MATEMATIKA 11

ALGEBRA WE ANALIZIŇ ESASLARY
GEOMETRIÝA
I BÖLÜM

Umumy orta bilim berýän mekdepleriň 11-nji synp okuwçylary üçin derslik

Özbegistan Respublikasynyň Halk bilimi ministrligi tarapyndan tassyklanan

1-nji neşir

DAŞKENT
2018

UOK 51(075.32)
KBK 22.1ya72v
M 51

Algebra we analiziň esaslary bölüminiň awtorlary:

Mirzaahmedow M.A., Ismailow Ş.N., Amanov A.K.

Geometriýa bölüminiň awtory:

Haýdarow B.K.

Syn ýazanlar:

R.B. Beşimow – Mürze Ulugbek adyndaky Özbegistan Milli Uniwersitetiniň “Geometriýa we topologiýa” kafedrasynyň müdiri, fizika-matematika ylymlarynyň doktory.

K.S. Jumaniýazow – Nyzamy adyndaky DDPU Fizika-matematika fakultetiniň "Matematikany okatmagyň metodikasy" kafedrasynyň dosenti, pedagogika ylymlarynyň kandidaty.

R.O. Rozimow – Sergeli tümenindäki 237-nji mekdebiň matematika mugallymy.

S.B. Jumaniýazowa - RTM metodisti.

S.R. Sumberdiýewa – Sergeli tümenindäki 6-njy ýöriteleşdirilen mekdebiň matematika mugallymy.

Dersligiň “Algebra we analiziň esaslary” bölüminde ulanylan belgiler we olaryň düşündirişi:

△ – meseläni çözmek (subut etmek) başlandy

▲ – meseläni çözmek (subut etmek) gutardy

! – barlag işleri we test (synag) gönükmeleri

? – soraglar we ýumuşlar

■ – esasy maglumat

* – çylşyrymlyrak gönükmeler

ISBN 978-9943-5128-2-5

I BAP

ÖNÜM WE ONUŇ ULANYLYŞY

1–2 ÜÝTGEÝÄN MUKDARLAR ARTDYRMALARYNYŇ GATNAŞYGY WE ONUŇ MANYSY. GALTAŞMANYŇ KESGITLEMESI. FUNKSIÝANYŇ ARTDYRMASY

Üýtgeýän mukdarlaryň artdyrmalarynyň gatnaşygy

Dürli ölçeg birliklerine eýe bolan iki üýtgeýän mukdar gatnaşygyny hasaplamak adamyň durmuşynda ýygy-ýygydan duşýar.

Meselem, awtomaşynyň ***tizligi*** onuň ýörän ýolunyň wagta gatnaşygy *km/sagat* ýa-da *m/s* larda ölçelýär, ýangyç sarp edişi bolsa *km/litr* ýa-da 100 *km/litr* lerde ölçelýär.

Edil şeýle, basketbolçynyň ussatlygy bir oýunda toplanan oçkolar sany bilen kesgitlenýär.

Mysal. Okuw önümçilik toplumynda 11-nji synp okuwçylarynyň arasynda tekst ýygmagyň hili we tizligi boýunça synag geçirilýär.

Kerim 3 minudyň dowamynda 213 sany sözi ýygyp, 6 orfografik ýalňyş, Nargiza bolsa 4 minudyň dowamynda 260 sany sözi ýygyp, 7 orfografik ýalňyş goýberindigi mälim boldy. Olaryň netijelerini deňeşdiriň.

Δ Her bir okuwçy üçin degişli gatnaşyklary düzýäris:

Kerim:

Tekst ýygmagyň tizligi $\dfrac{213\,\text{söz}}{3\,\text{min}} = 71\,\dfrac{\text{söz}}{\text{min}}$

Tekst ýygmagyň hili $\dfrac{6\ \text{ýalňyş}}{213\ \text{söz}} \approx 0{,}0282\,\dfrac{\text{ýalňyş}}{\text{söz}}$

Nargiza:

Tekst ýygmagyň tizligi $\dfrac{260\,\text{söz}}{4\,\text{min}} = 65\,\dfrac{\text{söz}}{\text{min}}$

Tekst ýygmagyň hili $\dfrac{7\ \text{ýalňyş}}{260\ \text{söz}} \approx 0{,}0269\,\dfrac{\text{ýalňyş}}{\text{söz}}.$

Diýmek, Kerim teksti Nargiza-garanda çaltrak ýygan bolsa-da, Nargiza bu işi oňadrak ýerine ýetiripdir. ▲

Gönükmeler

1. Puls ýygylygyny barlamak üçin barmaklar ujuny arteriýa damary geçýän ýere goýulýar we zarbalary duýmak üçin şu ýer basylýar.

   Medine pulsy ölçände bir minutda 67 zarbany duýdy.

   a) Pulsuň ýygylygynyň manysyny düşündiriň. Ol nähili ululyk (belgi)?

   b) Her sagatda Medinäniň ýüregi näçe gezek urýar?

2. Kerim öýünde 14 sahypa tekst ýygyp, 8 orfografik ýalňyş goýberdi. Eger 1 sahypada ortaça 380 söz bolsa:

   a) Kerimiň tekst ýygmak hilini anyklaň we ýokardaky mysalda alnan netije bilen deňeşdiriň. Kerimiň tekst ýygyş hili gowulandymy?

   b) Kerim 100 söz ýyganda ortaça näçe ýalňyş goýberdi?

3. Maruf 12 sagat işläp 148 m 20 sm, Myrat bolsa 13 sagat işläp 157 m 95 sm ýap arassalady. Olaryň zähmet öndürijiligini deňeşdiriň.

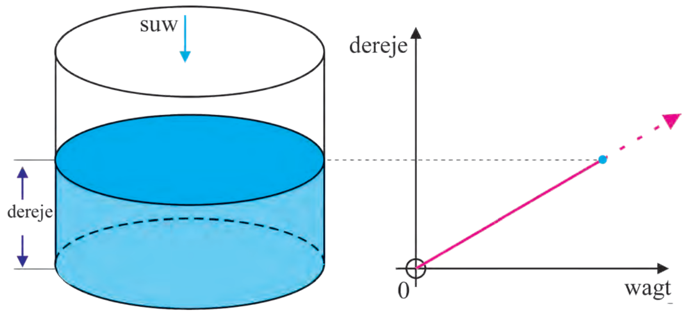
4. Awtomaşynyň täze şinasynyň protektorynyň çuňlugy 8 mm-i düzýär. 32178 km ýörelenden soň dargama netijesinde şinanyň protektorynyň çuňlugy 2,3 mm bolandygy mälim boldy.

   a) 1 km aralyk ýörelende şinanyň protektorynyň çuňlugy nähili üýtgär?

   b) 10000 km aralyk ýörelende nähili?

5. Medine Karşy şäherinden sagat 11:43 da çykyp sagat 15:49 da Gülüstan şäherine ýetip geldi. Eger ol 350 km aralyk ýörän bolsa, onuň ortaça tizligi näçe $\frac{\text{km}}{\text{sagat}}$ boldy?

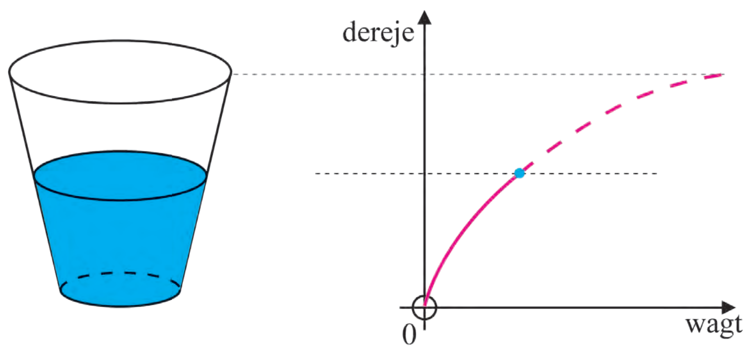
Mysal. Silindr şeklindäki gap suw bilen birmeňzeş tizlikde doldurylýar. Munda silindrik gabyň içine wagta proporsional bolan suw (göwrümi) guýulýandygy sebäpli suwuň derejesiniň (beýikliginiň) wagta görä baglanyşygy çyzykly funksiýa görnüşinde bolýar (1-nji surata garaň).



1-nji surat.

Bu ýagdaýda gapdaky suwuň derejesiniň wagta bolan gatnaşygy (ýagny derejäniň *üýtgeýän tizligi*) hemişelik san bolup galyberýär.

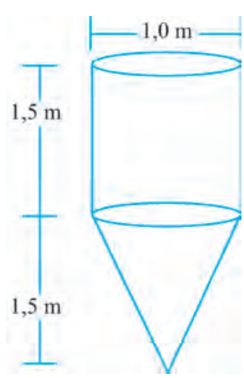
Indi başga şekildäki gaba garaýarys (2-nji surat):



2-nji surat.

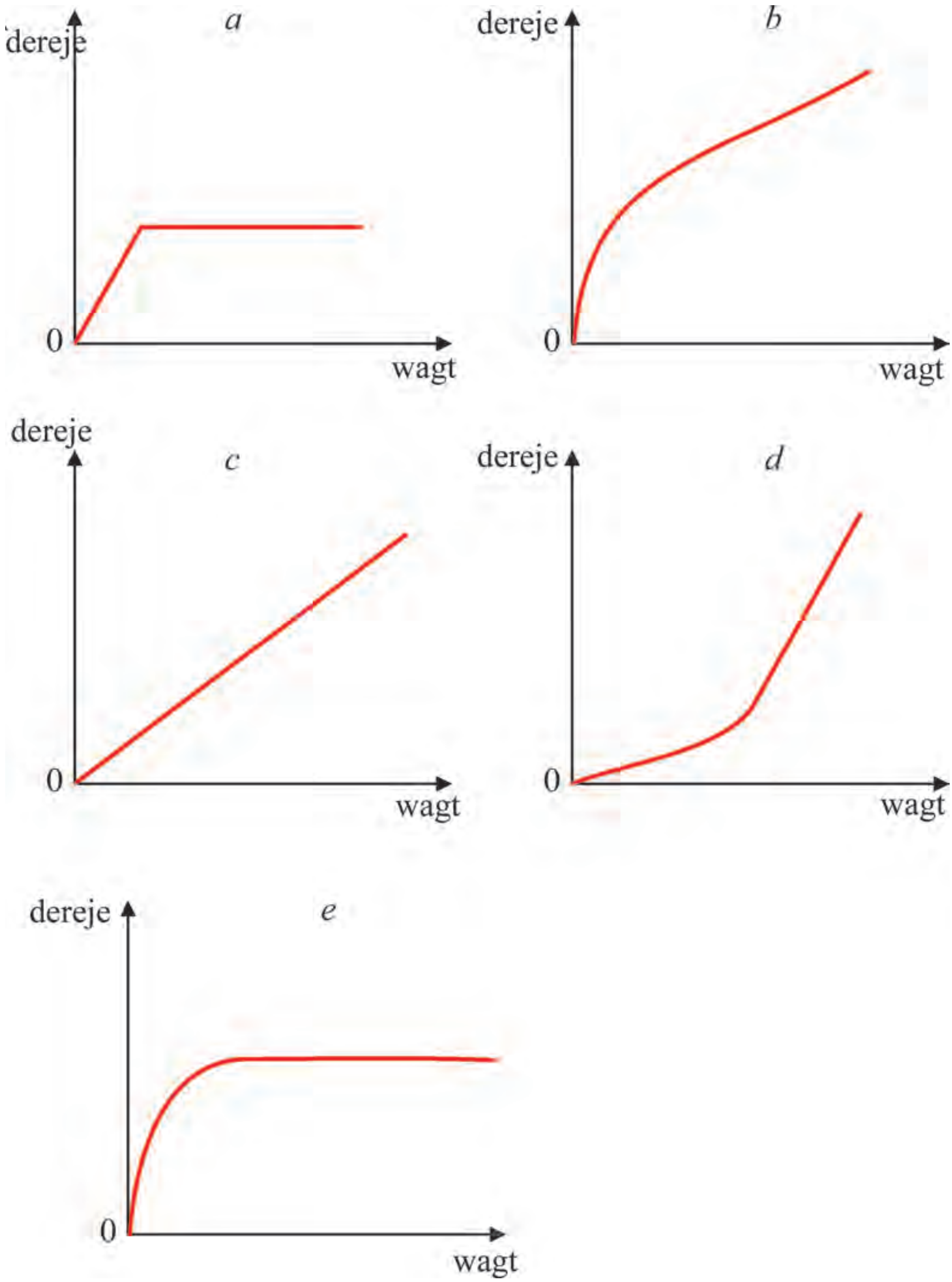
2-nji suratda suwuň derejesiniň üýtgeýän tizliginiň wagta görä baglanyşygy görkezilen.

1-nji sorag. 3-nji suratda suw guýmaga niýetlenen gap görkezilen.



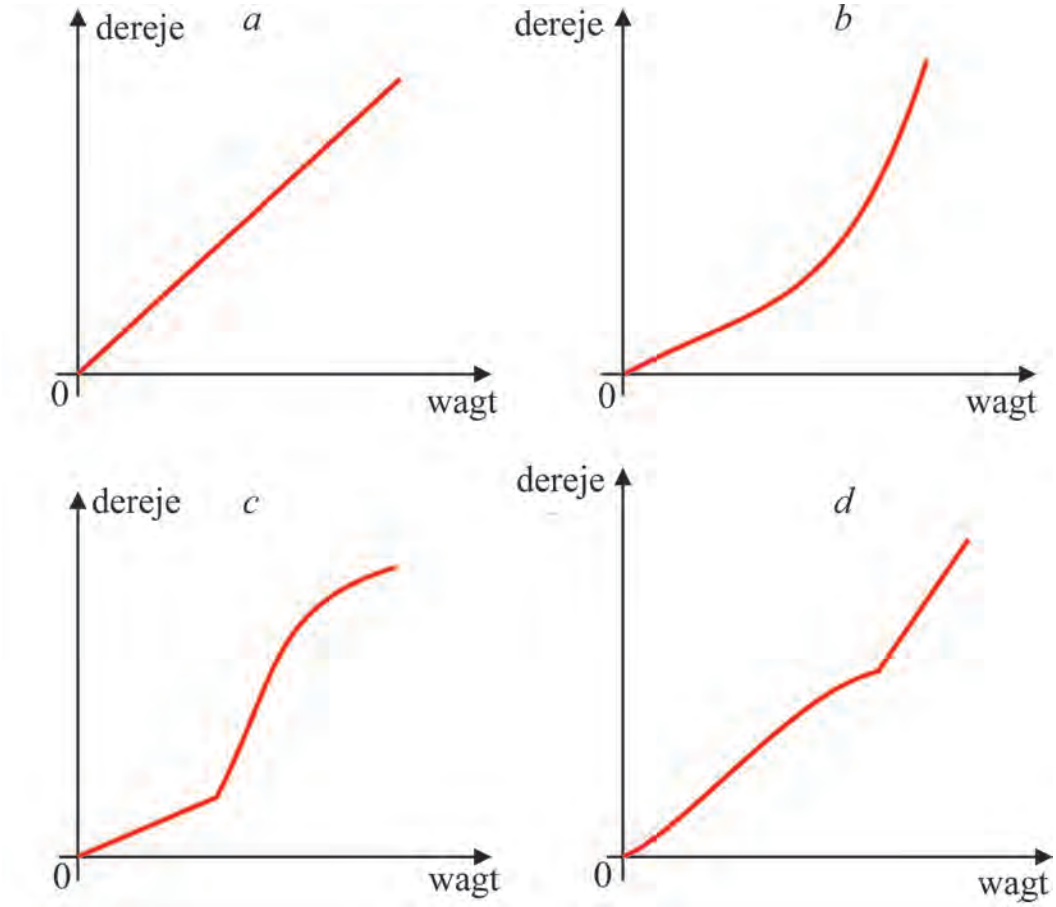
3-nji surat.

Başynda onda suw ýokdy. Soň ol «bir sekuntda bir litr» tizlikde doldurylyp başlady. Suwuň derejesiniň wagta görä üýtgeýşi 4-nji suratdaky haýsy grafikde dogry görkezilen?



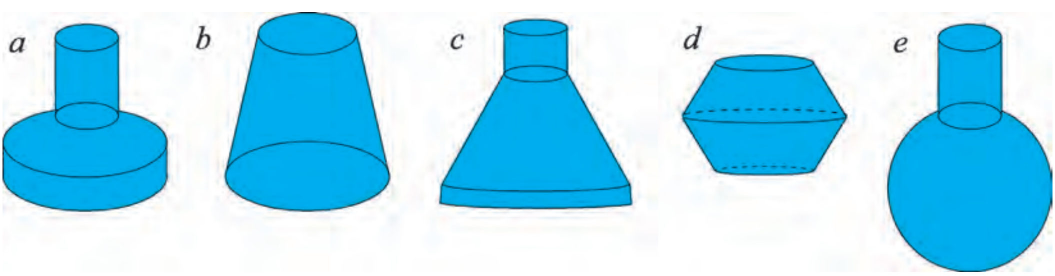
4-nji surat.

2-nji sorag. Suwuň derejesiniň wagta görä üýtgeýşi 5-nji suratdaky grafiklerde berlen:



5-nji surat.

Olar 6-njy suratdaky haýsy gaplara laýyk gelýär?



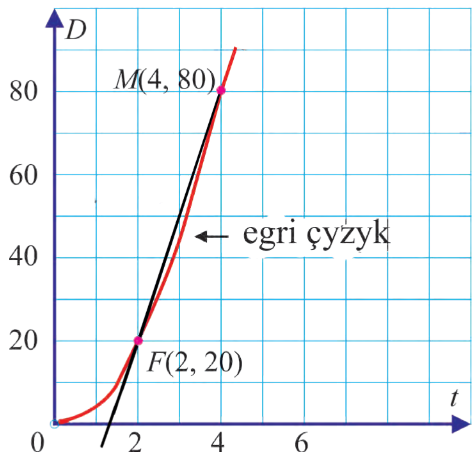
6-njy surat.

Özgerişiň ortaça tizligi

Iki üýtgeýän mukdaryň bir-birine baglanyşygy çyzykly funksiýa görnüşinde bolsa, bu mukdarlaryň artdyrmalarynyň gatnaşygy hemişelik san bolýar.

Iki üýtgeýän mukdaryň bir-birine baglanyşygy çyzykly funksiýa görnüşinde bolmasa, biz bu üýtgeýän mukdarlaryň berlen aralykdaky ortaça-gatnaşygyny tapyp bileris. Eger aralyk dürlüçe alynsa, hasaplanan ortaça-gatnaşyklar hem dürlüçe bolýar.

1-nji mysal. Beýik binanyň üçeginden top aşak zyňylýar. Topuň t wagtyň dowamynda üçekden oklanmagy (peselişi) 7-nji suratdaky grafikde görkezilen:



7-nji surat.

▲ Grafikde $t=2$ sekunda laýyk bolan F nokady we ondan tapawutly (meselem, $t=4$ sekunda laýyk bolan) M nokady belgiläliň. $2 \le t \le 4$ wagt aralygynda ortaça tizlik

$\frac{(80-20)\,m}{(4-2)\,s} = 30\frac{m}{s}$ -e deňdigini tapýarys.

Görnüşi ýaly, FM kesijiniň burç koeffisiýenti 30-a deň eken. ▲

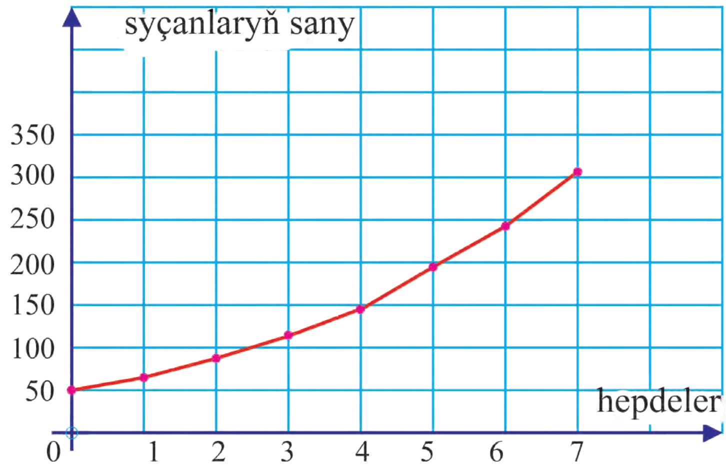
Sorag. F nokady gozgalmaýan hasaplap, t-niň aşakda berlen bahalaryna laýyk bolan M nokatlar üçin FM kesijileriň burç koeffisiýentlerini hasaplap, jedwelleri dolduryň:

t	burçuň koeffisiýenti
0	
1,5	
1,9	
1,99	

t	burçuň koeffisiýenti
3	
2,5	
2,1	
2,01	

Nähili netijä geldiňiz?

2-nji mysal. Populýasiýadaky syçanlaryň sany hepdeleriň geçmegi bilen aşakdaky ýaly üýtgeýär (8-nji surat):



8-nji surat.

3 – we 6 – hepde aralygynda syçanlaryň sany ortaça nähili üýtgäpdir? 7 hepdelik wagt aralykda nähili?

