ -ро мекашем (расми 83). Бо воситаи қуллаҳои бисёркунҷаи $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ ва A_n, ба силиндри A_1B_1, A_2B_2, ..., ташкилдиҳандагони $A_{n-1}B_{n-1}$ ва A_nB_n ро мегузаронем ва қуллаҳои дигари ташкилдиҳандаи $B_1, B_2, ..., B_{n-1}$ ва B_n -ро бо буришҳои пайдарпай мепайвандем. Дар натиҷа призмаи $A_1A_2...A_{n-1}A_n\ B_1B_2...B_{n-1}B_n$ -ро ҳосил мекунем. Ин призмаи додашударо *призмаи ба силиндр дарункашида* меноманд. Силиндр бошад *силиндри ба призма берункашидаи* номида мешавад. Агар призма ба даруни силиндр кашида бошад, дар он асоси призма ба асоси силиндр дарункашида мешавад ва теғаҳои паҳлӯи призма дар сатҳи паҳлӯи силиндр мехобад.

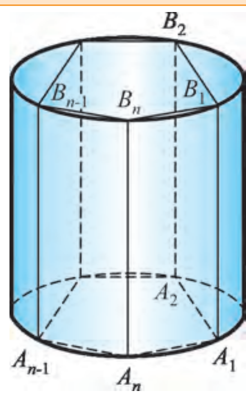
Аён аст, ки агар ба асоси призма давраи беруна кашидан мумкин бошад, ба призма ҳам силиндри беруна кашидан мумкин аст.

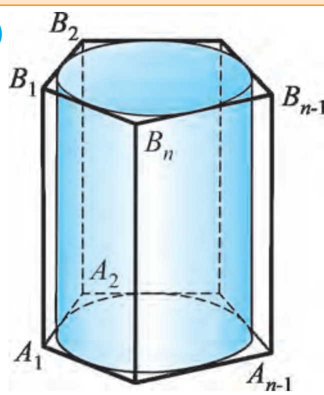
Ба ин монанд мафҳуми *призмаи ба силиндр дарункашида* ва *силиндри ба призма берункашида* ҳам дароварда мешавад (расми 84). Агар призма ба силиндр дарункашида бошад, дар он асоси призма ба асоси силиндр берункашида мешавад ва рӯяҳои паҳлӯи призма ба сатҳи паҳлӯи силиндр мерасад.

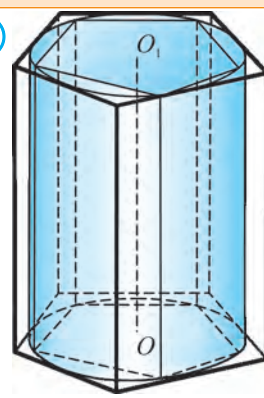
Аён мешавад, ки агар ба асоси призма давраи берун кашидан мумкин бошад ба призма ҳам силиндри берун кашидан мумкин аст.

8.2. Ҳаҷми силиндр

Теорема. Ҳаҷми силиндр ба масоҳати асос ва ҳосили зарби ташкилдиҳанда баробар аст: $V = S_{асос} \cdot l.$

83


84


85


Исбот. Силиндри тираш OO_1 дода шуда бошад (расми 85).

Ба он призмаҳои дохилии $A_1A_2 ... A_{n-1}A_n\,B_1B_2 ... B_{n-1}B_n$ ва берунии C_1

$C_2 \ldots C_{n-1} C_n\ D_1 D_2 \ldots D_{n-1} D_n$ мекашем. Ҳаҷми силиндр V, ҳаҷми призмаҳои дохил ва берунро бо V_1 ва V_2 ишора кунем, дар он нобаробарии ҷуфти $V_1 < V < V_2$ бамаврид мешавад. Ҳаҷми призмаҳо аз формулаҳои зерин ёфта мешавад:

$$V_1 = S_{A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n} \cdot l \qquad \text{ва} \qquad V_2 = S_{C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n} \cdot l$$

Шумораҳои тарафҳои асосҳои призма n – ро торафт зиёд менамоем. Он вақт ҳаҷми призмаи дарункашида калон шуда меравад, ҳаҷми призмаи берункашида кам мешавад. Агар шумораи тарафҳо n беохир калон шавад, фарқи миёни ин ҳаҷмҳо ба нол майл мекунад. Ба силиндр ҳаҷми призмаҳои дохила ва берунаи кашида наздик шавад, ба сифати ҳаҷми силиндри диҳандаи адад гирифта мешавад.

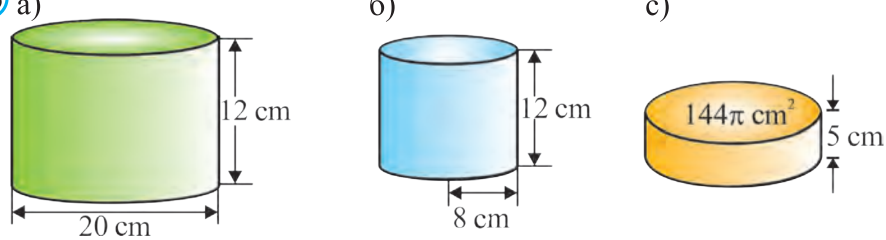
Дар ин ҷарайён масоҳати бисёркунҷаҳои $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ ва $C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n$ ба масоҳати давраи дар асоси силиндр хобида S наздик мешавад.

Яъне, $V = S_{\text{асос}} \cdot l$. $\square$

Масъалаҳо доир ба мавзӯъ ва супоришҳои амалӣ

277. Сатҳи паҳлӯ ва пурраи силиндри дар расми 86 овардашударо ёбед.

86



278. Радиуси асоси силиндр 6 см, баландии он 4 см. Масоҳати буриши тири силиндрро чен кунед.

279. Радиуси асоси силиндр 2 м, баландиаш 3 м. Диогонали буриши тирро ёбед.

280. Масоҳати асоси силиндр 64 π см^2, баландии он 8 см. Масоҳати буриши тири силиндрро чен кунед.

281. Буриши тири силиндр – ба масоҳати Q квадрати баробар. Масоҳати асоси силиндрро ёбед.

282. Масоҳати буриши тири силиндр аз квадрати 36 см^2 иборат аст. . Масоҳати сатҳи паҳлӯи силиндрро ҳисоб кунед.

283. Масоҳати буриши тири силиндр ба 4 баробар. Масоҳати сатҳи паҳлӯи онро ёбед.

284. Баландии силиндр 6 см, радиуси асос 5 см. Ба тири силиндр дар ҳолати параллел аз он дар масофаи 4 см масоҳати буриши гузаронидаро ёбед.

285. Радиуси асоси силиндр ба 2, баландиаш ба 3 баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлӯи силиндрро ёбед.

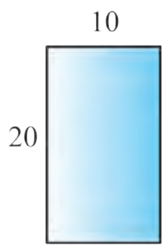
286. Дарозии давраи асоси силиндр ба 3π, баландиаш ба 2 баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлӯи силиндрро ёбед.

287. Сатҳи паҳнкунандаи силиндр 24π дм^2, баландии силиндр 4 дм. Радиуси асоси онро ёбед.

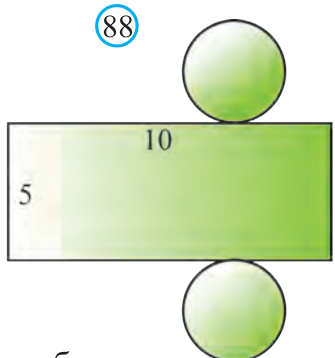
288. Радиуси асоси силиндр 5 см, баландии он 6 см. Диагонали буриши тири силиндрро ёбед.

289. Баландии силиндр 8 дм, радиуси асос 5 дм. Силиндр бо ҳамворӣ чунон бурида шудааст, ки аз буриш квадрат ҳосил шудааст. Аз ин буриш масофаи то тири силиндр бударо ёбед.

87



88



290*. Дар расми 87 мувофиқи тири буриши силиндри додашуда, масоҳати сатҳи паҳлӯ ва пурраи онро ёбед.

291*.Дар расми 88 мувофиқи паҳнкунандаи силиндри додашуда, масоҳати сатҳи паҳлӯ ва пурраи онро ёбед.

292. Радиуси асоси силиндр 3 см, баландиаш бошад аз радиуси асос 2 см зиёд. Ҳаҷми силиндрро чен кунед.

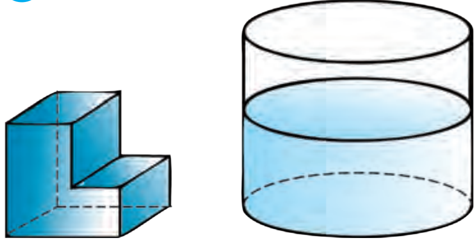
293. Ҳаҷми силиндр $64\ \pi$ см^3, баландиаш 4 см. Масоҳати асоси силиндрро чен кунед.

294*.Ҳангоми ба зарфи силиндршакли 2 литр об рехтан сатҳи об 12 см -ро ташкил намуд. Ба зарф ҷисмро андозем сатҳи об боз ба 9 см боло мешавад. Ҳаҷми ҷисмро муайян кунед ва ҷавобро бо см^3 ифода намоед.

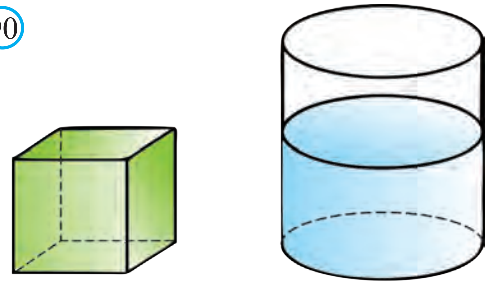
295. Ҳангоми ба зарфи силиндршакл 3 литр об андохтан сатҳи об 15 см ро ташкил намуд (расми 89). Ба зарф ҷисмро андозем сатҳи об боз ба 4 см боло мешавад. Ҳаҷми ҷисмро муайян кунед ва ҷавобро бо см^3 ифода намоед.

296*. Ба зарфи силиндршакл 4 литр об андохтанд сатҳи об 20 см ро ташкил намуд (расми 90). Ба зарф ҷисмро андозем сатҳи об боз ба 5 см боло мешавад. Ҳаҷми ҷисмро муайян кунед ва ҷавобро бо см^3 ифода намоед.

89



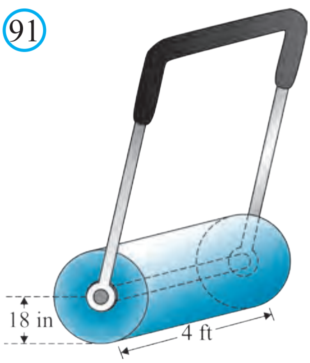
90



297*.Дар расми 91- ускунаи роҳҳамворкунандаи силиндршакл тасвир ёфтааст. Аз маълумоти дар расм додашуда истифода бурда,муайян намоед, ки он ҳангоми як маротиба чарх задан чӣ қадар роҳро ҳамвор мекунад. (Ёдрас: 1 ft (фут) = 12 in. (дюм) = 30,48 см).

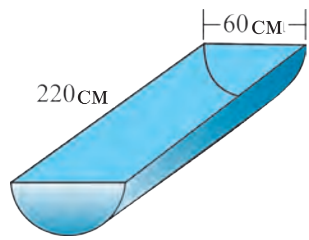
298*.Диаметри дохили қубури резинаи барои обпошӣ мувофиқшудаи дар расми 92 буда 3 см, диаметри берунааш 3,5 см, дарозиаш 20 м бошад, ба он чанд литр об рафтанашро ёбед. Агар зичии резин 7 г/см^3 буданаш маълум бошад, вазни ин банди қубури резиниро ёбед.

91



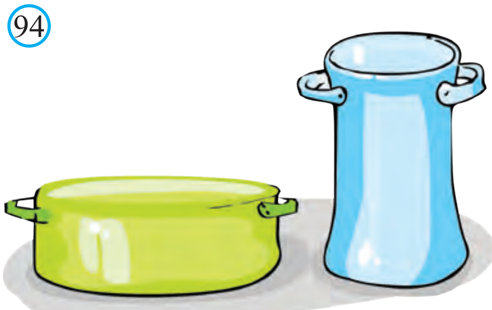
92

93



299*. Дар расми 93 зарфи сатҳи паҳлӯяш нимсилиндршакл дода шудааст. Агар барои ранг кардани масоҳати 1 см^2 сатҳи зарф 6 г ранг сарф шавад, барои қисми берун ва даруни онро ранг кардан чӣ миқдор ранг лозим мешавад.

94



95

96

300*. Яке аз зарфҳои шакли силиндр дошта аз дуюмаш ду баробар васеъ, лекин се маротиба пасттар аст (расми 94). Ғунҷоиши кадоме аз ин зарфҳо зиёд аст?

301*. Асосҳои зарфи шарбати апелсини силиндршакл, ки радиуси асосаш 5 см, баландиаш 20 см аст аз металл, сатҳи паҳлӯяш бошад аз картон сохта шудааст (расм 95). Агар нархи 1 см^2 металл 5 сӯм, нархи 1 см^2 картон 2 сӯм бошад, барои сохтани ин зарф чанд сӯмина маҳсулот даркор мешавад? Ба зарф чӣ қадар шарбат меғунҷад?

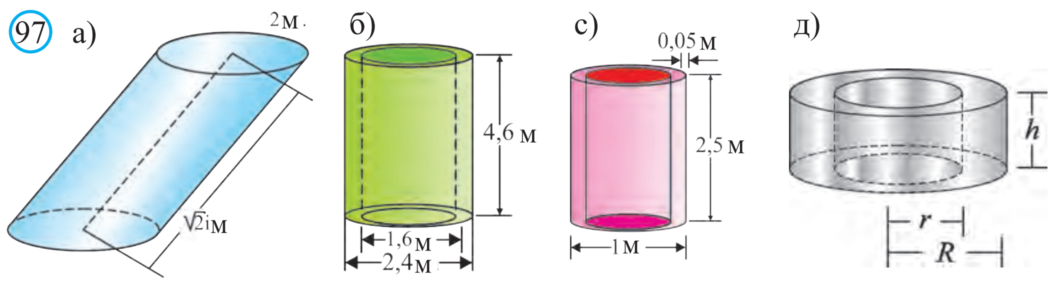
302*. Зарфи консерваи силиндиршакл, ки радиуси асосаш 1,5 дюм, баландиаш бошад 4,25 дюм дода шудааст (расми 96). Сатҳ ва ҳаҷми зарфро ёбед. Агар нархи 1 см^2 металл 5 сӯм бошад, барои сохтани ин зарф маҳсулоти чандсӯма лозим мешавад? (Ёдрас: 1 in. (дюм) = 2,54 см.)