Δ Syçanlar populýasiýasynyň ösüş tizligi

$$\frac{(240-110)\text{syçan}}{(6-3)\text{hepde}} \approx 43\frac{\text{syçan}}{\text{hepde}},$$ ýagny 3 – we 6 – hepde aralygynda syçanlaryň sany hepdesine ortaça 43-e köpelipdir.

Edil şeýle 7 hepdede $\frac{(315-50)\text{syçan}}{(7-0)\text{hepde}} \approx 38\frac{\text{syçan}}{\text{hepde}}$,

7 hepde aralygynda syçanlaryň sany hepdesine ortaça 38-e köpelipdir. ▲

Umumy ýagdaýda: x mukdar a dan b çenli üýtgände $y=f(x)$ mukdar üýtgeýşiniň **ortaça tizligi**

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

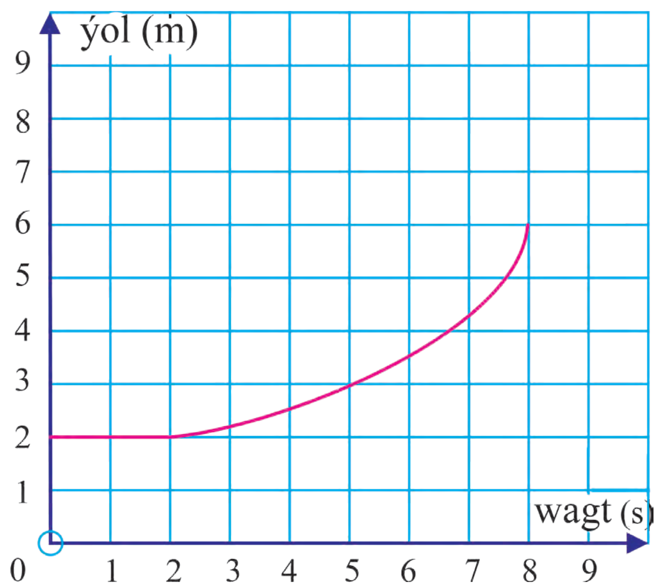
artdyrmalar gatnaşygyna deň, bu ýerde $f(b)-f(a)$ – funksiýa artdyrmasy, $b-a$ bolsa argument artdyrmasy.

$h=b-a$ diýip belgilesek, ortaça tizlik $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ görnüşi alýar.

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ drobuň sanawjysyny $y=f(x)$ *funksiýanyň* argumenti x-iň h *artdyrmasyna* laýyk gelýän *artdyrmasy* diýip atlandyrmak kabul edilen. Drobuň özüni bolsa *tapawutly gatnaşyk* diýip atlandyrýarlar.

Gönükmeler

6. Nokadyň göni çyzyk boýunça ýörän ýoly wagta nähili baglanandygy 9-njy suratdaky grafikde görkezilen.



9-njy surat.

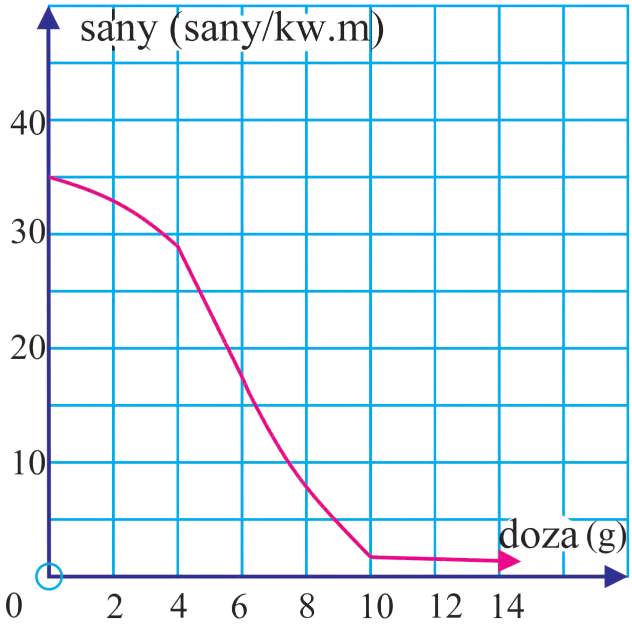
Nokadyň

a) deslapky 4 sekunt;

b) soňky 4 sekunt;

c) 8 sekundyň dowamyndaky ortaça tizligini tapyň.

7. Meýdana dürli mukdardaky (dozadaky) derman bilen bejergi berlende 1 m^2 da bar bolan zyýanly mör-möjekleriň sanynyň üýtgeýşi 10-njy suratdaky grafikde görkezilen.



10-njy surat.

a) 1) doza 0 gramdan 10 grama çenli artdyrylsa; 2) 4 gramdan 7 grama çenli artdyrylsa, 1 m^2-da bar bolan zyýanly mör-möjekleriň sanynyň üýtgeýşini tapyň.

b) doza 10 gramdan 14 grama çenli artdyrylsa, nähili hadysa ýüze çykar?

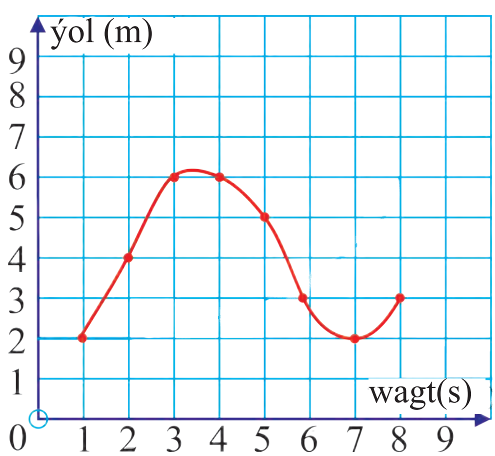
2) Maddy nokadyň göni çyzyk boýunça hereket kanuny s(t)-niň grafigi suratda berlen.

a) s(2), s(3), s(5), s(7) sanlar näçä deň?

b) Haýsy aralyklarda funksiýa artýan ?

c) Haýsy aralykda funksiýa kemelýän

d) s(3)–s(1), s(5)–s(4), s(7)–s(6), s(8)–s(6) artdyrmalary hasaplaň.



3–4 LIMIT BARADA DÜŞÜNJE

x-iň bahalary 2-den kiçi bolup, 2-ä barha ýakynlaşanda $f(x)=x^2$ funksiýanyň bahalarynyň jedweline garalyň:

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$	1	3,61	3,9601	≈ 3,996 00	≈ 3,999 60

Jedwelden görnüşi ýaly, x-iň bahalary 2-ä näçe ýakyn boluberse (*ýakynlaşsa*), $f(x)$ funksiýanyň bahalary 4 sanyna ýakynlaşyberýär.

Şeýle ýagdaýda x argument (üýtgeýän) 2-ä *çepden ýakynlaşanda* $f(x)$-iň bahalary 4 sanyna *ýakynlaşýar* diýýäris.

Indi x-iň bahalary 2-den uly bolup, 2-ä barha ýakynlaşanda $f(x)=x^2$ funksiýanyň bahalarynyň jedweline garalyň:

x	3	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)$	9	4,41	4,0401	≈ 4,004 00	≈ 4,000 40

Şeýle ýagdaýda x argument 2-ä *sagdan ýakynlaşanda,* $f(x)$ funksiýanyň bahalary 4 sanyna *ýakynlaşýar* diýýäris.

Ýokardaky iki ýagdaýy umumylaşdyryp, x argument 2-ä *ýakynlaşanda,* $f(x)$-iň bahalary 4 sanyna *ýakynlaşýar* diýýäris we muny aşakdaky ýaly ýazýarys:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Bu ýazuw şeýle okalýar: x argument 2-ä ýakynlaşanda, $f(x)=x^2$ funksiýanyň *limiti* 4-e deň.

Umumy ýagdaýda *funksiýanyň limiti* düşünjesine aşakdaky ýaly çemeleşilýär:

$x\neq a$ bolup, onuň bahalary a sanyna ýakynlaşsa, $f(x)$-iň bahalary A sanyna *ýakynlaşsyn.* Bu ýagdaýda A sany x a-ga *ýakynlaşanda* $f(x)$ funksiýanyň *limiti* diýilýär we şeýle kesgitlenýär:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Kä halatlarda bu ýagdaýy x-iň bahalary a-ga *ymtylanda* $f(x)$ funksiýa A -ga *ymtylýar,* diýýäris.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ýazuwyň ýerine $x\to a$ da $f(x)\to A$ ýazuw hem ulanylýar.

Ýatlatma. x a-ga *ymtylanda* $x\neq a$ şerti ýerine ýetirilmeginiň möhümligini aýdyp geçmek ýerlikli.

Mysal. $x\to 0$ bolanda $f(x) = \dfrac{5x + x^2}{x}$ funksiýanyň limitini tapmak.

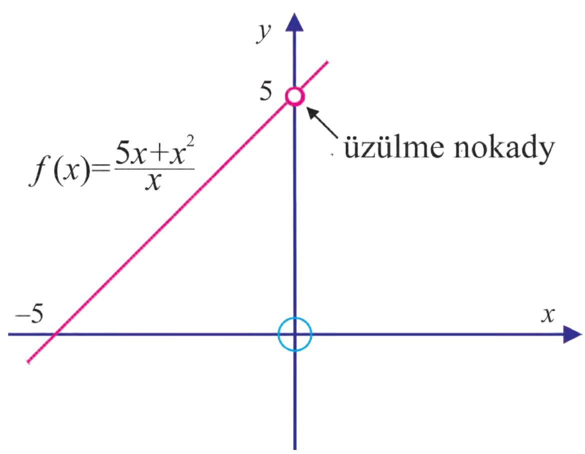
Δ $x\neq 0$ şerti ýerine ýetirilmesin, ýagny $x=0$ bolsun. $x=0$ bahany $f(x)$-a gönüden-göni goýup görsek, $\dfrac{0}{0}$ görnüşdäki *anyk dällige* eýe bolarys.

Başga tarapdan, $f(x) = \dfrac{x(5+x)}{x}$ bolany üçin bu funksiýa şu

$$f(x) = \begin{cases} 5 + x, & \text{eger } x \neq 0 \text{ bolsa} \\ \text{anyklanmadyk}, & \text{eger } x = 0 \text{ bolsa,} \end{cases}$$

görnüşi alýar.

$y=f(x)$ funksiýanyň grafigi (0; 5) koordinataly nokady «alyp taşlanan» $y=x + 5$ göni çyzyk görnüşinde bolýar (11-nji surat):



11-nji surat.

(0; 5) koordinataly nokat $y=f(x)$ funksiýanyň *üzülme nokady* diýilýär.

Görnüşi ýaly, bu nokatdan tapawutly bolan nokatlarda x-iň bahalary 0-a *ýakynlaşanda* $f(x)$ funksiýanyň degişli bahalary 5-e ýakynlaşýar, ýagny onuň *limiti* bar:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x + x^2}{x} = 5. \blacktriangle$$

Amalda, funksiýanyň limitini tapmak üçin, gerek bolsa, degişli ýönekeýleşdirmeleri ýerine ýetirmek maksada laýykdyr.

1-nji mysal. Limitleri hasaplaň:

a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

∆ a) x-iň bahalary 2-ä *ýakynlaşanda* x^2-yň bahalary 4-e ýakynlaşýar, ýagny $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

b) $x\neq 0$ bolany üçin

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+3)}{x} = \lim_{x\to 0} (x+3) = 3.$$

c) $x\neq 3$ bolany üçin

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x+3) = 6.$$ ▲

Gönükmeler

Limiti hasaplaň (**8–11**):

8. a) $\lim\limits_{x\to 3} (x+4)$ b) $\lim\limits_{x\to -1} (5-2x)$ c) $\lim\limits_{x\to 4} (3x-1)$

d) $\lim\limits_{x\to 2} (5x^2-3x+2)$ e) $\lim\limits_{h\to 0} h^2(1-h)$ f) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2+5)$.

9. a) $\lim\limits_{x\to 5} 5$ b) $\lim\limits_{h\to 2} 7$ c) $\lim\limits_{x\to 0} c$, c – hemişelik san.

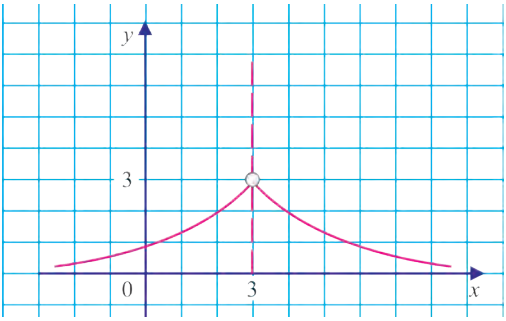
10. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x}{x}$ b) $\lim\limits_{h\to 2} \dfrac{h^2+5h}{h}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x}$.

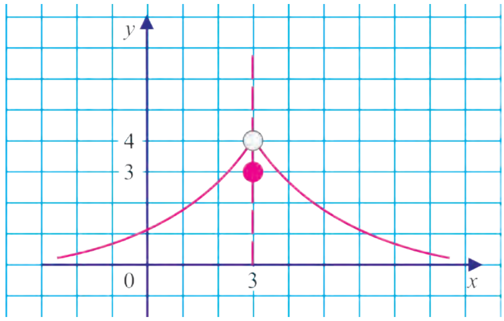
11. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-3x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-5x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2-x}{x}$

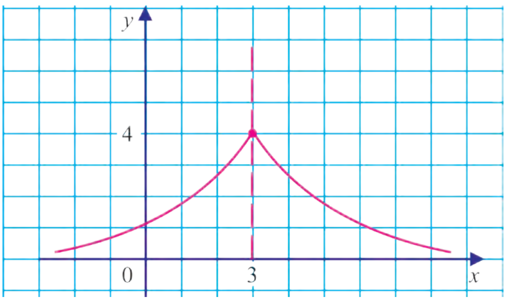
d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2+6h}{h}$ e) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h^2-4h}{h}$ f) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3-8h}{h}$

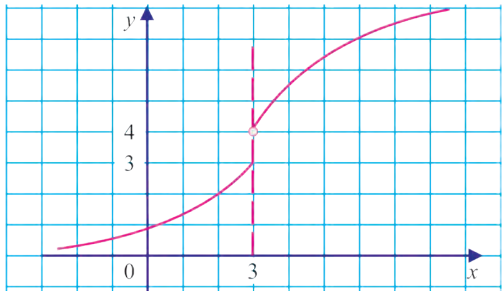
g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$ i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$.

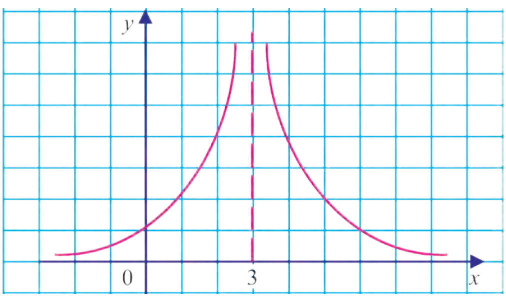
12. Aşakdaky funksiýalardan haýsy biri $x \to 3$ bolanda limite eýe? Şol limiti tapyň.

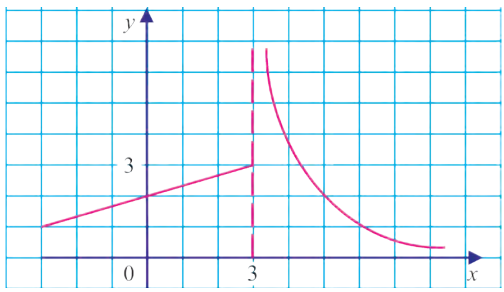


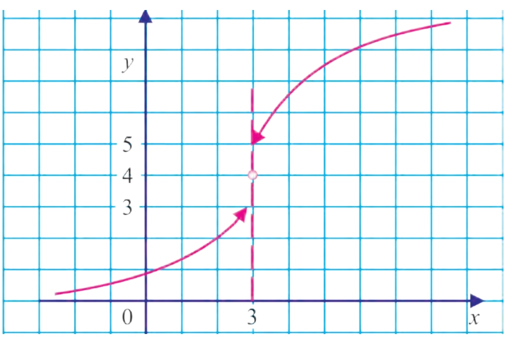


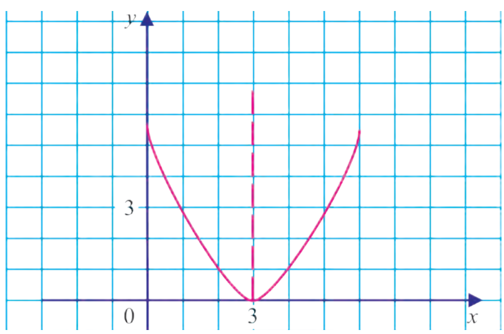






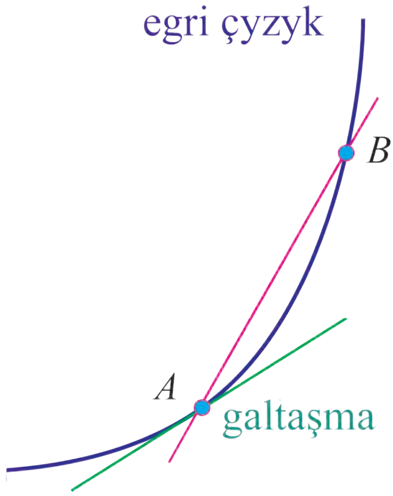




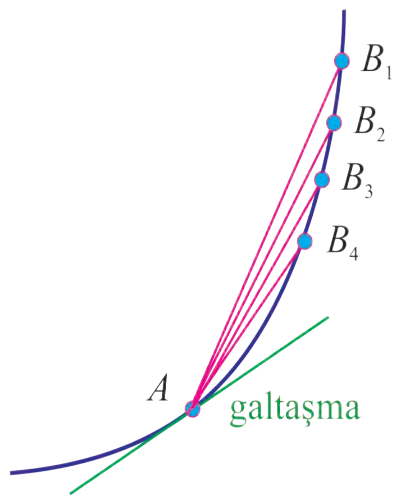


5–6 ÖNÜM, ONUŇ GEOMETRIK WE FIZIKI MANYSY

12-nji suratda egri çyzyk, kesiji we galtaşma görkezilen.



12-nji surat.

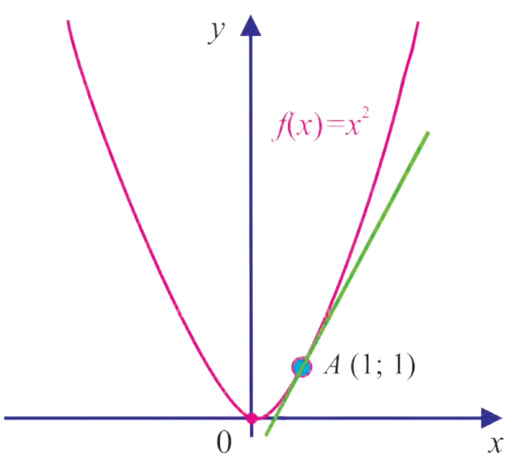


13-nji surat.

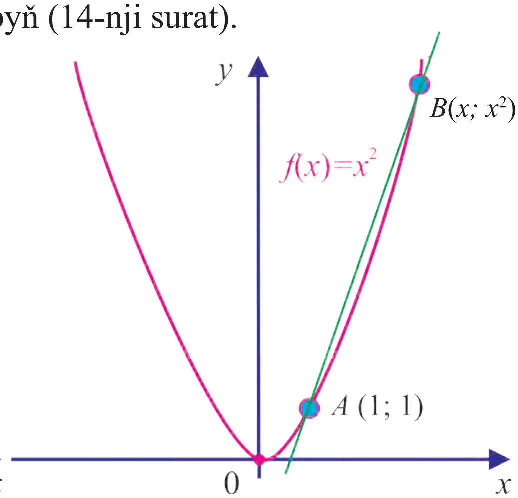
B nokat B_1, B_2, ... ýagdaýlary yzygider kabul edip, A nokada *egri çyzyk boýunça* ýakynlaşsa, (13-nji surat), degişli kesijileriň egri çyzyga A nokatda geçirilen galtaşma ýagdaýyny almaga ymtylýandygyny *intuitiw ýagdaýda* kabul edýäris:

Bu ýagdaýda, görnüşi ýaly, AB göni çyzygyň burç koeffisiýenti galtaşmanyň burç koeffisiýentine ýakynlaşýar.

1-nji mysal. $f(x)=x^2$ funksiýanyň grafigine $A(1;\ 1)$ nokatda galtaşýan göni çyzygyň burç koeffisiýentini tapyň (14-nji surat).



14-nji surat.



15-nji surat.

▲ $f(x)=x^2$ funksiýanyň grafigine degişli islendik $B(x, x^2)$ nokady garalyň (15-nji surat).

AB göni çyzygyň burç koeffisiýenti

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \text{ ýa-da } \frac{x^2-1}{x-1} \text{ -e deň.}$$

B nokat A nokada egri çyzyk boýunça ýakynlaşanda, x-iň bahasy 1-e ýakynlaşýar, munda $x \neq 1$.