303*. Баландии зарфи нефтнигоҳдорӣ (систерна) 16 фут, радиуси асос 10 фут буда, силиндршакл аст. Агар 1 куб фут аз 7,5 галлон баробар бошад, ғунҷоиши ин систернаро ба ҳисоби галонҳо муайян кунед. (Ёдрас: 1 галлони америкоӣ = 3,785 литр. 1 баррели америкоӣ = 42 галлони америкоӣ = 159 литр.)

304*. Зарфи сӯзишворинигаҳдории фермер силиндршакл аст. Баландии он 6 фут, радиуси асос 1,5 фут. Ғунҷоиши бакро бо галлонҳо ёбед.

305. Аз маълумоти расми 97 истифода бурда ҳаҷми ҷисмҳои фазовии тасвиршударо муайян кунед.

97

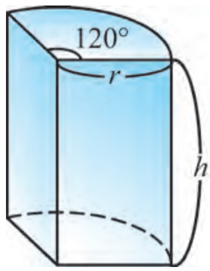


306*. Ба зарфи силиндршакл 6 см^3 об андохтанд. Ба оби зарф детал ҷойгир карданд, ҳаҷми об 1,5 маротиба балнд шуд. Ҳаҷми деталро муайян кунед ва ҷавобро бо см^3 ифода намоед.

307*. Сатҳи оби зарфи силиндршакл 16 см. Ба даруни ин зарф зарфи диаметри асосаш аз он ду маротиба хурдбудаи силиндршаклро гузорем он вақт сатҳи об чӣ қадар мешавад?

308. Ҳаҷми силиндри якум 12 м^3. Баландии силиндр дуюм аз якумӣ дида 3 маротиба бузург, асоси радиус бошад 2 маротиба хурд. Ҳаҷми силиндри дуюмро ёбед.

98

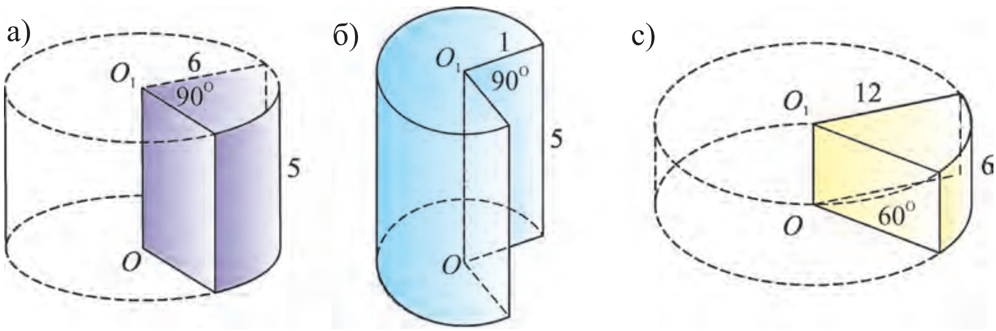


309*. Зарфи шакли силиндрдошта аз дуюмаш 2 баробар баланд, лекин 1,5 маротиба васеътар аст. Нисбати ҳаҷми ин зарфҳоро чен кунед?

310. Ҳаҷми ҷисми фазовии дар расми 98 тасвиршударо ёбед .

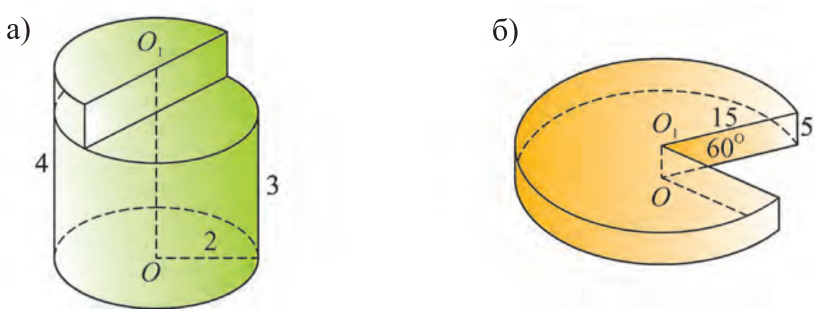
311. Ҳаҷми порчаи силиндри дар расми 99 тасвиршударо ёбед

99



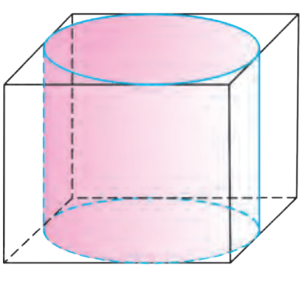
312. Ҳаҷми порчаи силиндри дар расми 100 тасвиршударо ёбед.

100

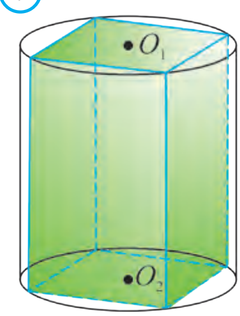


313. Радиуси асоси параллелепипеди росткунҷа ва силиндри баландиаш ба 1 баробар берункашидаанд (расми101). Ҳаҷми параллелепипедро ёбед.

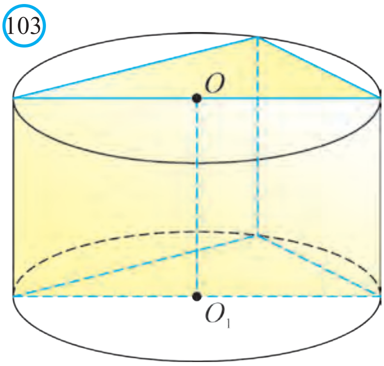
101



102



103



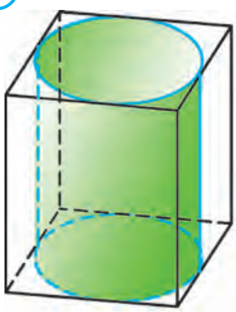
314. Ба параллелепипеди росткунҷаи асосаш радиусаш ба 4 баробар буда силиндри беруна кашида шудааст (расми 102). Ҳаҷми параллелепипед ба 16 баробар бошад, баландии силиндрро ёбед.

315. Асоси призмаи рост аз секунҷаҳои кунҷҳои росташ 6 ва 8 катетдошта иборат, теғаҳои паҳлӯ бошад ба 5 баробар аст (расми 103). Ҳаҷми силиндри ба ин призма берункашидаро ёбед.

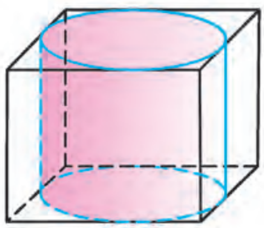
316. Асоси призмаи рост – аз квадрати тарафаш ба 2 баробар иборат, теғаҳои паҳлӯ бошад ба 2 баробар. Ҳаҷми силиндри ба ин призма берункашидаро ёбед.

317. Ба силиндри 2 баробари радиуси асоси призмаи чоркунҷаи ростбуда беруна кашидаанд (расми 104). Масоҳати сатҳи паҳлӯи призма ба 48 га баробар бошад, баландии силиндрро ёбед.

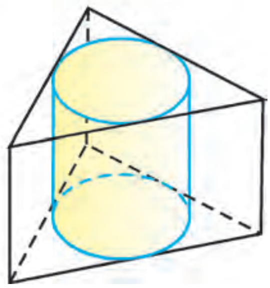
104



105



106

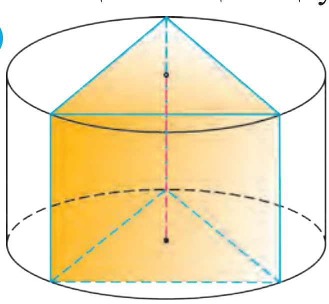


318. Ба силиндри радиуси асосаш призмаи чоркунҷаи мунтазам ва баландиаш ба 1 баробар буда, беруна кашида шудааст (расми 105). Масоҳати сатҳи паҳлӯи призмаро ёбед.

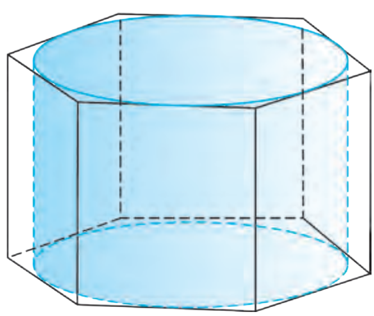
319. Ба силиндри радиуси асоси призмаи рости секунҷааш ба $\sqrt{3}$ ва баландиаш ба 2 баробар буда беруна кашида шудааст (расми 106). Масоҳати сатҳи паҳлӯи призмаро ёбед.

320. Ба силиндри радиуси асоси призмаи секунҷаи мунтазамаш ба 2 $\sqrt{3}$ ва баландиаш ба 2 баробар буда дарун кашида шудааст (расми 107). Масоҳати сатҳи паҳлӯи призмаро ёбед.

107



108



321. Ба силиндри радиуси асоси призмаи мунтазами шашкунҷаи ба $\sqrt{3}$ ва баландиаш ба 2 баробар буда, беруна кашида шудааст (расми 108). Масоҳати сатҳи паҳлӯи призмаро ёбед.

322*. Ҳаҷми детали дар расми 10 тасвиршударо ёбед.

323*. Барои сатҳи берунаи қубури силиндршакли дарозиаш 10 м, диаметри асосаш 1 м бударо ба ғафсии 1 мм ранг кардан чӣ қадар ранг даркор мешавад?

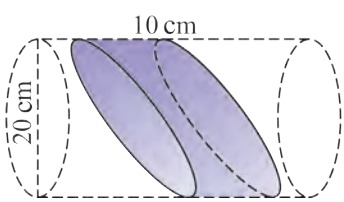
324*. Қубури яккаҷаи дар расми 110 тасвиршударо: а) масоҳати сатҳи паҳлӯяшро; б) ҳаҷмашро ёбед ($\pi \approx 3$ гуфта гиред).

325*. Дарозии чӯянқубур 2 м, диаметри берунааш 20 см. Ғафсии девори қубур 2 см ва зичии нисбии чӯян 7,5 г/см^3 бошад, вазни онро ёбед.

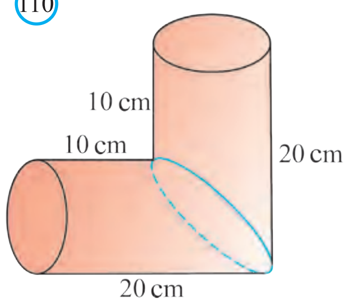
326*. Аз расми 111 истифода бурда, барои силиндри моил бамаврид будани баробарии $S \cdot h = Q \cdot l$ -ро асоснок намоед.

327*. Аз сатҳи силиндри дар расми 112 тасвиршуда, дарозии наздиктарини роҳи аз нуқтаи A то нуқтаи B -ро ёбед. (Нишондод: Аз паҳншавии силиндр истифода баред.)

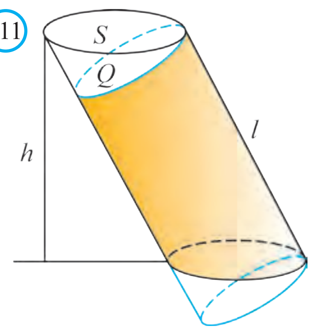
109



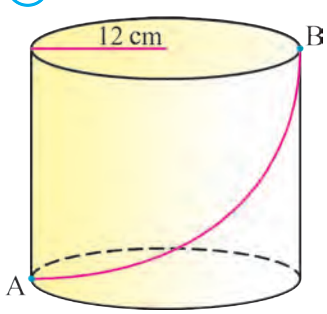
110



111



112



Маълумоти таърихӣ

Абӯ Райҳон Берунӣ дар қисми ба геометрия бахшидаи асари машҳураш "Китоби маълумоти ибтидоӣ аз санъати Астрономия" (ба таври кӯтоҳ "Астрономия") ба сифати ба стереометрия ворид шудан чунин таърифҳои шаклҳои фазоиро меорад.

Абӯ Алӣ ибни Сино

Куб – шакли ҷисмдор бада, ба донаҳои шатранҷ монанд аст, аз шаш тарафаш бо шаш квадрат иҳота шудааст.

Призма – шакли муҷассамёфта буда, аз тарафи паҳлӯ бо ҳамвориҳои шакли квадрат ёки чоркунҷаи рост аз боло ва поён бо ду секунҷа иҳота шудааст.

Дар ин таърифи додаи Берунӣ ҳолати хосаи призма, яъне таърифи призмаи секунҷа оварда шудааст.

Китоби "Қонуни Масъудӣ"-и Абӯ Райҳон Берунӣ дар соли 1037 навишта шуда, дар он қоидаҳои ёфтани ҳаҷмҳои параллелепипед, призма ба тарзи:"Агар ҷисм чоркунҷа набуда, дигаргуна бошад, андозаи он чунин аст: масоҳати онро бидон, онро бо амиқӣ (чуқурӣ) зарб намо, дар натиҷа ҳаҷм ҳосил мешавад" дода шудааст.

Ғиёсиддин ал Кошӣ

Абӯ Алӣ ибни Сино дар боби "Ибтидо доир ба ҷисмҳои геометрӣ" -и асари машҳураш "Донишнома" таърифи ҷисм ва призмаи секунҷаро меорад ва шартҳои байни ҳам баробар шудани ду призмаро баён мекунад. Ибни Сино призмаро чунин таъриф медиҳад: "Призма ҷисмест, ки аз ду шакли ҳамвори секунҷа ва бо се шакли ҳамвори тарафҳояш байни худ параллел иҳота шудааст".

Ғиёсиддин Ҷамшед ибн Масъуд ал Кошӣ дар асари худ "Китоби ҳисоб" қоидаҳои зиёдеро доир ба ҳисоби масоҳати сатҳҳо ва ҳаҷмҳои ҷисмҳо овардааст. Ӯ аз сабаби он ки математика, геометрия, тригонометрия, механика ва астрономия барин фанҳоро амиқ медонист ба ҳурмату эътибори Улуғбек сазовор шуд. Ал Кошӣ дар қатори бисёркунҷаҳо, призмаҳо, пирамидаҳо, силиндрҳо, конусҳо, конусҳои сарбуридаро ҳам тадқиқ кардааст.

МАШҚҲОИ АМАЛӢ ДОИР БА ТАКРОРИ БОБИ 9

9.1. Санҷиши тестии 2

1. Куб чанд ҳамвории симметрӣ дорад?

А) 8; Б) 9; С) 7; Д) 10.

2. Агар масоҳати буриши диагонали куб ба $2\sqrt{2}$ баробар бошад, ҳаҷми онро ёбед.

А) $2\sqrt{2}$; Б) $\sqrt{7}$; С) $4\sqrt{2}$; Д) $5\sqrt{2}$.