Diýmek, AB göni çyzygyň burç koeffisiýenti galtaşmanyň burç koeffisiýenti k-ga ýakynlaşýar, ýagny:

$$k = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Şeýdip, k=2. ▲

$y=f(x)$ funksiýa berlen bolsun. Onuň grafigine degişli bolan $A(x, f(x))$ we $B(x+h, f(x+h))$ nokatlara garalyň (16-njy surat).

AB göni çyzygyň burç koeffisiýenti

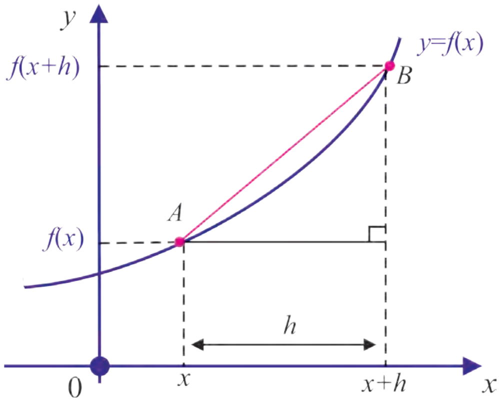
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tapawutly gatnaşyga deň.

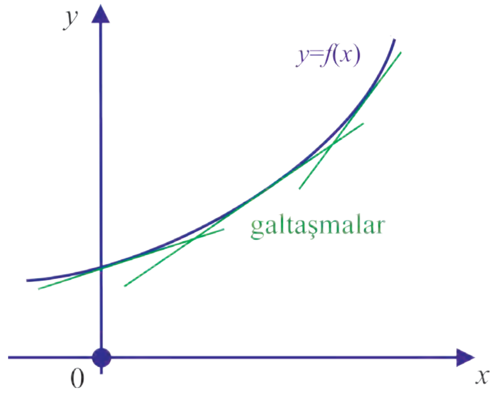
B nokat A nokada egri çyzyk boýunça ýakynlaşanda $h\to 0$, ýagny h artdyrma nola ymtylýar, AB kesiji bolsa funksiýanyň grafigine A nokatda geçirilen galtaşma ymtylýar.

Şunuň bilen birlikde, AB göni çyzygyň burç koeffisiýenti galtaşmanyň burç koeffisiýentine ýakynlaşýar.

Başgaça aýdanda, h-yň bahasy 0-a ymtylanda islendik $(x, f(x))$ nokatda geçirilen galtaşmanyň burç koeffisiýenti $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tapawutly gatnaşygyň limit bahasyna, ýagny $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ baha deň bolýar.



16-njy surat.



17-nji surat.

x-iň şu limit bar bolan islendik bahasyna funksiýanyň grafigine $(x,\ f(x))$ nokatda geçirilen galtaşmanyň burç koeffisiýentiniň ýeke-täk bahasyny laýyk goýmak mümkin (17-nji surat).

Diýmek, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ formula täze funksiýany aňladýar.

Ynha şu funksiýa $y=f(x)$ funksiýanyň **önüm funksiýasy**, ýa-da ýönekeý edip **önümi** diýlip atlandyrylýar.

Kesgitleme. $y=f(x)$ funksiýanyň **önümi** diýip aşakdaky limite (eger ol bar bolsa) aýdylýar:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (1)$$

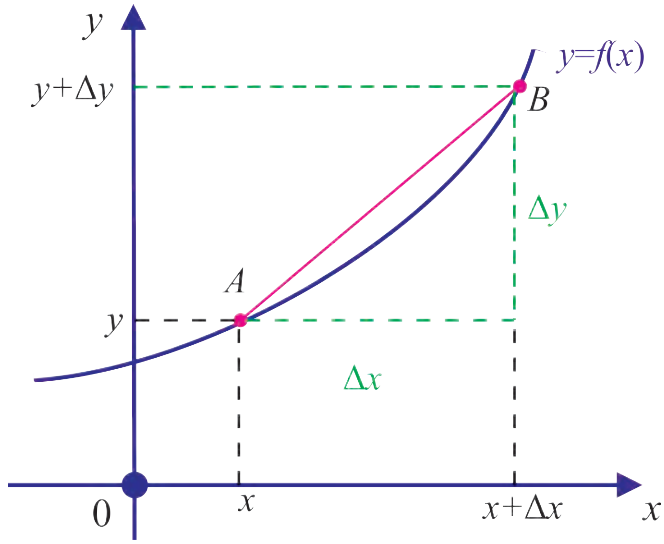
Adatda $y=f(x)$ funksiýanyň önümi $f'(x)$ ýaly kesgitlenýär.
Önümi tapmak amalyna *differensirleme* diýilýär.

$f'(x)$ belgilemegiň ýerine $\dfrac{dy}{dx}$ ýaly belgilemek hem kabul edilen.

Bu belgilemäniň “drob” görnüşdedigini aşakdaky ýaly düşündirmek mümkin.

Eger artdyrmalary $h=\Delta x$, $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$ diýip belgilesek,

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ dan aşakdaka eýe bolarys (18-surat): $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{dx}$.



18-nji surat.

Ýokardaky pikir ýöretmelerden şeýle netijä gelýäris: $y=f(x)$ funksiýanyň önüminiň x_0 nokatdaky bahasy funksiýanyň grafigine şu nokatda geçirilen galtaşmanyň burç koeffisiýentine deň. Önümiň *geometrik manysy* şondan ybaratdyr.

2-nji mysal. Maddy nokat $s=s(t)$ (s – metrlerde, t – sekundlarda ölçelýär) düzgün boýunça göni çyzyk boýunça hereketlenýär. Şu maddy nokadyň wagtyň t momentindäki (pursadyndaky) tizligi $v(t)$-ni tapyň.

Δ Mälim bolşy ýaly, pursatlaýyn tizlik nokadyň kiçi Δt wagt aralygyndaky ortaça tizligi $v(t)=\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ -a takmynan deň. Δt nola ymtylanda pursatlaýyn tizlik bilen ortaça tizligiň arasyndaky tapawut hem nola ymtylýar. Diýmek, maddy nokadyň t momentdäki pursatlaýyn tizligi

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t). \blacktriangle$$

Şeýdip, t momentdäki pursatlaýyn tizlik nokadyň hereket kanuny $s(t)$ funksiýadan alnan önüme deň eken.

Önüming *fiziki manysy* ine şondan ybarat. Umuman aýdanda, *önüm funksiýanyň üýtgeýän tizligidir.*

Mysallar

Önümiň kesgitlemesinden peýdalanyp, funksiýalaryň önümini tapyň.

1. $f(x)=x^2$ **2.** $f(x)=5$ **3.** $f(x)=x^3-7x+5$

4. $f(x)=x^4$ **5.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$ **6.** $f(x)=\sqrt{x}$ 7. $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Δ **1.** $h\neq 0$ bolany üçin

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

2. $h\neq 0$ bolany üçin $f(x+h)=5$, $f(x+h)-f(x)=5-5=0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{h}=0 \quad \text{Diýmek, } f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

3. $h\neq 0$ bolany üçin

$f(x+h)=(x+h)^3-7(x+h)+5=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5.$

$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-7x-7h+5-x^3+7x-5=$

$=3x^2h+3xh^2+h^3-7h.$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-7h}{h}=3x^2+3xh+h^2-7.$$

$h\to 0$ da $3xh+h^2\to 0$ bolany üçin

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2-7.$$

4. Gysga köpeltmek formulalaryna görä $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

Diýmek, $(x+h)^4-x^4=(x+h-x)(x+h+x)((x+h)^2+x^2)=$

$=h(2x+h)(2x^2+2xh+h^2)=2hx(2x+h)(x+h)+h^3(2x+h)=$

$=2hx(2x^2+h(3x+h))+h^3(2x+h)$; $h\to 0$ bolsa,

$2h^2x(3x+h)\to 0$ we $h^3(2x+h)\to 0$ bolany üçin

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim_{h\to 0}(4x^3+2hx(3x+h))+h^2(2x+h))=4x^3.$$

Diýmek, $f'(x)=(x^4)'=4x^3$.

5. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$ bolsun,

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=-\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-1}{(x+h)x}.$$

$h\to 0$ -da $x+h\to x$ bolany üçin $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ bolýar.

6. $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$, $x+h>0$ bolsun,

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ tapawutly gatnaşygy düzýäris we ony ýönekeýleşdirýäris:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

$h\to 0$ -da $\sqrt{x+h}\to\sqrt{x}$ bolany üçin $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ bolýar. ▲

7. Tapawutly gatnaşygy düzýäris:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\frac{x+h-x}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

$h\to 0$ da $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}\to\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Diýmek, $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Jogaby: **1.** $2x$. **2.** 0. **3.** $3x^2-7$. **4.** $4x^3$. **5.** $-\frac{1}{x^2}$. **6.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **7.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. ▲

x mukdar x dan $x+h$ çenli üýtgände $y=f(x)$ mukdar üýtgeýşiniň **ortaça tizligi**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tapawutly gatnaşygyna deňdigini ýatlatmak ýerliklidir.

Mundan $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ aňlatma $y=f(x)$ mukdaryň üýtgeýşiniň **pursatlaýyn tizligini** aňladýar.

Gönükmeler

13. Aşakdaky funksiýanyň önümi nämä deň?

a) $f(x)=x^3$ b) $f(x)=x^{-1}$ c) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ d) $f(x)=c$.

14. Jedweli depderiňize göçüriň we dolduryň:

a.

$f(x)$	$f'(x)$
x^1	
x^2	
x^3	
x^{-1}	
$x^{\frac{1}{2}}$	

b. Siziň pikiriňizçe, $y=x^n$ funksiýa önümi nämä deň (bu ýerde n – rasional san) ?

15. Kesgitlemeden peýdalanyp, funksiýanyň önümini tapyň:

a) $f(x)=2x+3$ **b)** $f(x)=3x^2+5x+1$ **c)** $f(x)=2x^3+4x^2+6x-1$.

16*. Depderiňize göçüriň we dolduryň:

a) $f(x)=ax+b$ üçin $f'(x)=$ ......

b) $f(x)=ax^2+bx+c$ üçin $f'(x)=$ ......

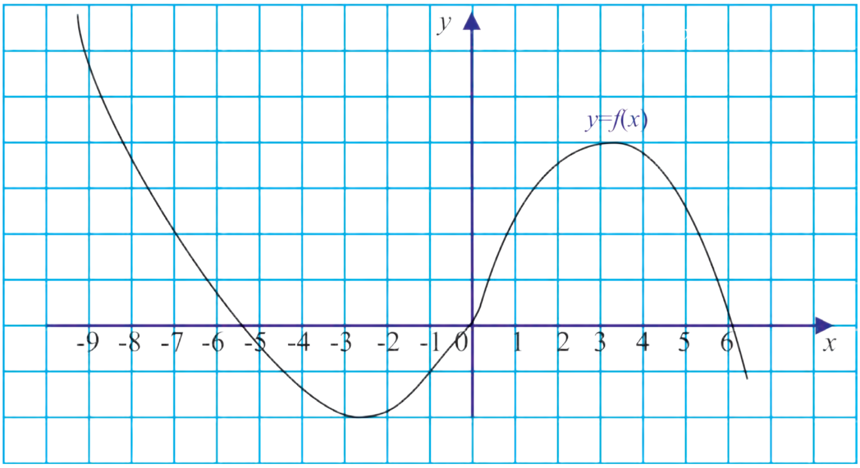
c) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ üçin $f'(x)=$ ......

17*. Aşakdaky tassyklamalary subut ediň:

a) $f(x)=cg(x)$ bolsa, onda $f'(x)=cg'(x)$

b) $f(x)=g(x)+h(x)$ bolsa, onda $f'(x)=g'(x)+h'(x)$.

18*. Funksiýanyň grafigine garap önümleriň bahalaryny deňeşdiriň:



a) $f'(-7)$ we $f'(-2)$;
b) $f'(-4)$ we $f'(2)$;
c) $f'(-9)$ we $f'(0)$;
d) $f'(-1)$ we $f'(5)$.

19. Ýokardaky funksiýanyň grafigine garap şu şertleri kanagatlandyrýan x_1, x_2 nokatlary tapyň (x_1, x_2 - Ox okundaky nokatlar: –9, –8, ..., 5, 6,):

a) $f'(x_1) > 0,\ f'(x_2) > 0$
b) $f'(x_1) < 0,\ f'(x_2) > 0$
c) $f'(x_1) < 0,\ f'(x_2) < 0$
d) $f'(x_1) > 0,\ f'(x_2) < 0.$

2) Grafige garap şu soraglara jogap beriň:

a) funksiýa haýsy aralykda artýan ? haýsy aralykda kemelýän?
b) funksiýanyň [0; 3], [3; 6], [–9; –6] aralyklaryndaky artdyrmalary hasaplaň.

3) Funksiýa haýsy nokatda iň uly, haýsy nokatda iň kiçi bahany kabul edýär?

4) Funksiýa haýsy nokatlarda nola öwrülýär?

5) Haýsy aralykda funksiýa položitel bahalary kabul edýär?

6) Haýsy aralykda funksiýa otrisatel bahalary kabul edýär?

7–9 ÖNÜMI HASAPLAMAGYŇ DÜZGÜNLERI

Eger $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalaryň her biri önüme eýe bolsa, onda aşakdaky differensirleme düzgünleri ýerliklidir:

1. Jemiň önümi önümleriň jemine deň:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x). \qquad (1)$$

2. Tapawudyň önümi önümleriň tapawudyna deň:

$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x) \qquad (2)$$

1-nji mysal. Funksiýanyň önümini tapyň:

1) $f(x)=x^3+x^2-x+10$;   2) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

∆ Önümi tapmakda 1, 2-nji düzgünlerden we önümleriň jedweliniň 1, 3-nji bentlerinden peýdalanýarys, ýagny:

1) $f'(x)=(x^3)'+(x^2)'-(x)'+10=3x^2+2x-1$;

2) $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'-\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Jogaby: 1) $3x^2+2x-1$;   2) $\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. ▲

3. Hemişelik köpeldijini önüm belgisinden daşary çykarmak mümkin:
$(cf(x))'=c\cdot f'(x)$, c – hemişelik san   (3)

2-nji mysal. Funksiýanyň önümini tapyň:

1) $f(x)=7x^3-5x^2+4$;   2) $f(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}-x^3$.

∆ Önümi tapmakda 1, 2, 3-nji düzgünlerden we önümleriň jedweliniň 1, 3-nji bentlerinden peýdalanýarys, ýagny:

1) $f'(x)=(7x^3-5x^2+4)'=(7x^3)'-(5x^2)'+(4)'=21x^2-10x$;

2) $f'(x)=\left(3\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}-x^3\right)'=3\left(\sqrt{x}\right)'+5\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)'-(x^3)'=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}-3x^2$.

Jogaby: 1) $21x^2-10x$; ;   2) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}-3x^2$. ▲

4. Köpeltmek hasylynyň önümi:

$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$ (4)

3-nji mysal. Funksiýanyň önümini tapyň:

1) $f(x)=(2x+4)(3x+1)$; 2) $f(x)=(3x^2+4x+1)(2x+6)$; 3) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^2-5x\right)$

Δ Önümi tapmakda 1, 3, 4-nji düzgünlerden we önümleriň jedweliniň 1, 3-nji bentlerinden peýdalanýarys, ýagny:

1) $f'(x)=((2x+4)(3x+1))'=(2x+4)'(3x+1)+(2x+4)(3x+1)'=$
$=2(3x+1)+3(2x+4)=6x+2+6x+12=12x+14;$

2) $f'(x)=((3x^2+4x+1)(2x+6))'=(3x^2+4x+1)'(2x+6)+$
$+(3x^2+4x+1)(2x+6)'=(6x+4)(2x+6)+2(3x^2+4x+1)=18x^2+52x+26.$

3) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^2-5x\right)\right)'=\left(\sqrt[3]{x}\right)'\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\left(x^2-5x\right)'=$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(x^2-5x\right)+\sqrt[3]{x}\left(2x-5\right)=\frac{x^2-5x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\left(2x-5\right)\sqrt[3]{x}=\frac{x^2-5x+3\left(2x-5\right)\sqrt[3]{x^3}}{3\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\frac{x^2-5x+6x^2-15x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{7x^2-20x}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x\left(7x-20\right)}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\left(7x-20\right).$$

Jogaby: 1) $12x+14;$; 2) $18x^2+52x+26$; 3) $\frac{\sqrt[3]{x}}{3}\left(7x-20\right)$. ▲

5. Paýyň önümi:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2},\quad \text{munda}\quad g(x)\neq 0. \qquad (5)$$

4-nji mysal. Funksiýanyň önümini tapyň:

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$; 2) $f(x)=\frac{3x+7}{x-5}$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{5x-7}$.

Δ Önümi tapmakda 1, 3, 5-nji düzgünlerden we önümleriň jedweliniň 1, 3-nji bentlerinden peýdalanýarys, ýagny:

1) $f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2}=-\frac{3}{(x-2)^2};$

2) $f'(x)=\left(\frac{3x+7}{x-5}\right)'=\frac{(3x+7)'(x-5)-(3x+7)(x-5)'}{(x-5)^2}=$

$$=\frac{3(x-5)-(3x+7)\cdot 1}{(x-5)^2}=\frac{3x-15-3x-7}{(x-5)^2}=-\frac{22}{(x-5)^2}.$$

3) $f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{5x-7}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'\cdot(5x-7)-\sqrt{x}\cdot(5x-7)'}{(5x-7)^2}=$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-7)-\sqrt{x}\cdot 5}{(5x-7)^2}=\frac{5x-7-10x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}=-\frac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}.$$

Jogaby: 1) $-\frac{3}{(x-2)^2}$; 2) $-\frac{22}{(x-5)^2}$; 3) $-\frac{7+5x}{2\sqrt{x}(5x-7)^2}$. ▲

5-nji mysal. Funksiýalaryň önümini tapyň:

1) $f(x)=\sin x$; 2) $f(x)=\cos x$; 3) $f(x)=\operatorname{tg} x$.

∆ 1) Tapawutly gatnaşygy tapmakda sinuslaryň tapawudyny köpeltmek hasylyna getirmegiň formulasyndan peýdalanýarys:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2}.$$

$h\to 0$ -da $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$, $\cos\frac{2x+h}{2}\to\cos x$ bolýandygyny subut etmek mümkin.

Diýmek, $(\sin x)'=\cos x$.

2) Tapawutly gatnaşygy tapmakda kosinuslaryň tapawudyny köpeltmek hasylyna getirmek formulasyndan peýdalanýarys:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{2x+h}{2}}{h}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\frac{2x+h}{2}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin(x+\frac{h}{2}).$$

$h\to 0$ bolanda; $\sin(x+\frac{h}{2})\to\sin x$ bolýandygyny subut etmek mümkin.

Diýmek, $(\cos x)'=-\sin x$.

3) Önümi tapmagyň 5-nji düzgüni hem-de şu mysalyň 1-, 2-nji böleginiň jogaplaryndan peýdalanyp, $f(x)=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ funksiýanyň önümini tapýarys:

$$f'(x)=(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Jogaby: 1) $(\sin x)'=\cos x$; 2) $(\cos x)'=-\sin x$; 3) $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$. ▲

Önümi hasaplamakda differensirleme düzgünlerinden we aşakdaky jedwelden peýdalanmak maksada laýykdyr.

Önümleriň jedweli

№	*Funksiýalar*	*Önümler*
1.	c – hemişelik	0
2.	$kx+b$, k, b – hemişelikler	k
3.	x^p, p – hemişelik	px^{p-1}
4.	$\sin x$	$\cos x$
5.	$\cos x$	$-\sin x$
6.	$\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
7.	$\mathrm{ctg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
8.	a^x, $a>0$	$a^x \ln a$
9.	e^x	e^x
10.	$\ln x$	$1/x$
11.	$\lg x$	$\frac{1}{x\cdot\ln 10}$
12.	$\log_a x$, $a>0$, $a=1$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$

? Soraglar we ýumuşlar

1. Önümi hasaplamagyň düzgünlerini aýdyň. Her bir düzgüne mysal getiriň.

2. Önümleriň jedweliniň 4-, 5-nji bentlerini subut ediň.

3. Funksiýanyň $x=x_0$ nokatdaky önümi näme, önüm funksiýasy näme? Olaryň nähili tapawudy bar? Mysallarda düşündiriň.

Gönükmeler

Önümi tapyň (**20–22**):

20. 1) $y=x^4$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=\frac{1}{x^3}$.

21. 1) $y=x^4-x^2+x$; 2) $y=\frac{1}{x}+x$; 3) $y=x^3+\sqrt[3]{x}$;

4) $y=x^4+x^3+x^2-x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

22. 1) $y=(x-1)(x^2-5)$; 2) $y=\frac{x^2-4}{x-2}$;

3) $y=(x^4-\sqrt{x})(x^2+x)$; 4) $y=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$.

23. Maddy nokadyň berlen t_0 wagtdaky tizligini hasaplaň:

1) $s(t)=t^3-2t^2+t$; $t_0=5$; 2) $s(t)=5t+t^3+\sqrt{t}$, $t_0=4$.