3. Тарафҳои асоси параллелепипеди росткунҷа 7 см ва 24 см аст. Баландии параллелепипед 8 см. Масоҳати буриши диагоналро ёбед.

А) 168; Б) 1344; С) 100; Д) 200.

4. Диагонали призмаи чоркунҷаи мунтазам ба 4 баробар буда, бо рӯя кунҷи 300°- и ташкил менамояд. Сатҳи паҳлӯи призмаро ёбед.

А) $16\sqrt{2}$; Б) 16; С) 18; Д)$18\sqrt{2}$.

5. Тарафи аоси призмаи чоркунҷаи мунтазам ба $\sqrt{2}$, кунҷи миёни бо рӯяи рост диагонал бошад ба 300 баробар. Ҳаҷми призмаро ёбед.

А) $8\sqrt{2}$; Б) 4; С) 16; Д) $4\sqrt{2}$.

6. Ҷамъи теғаҳои призма 36 то бошад, он чандто рӯяи рост дорад?

А) 12; Б) 16; С) 9; Д) 10.

7. Теғаи рост призмаи моил ба 20 баробар ва бо ҳамвории асос кунҷи 300° - и ҳосил мекунад. Баландии призмаро ёбед.

А) 12; Б) $10\sqrt{3}$; С) 10; Д) $10\sqrt{2}$.

8. Тарафҳои асоси призмаи рости секунҷа ба 15, 20 ва 25, теғаи рост ба баландии асос баробар. Ҳаҷми призмаро ёбед.

А) 600; Б) 750; С) 1800; Д) 1200.

9. Диагонали калонтарини призмаи шашкунҷаи мунтазам ба 8 баробар ва он бо теғаи рост кунҷи 300°-и ҳосил мекунад. Ҳаҷми призмаро ёбед. А) 72; Б) 64; С) 76; D) 80.

10. Агар масоҳати буриши тир ба 10 баробар бошад, масоҳати сатҳи паҳлӯи силиндро ёбед.

А) 10π; Б) 20π; С) 30π; Д) 15π.

11. Баландии силиндр ба 8 диагонали паҳншавии сатҳи рост ба 10 баробар аст. Масоҳати сатҳи паҳлӯи силиндро ёбед.

А) 48; Б) 48π; С) 24; Д) 48π.

12. Чоркунҷаи рости тарафҳояш ба 2 ва 4 баробар дар атрофи бузургии худ чарх зад. Сатҳи пурраи ҷисми ҳосилшударо ёбед.

А) 22π; Б) 23π; С) 24π; Д) 20π.

13. Масоҳати сатҳи паҳлӯи силиндр ба 72 π баробар ва дар паҳншавии он чоркунчаи рости ҳосилшуд бо асоси диагонал кунҷи 45° ташкил мекунад. Асоси радиуси силиндрро ёбед.

А) 5; Б) 4; С) 6; Д) 8.

14. Агар радиуси асоси силиндрро ду маротиба зиёд намоем, ҳаҷми он чанд маротиба меафзояд?

А) 4; Б) 2; С) 3; Д) 6.

15. Ҳаҷми силиндр ба 120π, сатҳи паҳлӯӣ ба 60π баробар. Радиуси асоси силиндрро ёбед.

А) 4; Б) 5; С) 6; Д) 4; 2.

16. Баландии силиндр ба 5, тарафи секунҷаи мунтазами ба асос дарункашида ба $3\sqrt{3}$ баробар. Ҳаҷми силиндрро ёбед.

А) 25π; Б) 35π; С) 45π; Д) 40π.

17. Диагонали тири буриши силиндр аз 12 квадрати баробар иборат аст. Ҳаҷми онро ёбед.

А) $108\sqrt{2}\pi$; Б) $54\sqrt{2}\pi$; С) $36\sqrt{2}\pi$; Д) $216\sqrt{2}\pi$.

18. Сатҳи пурраи силиндр ба 24π, сатҳи паҳлӯяш бошад ба 6π баробар. Ҳаҷми ҳамин силиндрро ёбед.

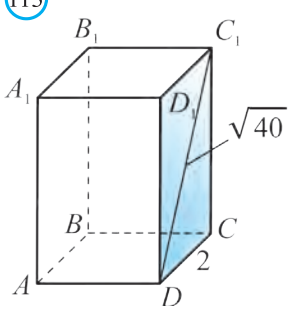
А) 7π; Б) 11π; С) 8π; Д) 9π.

9.2. Масъалаҳо

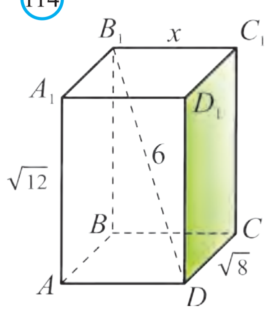
328. Дар параллелепипеди росткунҷа $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (расми 113) $DC_1=\sqrt{40}$, $DC=2$, $P_{ABCD}=10$. Диагонали параллелепипедро ёбед.

329. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеди росткунҷа. Мувофиқи маълумоти расми 114 дарозии теғаи B_1C_1 -ро ёбед.

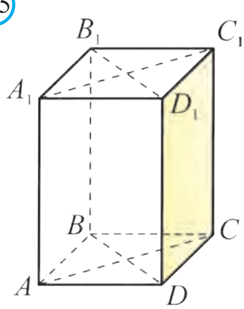
113



114

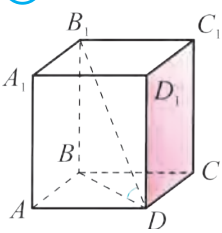


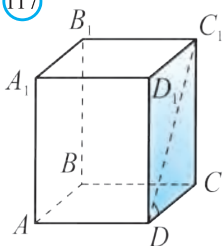
115

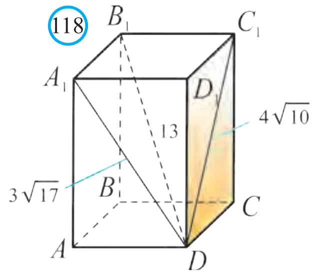


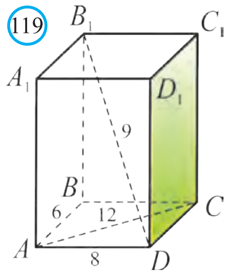
330. Асоси призмаи рост ромби $ABCD$ аст (расми 115). Масоҳати буришҳои диагонали призма ба 60 ва 80, баландиаш бошад ба 10 баробар аст. Сатҳи паҳлӯи призмаро ёбед.

331. Асоси призмаи рост ромби $ABCD$ аст. Масоҳати буришҳои диагонали призма ба 24 ва 32, баландиаш бошад ба 4 баробар аст. Сатҳи паҳлӯи призмаро ёбед.

116


117


118


119


332. Призмаи мунтазами $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дар (расми116) $\angle B_1DB = 45°$, $S_{пур} = 32(2\sqrt{2}+1)$. AD -ро ёбед.

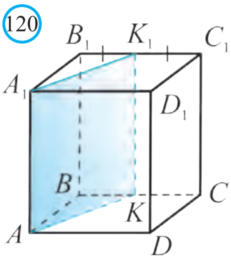
333. Призмаи мунтазами $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дар (117-расм)$\angle C_1DC = 60°$, $S_{пур} = 128(2\sqrt{3}+1)$. AD ро ёбед.

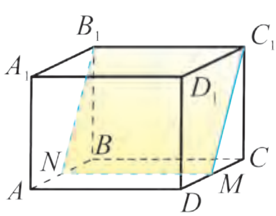
334. Параллелепипеди росткунчаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дар (расми118) $DB_1=13$, $DA_1 = 3\sqrt{17}$, $DC_1 = 4\sqrt{10}$. Масоҳати сатҳи паҳлӯи параллелепипедро ёбед.

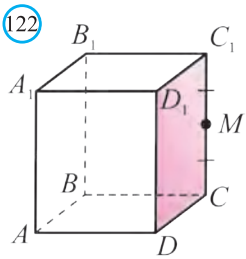
335. Параллелепипеди росткунчаи $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дар (расми 119) $AB = 6$, $AD = 8$, $DB_1 = 9$. Масоҳати сатҳи паҳлӯи параллелепипедро ёбед.

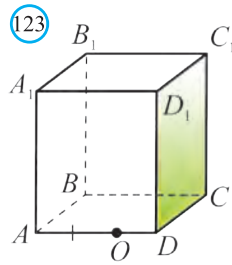
336. Нуқта K миёни теғаи BC аст(расми120). Ҳаҷми призмаи $ABKA_1B_1K_1$ -ро нисбати ҳаҷми параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ёбед.

337. Нуқтаҳои N ва M миёнаи теғаҳои параллелепипед (расми 121). Ҳаҷми призмаи $AA_1B_1NDD_1C_1M$ -ро нисбати ҳаҷми параллелепипеди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ёбед.

120


121


122


123


338. Масоҳати сатҳи паҳлӯи чоркунчаи мунтазам ба 72 см^2, масоҳати асос бошад ба 64 см^2 баробар. Ҳаҷми призмаро ёбед.

339. Параметри асоси призмаи мунтазами чоркунча 12 см, параметри рӯяи рост бошад ба18 см баробар. Ҳаҷми призмаро ёбед.

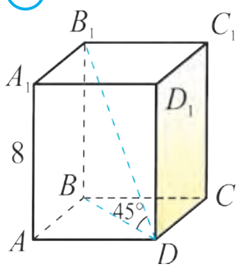
340. Куб дода шудааст (расми 122).Ҳамвории $CM = MC_1$ ва ҳамвории ADM кубро ба ду ҳисса тақсим мекунад. Ҳаҷми ҳиссаи калони кубро нисбати ҳиссаи хурди он ёбед.

341*. Куб дода шудааст (расми 123). *Ҳамвории* $AO : OD = 2 : 1$ ва BB_1O кубро ба ду ҳисса тақсим мекунад. Агар ҳаҷми ҳиссаи хурди куб ба 6 баробар бошад, ҳаҷми кубро ёбед.

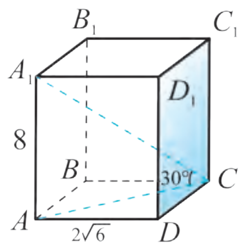
342*. Баландии призмаи мунтазами чоркунҷа ба 8, моилии ҳамвории асоси диагонал ба 45° баробар (расми124). Ҳаҷми призмаро ёбед.

343*. Тарафи призмаи мунтазами чоркунҷа ба $2\sqrt{6}$, бо ҳамвории асоси диагонали кунҷи 30°-ро ташкил мекунад (расми 125). Ҳаҷми призмаро ёбед.

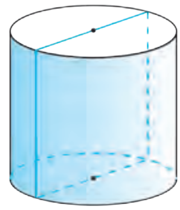
124



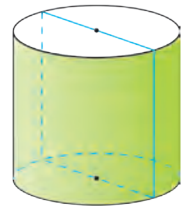
125



126



127



344. Масоҳати сатҳи паҳлӯи силиндр ба 91π баробар (расми 126). Масоҳати тири буриши силиндрро ёбед.

345. Масоҳати буриши тири силиндр квадрати ба 173 баробар аст (расми 127). масоҳати сатҳи паҳлӯи силиндрро ёбед.

346. Баландии силиндр ба 24, диагонали тири буриш ба 26 баробар. Ҳаҷми силиндрро ёбед.

347. Масоҳати буриши тири силиндр ба 10, дарозии давраи асос ба 8 баробар. Ҳаҷми силиндрро ёбед.

348. Радиуси силиндр ба 3, масоҳати сатҳи паҳлӯ ба 200 баробар. Ҳаҷми силиндрро ёбед.

9.3. Намунаи кори назоратии 2

1. Нуқтаи *A* -и кунҷи дурӯя аз теғаи он 10 см, аз рӯяаш дар 5 см дуртар ҷой гирифтааст. Ченаки радиуси кунҷи дурӯяро ёбед.

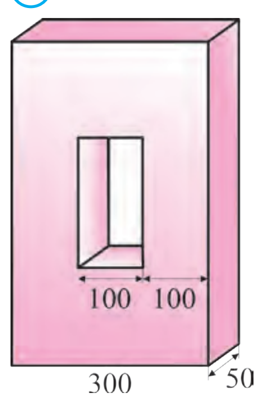
2. Тамоми теғаҳои призмаи мунтазами шашкунҷа ба 2 баробар бошад, масоҳати сатҳи пурраи онро ёбед.

3. Систернаи силиндршакли диаметри асосаш 18 м ва баландиаш 7 м буда бо нефт пур аст. Агар зичии нефт 0,85 г/см^3 бошад, вазни нефти ин систерна чанд тонна аст?

4. Ҳаҷми силиндри дарункашидаи призмаи шашкунҷаи мунтазамро, ки ҳар як теғаи он ба 4 см баробар аст ёбед.

5. (Масъалаи иловагӣ барои донишомӯзони дарсро хуб *аз бар карда*.) Ҳаҷм ва сатҳи пурраи детали андозаҳояш бо мм -ҳо дар расми 128 бударо ёбед.

128



Ҷадвали қимматҳои тақрибии функсияҳои тригонометрӣ

A	sin *A*	тг *A*	*A*	sin *A*	тг *A*	*A*	sin *A*	тг *A*
0°	0	0	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