24. Funksiýanyň abssissasy berlen nokatdaky önümini hasaplaň:

1) $f(x)=x^2+5x-3$, $x_0=1$;

2) $f(x)=4-3x$, $x_0=-2$;

3) $f(x)=2\sqrt{x}+x^3+\frac{1}{2}$, $x_0=4$;

4) $f(x)=x^2+\lg 2$, $x_0=1$.

Önümi tapyň (**25–29**):

25. 1) $y=2x^3-4x^2+5$; 3) $y=\frac{4}{x}+\frac{x}{4}$;

2) $y=7x^2-2x+\sqrt{7}$; 4) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.

26. 1) $y=(x-2)(x+2)$; 3) $y=\frac{x^2-9}{x-3}$;

2) $y=(x+2)^3$; 4) $y=x^2+\lg 7+\sin\frac{\pi}{9}$.

27. 1) $y=x^8+7x^2+5x$; 2) $y=2x^8+x^6$;

3) $y=\frac{x^4}{x^6-1}$; 4) $y=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$;

5) $y=x^{-2}+\frac{1}{x}$; 6) $y=x^4-4x$;

7) $y=\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}$; 8) $y=(x^5+x^{-5})(x^2+x^{-2})$.

28. 1) $f(x)=x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$; 2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}x$; 5) $y=8^x$;

6) $y=\log_2 x+\log_2 3$; 7) $y=2^x x$; 8) $y=x\ln x$;

9) $y=e^x\cos x$; 10) $y=2e^x-\ln x+\dfrac{1}{x}$.

29. 1) $y=2^x\sin x$; 2) $y=e^x(\cos x+\sin x)$; 3) $y=x\,\mathrm{tg}x$;

4) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; 5) $y=3\sin^2 x$; 6) $y=5x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$;

7) $y=(x+1)(\ln x+1)$; 8) $y=(2+x)^3$; 9) $y=(3x+5)^6+2019$.

30. Maddy nokadyň berlen t_0 wagtdaky tizligini tapyň:

1) $s(t)=t^2+5t+1$, $t_0=1$; 2) $s(t)=4t^3+\dfrac{1}{t}+1$, $t_0=1$.

31. Funksiýanyň berlen nokatdaky önümini tapyň:

1) $f(x)=(x+1)^3$, $x_0=-1$; 2) $f(x)=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

32. Önümi tapyň:

1) $y=2\sin x$; 2) $y=\sqrt{3}-\mathrm{tg}x$; 3) $y=-3\cos x$; 4) $y=\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x$;

5) $y=4x-\cos x$; 6) $y=x^2\sin x$; 7) $y=\dfrac{x}{\sin x}$; 8) $y=x\sin x+\cos x$.

33. Funksiýanyň x_0 nokatdaky önümini hasaplaň:

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x-5}$, $x_0=2$; 2) $f(x)=\mathrm{tg}x-x+2$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

3) $f(x)=x(\lg x-1)$, $x_0=10$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{2}\ln x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

34. Önümi nola öwürýän nokady tapyň:

1) $f(x)=x^4-4x$; 2) $f(x)=\mathrm{tg}x-x$;

3) $f(x)=x^8-2x^4+3$; 4) $f(x)=\log_2 x-\dfrac{x}{\ln 2}$.

10–12 ÇYLŞYRYMLY FUNKSIÝANYŇ ÖNÜMI

Çylşyrymly funksiýa. $y=(x^2+3x)^4$ funksiýa garalyň. Eger biz $g(x)=x^2+3x$, $f(x)=x^4$ belgilemeleri girizsek, $y=(x^2+3x)^4$ funksiýa $y=f(g(x))$ görnüşini alýar. Biz $y=f(g(x))$ funksiýa *çylşyrymly funksiýa* diýýäris.

1-nji mysal. Eger $f(x)=x^2$ we $g(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$ bolsa, aşakdakylary tapyň:

1) $f(g(2))$; 2) $f(g(-4))$; 3) $g(f(1))$;

4) $f((-4))$; 5) $f(f(1))$ 6) $g(g(-1))$.

Δ Berlen funksiýalardan peýdalanyp, hasaplamalary ýerine ýetirýäris:

1) $f(g(x))=f\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$, mundan $f(g(2))=f\left(\dfrac{2-2}{2+3}\right)=f(0)=0^2=0$;

2) $f(g(-4))=f\left(\dfrac{-4-2}{-4+3}\right)=f(6)=6^2=36$;

3) $g(f(1))=g(1^2)=g(1)=\dfrac{1-2}{1+3}=-\dfrac{1}{4}$;

4) $g(f(-4))=g((-4)^2)=g(16)=\dfrac{16-2}{16+3}=\dfrac{14}{19}$;

5) $f(f(1))=f(1^2)=f(1)=1^2=1$;

6) $g(g(-1))=g\left(\dfrac{-1-2}{-1+3}\right)=g\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{-\dfrac{3}{2}-2}{-\dfrac{3}{2}+3}=\dfrac{-3,5}{1,5}=-\dfrac{7}{3}$.

Jogaby: 1) 0; 2) 36; 3) $-\dfrac{1}{4}$; 4) $\dfrac{14}{19}$; 5) 1; 6) $-\dfrac{7}{3}$. ▲

Çylşyrymly funksiýanyň önümi üçin şu formula ýerlikli:

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x) \qquad (1)$$

2-nji mysal. Funksiýanyň önümini tapyň (k, b – hemişelik sanlar):

1) $f(x)=(kx+b)^n$; 2) $f(x)=\sin(kx+b)$;
3) $f(x)=\cos(kx+b)$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}(kx+b)$.

Δ 1) $f(t)=t^n$ we $t(x)=kx+b$ funksiýalara (1) formulany ulanýarys:

$$((kx+b)^n)'=(t^n)'\cdot(kx+b)'=nt^{n-1}\cdot k=n\cdot k\cdot(kx+b)^{n-1}.$$

2) $f(t)=\sin t$ we $t(x)=kx+b$ funksiýalara (1) formulany ulanýarys:

$$(\sin(kx+b))'=(\sin t)'\cdot(kx+b)'=k\cdot\cos t=k\cdot\cos(kx+b).$$

3) $f(t)=\cos t$ we $t(x)=kx+b$ funksiýalara (1) formulany ulanýarys:

$$(\cos(kx+b))'=(\cos t)'\cdot(kx+b)'=-k\cdot\sin t=-k\cdot\sin(kx+b).$$

4) $f(t)=\mathrm{tg}t$ *we* $t(x)=kx+b$ funksiýalara (1) formulany ulanýarys:

$$(\mathrm{tg}(kx+b))'=(\mathrm{tg}t)'\cdot(kx+b)'=\frac{1}{\cos^2 t}\cdot k=\frac{k}{\cos^2(kx+b)}.$$

Jogaby: 1) $((kx+b)^n)'=n\cdot k\cdot(kx+b)^{n-1}$; 2) $(\sin(kx+b))'=k\cdot\cos(kx+b)$;
3) $(\cos(kx+b)'=-k\cdot\sin(kx+b)$; 4) $(\mathrm{tg}(kx+b)'=\dfrac{k}{\cos^2(kx+b)}$. ▲

3-nji mysal. $f(x)=\sin 8x\cdot e^{(3x+2)}$ funksiýanyň önümini tapyň.

Δ Önümi tapmagyň 4-nji düzgüni hem-de (1) formulany ulanyp önümi tapýarys:

$$f'(x)=(\sin 8xe^{(3x+2)})'=(\sin 8x)'e^{3x+2}+\sin 8x\cdot(e^{3x+2})'=\cos 8xe^{3x+2}\cdot(8x)'+$$
$$+\sin 8xe^{3x+2}\cdot(3x+2)'=e^{3x+2}\cdot(8\cos 8x+3\sin 8x).$$

Jogaby: $e^{3x+2}\cdot(8\cos 8x+3\sin 8x)$ ▲

4-nji mysal. $h(x)=(x^3+1)^5$ funksiýanyň $x_0=1$ nokatdaky önümini tapyň.

Δ (1) formuladan peýdalanyp önümi hasaplaýarys:

$h'(x)=5(x^3+1)^4(x^3+1)'=5(x^3+1)^4 3x^2=15x^2(x^3+1)^4$.

Diýmek, $h'(1)=15(1^3+1)^4\cdot 1^2=15\cdot 16=240$. *Jogaby*: 240. ▲

5-nji mysal. $f(x)=2^{\cos x}$ funksiýanyň önümini tapyň.

Δ (1) formuladan peýdalanyp önümi hasaplaýarys:

$f'(x)=2^{\cos x}\ln 2\,(\cos x)'=-\sin x\,2^{\cos x}\ln 2.$ *Jogaby*: $-\sin x\,2^{\cos x}\ln 2$. ▲

6-njy mysal. $f(x)=\mathrm{tg}^5 x$ funksiýanyň önümini tapyň.

Δ (1) formuladan peýdalanyp önümi hasaplaýarys:

$f'(x)=5\,\mathrm{tg}^4x(\mathrm{tg}x)'=5\mathrm{tg}^4x\dfrac{1}{\cos^2 x}$. *Jogaby*: $\dfrac{5\mathrm{tg}^4 x}{\cos^2 x}$. ▲

7-nji mysal. $h(x)=3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x)$ funksiýanyň önümini tapyň.

Δ $f(x)=3^{\cos x}$ we $g(x)=\log_7(x^3+2x)$ belgilemeleri girizip, (1) formulany – çylşyrymly funksiýanyň önümini tapmagyň formulasyny ulanýarys:

$$f'(x)=(3^{\cos x})'=3^{\cos x}\ln 3\cdot(\cos x)'=-3^{\cos x}\ln 3\cdot\sin x,$$

$$g'(x)=(\log_7(x^3+2x))'=\frac{1}{(x^3+2x)\ln 7}\cdot(x^3+2x)'=\frac{3x^2+2}{(x^3+2x)\ln 7}$$

hem-de $h(x)$ funksiýany 2 funksiýanyň köpeltmek hasyly diýip garaýarys:

$$h'(x)=(3^{\cos x}\cdot\log_7(x^3+2x))'=(3^{\cos x})'\cdot\log_7(x^3+2x)+3^{\cos x}\cdot$$
$$\cdot(\log_7(x^3+2x))'=-3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\frac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}.$$

Jogaby: $-3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot\sin x\cdot\log_7(x^3+2x)+\dfrac{3^{\cos x}(3x^2+2)}{(x^3+2x)\ln 7}$. ▲

? Soraglar we ýumuşlar

1. Çylşyrymly funksiýa diýip nämä aýdylýar? Mysal getiriň.
2. Çylşyrymly funksiýanyň kesgitleniş oblasty nähili tapylýar?
3. Çylşyrymly funksiýanyň önümini tapmagyň formulasyny ýazyp bilersiňizmi?
4. Çylşyrymly funksiýanyň önümini tapmagy 1–2 mysalda görkeziň.

Gönükmeler

35. Eger $f(x)=x^2-1$ bolsa, görkezilen funksiýalary tapyň:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(2x)$; 3) $f(x^2-1)$; 4) $f(x+1)-f(x-1)$.

36. Eger $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ bolsa, görkezilen funksiýalary tapyň:

1) $f(\frac{1}{x})$; 2) $f(\frac{1}{x^2})$; 3) $f(x-1)$; 4) $f(x+1)$.

37. Eger $f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$ bolsa, aşakdakylary tapyň:

1) $f(g(x))$; 2) $f(f(x))$; 3) $g(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

38. Eger $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2+1$ bolsa, aşakdakylary tapyň:

1) $\frac{f(x^2)}{g(x)-1}$; 2) $f(x)+3g(x)+3x-2$;

3) $f(g(x))$; 4) $g(f(x))$.

Deňlikden peýdalanyp, $f(x)$-i tapyň (**39–42**):

39. $f(x+1)=x^2-1$. **40*.** $f(x)+3\cdot f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$.

41. $f(x+3)=x^2-4$. **42*.** $2f(x)+f(\frac{1}{x})=x$.

Önümi tapyň (**43–44**):

43. 1) $f(x)=(3x-2)^5$; 2) $f(x)=e^{\sin x}$; 3) $f(x)=(4-3x)^7$;
4) $f(x)=\sin^2 x$; 5) $f(x)=\frac{1}{(2x+9)^3}$; 6) $f(x)=\ln(4x-1)$;
7) $f(x)=\sqrt{4x-5}$; 8) $f(x)=(2x-1)^{10}$; 9) $f(x)=\cos^8 x$.

44*. 1) $e^{\sin x}\cdot \mathrm{tg}\frac{1}{x}$; 2) $3^{\mathrm{ctg}x}\cdot\log_a\cos x$; 3) $\ln\cos x$;
4) $(x^2-5x+4)^3\cdot 10^{\mathrm{tg}x}$; 5) $7^{\log 3x}\cdot(x^3-2x+1)^3$; 6) $3^{\cos x}\cdot(x^2-8x+4)^2$;
7) $\mathrm{ctg}x\cdot\ln(x^2+x)$; 8) $x^2\cos^{30}x+4$; 9) $5\ln x\cdot\mathrm{ctg}x$.

13–14 FUNKSIÝANYŇ GRAFIGINE GEÇIRILEN GALTAŞMA WE NORMAL DEŇLEMELERI

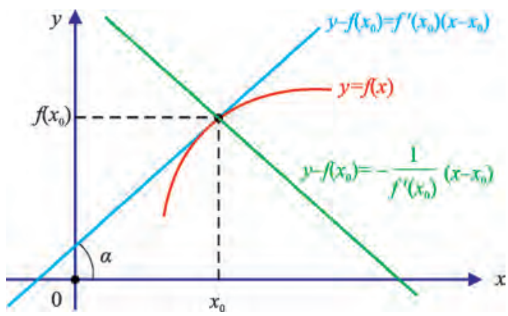
Galtaşma deňlemesi. $y=f(x)$ funksiýa grafiginiň $(x_0;\ f(x_0))$ nokadyndan geçýän galtaşma deňlemesini tapýarys (19-njy surat). Galtaşma göni çyzyk bolany üçin onuň umumy görnüşi $y=kx+b$ bolýar. Önümiň geometrik manysyna görä $k=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$, ýagny galtaşma deňlemesi $y=f'(x_0)x+b$ görnüşini alýar. Bu galtaşma $(x_0;\ f(x_0))$ nokatdan geçeni üçin $f(x_0)=f'(x_0)x_0+b$ bolýar, mundan $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$. Tapylan b-ni galtaşma deňlemesine goýup,

$$y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0 \text{ ýa-da}$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

deňlemäni alýarys.

$y-f(x_0)=f'(x)(x-x_0)$ deňleme $(x_0;\ f(x_0))$ nokatda $y=f(x)$ funksiýa geçirilen galtaşma deňlemesi bolýar.



19-njy surat.

1-nji mysal. $f(x)=x^2-5x$ funksiýanyň grafigine $x_0=2$ abssissaly nokatda geçirilen galtaşma deňlemesini ýazyň.

Δ Ilki funksiýanyň we funksiýadan alnan önümiň $x_0=2$ nokatdaky bahasyny tapýarys:

$$f(x_0)=f(2)=2^2-5\cdot2=-6, \quad f'(x)=2x-5, \quad f'(2)=2\cdot2-5=-1.$$

Tapylanlary (1) deňlemä goýup, galtaşma deňlemesini alýarys:

$y-(-6)=-1\cdot(x-2)$ yoki $y=-x-4$. *Jogaby:* $y=-x-4$. ▲

2-nji mysal. $f(x)=x^3-2x^2$ funksiýanyň grafigine $x_0=1$ abssissaly nokatda geçirilen galtaşma deňlemesini ýazyň.

∆ Ilki funksiýanyň we funksiýadan alnan önümiň $x_0=1$ nokatdaky bahasyny tapýarys:

$$f(x_0)=f(1)=1^3-2\cdot 1^2=-1, \qquad f'(x)=3x^2-4x, \qquad f'(1)=3\cdot 1^2-4\cdot 1=-1.$$

Tapylanlary (1) deňlemä goýup, galtaşma deňlemesini alýarys:

$y-(-1)=-1(x-1)$ ýa-da $y=-x$. *Jogaby:* $y=-x$. ▲

Eger $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň x_0 abssissaly nokadynda geçirilen galtaşma $y=kx+b$ göni çyzyga parallel bolsa, $f'(x_0)=k$ bolýar. Bu şert arkaly funksiýanyň berlen göni çyzyga parallel bolan galtaşmasy tapylýar.

3-nji mysal. $f(x)=x^2-3x+4$ funksiýa üçin $y=2x-1$ göni çyzyga parallel bolan galtaşma deňlemesini ýazyň.

∆ Galtaşmanyň berlen göni çyzyga parallellik şertine görä, $f'(x_0)=2$ ýa-da $2x_0-3=2$ deňlemäni alýarys. Bu deňlemede $x_0=2,5$ bolany üçin galtaşma abssissasy $x_0=2,5$ bolan nokatdan geçýär. Hasaplamalary ýerine ýetirýäris:

$$f(x_0)=f(2,5)=2,5^2-3\cdot 2,5+4=6,25-7,5+4=2,75$$

$$f'(x_0)=f(2,5)=2.$$

Indi galtaşma deňlemesini tapýarys:

$$y-2,75=2(x-2,5) \text{ ýa-da } y=2x-2,25.$$

Jogaby: $y=2x-2,25$. ▲

4-nji mysal. $f(x)=x^3-2x^2+3x-2$ funksiýanyň grafigine $x_0=4$ abssissaly nokatda geçirilen galtaşma deňlemesini düzüň we galtaşma bilen Ox okunyň položitel ugry düzýän burçuň sinusyny tapyň.

∆ Ilki funksiýanyň we funksiýadan alnan önümiň $x_0=4$ nokatdaky bahasyny tapýarys:

$f(x_0)=f(4)=3\cdot 4^3-2\cdot 4^2+3\cdot 4-2=170$, $f'(x)=3x^2-4x+3$, $f'(4)=3\cdot 4^2-4\cdot 4+3=35$.

Tapylanlary (1) deňlemä goýup, galtaşma deňlemesini alýarys:

$y-170=35(x-4)$ ýa-da $y=35x+30$.

Önümiň geometrik manysyna görä $\operatorname{tg}\alpha=35$, mundan

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{35}{\sqrt{1+35^2}} = \frac{35}{\sqrt{1226}}.$$

Jogaby: $y=35x+30$; $\sin\alpha = \frac{35}{\sqrt{1226}}$. ▲

5*-nji mysal. $f(x)=x^2$ parabola abssissasy x_0 bolan A nokatda geçirilen galtaşma Ox okuny $\frac{1}{2}x_0$ nokatda kesip geçýär. Şu dawany subut ediň.

∆ $f'(x)=2x$, $f(x_0)=x_0^2$, $f'(x_0)=2x_0$.

Galtaşma deňlemesine (1) görä $y=2x_0\cdot x-x_0^2$ bolýar. Onuň Ox oky bilen kesişme nokady $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$ bolýandygy aýdyň. Mundan $y=x^2$ parabola abssissasy x_0 bolan A nokatda geçirilen galtaşmany gurmak usuly gelip çykýar: A nokat we $\left(\frac{x_0}{2};0\right)$ nokat arkaly geçýän göni çyzyk $y=x^2$ parabola A nokatda galtaşýar.

Normal deňlemesi. $y=f(x)$ funksiýanyň grafigine $x=x_0$ abssissaly nokatda geçirilen galtaşma $x=x_0$ nokatda perpendikulýar bolan

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (2)$$

göni çyzyga $y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň x_0 abssissaly nokadynda geçirilen normal diýilýär (19-njy surat).

6-njy mysal. $f(x)=x^5$ funksiýanyň grafigine $x_0=1$ abssissaly nokatda geçirilen normal deňlemesini düzüň.

∆ Önümiň formulasyna görä $f'(x)=5x^4$ bolýar. Funksiýanyň we onuň önüminiň $x_0=1$ nokatdaky bahalaryny hasaplaýarys:

$f(1)=1^5=1$ we $f'(1)=5\cdot1^4=5$. Bu bahalary normalyň deňlemesine goýýarys we $y-1=-\frac{1}{5}(x-1)$ ýa-da $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$ deňlemäni alýarys.

Jogaby: $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$. ▲

Ýatlatma: $f(x)=x^5$ funksiýanyň grafigine $x_0=1$ abssissaly nokatda geçirilen galtaşma deňlemesi $y=5x-4$ bolýar (subut ediň!). Galtaşmanyň we normalyň burç koeffisiýentiniň köpeltmek hasyly $5\cdot(-\frac{1}{5})=-1$ bolýandygyna üns beriň.

? Soraglar we ýumuşlar

1. $y=f(x)$ funksiýanyň grafigine x_0 abssissaly nokatda geçirilen galtaşma deňlemesini ýazyň.
2. $y=f(x)$ funksiýanyň grafigine x_0 abssissaly nokatda geçirilen normal deňlemesini ýazyň.
3. Berlen funksiýanyň käbir göni çyzyga parallel bolan galtaşmasy nähili tapylýar? Mysalda düşündiriň.

Gönükmeler

45. Funksiýanyň grafigine abssissasy $x_0=1$; $x_0=-2$; $x_0=0$ bolan nokatda geçirilen galtaşma deňlemesini ýazyň:

1) $f(x)=2x^2-5x+1$; 2) $f(x)=3x-4$; 3) $f(x)=6$;
4) $f(x)=x^3-4x$; 5) $f(x)=e^x$; 6) $f(x)=2^x$;
7) $f(x)=2^x+\ln 2$; 8) $f(x)=\sin x$; 9) $f(x)=\cos x$;
10) $f(x)=\cos x-\sin x$; 11) $f(x)=e^x x$; 12) $f(x)=x\cdot\sin x$.

46. Funksiýa üçin $y=7x-1$ göni çyzyga parallel bolan galtaşma deňlemesini ýazyň:

1) $f(x)=x^3-2x^2+6$; 2) $f(x)=4x^2-5x+3$; 3) $f(x)=8x-4$.

47. Berlen $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalaryň galtaşmalary parallel bolýan nokatlary tapyň:

1) $f(x)=3x^2-5x+4,$ $g(x)=4x-5;$
2) $f(x)=8x+9,$ $g(x)=-5x+8;$
3) $f(x)=7x+11,$ $g(x)=7x-9;$
4) $f(x)=x^3-8,$ $g(x)=x^2+5;$
5) $f(x)=x^3+x^2,$ $g(x)=5x-7;$

6) $f(x)=x^4+11,$ $\qquad g(x)=x^3+10.$

48. Funksiýanyň grafigine abssissasy a) $x_0=1$; b) $x_0=-2$; d) $x_0=0$ bolan nokatda geçirilen normal deňlemesini tapyň:

1) $f(x)=3x^2-5x+1$; 2) $f(x)=3x-40$; 3) $f(x)=7$;
4) $f(x)=x^3-10x$; 5) $f(x)=e^x$; 6) $f(x)=12^x$;
7) $f(x)=\sin x$; 8) $f(x)=\cos x$; 9) $f(x)=\cos x-\sin x$;
10) $f(x)=e^{\pi x}$; 11) $f(x)=x\cdot\cos x$; 12) $f(x)=x\cdot\sin x$.

Barlag işiniň nusgasy

I wariant

1) $f(x)=x^3+2x^2-5x+3$ funksiýa üçin $x_0=2$ we $\Delta x=0{,}1$ bolanda funksiýa artdyrmasynyň argument artdyrmasyna-gatnaşygyny tapyň.

2) $f(x)=-8x^2+4x+1$ funksiýanyň $x_0=-3$ nokatdaky önümini hasaplaň.

3) $f(x)=x^3-7x^2+8x-5$ funksiýanyň grafigine $x_0=-4$ abssissaly nokatda geçirilen galtaşma deňlemesini ýazyň.

4) Maddy nokat $s(t)=8t^2-5t+6$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär. Eger t – sekunt, s – metrlerde ölçelýän bolsa, nokadyň $t_0=8$ sekuntdaky pursatlaýyn tizligini tapyň.

5) Köpeltmek hasylynyň önümini tapyň: $(3x^2-5x+4)\cdot e^x$.

II wariant

1) Paýyň önümini tapyň: $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$.

2) Çylşyrymly funksiýanyň önümini tapyň: $\mathrm{ctg}^{15}x$.

3. $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x}}$ funksiýanyň $x_0=\dfrac{1}{16}$ nokatdaky önümini hasaplaň.

4. $f(x)=\ln(x+1)$ funksiýanyň grafigine $x=0$ nokatda geçirilen galtaşmanyň deňlemesini ýazyň.

5. $s(t)=0{,}5t^2-6t+1$ kanununalaýyklyk bilen hereketlenýän maddy nokadyň $t=16$ sekuntdaky pursatlaýyn tizligini tapyň. (t– sekuntda, s – metrlerde ölçelýär).

15–17 MESELELER ÇÖZMEK

49. Berlen $y=f(x)$ funksiýa, x_0 we x nokatlara laýyk h we Δy-i hasaplaň:

1) $f(x)=4x^2-3x+2$, $x_0=1$, $x=1{,}01$; 2) $f(x)=(x+1)^3$, $x_0=0$, $x=0{,}1$.

50. Eger $x_0=3$ we $\Delta x=0{,}03$ bolsa, berlen funksiýalar üçin: a) funksiýanyň artdyrmasyny; b) funksiýanyň artdyrmasynyň argument artdyrmasyna gatnaşygyny tapyň:

1) $f(x)=7x-5$; 2) $f(x)=2x^2-3x$; 3) $f(x)=x^3+2$; 4) $f(x)=x^3+4x$.

51. Eger $x_0=2$ we $\Delta x=0{,}01$ bolsa, berlen funksiýalar üçin: a) funksiýanyň artdyrmasyny; b) funksiýanyň artdyrmasynyň argument artdyrmasyna gatnaşygyny tapyň:

1) $f(x)=-4x+3$; 2) $f(x)=-8$; 3) $f(x)=x^2+10x$; 4) $f(x)=x^3-10$.

52. $x\to 0$ bolsa, funksiýa haýsy sana ymtylýar:

1) $f(x)=x^3-2x^2+3x+4$; 2) $f(x)=x^5-6x^4+8x-7$;

3) $f(x)=(x^2-5x+1)(x^3-7x^2-11x+6)$;

4) $f(x)=\dfrac{x^2-x-19}{x^2+7x-28}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^3-8x}{x^3+x^2+x+1}$?

53. Funksiýanyň önümini tapyň:

1) $y=17x$; 2) $y=29x-3$; 3) $y=-15$; 4) $y=16x^2-3x$;

5) $y=-5x+40$; 6) $y=18x-x^2$; 7) $y=x^2+15x$;

8) $y=16x^3+5x^2-2x+14$; 9) $y=3x^3+2x^2+x$.

54. Funksiýanyň önümini: a) $x=-3$; b) $x=1{,}1$; c) $x=0{,}4$; d) $x=-0{,}2$ nokatlarda hasaplaň:

1) $y=15x$; 2) $y=9x+3$; 3) $y=-20$; 4) $y=5x^2+x$;

5) $y=-8x+4$; 6) $y=8x-x^2$; 7) $y=x^2+25x$; 8) $y=x^3+5x^2-2x+4$.

55. $y=f(x)$ funksiýanyň önümini kesgitlemä görä tapyň:

1) $f(x)=2x^2+3x+5$; 3*) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$;

2) $f(x)=(x+2)^3$; 4*) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

56. $y=f(x)$ funksiýanyň x_0 nokatdaky önümini tapyň:

1) $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1,\ x_0=1$; 2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\sin 22°,\ x_0=-1$;

3) $f(x)=(2x+1)(\sqrt{x}-1),\ x_0=4$; 4) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1},\ x_0=-3$

57. Maddy nokat $s(t)=\frac{4}{3}t^3-t+5$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär (s metrde, t – sekuntda). Maddy nokadyň 2-nji sekuntdaky tizligini tapyň.

58. Funksiýanyň önümini tapyň:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x}+2x^3$;

3*) $y=\sqrt[5]{x}+x\cdot\mathrm{tg}x-\log_3 x$; 4) $y=(2x+3)^3$;

5*) $y=x\cdot\ln x\cdot(x+1)$; 6) $y=(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)$;

7) $y=\frac{x+2}{\sin x}$; 8) $y=10^x+\log_2 5+\cos 15°$;

9) $y=3^{-x}\cdot\sin x$; 10*) $y=\mathrm{tg}x\cdot\cos x+7^x\cdot x^7$;

11) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-8x^2+3$; 12) $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sin x+5$;

13) $f(x)=x^{10}-80x$; 14) $f(x)=8x-\frac{2^x}{\ln 2}$.

59. Funksiýanyň önüminiň x_0 nokatdaky bahasyny hasaplaň:

1) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$, $x_0=0$; 2) $f(x)=(x^2+3x)\ln x$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}$, $x_0=1$; 4) $f(x)=e^x(x-\ln 2)$, $x_0=\ln 2$.

60*. $f'(x)>0$ deňsizligi çözüň:

1) $f(x)=x\cdot\ln 27-3^x$; 2) $f(x)=\sin x-2x$;

61. Maddy nokat $s(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär.

Maddy nokadyň tizligi haçan nola deň bolýar? Munuň manysy näme?

62. Önümi tapyň: 1) $y = x^5 - x^4 + x$; 2) $y = \frac{1}{x^2} - x$; 3) $y = x^4 + \sqrt[5]{x}$.

63. Maddy nokadyň t_0 wagtdaky tizligini tapyň:

1) $x(t) = t^4 - 2t^3 + t$, $t_0 = -5$; 2) $x(t) = -5t + t^2 - \sqrt{t}$, $t_0 = 4$.

Önümi tapyň (**64–66**):

64. 1) $y=(x+2)(x^2-5x)$; 2) $y = \frac{x^2 - 3x}{x+8}$; 3) $y = (x^4 + \sqrt{x})(x^3 - 5x)$;

4) $y = 2x^3+4x^2+5x$; 5) $y = \frac{14}{x} - \frac{x}{14}$; 6) $y = 7x^2 + 12x + \sqrt{2019}$.

65*. 1) $y = \frac{x^8}{x^{10} - 1}$; 2) $y = \frac{x^3 + x + 1}{x^5 + 7}$; 3) $y=(x^{10}+x^{-10})(x^8+x^{-8})$.

66*. 1) $y = \frac{3^x \cdot \sin x}{\cos x}$; 2) $y = e^{5x}(\cos x - \sin x)$;

3) $y = x\text{ctg}x$; 4) $y = \frac{\ln x}{x^2}$.

67*. Önümi x_0 nokatda hasaplaň:

1) $f(x) = \frac{5x+1}{13x-5}$, $x_0=-2$; 2) $f(x)=\text{ctg}x-2x+2$, $x_0 = \frac{-\pi}{4}$;

3) $f(x) = x^2(\lg x - 1)$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = \text{ctg}x - \frac{1}{20}\ln x$, $x_0=1$.

68*. Çylşyrymly funksiýanyň önümini tapyň:

1) $x^2 \cdot \sin x$; 2) $\log_{15}\cos x$; 3) $\ln\text{ctg}x$;

4) $\text{tg}^{35}x$; 5) $e^{\text{ctg}x}$; 6) $23^{\cos x}$;

7) $35^{\sin x}$; 8) $(x^2-10x+7)\ln\cos x$;

9) $\frac{x^5 - 6x + 4}{e^x}$; 10) $e^{-3x}(x^4-3x^2+2)$; 11) $\ln\text{tg}x$;

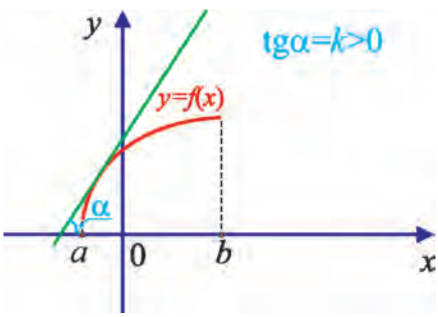
12) $\frac{x^3 + 7x + 1}{e^{2x}}$; 13) $e^{5x}(x^5+8x+11)$; 14) $\ln\cos 2x$.

18–21 ÖNÜMIŇ KÖMEGINDE FUNKSIÝANY BARLAMAK WE GRAFIKLERI GURMAK

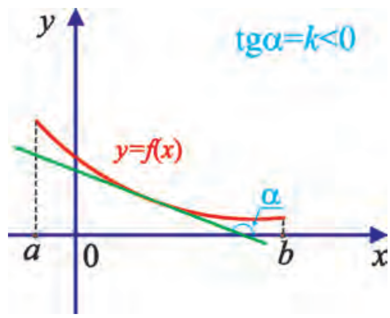
Funksiýanyň artmagy we kemelmegi. Artýan we kemelýän funksiýalar bilen tanyşsyňyz. Indi funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny kesgitlemeküçin önüm düşünjesinden peýdalanýarys.

1-nji teorema. $y=f(x)$ funksiýa $(a; b)$ aralykda kesgitlenen we önümi bar bolsun. Eger $x\in(a; b)$ üçin $f'(x)>0$ bolsa, $y=f(x)$ funksiýa $(a; b)$ aralykda artýan funksiýa bolýar (20-nji surat).

2-nji teorema. $y=f(x)$ funksiýa $(a; b)$ aralykda kesgitlenen we önümi bar bolsun. Eger $x\in(a; b)$ üçin $f'(x)<0$ bolsa, $y=f(x)$ funksiýa $(a; b)$ aralykda kemelýän funksiýa bolýar (21-nji surat).



20-nji surat.



21-nji surat.

1, 2-nji teoremalary subutsyz kabul edýäris.

1-nji mysal. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$.

Δ Bu funksiýa $(-\infty;+\infty)$ aralykda kesgitlenen. Onuň önümi:

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$$

$f'(x)>0$, $f'(x)<0$ deňsizlikleri aralyklar usuly bilen çözüp $(-\infty;-1)$ we $(2;+\infty)$ aralyklarda funksiýanyň artýandygyny hem-de $(-1;2)$ aralykda funksiýanyň kemelýändigini bilip alýarys.

Jogaby: $(-\infty;-1)$ we $(2;+\infty)$ aralyklarynda funksiýa artýar; $(-1;2)$ aralykda bolsa funksiýa kemelýär. ▲

2-nji mysal. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň: $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

Δ Bu funksiýa $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ aralykda kesgitlenen. Onuň önümi: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$; $f'(x)>0$, ýagny $1-\frac{1}{x^2}>0$ deňsizligi aralyklar usuly bilen çözüp, önümiň $(-\infty;-1)$ we $(1;+\infty)$ aralyklarda položitelligini tapýarys. Edil şonuň ýaly, $f'(x)<0$, ýagny $1-\frac{1}{x^2}<0$ deňsizligi aralyklar usuly bilen çözüp, bu deňsizlik $(-1;0)$ we $(0;1)$ aralyklarda ýerine ýetirilýändigini kesgitleýäris.

Jogaby: funksiýa $(-\infty;-1)$ we $(1;+\infty)$ aralyklarda artýar; funksiýa $(-1; 0)$ we $(0; 1)$ aralyklarda bolsa kemelýär. ▲

Funksiýanyň stasionar nokatlary. $y=f(x)$ funksiýa $(a; b)$ aralykda kesgitlenen bolsun.

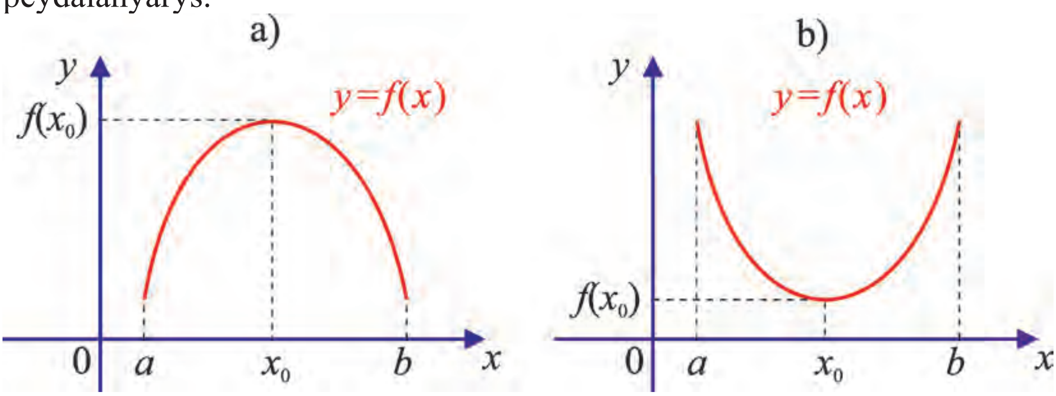
1-nji kesgitleme. $y=f(x)$ funksiýanyň önümi 0-a deň bolýan nokatlara *stasionar nokatlar* diýilýär.

3-nji mysal. Funksiýanyň stasionar nokatlaryny tapyň: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$
.

Δ Funksiýanyň önümini tapyp, ony nola deňleýäris: $f'(x)=6x^2-6x-12=0$. Bu deňlemäni çözüp funksiýanyň stasionar nokatlary $x_1=-1$, $x_2=2$ bolýandygyny tapýarys.

Jogaby: funksiýanyň stasionar nokatlary $x_1=-1$, $x_2=2$. ▲

Funksiýanyň lokal maksimumlary we minimumlary. Funksiýanyň lokal maksimumlaryny we minimumlaryny kesgitlemek üçin önümden peýdalanýarys.



22- nji surat

3-nji teorema. $f(x)$ funksiýa $(a;b)$ aralykda kesgitlenen we $f'(x)$ bar; $(a;x_0)$ aralykda $f'(x)>0$ we $(x_0;b)$ aralykda $f'(x)<0$ bolsun, $x_0\in(a, b)$. Onda x_0 nokat $f(x)$ funksiýanyň lokal maksimumy bolýar.

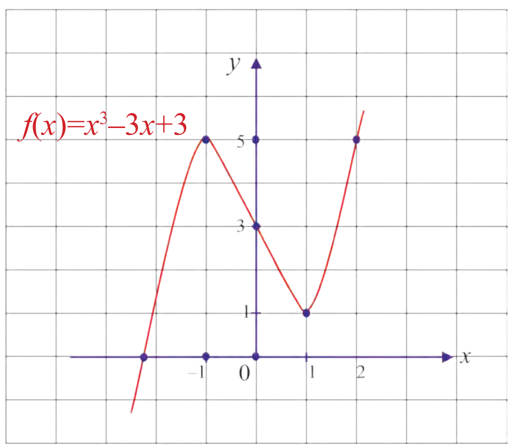
4-nji teorema. $f(x)$ funksiýa $(a;b)$ aralykda kesgitlenen we $f'(x)$ bar; $(a;x_0)$ aralykda $f'(x)<0$ we $(x_0;b)$ aralykda $f'(x)>0$ bolsun, $x_0 \in (a,\ b)$. Onda x_0 nokat $f(x)$ funksiýanyň lokal minimumy bolýar.

3, 4-nji teoremalary subutsyz kabul edýäris.

2-nji kesgitleme. Funksiýanyň lokal maksimumlaryna we minimumlaryna onuň *ekstremumlary* diýilýär.

4-nji mysal. Funksiýanyň lokal maksimum we minimum nokatlaryny tapyň: $f(x)=x^3-3x+3$.

Δ Funksiýanyň önümini tapýarys: $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. Önüm ähli nokatlarda kesgitlenen we $x=\pm1$ nokatlarda nola öwrülýär. Şonuň üçin $x=\pm1$ nokatlar funksiýanyň kritik nokatlarydyr. Aralyklar usulyndan peýdalanyp $(-\infty;-1)$ we $(1;+\infty)$ aralyklarda $f'(x)>0$, $(-1;1)$ aralykda bolsa $f'(x)<0$ bolýandygyny anyklaýarys. Diýmek, $x=-1$ lokal maksimum we $x=1$ lokal minimum nokatlary eken (23-nji surat).



23-nji surat.

Jogaby: $x=-1$ lokal maksimum we $x=1$ lokal minimum nokat. ▲

Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalary bilen 10-njy synpdan tanyş.

$f(x)$ funksiýa $[a;\ b]$ kesimde kesgitlenen we $(a;\ b)$-de önümi bar bolsun. Onuň iň uly bahasyny tapmagyň düzgüni şeýle:

1) funksiýanyň şu aralykdaky ähli stasionar nokatlary tapylýar;

2) funksiýanyň stasionar, araçäk a we b nokatlardaky bahalary

hasaplanýar;

3) bu bahalaryň iň ulusyna funksiýanyň şu aralykdaky iň uly bahasy diýilýär.

Funksiýanyň iň kiçi bahasy hem şunuň ýaly tapylýar.

5-nji mysal. $f(x)=x^3+4{,}5x^2-9$ funksiýanyň $[-4; 2]$ aralykdaky iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň.

△ Funksiýanyň önümini tapýarys: $f'(x)=3x^2+9x$. Önümi nola deňläp, funksiýanyň stasionar nokatlaryny tapýarys: $f'(x)=3x(x+3)=0$, $x_1=0$ we $x_2=-3$. Funksiýanyň tapylan $x_1=0$, $x_2=-3$ hem-de $a=-4$, $b=2$ nokatlardaky bahalaryny tapýarys:

$f(0)=0^3+4{,}5\cdot0^2-9=-9$, $\quad f(-3)=(-3)^3+4{,}5\cdot(-3)^2-9=4{,}5$,

$f(-4)=(-4)^3+4{,}5\cdot4^2-9=-1$, $\quad f(2)=2^3+4{,}5\cdot2^2-9=17$.

Diýmek, funksiýanyň iň uly bahasy 17 we iň kiçi bahasy –9 eken.

Jogaby: funksiýanyň iň uly bahasy 17 we iň kiçi bahasy –9. ▲

Önümiň kömeginde funksiýany barlamak we grafigini gurmak. Funksiýanyň grafigini gurmagy aşakdaky yzygiderlikde amala aşyrýarys.