Ҷавобҳо

Ҷавобҳои боби 1

3. $A(5; 7; 10)$, $B(4; –3; 6)$, $C(5; 0; 0)$, $D(4; 0; 4)$, $E(0; 5; 0)$, $F(0; 0; –2)$. **6.** (3; 2; 0), (3; 0; 4), (0; 2; 4). **8.** $\sqrt{26}$. **9.** а) 3, 3, 3; Б) $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$; с) $3\sqrt{2}$. **10.** 2, 3, 1. **11.** (3; 3; 3), (–3; 3; 3), (3; –3; 3), (3; 3; –3), (–3; –3; 3), (–3; 3; –3), (3; –3; –3), (–3; –3; –3). **12.** $O(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $A(2; 2; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $O_1(0; 0; –2)$, $B_1(2; 0; –2)$, $A_1(2; 2; –2)$, $C_1(0; 2; –2)$. **13.** D нуқта. **14.** $3\sqrt{6}$. **15.** Yo‘q. **17.** *с)* баробарпаҳлӯ, $P=6\ (1+\sqrt{3})$, $S = 9\sqrt{2}$. **18.** (–0,25; 0,25; 0). **19.** $D_1(1; –1; 1)$, $A_1(1; 1; –1)$, $B_1(–1; 1; –1)$, $D_1(1; –1; –1)$. **21.** $x^2+y^2+z^2=25$, $x^2+y^2+z^2\leq 25$. **22.** $(x–1)^2+(y–2)^2+(z–4)^2=9$; $(x–1)^2+(y–2)^2+(z–4)^2\leq 9$. **23.** $(x+2)^2+(y–3)^2+(z–4)^2=9$. **25.** 1)(0; 1; 0); 2) (1; 1; 1); 3) (0; 0; 2), 4) (–0,7; 0,1; 0,6); 5) $(2\sqrt{3};\ 1{,}5;\ 1)$. **28.** $A(5;–4;0)$, $B(–7;5;6)$, **31**. $K\left(0;–5;\dfrac{17}{2}\right)$. **32.** а) $D(–1; –3; –9)$. **33.** *а)* $M(–1; 2; 0)$; *с)* $M(3;\frac{3}{4}; 0)$. **35.** $L(\frac{25}{8};\frac{33}{8};\frac{9}{4})$. **36.** $\frac{4\sqrt{2}}{5}$. **37**. а) $\sqrt{2}$; б) 30°; 30°; 120°; с) $2\sqrt{3}$. **38.** $MK=\frac{\sqrt{73}}{3}$. **39.** $A(5; 4; 10)$, $B(4; –3; 6)$, $C(5; 0; 0)$, $D(4; 0; 4)$. **40.** $\overline{OA}=(1; 1; 1)$, $\overline{OB}=(–1; 0; 1)$, $\overline{OC}=(0; 1; 1)$, $\overline{BO}=(1; 0; –1)$, $\overline{CO}=(0; –1; –1)$, $\overline{AB}=(–2; –1; 0)$. **42.** а) $\overline{AB}=(2; 5; 3)$, Б) $\overline{AB}=(4; –6; 2)$. **43.** $|\overline{a}|=\sqrt{3}$; $|\overline{b}|=2\sqrt{5}$, $|\overline{c}|=\sqrt{14}$, $|\overline{d}|=\sqrt{30}$. **44.** ±3. **45.** а) $\overline{a}(3; 6; –3)$, Б) $\overline{a}(–3; –6; 3)$. **46.** а) 1 ёки –1; б) 3 ёки –1; с) 2 ёки –4; d) 3 ёки 5/3. **48.** $D(–2; 0; 1)$. **50**. $n=\frac{4}{3}$; $м=\frac{3}{2}$. **52.** а) $D(3; 0; 0)$. **56.** $\overline{c}(–3; –4; 8)$, $|\overline{c}|=\sqrt{89}$; 2) $\overline{c}(4; 5; 5)$, $|\overline{c}|=\sqrt{66}$. **57.** $\overline{c}(–3; 4; 0)$, $|\overline{c}|=5$; 2) $\overline{c}(0; 2; 6)$, $|\overline{c}|=2\sqrt{10}$. **59.** $\overline{a}=\overline{i}–\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{j}–4\overline{k}$, $\overline{c}=2\overline{i}+3\overline{j}–\overline{k}$, $\overline{d}=\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k}$. **60.** $\sqrt{59}$, $\sqrt{219}$, $\sqrt{122}$, $\sqrt{918}$. **63.** $AC = AO + OC = 4i + 2k$, $AC(–4; 0; 2)$; $CB = CO + OB = 2k + 9j$, $CB\ (0; 9; 2)$; $AB = AO + OB = –4i + 9j$, $AB(–4; 7; 0)$. **65.** ≈180N. **66.** а) 60°; б) 30°; с) 90°; д) 60°; е) 45°. **67.** а) –6; б) 3; с) –6; d) 3. **68.** а) 40°; б) 140°; с) 150°. **69.** а) 30; б) 3; с) 15; д) –28. **70.** а) 1/3; б) –1; с) 2; d) 4. **71.** а) 16. **75.** а) 1; б) 0. **76.** $\overline{BF}=2(\overline{DO}–\overline{DC})$. **77.** $\frac{1}{3}(2\overline{AC}–\overline{AB})$. **78.** $\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AC})–\overline{AD}$. **83.** а) (1; –1; 7); б) (–2; 3; 1); с) (0; –4; 4). **84.** $\overline{p}(–1; 5; 3)$. **86.** $B(–8; 4; 1)$. **88.** (2; –5; 9); (–2; –2; 7); (6; –12; 2). **93.** Oxz нисбати ҳамворӣ. **100.** (0; –3; 1). **106.** а) 36 см; б) 48 см; с) 6 см; д) 4 см. **110.** а) $B(–5; 7{,}5; 12{,}5)$; б) $B(5; –7{,}5; –12{,}5)$; с) $B(–0{,}5; 0{,}75; 1{,}25)$; д) $B(0{,}5; –0{,}75; –1{,}25)$. **111.** а) $B(–2{,}5; 1; 3)$; б) $B(–7; 2; 6)$. **112.** а) $O_1(0; 0; 0)$, $A_1(–4; 0; 0)$, $B_1(0; –4; 0)$, $C_1(0; 0; –4)$; б) $O_1(–4; 0; 0)$, $A_1(4; 0; 0)$, $B_1(–4; 8; 0)$, $C_1(–4; 0; 8)$. **115.** (2;–3; 3). **116.** –3. **117.** (7; 1; 2). **118.** (1; –2; 3). **119.** (–1; –2; –3). **120.** (1; 2; –3). **121.** (–2; –3; –5). **122**. $D(0; 9;–7)$. **123.** $C(2; 0;–8)$. **124.** 19. **125.** (–7; 7; –7). **126.** (1; 2; 1). **127.** (–2; 7; 1). **128.** ±2. **129.** ±3. **130.** 13. **131.** 10. **132.** 9. **133.** 0. **134.** –2. **135.** 1. **136.** 4. **137.** 90°. **138.** 4. **139.** –4. **140.** –2; 4. **141.** $8\vec{i}+9\vec{j}–4\vec{k}$.

Ҷавоби санҷиши тестии 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
С	Д	Д	Б	Д	Б	Б	А	А	Д	Б	Б	Б	С	А	С	Б	Д

Ҷавоби кори назоратии 1

1) (1; 2; -3); 2) 13; 3) $\sqrt{2}$; 4) 90°; 5) 1.

Ҷавобҳои боби 2

142. 47°, 133°, 47°, 133°. **143.** 128°. **144.** 80°. **145.** 90°. **146.** 5 см, 5 см. **147.** 12 см. **148.** 5 см. **152.** 45°. **153.** 45°. **154.** 80°. **159.** 60°, 45°. **165.** а) 4, 10; б) 5, 12. **166.** Не. **170.** 6, куб. **171.** 15 то. **172.** 9 то. **173.** 180 то. **174.** 24 см^2. **175.** 44 см^2. **176.** 76,8 см^2. **177.** 17,64 см. **178.** $4\sqrt{3}$см^2 , 4 см. **179.** 124 дм^2. **180.** 20 м^2, 30 м^2. **181.** 8 см, 8 см. **182.** 13 см, 9 см. **184.** 4500 см^2. **185.** 7,5. **186.** 4. **187.** 480 см^2. **188.** $5\sqrt{2}$. **189.** 45 см^2. **190.** 144. **191.** а)18; б)76; с) 110; д) 132; е) 48; ё) 96; ж) 124. **192.** а) 146; б) 126; с) 108; д) 146. **193.** 84 см. **194.**$3\sqrt{2}$ см^2. **195.** 216 см^2. **196.** а) 58; Б) 62; с) 94. **197.** а) 38; б) 92; с) 48. **198.** ≈68 м^2. **199.** 104 см. **200.** 68 см^2. **201.** 78 см^2. **204.** 5120 см^3. **207.** 144. **209.** 8. **210.** 5. **211.** 6. **212.** 3. **213.** 24. **214.** 2. **215.** 8. **216.** 8. **217.** 72. **218.** 4. **219.** 27 литр. **220.** 4. **221.** 60 см^2. **222.** $\frac{(S-aБ)ab}{4(a+Б)}$.