Funksiýanyň:

1. Kesgitleniş oblastyny;
2. Stasionar nokatlaryny;
3. Artýan we kemelýän aralyklaryny;
4. Lokal maksimumlaryny we minimumlaryny hem-de funksiýanyň şu nokatlardaky bahalaryny;
5. Tapylan maglumatlara görä funksiýanyň grafigini gurýarys.

Grafigi gurmakda funksiýanyň grafigini koordinata oklary bilen kesişme we başga käbir nokatlaryny tapmak maksada laýykdyr.

6-njy mysal. $f(x)=x^3-3x$ funksiýany önümiň kömeginde barlaň we onuň grafigini guruň.

1. Funksiýa $(-\infty; +\infty)$ aralykda kesgitlenen.

2. Stasionar nokatlaryny tapýarys:

$f'(x)=(x^3-3x)'=3x^2-3=0$. $x_1=1$ we $x_2=-1$ stasionar nokatlardyr.

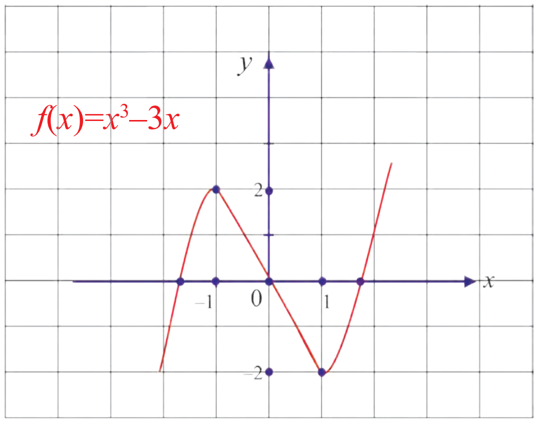
3. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapýarys:

$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ aralyklarda $f'(x)>0$ bolany üçin $f(x)$ funksiýa şu aralyklarda artýar we $(-1; 1)$ aralykda $f'(x)<0$ bolany üçin $f(x)=x^3-3x$ funksiýa $(-1; 1)$ aralykda kemelýär.

4. $x=-1$ bolanda funksiýa lokal maksimuma $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)=2$ we $x=1$ bolanda funksiýa lokal minimuma $f(1)=1^3-3\cdot 1=-2$ eýe.

5. Funksiýanyň Ox oky bilen kesişme nokatlaryny tapýarys:

$x^3-3x=x(x^2-3)=0$. Mundan $x=0$ ýa-da $x^2-3=0$ deňlemäni alýarys. Deňlemäni çözüp $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$ funksiýanyň grafiginiň Ox oky bilen kesişme nokatlaryny tapýarys. Netijede 24-nji suratdaky grafigi alýarys.



24-nji surat.

Soraglar we ýumuşlar

1. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklary nähili tapylýar?

2. Funksiýanyň stasionar nokadyna kesgitleme beriň.

3. Funksiýanyň lokal maksimumlary we lokal minimumlary nähili tapylýar?

4. Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalary nähili tapylýar?

5. Önümiň kömeginde funksiýanyň grafigini gurmagyň yzygiderligini aýdyň we bir mysalda düşündiriň.

6. Funksiýanyň stasionar nokatlary onuň ekstremum nokatlary bolmagy hökmanmy? Mysallar getiriň.

7. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$ funksiýany önümiň kömeginde barlaň we grafigini guruň.

Gönükmeler

69. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

1) $f(x)=2-9x$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}x-8$; 3) $f(x)=x^3-27x$;

4) $f(x)=\frac{x-1}{x}$; 5) $f(x)=x^2-2x+4$; 6) $f(x)=x(x^2-6)$;

7) $f(x)=-x^2+2x-3$; 8) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 9) $f(x)=x^4-2x^2$;

10) $f(x)=3x^4-8x^3+16$; 11) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; 12) $f(x)=\sin x$;

13) $f(x)=\cos x$; 14) $f(x)=\mathrm{tg}x$; 15*) $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$.

70. Funksiýanyň stasionar nokatlaryny tapyň:

1) $f(x)=2x^2-3x+1$; 2) $f(x)=9x-\frac{1}{3}x^3$; 3*) $f(x)=|x-1|$;

4) $f(x)=x^2$; 5) $f(x)=8x^3+5x$; 6) $f(x)=3x-4$;

7*) $f(x)=|x|+1$; 8) $f(x)=2x^3+3x^2-6$; 9) $f(x)=3+8x^2-x^4$.

71. Funksiýanyň lokal maksimumlaryny we minimumlaryny tapyň:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{2}x^4$; 2) $f(x)=(x-4)^8$; 3) $f(x)=4-3x^2-2x^3$;

4) $f(x)=\frac{5}{x}+\frac{x}{5}$; 5) $f(x)=x^4-2x^3+x^2-3$; 6) $f(x)=3\mathrm{tg}x$;

7) $f(x)=2\sin x+3$; 8) $f(x)=-5\cos x-7$; 9) $f(x)=x^4-x^3+4$.

72. Funksiýanyň artýan, kemelýän aralyklaryny tapyň:

1) $f(x)=x^3-27x$; 2*) $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$; 3*) $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$;

4) $f(x)=5\sin x+13$; 5) $f(x)=15\cos x-7$; 6) $f(x)=-3\mathrm{tg}x$.

73. Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň:

1) $f(x)=x^4-8x^2+3$, $x\in[-4;1]$; 2) $f(x)=3x^5-5x^3+1$, $x\in[-2;2]$;

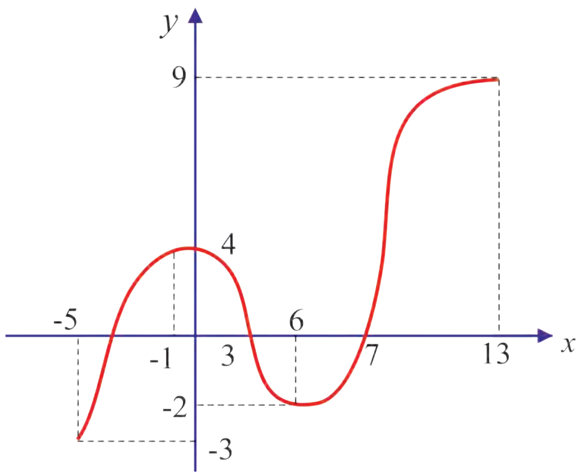
3) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $x\in[1;2]$; 4) $f(x)=3x^3-6x^2-5x+8$, $x\in[-1;4]$.

74. Funksiýany barlaň we grafigini guruň:

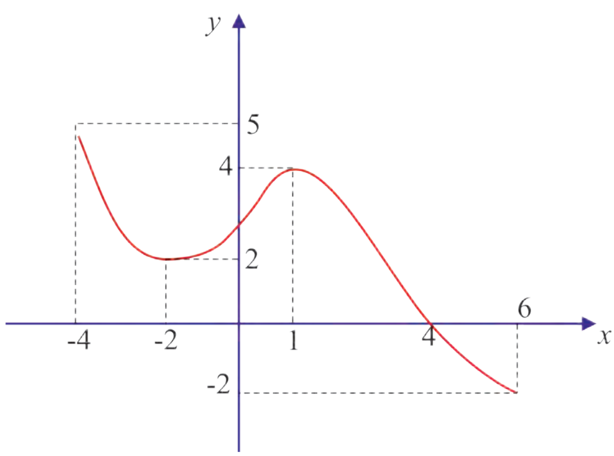
1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2;$ 2) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1;$ 3) $y = x^4 - 4x^3 + 15.$

75*. Funksiýanyň önüminiň grafigine garap (25, 26-njy suratlar), aşakdakylary tapyň:

1) stasionar nokatlary; 2) artýan aralyklaryny;
3) kemelýän aralyklaryny; 4) lokal maksimumlaryny;
5) lokal minimumlary.



25-nji surat.



26-njy surat.

Barlag işiniň nusgasy
I wariant

1. Önümi tapyň: $f(x)=20x^3+6x^2-7x+3$.

2. $f(x)=x^2-5x+4$ we $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ bolsa, $f(g(3))$ -i hasaplaň.

3. $f(x)=x^3-5x^2+7x+1$ funksiýa üçin aşakdakylary tapyň:

1) stasionar nokatlary;
2) artýan aralyklaryny;
3) kemelýän aralyklaryny;
4) lokal maksimumlaryny;
5) lokal minimumlaryny.

4. Önümi tapyň: $(3x+5)^3+\sin^2 x$.

5. $f(x)=\sqrt{1-3x}$ bolsa $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$ -i hasaplaň.

II wariant

1. Önümi tapyň: $f(x)=10x^3+16x^2+7x-3$.

2. $f(x)=x^2+6x-3$ we $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ bolsa, $f(g(3))$ -i hasaplaň.

3. $f(x)=x^3+2x^2-x+3$ funksiýa üçin aşakdakylary tapyň:

1) stasionar nokatlary;
2) artýan aralyklaryny;
3) kemelýän aralyklaryny;
4) lokal maksimumlaryny;
5) lokal minimumlaryny.

4. Önümi tapyň: $(2x-6)^3+\cos^2 x$.

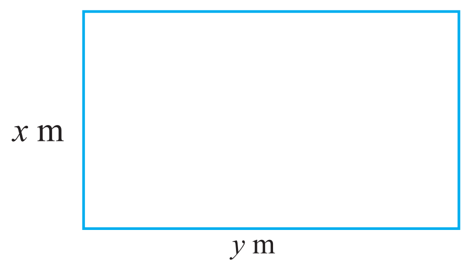
5. $f(x)=\sqrt{1-2x}$ bolsa, $f'\left(\dfrac{3}{8}\right)$ -i hasaplaň.

22–25 GEOMETRIK, FIZIKI, YKDYSADY MAZMUNLY EKSTREMAL MESELELERI ÇÖZMEKDE DIFFERENSIAL HASAPLAMA USULLARY

Geometrik mazmunly meseleler

1-nji mesele. Gönüburçluk şeklindäki ýer meýdanynyň daşyny 100 m germew bilen gurşamakçy. Bu germew iň köpi bilen näçe kwadrat mert ýer meýdanyny gurşamaga ýetýär?

∆ Ýer meýdanynyň ini x m we uzynlygy y m bolsun (27-nji surat).

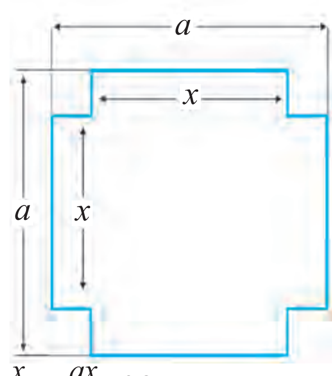


27-nji surat.

Meseläniň şertine görä ýer meýdanynyň perimetri $2x+2y=100$. Mundan $y=50-x$. Ýer meýdanynyň meýdany $S(x)=xy=x(50-x)=50x-x^2$. Mesele $S(x)$ funksiýanyň iň uly bahasyny tapmaga getirildi. Ilki $S(x)$ funksiýanyň stasionar nokadyny tapýarys: $S'(x)=50-2x=0$, mundan $x=25$. $(-\infty;$ $25)$ aralykda $S'(x)>0$ we $(25;\ +\infty)$ aralykda $S'(x)<0$ bolany üçin $S(x)$ funksiýa $x=25$ bolanda iň uly baha eýe bolýar we $S(25)=625$. Diýmek, 100 m germewiň kömeginde iň köpi bilen 625 m^2 ýer meýdanyny gurşamak mümkin. *Jogaby:* 625 m^2. ▲

Umuman, perimetri berlen ähli gönüburçluklaryň içinde meýdany iň ulusy kwadratdyr.

2-nji mesele. Tarapy a sm bolan kwadrat şeklindäki kartondan üsti açyk guty taýýarlamakçy. Munda kartonyň uçlaryndan birmeňzeş kwadratjyklar kesip alynýar. Gutynyň göwrümi iň uly bolmagy üçin onuň esas tarapynyň uzynlygy näçe santimetr bolmaly?



28-nji surat.

∆ Kartonyň uçlaryndan birmeňzeş kwadratjyklar gyrkyp alnyp, esasy x sm bolan açyk guty ýasalan, diýeliň (28-nji surat).

Kesip alnan kwadratjygyň tarapy $\frac{a-x}{2}$ sm bolýar. Şonuň üçin açyk gutynyň göwrümi $V(x)=\frac{a-x}{2}\cdot x\cdot x=$

$= -\frac{x^3}{2} + \frac{ax^2}{2}$ sm³. Diýmek, berlen mesele $V(x) = -\frac{x^3}{2} + \frac{ax^2}{2}$ funksiýanyň [0; *a*] kesimdäki iň uly bahasyny tapmaga geldi. *V*(*x*) funksiýanyň stasionar nokatlaryny tapýarys: $V'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + ax = 0$.

Bu ýerden $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}a$ stasionar nokatlar tapylýar. Görnüşi ýaly, $V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{2}{27}a^3$ we $V\left(\frac{2}{3}a\right) > V(0) = V(a) = 0$. Diýmek, $V(x)$ -iň $[0; a]$ kesimdäki iň uly bahasy $\frac{2}{27}a^3$ bolýar.

Jogaby: açyk gutynyň esas tarapy uzynlygy $x = \frac{2}{3}a$ sm. ▲

Fiziki mazmunly meseleler

3-nji mesele. Maddy nokat $s(t) = -\frac{t^4}{12} + t^3$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär (*s*(*t*) m-da, *t sek*-da ölçelýär). Aşakdakylary tapyň:

1) iň uly tizlenmä ýetýän wagty (t_0);

2) t_0 wagtdaky pursatlaýyn tizligi;

3) t_0 wagtyň içinde geçilen ýoly.

∆ Maddy nokadyň tizligini tapýarys:

$$v(t) = s'(t) = \left(-\frac{t^4}{12} + t^3\right)' = -\frac{t^3}{3} + 3t^2.$$

Fizikadan mälim bolşy ýaly tizlikden alnan önüm tizlenmäni berýär, ýagny:

$$a(t) = v'(t) = -t^2 + 6t.$$

1) Iň uly tizlenmä eýe bolýan t_0 wagty kesgitlemek üçin $a(t) = v'(t) = -t^2 + 6t$ funksiýany maksimuma barlaýarys. Ilki

$a'(t) = -2t + 6 = 0$ deňlemäni çözýäris, mundan $t_0 = 3$. (0; 3) aralykda $a'(t) > 0$ we $(3; +\infty)$ aralykda $a'(t) < 0$ bolany üçin $t = 3$ bolanda $a(t)$ iň uly baha ýetýär.

2) t_0 wagtdaky pursatlaýyn tizligi hasaplaýarys: $v(3) = -\frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 = 18\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3) t_0 wagtyň içinde geçilen ýol $s(t)=-\frac{t^4}{12}+t^3$ formula t_0=3-i goýup hasaplanýar: $s(3)=-\frac{3^4}{12}+3^3=-\frac{27}{4}+27=\frac{81}{4}=20,25$ m.

Jogaby: 1) 3 sek; 2) $18\frac{\text{m}}{\text{s}}$; 3) 20,25 m. ▲

4-nji mesele. Maddy nokat $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär ($s(t)$ aralyk metrde, wagt t sekuntda ölçelýär). Aşakdakylary tapyň:

1) iň kiçi tizlige ýetilýän wagty (t_0);
2) t_0 wagtdaky tizlenmäni;
3) t_0 wagtyň içinde geçilen ýoly.

∆ Maddy nokadyň tizligini we tizlenmesini tapýarys:

$$v(t)=s'(t)=\left(\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50\right)'=t^2-2t+4,$$

$$a(t)=v'(t)=\left(t^2-2t+4\right)'=2t-2.$$

1) Iň kiçi tizlige ýetilýän t_0 wagty anyklaýarys:

$$v'(t)=(t^2-2t+4)'=2t-2=0, \text{ mundan } t_0=1.$$

(0; 1) aralykda $v'(t)<0$ we (1; + ∞) aralykda $v'(t)>0$ bolany üçin $t_0=1$ bolanda $v(t)$ iň kiçi baha ýetýär.

2) t_0 wagtdaky tizlenmäni hasaplaýarys: $a(1)=2\cdot1-2=0$ m/s^2.

3) t_0 wagtyň içinde geçilen ýoly $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+4t+50$ formula t_0=1-i goýup hasaplanýar, ýagny $s(1)=\frac{1^3}{3}-1^2+4\cdot1+50=53\frac{1}{3}$ m.

Jogaby: 1) 1 *s*; 2) 0 m/s^2; 3) $53\frac{1}{3}$ m. ▲

5-nji mesele. Howa şaryna $t\in[0;8]$ minut aralygynda $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2$ (m^3) göwrümde howa pürkülýär. Aşakdakylary tapyň:

1) başlangyç wagtdaky howanyň göwrümini;

2) $t=8$ minutdaky howanyň göwrümini;

3) $t=4$ minutdaky howa pürkeme tizligini;

Δ 1) başlangyç wagtdaky howanyň göwrümini tapmak üçin $V(t)=2t^3 - -3t^2+10t+2$ m^3 formula $t=0$ goýulýar, ýagny $V(0)=2\ m^3$.

2) $t=8$ minut wagtdaky howanyň göwrümini tapmak üçin $V(t)=2t^3-3t^2+10t+2\ m^3$ formula $t=8$ goýulýar:

$$V(8)=2\cdot 8^3-3\cdot 8^2+10\cdot 8+2=1024-192+80+2=914\ \text{m}^3;$$

3) howa pürkeme tizligini tapýarys:

$$V'(t)=\left(2t^3-3t^2+10t+2\right)'=6t^2-6t+10\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min.}}\right).$$

Diýmek, $V'(4)=6\cdot 4^2-6\cdot 4+10=96-24+10=82\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min}}\right).$

Diýmek, $a(3)=12\cdot 3-6=30\left(\frac{\text{m}^3}{\text{min}^2}\right).$

Jogaby: 1) 2 m^3; 2) 914 m^3; 3) $82\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. ▲

Ykdysady mazmunly meseleler

6-njy mesele. Kerime köýnek tikmek üçin buýurma aldy. Bir aýda x sany köýnek tikse, $p(x)=-x^2+100x$ müň som girdeji alýar. Aşakdakylary tapyň:

1) iň uly girdeji almak üçin näçe köýnek tikmeli?

2) iň uly girdeji näçe bolýar?

Δ 1) $p(x)=-x^2+100x$ funksiýany maksimuma barlaýarys:

$p'(x)=(-x^2+100x)'=-2x+100=0$, mundan $x_0=50$. $(0;\ 50)$ kesimde $p'(x)>0$ we $(50;\ +\infty)$ aralykda $p'(x)<0$ bolany üçin $x_0=50$ bolanda funksiýa iň uly baha eýe bolýar. Diýmek, iň uly girdeji almak üçin 50 köýnek tikmeli eken.

2) Iň uly girdejiniň näçeligini tapmak üçin $p(x)=-x^2+100x$ aňlatma $x_0=50$-ni goýýarys:

$$p(50)=-50^2+100\cdot 50=-2500+5000=2500(\text{müň som})=2500000\ \text{som}.$$

Jogaby: 1) 50 köýnek; 2) 2 500 000 som. ▲

Soraglar we ýumuşlar

Önümi ulanyp çözülýän:

1) geometrik; 2) fiziki; 3) ykdysady mazmunly meselä mysal getiriň.

Gönükmeler

76. Gönüburçluk şeklindäki ýer meýdanynyň daşyny gurşamakçy. 300 m germewiň kömeginde iň köpi bilen näçe kwadrat metr ýer meýdanyny gurşamak mümkin?

77. Gönüburçluk şeklindäki ýer meýdanynyň daşyny gurşamakçy. 480 m germewiň kömeginde iň köpi bilen näçe kwadrat metr ýer meýdanyny gurşamak mümkin?

78.* Tarapy 120 sm bolan kwadrat şeklindäki kartondan üsti açyk guty taýýarlandy. Munda kartonyň uçlaryndan birmeňzeş kwadratjyklar kesip alyndy. Gutynyň göwrümi iň uly bolmagy üçin kesip alnan kwadratjygyň tarapy näçe santimetr bolmaly?

79.* Konserw banka silindr şeklinde bolup, onuň doly üsti 216 π sm^2-ä deň. Banka iň köp suw sygmagy (gitmegi) üçin bankanyň esasynyň radiusy we beýikligi nähili bolmaly?

80. Gönüburçluk şeklindäki uçastoguň meýdany 6400 m^2. Uçastoguň taraplary nähili bolanda ony gurşamak üçin iň kem germew zerur bolýar?

81.* Radiusy 5m bolan şara iň kiçi göwrümli konus daşyndan çyzylan. Konusyň beýikligini tapyň.

82.* Metaldan sygymy 13,5 l, esasy kwadratdan ybarat bolan gönüburçly parallelepiped gurulýar. Gabyň ölçegleri nähili bolanda ony gurmak üçin iň kem metal gidýär?

83. Maddy nokat $s(t)=-\dfrac{t^4}{4}+5t^3$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär ($s(t)$ metrde, wagt t sekuntda ölçelýär). Aşakdakylary tapyň:

1) iň uly tizlenmä ýetilýän t_0 wagty;

2) t_0 wagtdaky pursatlaýyn tizligi;

3) t_0 wagtyň içinde geçilen ýoly.

84. Maddy nokat $s(t)=-\dfrac{t^4}{2}+12t^3$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär ($s(t)$ m-de, wagt t sekuntda ölçelýär).

1) iň uly tizlenmä ýetilýän t_0 wagty;
2) t_0 wagtdaky pursatlaýyn tizligi;
3) t_0 wagtyň içinde geçilen ýoly tapyň.

85. Maddy nokat $s(t)=\frac{t^3}{9}-2t^2+40t+50$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär ($s(t)$ metrde, wagt t sekuntda ölçelýär).
1) iň kiçi tizlige ýetilýän t_0 wagty;
2) t_0 wagtdaky tizlenmäni;
3) t_0 wagtyň içinde geçilen ýoly tapyň.

86. Maddy nokat $s(t)=\frac{t^3}{2}-3t^2+8t+5$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär ($s(t)$ metrde, wagt t sekuntda ölçelýär). Aşakdakylary tapyň:
1) iň kiçi tizlige ýetilýän t_0 wagty;
2) t_0 wagtdaky tizlenmäni;
3) t_0 wagtyň içinde geçilen ýoly.

87. Howa şaryna $t \in [0;\ 10]$ minut aralygynda $V(t)=5t^3+3t^2+2t+4$ (m^3) howa pürkülýär.
1) başlangyç wagtdaky howanyň göwrümini;
2) $t=10$ minutdaky howanyň göwrümini;
3) $t=5$ minutdaky howa pürkeme tizligini;

88. Howa şaryna $t \in [0;\ 15]$ minut aralygynda $V(t)=t^3+13t^2+t+20$ (m^3) howa pürkülýär. 1) başlangyç wagtdaky howanyň göwrümini;
2) $t=15$ minutdaky howanyň göwrümini;
3) $t=10$ minutdaky howa pürkeme tizligini;

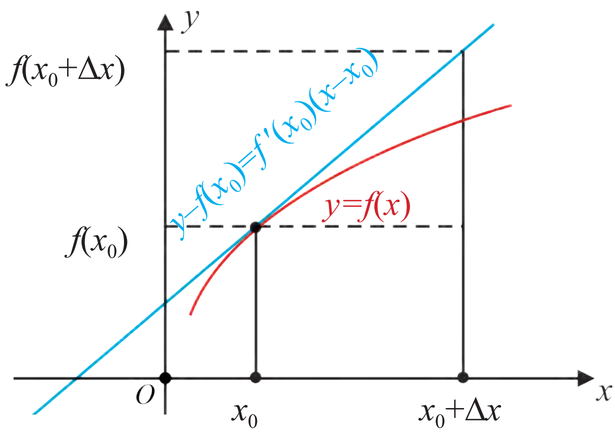
89. Muslima jalbar tikmek üçin buýurma aldy. Ol bir aýda x sany jalbar tikse, $p(x)=-2x^2+120x$ müň som girdeji alýar. Aşakdakylary tapyň:
1) girdejini iň uly etmek üçin näçe jalbar tikmeli?
2) iň uly girdeji näçe bolýar?

90. Muhlisa ýubka tikmek üçin buýurma aldy. Bir aýda x sany ýubka tikse, $p(x)=-3x^2+96x$ (müň som) girdeji alýar. Aşakdakylary tapyň:
1) girdejini iň uly etmek üçin näçe ýubka tikmeli?
2) iň uly girdeji näçe bolýar?

$y=f(x)$ funksiýa x_0 nokatda çäkli $f'(x_0)$ önüme eýe bolsun.

x_0 abssissaly nokatda $y=f(x)$ funksiýanyň grafigine geçirilen galtaşma deňlemesi $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ ýaly ýazylýandygyny bilýäris.

x_0 nokadyň ýakynynda $y=f(x)$ funksiýanyň grafigini galtaşmanyň degişli kesimi bilen çalşyrmak bolýar (29-njy surata garaň):



29-njy surat.

$x-x_0$ artdyrmany Δx diýip belgilesek (ýagny $x=x_0+\Delta x$ diýip alsak) aşakdaky ýakynlaşan gatnaşyga eýe bolarys:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \text{ ýa-da}$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (1)$$

(1) ýakynlaşan formula *kiçi artdyrmalar formulasy* diýlip atlandyrylýar.

Düşündiriş. x_0 nokat hökmünde $f(x_0), f'(x_0)$ bahalar aňsat hasaplanýan nokady saýlap almak maslahat berilýär. Şunuň bilen birlikde x nokat x_0 -a näçe ýakyn bolsa, şeýle çalşyrma anygrak bolýandygyny bellik edýäris.

Indi biz kiçi artdyrmalaryň formulasyna daýanmak bilen ýakynlaşan hasaplamalary ýerine ýetirýäris.

1-nji mysal.

$f(x)=x^7-2x^6+3x^2-x+3$ funksiýanyň $x=2{,}02$ nokatdaky bahasyny takmyny hasaplaň.

Δ x=2,02 nokada ýakyn bolan x_0=2 nokady alsak, bu nokatda $f(x)$ funksiýa bahasy aňsatja tapylýar: $f(x_0)=f(2)=13$.

Bu funksiýanyň önümini tapýarys: $f'(x)=7x^6-12x^5+6x-1$.

Onda

$f'(x_0)=f'(2)=75$, $\Delta x=x-x_0=2{,}02-2=0{,}02$ bolýar.

Diýmek, (1) formula görä $f(2{,}02)=f(2+0{,}02)\approx 13+75\cdot 0{,}02=14{,}5$.

Kalkulýatoryň ýa-da başga hasaplaýyş serişdesiniň kömeginde $f(2{,}02)\approx 14{,}57995$ bahany alyp bileris. ▲

2-nji mysal. $\sqrt{1{,}02}$ köküň bahasyny takmyny hasaplaň.

Δ $f(x)=\sqrt{x}$ funksiýany garaýarys. Onuň önümini tapýarys:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$x_0=1$ diýip alsak, $f(x_0)=f(1)=\sqrt{1}=1$,

$f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$, $\Delta x=x-x_0=1{,}02-1=0{,}02$ bolýar.

Diýmek, (1) formula görä

$$\sqrt{1{,}02}=\sqrt{1+0{,}02}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=1{,}01.$$

Kalkulýatoryň ýa-da başga hasaplaýyş serişdeleriniň kömeginde $\sqrt{1{,}02}\approx 1{,}0099504938...$ bahany alyp bileris. ▲

3-nji mysal. $\sqrt[3]{7.997}$ -niň bahasyny takmyny hasaplaň.

Δ $f(x)=\sqrt[3]{x}$, funksiýa garaýarys. Onuň önümini tapýarys:

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

$x_0=8$ diýip alsak, $f(x_0)=f(8)=\sqrt[3]{8}=2$,

$$f'(x_0)=f'(8)=\frac{1}{3}8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12},$$

$\Delta x=7{,}997-8=-0{,}003$ bolýar.

Diýmek, (1) formula görä

$$\sqrt[3]{7,997}=\sqrt[3]{8+(-0,003)}\approx 2-\frac{0,003}{12}=1,9997.$$

Kalkulýatoryň ýa-da başga hasaplaýyş serişdesiniň kömeginde $\sqrt[3]{7.997}\approx 1,9997499687...$ bahany alyp bileris. ▲

4-nji mysal. sin 29°-yň bahasyny takmyny hasaplaň.

Δ $f(x)=\sin x$ funksiýany garaýarys. Onuň önümini tapýarys: $f'(x)=\cos x$.

$x_0=\frac{\pi}{6}$ diýip alsak, $f(x_0)=f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

$f'(x_0)=f'(\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\Delta x=\frac{29\pi}{180}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{180}$ bolýar.

Diýmek, (1) formula görä

$$\sin 29^{\circ}=\sin(\frac{\pi}{6}+(-\frac{\pi}{180}))\approx\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}\approx 0,484...\ .$$

Kalkulýatoryň ýa-da başga hasaplaýyş serişdesiniň kömeginde $\sin 29^{\circ}\approx 0,4848096202...$ bahany alyp bileris. ▲

5-nji mysal. Logarifmleri hasaplamak üçin kiçi artdyrmalarň formulasyny getirýäris.

Δ $f(x)=\ln x$; $f'(x)=\frac{1}{x}$. (1) -a görä, $\ln(x_0+\Delta x)\approx\ln x_0+\frac{1}{x_0}\cdot\Delta x$ — kiçi artdyrmalaryň formulasyny alýarys.

Eger $x_0=1$ we $\Delta x=t$ bolsa, $\ln(1+t)\approx t$ bolýar.
Mundan, meselem, ln1,3907= ln(1+0,3907) ≈ 0,3907 bahany alarys.

Eger $x_0=0$, ýagny $\Delta x=x-x_0=x$ bolsa, (1) kiçi artdyrmalaryň formulasy

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x \qquad (2)$$

görnüşi alýar. ▲

Synpda ýerine ýetirilýän ýumuş. (2) formula esaslanyp, x ýeterliçe kiçi bolanda

$\sin x\approx x$, $\operatorname{tg}x\approx x$, $e^x\approx 1+x$,
$(1+x)^m\approx 1+mx$, şol sanda, $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$, $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x$

ýakynlaşan formulalary alyň.

6-njy mysal. $\frac{1}{0,997^{30}}$ aňlatmany takmyny hasaplaň.

▲ $(1+x)^m \approx 1+mx$ formuladan peýdalanýarys:

$$\frac{1}{0,997^{30}}=(1-0,003)^{-30}\approx 1+(-30)(-0,003)=1+0,09=1,09.$$

Kalkulýatoryň ýa-da başga hasaplaýyş serişdesiniň kömeginde $\frac{1}{0,997^{30}} \approx 1,0943223033...$ bahany alyp bileris. ▲

$(1+x)^m \approx 1+mx$ ýakynlaşan formuladan peýdalanyp kökleri çalt hasaplamak usulyny teklip etmek mümkin.

Hakykatdan hem, n – natural san bolup, $|B|$ sany $|A^n|$ -a görä ýeterliçe kiçi bolsun.

Onda

$$\sqrt[n]{A^n+B} = A\left(1+\frac{B}{A^n}\right)^{\frac{1}{n}} \approx A\left(1+\frac{B}{nA^n}\right)$$

ýa-da

$$\sqrt[n]{A^n+B} \approx A+\frac{B}{nA^{n-1}}.$$

Meselem, $\sqrt[3]{131}=\sqrt[3]{125+6}=5+\frac{6}{3\cdot 5^2}=5,08.$

Kalkulýatoryň ýa-da başga hasaplaýyş serişdesiniň kömeginde $\sqrt[3]{125}=5,0788...$ bahany alyp bileris.

(2) formula esaslanyp, x ýeterliçe kiçi bolanda cos$x$-iň bahasyny takmyny hasaplalyň.

$(\cos x)'=-\sin x$ bolany üçin $f(x) \approx f(0)+f'(0)x$

formula $\cos x \approx \cos 0-(\sin 0)\,x=1$, ýagny $\cos x\approx 1$ görnüşi alýar.

Görnüşi ýaly, şeýle “ýakynlaşan” formula bizi kanagatlandyrmaýar.

Şonuň üçin, başgaça çemeleşýäris. Esasy trigonometrik toždestwodan

$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ deňligi alýarys.

Ýokarda belleýşimiz ýaly, x ýeterliçe kiçi bolanda $\sin x\approx x$ bolýar. Diýmek, $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}\approx\sqrt{1-x^2}$.

Görnüşi ýaly, x ýeterliçe kiçi bolanda x^2 hem kiçi bolýar.

Diýmek, $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$ formuladan $\sqrt{1-x^2} \approx 1-\frac{x^2}{2}$ formula gönüden-göni gelip çykýar, ýagny $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$ formula ýerlikli bolýar.

7-nji mysal. cos44° ni takmyny hasaplaň.

Δ $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ bolany üçin

$$\cos 44^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{180}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{180}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{180}+\sin\frac{\pi}{180}\right). \quad \cos\frac{\pi}{180}\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2=0,9998476...,$$

$\sin\frac{\pi}{180}\approx\frac{\pi}{180}=0,0174532....$ Diýmek, $\cos 44^\circ \approx 0,7193403....$

Kalkulýatoryň ýa-da başga hasaplaýyş serişdesiniň kömeginde cos44°≈0,7193339... bahany alýarys.

? Soraglar we ýumuşlar

1. Kiçi artdyrmalaryň formulasyny ýazyň.
2. Kiçi artdyrmalaryň formulasynyň ulanylyşyna degişli mysallar getiriň.

Gönükmeler

91. $f(x)$ funksiýanyň x_1 we x_2 nokatlardaky bahasyny takmyny hasaplaň:

a) $f(x)=x^4+2x$, $x_1=2,016$, $x_2=0,97$;
b) $f(x)=x^5-x^2$, $x_1=1,995$, $x_2=0,96$;
d) $f(x)=x^3-x$, $x_1=3,02$, $x_2=0,92$;
e) $f(x)=x^2+3x$, $x_1=5,04$, $x_2=1,98$.

$(1+x)^m\approx 1+mx$ ýakynlaşan formuladan peýdalanyp, sanly aňlatmanyň bahasyny hasaplaň (**92–93**):

92. a) $1,002^{100}$; b) $0,995^6$; d) $1,03^{200}$; e) $0,998^{20}$.

93. a) $\sqrt{1,004}$; b) $\sqrt{25,012}$; d) $\sqrt{0,997}$; e) $\sqrt{4,0016}$.

Ýakynlaşan formulalardan peýdalanyp, hasaplaň (**94–97**):

94. a) tg 44°; b) cos 61°; d) sin 31°; e) ctg 47°.

95. a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0,04\right)$; b) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-0,02\right)$;

d) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0,03\right)$; e) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0,05\right)$.

96. a) $\frac{1}{1,003^{20}}$; b) $\frac{1}{0,996^{40}}$; d) $\frac{1}{2,0016^{3}}$; e) $\frac{1}{0,994^{5}}$.

97. a) ln0,9; b) $e^{0,015}$; d) $\frac{1}{0,994^{5}}$.

$y=f(x)$ -iň görkezilen nokatdaky ýakynlaşan bahasyny hasaplaň (**98–106**):

98. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1,012$.

99. $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x=1,97$.

100. $y=x^3$, $x=1,021$.

101. $y=x^4$, $x=0,998$.

102. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1,03$.

103. $y=x^6$, $x=2,01$.

104*. $y=\sqrt{1+x+\sin x}$, $x=0,01$.

105*. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$, $x=0,01$.

106*. $y=\sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}$, $x=1,02$.

29–32 ÖNÜMIŇ KÖMEGINDE MODELIRLEMEK

10-njy synpda (**79–81-**nji tema) bakteriýalaryň sanynyň köpeliş prosesini öwrendik. Indi bu hadysa başgaça çemeleşeliň.

1-nji mesele. Her bir bakteriýa mälim wagtdan (birnäçe sagat, ýa-da, minutlardan) soň ikä bölünýär we bakteriýalaryň sany iki esse artýar. Nobatdaky wagtdan soň şu iki bakteriýa hem ikä bölünýär we populýasiýanyň mukdary (bakteriýalar umumy sany) ýene iki esse artýar... Bu köpeliş prosesi amatly şertlerde (populýasiýa üçin zerur resurslar, ýer, iýmit, suw, energiýa we başgalar) dowam ediberýär, diýeliň.

Bakteriýalaryň ***köpeliş tizligi*** bakteriýalaryň umumy sanyna proporsional diýip çak edeliň.

Bakteriýalaryň populýasiýasynyň sany islendik t wagta görä nähili üýtgeýär?

∆ $b(t)$ diýip t wagt aralygyndaky bakteriýalaryň populýasiýasynyň umumy sanyny belgiläliň.

Önümiň manysyna görä, bakteriýalaryň köpeliş tizligi $b'(t)$ -ge deň.

Çakymyza görä, islendik t wagtda $b'(t)$ mukdar $b(t)$ mukdara proporsional, ýagny

$$b'(t)=kb(t) \tag{1}$$

gatnaşyk ýerlikli. Bu ýerde k – proporsionallyk koeffisiýenti.

$b_0=b(0)$ – başlangyç $t=0$ wagtdaky populýasiýa sany bolsun.

Görnüşi ýaly, $b(t)=b_0e^{kt}$ funksiýa (1) ni kanagatlandyrýar.

Çyndan hem, $b'(t)=(b_0e^{kt})'=kb_0e^{kt}=kb(t)$.

Ilki 10 million bakteriýa bolsa, ($b_0=10$ mln), şeýle bakteriýalaryň sany bir sagatdan soň $b(1)=10e^k=20$ (mln) -a deň bolýar, ýagny $e^k=2$. Mundan $k=\ln 2$-ä eýe bolarys.

t wagt aralygyndaky bakteriýalaryň populýasiýasynyň sanyny tapalyň:

$b(t)=10e^{(\ln 2)t}=10\cdot 2^t$ (mln).

Bu netije 10-njy synpda alnan netije bilen üstme-üst düşýär. ▲

Taryhy maglumat. 18-nji asyrda iňlis alymy Tomas Maltus ýokardaky pikirlere meňzeş pikir ýöredip, ýer ýüzündäki ilat sanynyň ösüşi üçin

$$N'(t)=kN(t) \qquad (2)$$

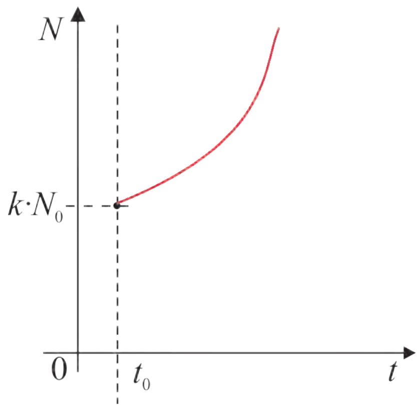
gatnaşygy aldy, bu ýerde $N(t)$ – wagtyň t momentindäki ilat sany.

$N_0=N(t_0)$ – başlangyç t_0 wagtdaky ilat sany bolsun.

Munda $N(t)=N_0e^{k(t-t0)}$ funksiýa (2) deňlemäni kanagatlandyrýar.

Çyndan hem, $N'(t)= N_0(e^{k(t-t0)})'=kN_0e^{k(t-t0)}=kN(t)$.

$N(t)=N_0e^{k(t-t0)}$ kanunalaýyklyk ilatyň ***eksponensial ösüşini,*** ýagny çalt, dyngysyz ösüş prosesini aňladýandygyny hasaba alyp, Tomas Maltus wagtyň geçmegi bilen adamzada iýmit resurslary ýetmezçiligini «prognoz» edendigini belläp geçýäris (30-njy surata garaň).



30-njy surat.

2-nji mesele. Ekologiýa janly organizmleriň daşky gurşaw bilen özara gatnaşygyny öwrenýär. Köpeliş ýa-da dürli sebäplere görä heläk bolmak bilen bagly bolan populýasiýalaryň sanynyň üýtgeýän tizligi wagta nähili baglanyşykda bolýandygyny öwreniň.

Δ $N(t)$ – wagtyň t momentindäki populýasiýa sany bolsun, onda eger wagtyň bir birliginde populýasiýada dogulýan jandarlaryň sanyny A, heläk bolýanlaryň sanyny B diýsek, ýeterli esas bilen aýtmak mümkin, ýagny N-iň wagta görä üýtgeýän tizligi

$$N'(t) =A-B \qquad (3)$$

gatnaşygy kanagatlandyrýar.

Barlagçylar A we B ni N-e baglylygyny aşakdaky ýaly häsiýetlendirýärler.

a) Iň ýönekeý ýagdaý: $A=aN(t)$, $B=bN(t)$. Bu ýerde a we b – wagtyň bir birliginde dogluş we heläk bolma koeffisiýentleri.

Munda (3) gatnaşygy

$$N'(t)=(a-b)N(t) \tag{4}$$

görnüşde ýazmak mümkin.

$N_0=N(t_0)$ – başlangyç t_0 wagtdaky populýasiýa sany bolsun.

Munda $N(t)=N_0e^{(a-b)(t-t_0)}$ (4) funksiýany kanagatlandyrýar (barlaň).

b) $A=aN(t)$, $B=bN^2(t)$ ýagdaý hem duşýar.

Munda

$$N'(t)=aN(t)-bN^2(t) \tag{5}$$

gatnaşyk emele gelýär.

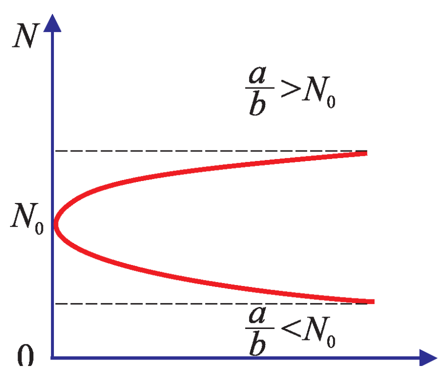
$$N(t)=\frac{N_0 a/b}{N_0+[a/b-N_0]e^{-a(t-t_0)}} \quad \text{funksiýa} \qquad (5)$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygyny barlamak mümkin. ▲

(4) gatnaşygy 1845-nji ýylda belgiýaly demograf-alym Ferhýulst populýasiýadaky içki göreş hasaba almak bilen açyş etdi. Bu netije Maltusyň (2) gatnaşygyna görä populýasiýanyň ösüşini anygrak häsiýetlendirýär.