223. 30 м. **224.** 1200. **225.** а) 4; б) 40; с) 71; d) 88; е) 18; f) 33; г) 78. **226.** а) 90; Б) 77; с) 54; d) 96. **227.** 6 м^3. **228.** а) 21; б) 26; с) 58. **230.** 6 м^3. **231.** $\sqrt{2}$ м^3. **232.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

233. $2\sqrt{\sin 3\alpha \sin^3\alpha}$. **234.** $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **235.** а) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$; б) a^2b; с) $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{4}$. **237.** 3060 м^3.

238. 3 см^3. **239.** $\frac{a^3}{8}$. **240.** $3\sqrt{3}$ м^3. **241.** 1 маротиба. **243.** 24 см^3. **245.** 12 см^3. **246.** 2 см.

247. $\frac{ac\sqrt{12a^2-3c^2}}{8}$. **248.** $\frac{h^3\sin\gamma}{2\operatorname{tr}\alpha\operatorname{tr}\beta}$. **249.** 6048 м^3/соат. **250.** 35200 м^3. **251.** 0,5 г/см^3.

252. 150 то. **253.** 42 то. **254.** 961 то. **255.** 13 то. **256.** 90 то. **257.** 3315 г.

258. 60 м^2. **259.** 24 то. **260.** 24 см^3. **261.** 1927,2 г. **262.** 1927,2 г. **263.** 960 м^3. **264.** 144 г. **265.** 19,3125 г/см^3. **266.** 440 м^3. **267.** 0,0127 м^3. **271.** $(y+w+z)yx$. **274.** $a{:}b{:}c$. **277.** 240π см^2 , 280π см^2. **278.** 48 см^2. **279.** 5 см. **280.** 128 см^2. **281.** $\pi Q/4$. **282.** 36π см^2. **283.** 4π. **284.** 36 см^2. **285.** 12π. **286.** 64. 6. **287.** 3 дм. **288.** $2\sqrt{34}$ см. **289.** 3 дм. **290.** 200π, 250π. **291.** 50, 50 +50/π. **292.** 45π см^3. **293.** 16π см^2. **294.** 1500 см^3. **295.** 800 см^2. **296.** 1000 см^2. **297.** 5574 см^2, 1824 см^2. **298.** 1375π см^3, 11,375 kг. **299.** 141900 г, 310860 см^2. **300.** Якумашро. **301.** 2041 сӯм, 15700 см^2. **302.** 349,45 см^2, 492 см^3, 1747 сӯм. **303.** 37680 галлон. **304.** 318 галлон. **306.** 3 см^3. **307.** 4 см . **308.** 9 м^3. **309.** 1,125. **311.** а) 45π; б) 3,75π; с) 144π. **312.** а) 14π; Б) 937,5π. **313.** 4. **314.** 0,25. **315.** 125π. **316.** 4π. **317.** 3. **318.** 8. **319.** 36. **320.** 36. **321.** 24. **322.** ≈30 м^3. **323.** ≈3000 см^3. **324.** а) ≈1050 см^2; б) ≈2250 см^3. **325.** ≈162 kг. **328.** 7. **329.** 4. **330.** 200. **331.** 160. **332.** 4. **333.** 8. **334.** 168. **336.** 1/3. **337.** 1/3. **338.** 144 м^3. **339.** 56 см^3. **340.** 6. **341.** 2. **342.** 256. **343.** 96. **344.** 91. **345.** 173 π. **346.** 600π. **347.** 20. **348.** 300.

Ҷавобҳои тести санҷишии 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Б	А	Д	А	Б	А	С	С	А	А	А	С	С	А	А	С	А	Д

Ҷавобҳои кори назоратии 2

1) 30^0; 2) $2\sqrt{3}$ +24; 3) 1513 l; 4) 64π см^3; 5) 35 дм^2, 6,5 дм^3.

Ёдрас. тартиби рақами масъалаҳои душвори доир ба *геометрия бо ситорача, масъалаҳои барои дар хона иҷро кардан тавсияшуда бо ранги сурх дода шудааст.*

Адабиётҳои таълимиву услубӣ ва захираҳои электоронии дар офаридани китоби дарсӣ истифодашуда ва барои омӯзиши иловагӣ тавсияшаванда

1. *А.В. Погорелов* "Геометрия 10–11", учебник, Москва. "Просвешение", 2009.
2. *Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский.* "Математика 11", учебник, Минск, 2013.
3. *И.М. Смирнова, В.А. Смирнов* Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
4. *О.Я. Билянина и др.* "Геометрия 11" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
5. *Daniel C.Alexander,* Elementory геометry for collеге students, Canada, Brooks/ Cole, Cenгаге Learninг, 2011.
6. *Mal Coad and others,* Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
7. *Norjiгitov X., Mirzayev Ch.* Stereoметrik мasallarni Ҳал. Akadeмik litseylar uchun o'quv qo'llanма. –T., 2004.
8. *Israilov I., Pashayev Z.* Геометriya. Akadeмik litseylar uchun o'quv qo'llanма. II qisм. –T.: Тириtuvchi, 2005.
9. http://www.uzedu.uz – Xalq то'liмi вazirligininг axborot то'liм portoli.
10. http://www.eduportol.uz – Multiмedia мarkazi axborot то'liм portoli.
11. http://www.ixl.coм – Masofadan turib тиритish sayti (inгliz tilida).
12. http://www.mathkanг.ru – "Kenгuru" xalqaro мatematik тonlov sayti (rus tilida).
13. http://www.khanakademy.orг – "Xon akadeмiyasi" мasofaviy то'liм sayti (inгliz tilida).
14. http://www.brilliant.orг – Matematikadan мasofaviy то'liм sayti (inгliz tilida).

Мундарича

БОБИ I. Системаи коррдинатаҳо ва векторҳо дар фазо

БОБИ II. Призма ва силиндр

Alгebra ва analiz asoslari: **M.A. Mirzaahмedov, Sh.N. Isмailov, A.Q. Aмanov.**

Geoмetriya: **B.Q. Xaydarov.**

MATEMATIKA 11
ALГEBRA BA ANALIZ ASOSLARI, GEOMETRIYA
I QISM

O'гта то'liм muassasalarininг 11-sinfi o'quvchilari uchun darslik
1- nashr
(Tojik tilida)

Тарҷимон:	А. Шукуров
Муҳаррир:	Ш. Бобоҷонов
Муҳаррири техникӣ:	А. Абдусаломов
Саҳифабанди компуторӣ	Ҳ. Шарипова

Литсензияи нашриёт AI № 296. 22.05.2017
Ба чоп рухсат дода шуд 28.07.2018. Андозааш $70\times100^{1}/_{16}$
Гарнитураи “TimesNewRoman” .
Ҳаҷм: Ҷузъи чопӣ 12,0. Ҷузъи нашрӣ 11,0.
Адади нашр 7797 нусха
Макети оригиналӣ дар ҶММ “Zamin Nashr” тайёр шуд.
100053, ш. Тошканд,
кӯчаи Боғишамол, 160. Tel: 235 44 82

Дар чопхонаи ҶММ "CREDO PRINT GROUP" чоп шуд.
ш. Тошканд, кӯчаи Боғишамол, 160. Tel: 234 44 01
Супориши № 1934