Populýasiýanyň artyp-kemelmegi a we b sanlara nähili bagly bolýar, diýen soragyň döremegi tebigydyr.

Aşakdaky çyzgyda $\frac{a}{b}>N_0$ we $\frac{a}{b}<N_0$ ýagdaýlar üçin $N(t)=\frac{N_0 a/b}{N_0+[a/b-N_0]e^{-a(t-t_0)}}$ görnüşdäki funksiýanyň grafikleri görkezilen:



31-nji surat.

Görnüşi ýaly, wagtyň geçmegi bilen populýasiýa sany $\frac{a}{b}$ sanyna ýakynlaşýan eken. Bu ýagdaý *doýunma* diýlip atlandyrylýan hadysany aňladýar.

Çyzgyda görkezilen egri çyzyk Maltus tarapyndan *logistik* egri çyzyk diýip atlandyrylyp, ol adamyň durmuşynyň dürli ugurlarynda duşýar.

Funksiýanyň önümini şu funksiýa bilen baglaýan $y'(x)=F(x, y)$ görnüşdäki gatnaşyga differensial deňleme diýilýär.

Ýokarda getirilen (1) – (5) gatnaşyklar differensial deňlemelere mysallardyr.

Differensial deňlemäni kanagatlandyrýan islendik funksiýa onuň çözüwi diýilýär. Ýokary matematikada belli bir şertlerde $y'(x)=F(x, y)$ görnüşdäki differensial deňlemäniň $y(x_0)=y_0$ başlangyç şerti kanagatlandyrýan ýeke-täk $y(x)$ çözüwi bardygy subut edilen.

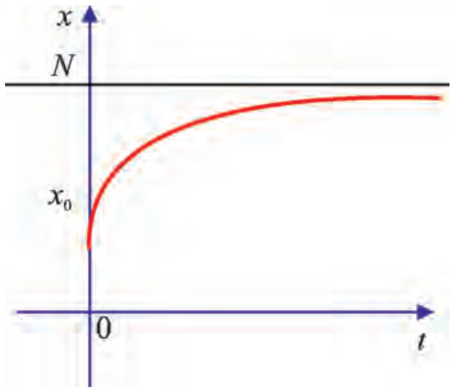
3-nji mesele. Wagtyň t momentinde satylýan önüm barada habardar bolan hyrydar sany $x(t)$ -niň wagta baglylygyny öwreniň. (Bu mesele reklama netijeliligini anyklamakda möhüm.)

Δ Ähli hyrydar sanyny N diýip belgilesek, satylýan önümden bihabarlaryň sany $N–x(t)$ bolýar. Önüm barada habardar bolan hyrydarlar sanynyň $x(t)$ artyş tizligine we $N–x(t)$ -ga proporsional diýip hasaplasak, aşakdaky differensial deňlemä eýe bolarys:

$x'(t)=kx(t)(N–x(t))$, bu ýerde $k>0$ – proporsionallyk koeffisiýenti.

Bu deňlemäniň çözüwi $x(t)=\frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$ dan ybarat, munda $P=\frac{1}{e^{NC}}$, C – hemişelik san.

Görnüşi ýaly, islendik ýagdaýda t wagtyň geçmegi bilen Pe^{-Nkt} agza kiçileşip beruberýär we mundan, $x(t)=\frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$ aňlatmanyň bahasy N-e ýakynlaşýar (32-nji surata garaň). ▲



32-nji surat.

4-nji mesele. Massasy m, ýylylyk sygymy c hemişelik bolan jisim başlangyç momentde T_0 temperatura eýe bolsun. Howanyň temperaturasy hemişelik we τ ($T > \tau$)-ge deň. Jisimiň çäksiz kiçi wagtyň içinde berenýylylygyjisimbilenhowanyňtemperaturalarynyňarasyndakytapawuda, şonuň ýaly-da, wagta proporsionaldygyny hasaba almak bilen, jisimiň sowama kanunyny tapyň.

Δ Sowama dowamynda jisimiň temperaturasy T_0-dan τ çenli peselýär. Wagtyň t momentinde jisimiň temperaturasy $T(t)$ -ge deň bolsun. Çäksiz kiçi wagt aralygynda jisim beren ýylylyk mukdary, ýokarda aýdylyşyna görä,

$$Q'(t) = -k(T - \tau)$$

-e deň, bu ýerde k – proporsionallyk koeffisiýenti.

Ikinji tarapdan, fizikadan mälim bolşy ýaly, jisim T temperaturadan τ temperatura çenli sowanda berýän ýylylyk mukdary $Q = mc(T(t) - \tau)$-e deň. Önümi hasaplaýarys:

$$Q'(t) = mcT'(t). \qquad (6)$$

$Q'(t)$ üçin tapylan iki aňlatmany deňeşdirip, $mcT'(t) = -k(T - \tau)$ differensial deňlemäni alýarys.

$$T(t) = \tau + Ce^{-\frac{k}{mc}t}$$

funksiýa (6) differensial deňlemäni kanagatlandyrýar (özüňiz barlaň!), bu ýerde C – islendik hemişelik san.

Başlangyç şert (t=0 bolanda $T=T_0$) C -ni tapmaga mümkinçilik berýär:

$$C=T_0-\tau$$

Şonuň üçin jisimiň sowama kanuny aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$T(t)=\tau+(T_0-\tau)\,e^{-\frac{k}{mc}}.$$

Jogaby: $T(t)=\tau+(T_0-\tau)\,e^{-\frac{k}{mc}}$ ▲.

5-nji mesele. Tamdyrdan alnan (üzülen) çöregiň temperaturasy 20 minudyň içinde 100°-dan 60° çenli peselýär. Daşky gurşawyň temperaturasy 25°. Çöregiň temperaturasy näçe wagtda 30° çenli peselýär?

∆ Ýokardaky meseläniň çözüwinden peýdalanyp, çöregiň sowama kanunyny aşakdaky görnüşde ýazyp bileris:

$$T(t)=\tau+(T_0-\tau)\,e^{-\frac{k}{mc}}=25+\left(100-25\right)e^{at}=25+75e^{at},$$

bu ýerde a – näbelli koeffisiýent.

a -ny tapmak üçin t=20 bolanda T(20)=60 deňlikden peýdalanýarys:

$$T(20)=25+75e^{20a}=60$$

$$75e^{20a}=35,\quad (e^a)^{20}=\frac{35}{75}=\frac{7}{15},\quad e^a=\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Diýmek, çöregiň sowamagy $T=25+75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}$ kanunalaýyklyga boýun egýän eken.

Çöregiň temperaturasy 30° çenli peseliş wagtyny tapýarys:

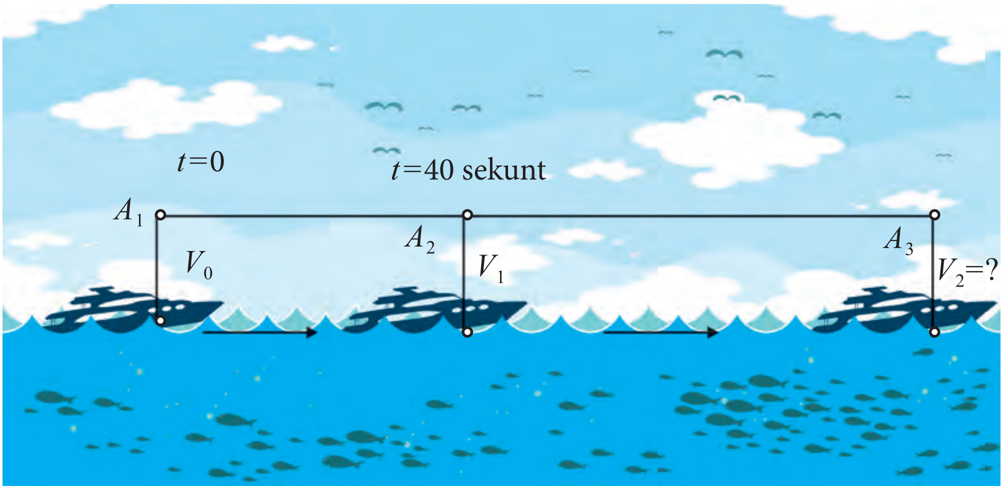
$$30=25+75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}},\ \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}=\frac{5}{75}=\frac{1}{15}$$

$$\ln\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}=\frac{t}{20}(\ln\left(7\right)-\ln\left(15\right))$$

bolany üçin $t^*=\dfrac{-20\ln 15}{\ln 7-\ln 15}\approx\dfrac{-20\cdot 2,7081}{-0,762}\approx 71$

Jogaby: 1 sagat 11 minutda çöregiň temperaturasy 30° çenli peselýär. ▲

6-njy mesele. Motorly gaýyk ýata suwda 20 km/sagat tizlik bilen hereketlenýär. Mälim wagtdan soň motor hatardan çykdy. Motor togtandan 40 sekunt wagt geçensoň gaýygyň tizligi 8 km/sagat boldy. Suwuň garşylygy tizlige proporsional bolsa, motor togtandan 2 minut wagt geçensoň gaýygyň tizligini tapyň.



33-nji surat.

∆ Gaýyga $F=-kv$ güýç täsir edýär. Nýutonyň kanunyna görä $F=mv'(t)$ Mundan $mv'(t)=-kv$.

Bu deňlemäni $v(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}$ görnüşdäki funksiýa kanagatlandyrýar.

$t=0$ bolanda $v=20$ şertinden $C=20$ gelip çykýar.

Mundan $v(t)=20e^{-\frac{r}{m}t}$. $t=40$ sek $=\frac{1}{90}$ sagat bolanda gaýygyň tizligi 8 km/sagada deň, mundan $8=20e^{-\frac{r}{m}\cdot\frac{1}{90}}$ ýa-da $e^{\frac{r}{m}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{90}$ hem-de $t=2\min=\frac{1}{30}$ sagat bolanyndan

$$v=20\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right]^{-\frac{1}{30}}=20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}=\frac{32}{25}\approx 1,28$$ (km/s) bolýandygyny tapýarys.

Jogaby: Motor togtandan 2 minut wagt geçensoň, gaýygyň tizligi takmynan 1,28 km/sagada deň bolýar. ▲

7-nji mesele. Radioaktiw dargama netijesinde radioaktiw maddanyň massasy $m(t)$ -niň wagta görä üýtgeýän kanunalaýyklygyny tapyň. Bu ýerde $m(t)$ gram, t – ýyllarda ölçelýär.

∆ Dargama tizligi massa proporsional diýip çak etsek,

$$m'(t) = -\alpha\, m(t) \qquad (7)$$

differensial deňlemä eýe bolarys. $m(t)=Ce^{-\alpha t}$ funksiýa bu deňlemäniň çözüwidigini barlamak mümkin.

$m(t_0)=m_0$ başlangyç şertden $m(t) = m_0 e^{-\alpha\,(t-t_0)}$ kanunalaýyklyga eýe bolarys. *Jogaby:* $m(t) = m_0 e^{-\alpha\,(t-t_0)}$. ▲

Ykdysady modeller. Talap we teklip ykdysadyýetiň fundamental (esasy) düşünjeleridir.

Talap (harytlar we hyzmatlara talap) – hyrydar, sarp edijiniň bazardaky belli bir harytlary, nygmatlary satyn almak islegi; bazara çykan we pul mümkinçilikleri bilen üpjün edilen zerurlyklary.

Talap mukdarynyň üýtgemegine birnäçe faktorlar täsir edýär. Olaryň arasynda iň möhümi nyrh faktorydyr. Harydyň nyrhynyň peselmegi satyn alynýan harydyň mukdarynyň artmagy we tersine, nyrhyň artmagy söwda mukdarynyň kemelmegine getirýär.

Teklip — belli bir wagtda we belli bir nyrhlar bilen bazara çykarylan we çykarylmagy mümkin bolan harytlar we hyzmatlar mukdary bilen aňladylýar; teklip – öndürijileriň (satyjylaryň) öz harytlaryny bazarda satmaga bolan islegi. Bazarda harydyň nyrhy bilen onuň teklibiniň mukdarynyň arasynda gönüden-göni baglylyk bar: nyrh näçe ýokary bolsa, başga şertler üýtgemedik ýagdaýlarda, satmak üçin şonça köpräk haryt teklip edilýär, ýa-da tersine, nyrhyň peselmegi bilen teklibiň göwrümi gysgalýar.

Talap we teklibiň düýp mazmuny olaryň nyrh arkaly özara baglanyşykda bolmagydyr. Bu baglylyk — talap we teklip kanuny bazar ykdysadyýetiniň obýektiw kanuny hasaplanýar. Talap we teklip kanunyna görä, bazardaky teklip we talap diňe bir mukdar taýdan däl, eýsem özüniň düzümi taýdan hem bir-birine laýyk gelmelidir, diňe şonda bazar deňagramlylygy gazanylýar. Bu kanun alyş-çalyş kanuny bolup, bazary dolandyrýan we tertibe salýan güýç derejesine göterilýär. Oňa görä bazardaky talabyň üýtgemegi derrew önümçilige ýetirilmelidir. Bazardaky talap we teklip gatnaşygyna garap önümçilik depginleri we gurluşy döreýär.

Aşakdaky *meselä* garalyň.

Fermer uzak möhlet dowamynda miweleri bazarda satmaga çykaryp gelýär. Her hepdeniň ahyrynda ol nyrhyň üýtgeýän tizligine gözegçilik edip, indiki hepdä çykarylan miweleriň täze nyrhyny çemeleýär.

Edil şeýle sarp edijiler hem nyrhyň üýtgeýän tizligine gözegçilik edip, indiki hepdä satyn alynýan miweleriň mukdaryny kesgitleýärler.

Indiki hepdedäki miweleriň nyrhyny p arkaly, nyrhyň üýtgeýän tizligini bolsa p' arkaly belgiläliň.

Teklip hem, talap hem harydyň nyrhy bilen onuň üýtgeýän tizligine baglydygyny ynam bilen aýdyp bileris. Bu baglanyşyk nähili bolýar?

Δ şeýle baglanyşyklaryň iň ýönekeý görnüşi aşakdaky ýaly bolýan eken: $y=ap'+bp+c$, bu ýerde a, b, c – hakyky sanlar.

Meselem, q arkaly talaby, s arkaly bolsa teklibi belgilesek, olar üçin ýokardaky baglanyşyklar $q=4p'-2p+39$, $s=44p'+2p-1$ deňlemeleriň kömeginde aňladylmagy mümkin.

Bu ýagdaýnda talap we teklibiň özara deňligi $4p'-2p+39=44p'+2p-1$ gatnaşygyň kömeginde aňladylýar.

Bu deňlikden $p'=-\dfrac{p-10}{10}$ görnüşdäki differensial deňlemäni alýarys.

Eger başlangyç nyrhy $p(0)=p_0$ diýip belgilesek, nyrh

$p=(p_0-10)e^{-\frac{t}{10}}+10$ kanunalaýyklyk bilen üýtgeýşini alýarys. ▲

Inwestisiýa. Nähilidir önüm p nyrh bilen satylýar diýip çak edeliň, $Q(t)$ funksiýa t wagtyň dowamynda öndürilen önümiň mukdarynyň üýtgeýşini aňladýar diýsek, onda t wagtyň dowamynda $pQ(t)$-a deň girdeji alynýar. Aýdaly, alnan girdejiniň bir bölegi önüm öndürmek inwestisiýasyna sarp bolsun, ýagny

$$I(t)=mpQ(t) \tag{8}$$

m – inwestisiýa normasy, hemişelik san we $0<m<1$.

Eger bazar ýeterliçe üpjün edilen we öndürilen önüm doly satylan diýen düşünjeden gelip çykylsa, bu ýagdaý önümçiligiň tizliginiň ýene artmagyna getirýär.

Önümçiligiň tizligi bolsa inwestisiýanyň artmagyna proporsional, ýagny

$$Q'=l\cdot I(t), \tag{9}$$

bu ýerde l – proporsionallyk koeffisiýenti.

(8) formulany (9) -a goýup

$$Q' = kQ\,, \qquad k = lmp \tag{10}$$

differensial deňlemäni alýarys.

C – islendik hemişelik san bolanda $Q = Ce^{kt}$ görnüşdäki funksiýa (10) differensial deňlemäni kanagatlandyrýar.

Başlangyç moment $t=t_0$ bolanda önüm öndürmegiň göwrümi Q_0 berlen diýip çak edeliň. Onda bu şertden hemişelik C-ny tapmak mümkin:

$Q_0 = Ce^{kt_0}$, mundan $C = Q_0 e^{-kt_0}$.

Netijede önümçiligiň göwrümi $Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}$ kanunalaýyklyk bilen üýtgeýändigini bileris.

? Soraglar we ýumuşlar

1. Bakteriýalaryň mälim wagtdan soň ikä bölünmek prosesini önümiň kömeginde modelirläň.
2. Tomas Maltusyň ýer ýüzündäki ilat sanynyň artyşyna degişli meselesini düşündiriň.
3. Tomas Maltusyň logistik egri çyzgyny düşündiriň.
4. Reklamanyň netijeliligine degişli meseläni önümiň kömeginde modelirläň.

Gönükmeler

Tekstdäki 4-nji meseläniň çözüwinden peýdalanyp, gönükmeleri çözüň **(107–108)**:

107. Temperaturasy 25°C bolan metal parçasy peje goýuldy. Pejiň temperaturasy 25°C-dan başlap minudyna 20°C tizlik bilen deňölçegli ýokarlanyp başlady. Pejiň we metalyň temperaturasynyň tapawudy T°C bolanda, metal minudyna $10 \cdot T$°C tizlik bilen gyzdyrylyp başlaýar. Metal parçasynyň 30 minutdan soňky temperaturasyny tapyň.

108. Jisimiň başlangyç temperaturasy 5°C. Jisim N minudyň dowamynda 10°C çenli gyzýar. Daşky gurşawyň temperaturasy 25°C. Jisim haçan 20°C-a çenli gyzýar?

Tekstdäki 7-nji meseläniň çözüwinden peýdalanyp, gönükmeleri çözüň:

109. Tejribelere görä 1 ýylyň dowamynda radiýniň her bir gramyndan 0,44 mg madda dargaýar

a) näçe ýyldan soň bar radiýniň 20 göterimi dargar?

b) bar radiýniň 400 ýyldan soň näçe göterimi galar?

Tekstdäki 6-njy meseläni çözmendäki pikir ýöretmelerden peýdalanyp, gönükmeleri çözüň **(110–111):**

110. Gaýyk suwuň garşylygy täsiri astynda öz hereketini haýalladýar. Suwuň garşylygy gaýygyň tizligine proporsional. Gaýygyň başlangyç tizligi 1,5 m/s, 4 sekuntdan soň onuň tizligi 1 m/s boldy. Näçe sekuntdan soň gaýygyň tizligi 2 esse kemeler?

111. 10 *l* göwrümdäki gap howa bilen doldurylan (80% azot, 20% kislorod). şu gaba 1 sekuntda 1 litr tizlikde azot pürkülýär. Ol üznüksiz ýagdaýda garyşyp, şu tizlikde gapdan çykýar. Näçe wagtdan soň gapda 95% azotly garyndy emele geler?

Görkezme: $y(t)$ bilen t wagtdaky azotyň ülşüni belgilesek, $y(t)$ funksiýa $y'\cdot V=a(1-y)$ gatnaşygy kanagatlandyrýar diýeliň. Bu ýerde V- gyzdyrma göwrümi, a- pürkeme tizligi.

! Barlag işiniň nusgasy

1. Esasy kwadrat bolan gönüburçly parallelepiped şeklindäki üsti açyk metal gap ýasamakçy. Gabyň göwrümi 270 *l* bolmaly. Gabyň ölçegleri nähili bolanda ony ýasanda iň kem metal gidýär?

2. Maddy nokat $s(t)=-\frac{t^4}{4}+72t^3$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär ($s(t)$ metrde, t wagt sekuntda ölçelýär).

1) iň uly tizlenmä ýeten wagty (t_0);

2) t_0 wagtdaky pursatlaýyn tizligi;

3) t_0 wagtyň dowamynda geçilen ýoly tapyň.

3. Ýakynlaşan hasaplama formulasyndan peýdalanyp $\ln 0{,}92$ tapyň.

4. Ýakynlaşan hasaplama formulasyndan peýdalanyp sin(–1, 2)-ni tapyň.

5. Önüm öndürýän telekeçiniň günlük girdejisi aşakdaky formula bilen hasaplanýar:

$P(x)=-3x^2+42x-6$ (müň som) bu ýerde x – önümler sany.

Aşakdakylary anyklaň:

1) iň uly girdeji almak üçin telekeçi näçe önüm öndürmeli?

2) telekeçiniň iň uly girdejisi näçe som?

33–36 MESELELER ÇÖZMEK

112. Maddy nokadyň hereket kanuny $s=s(t)$ -ga görä onuň iň uly ýa-da iň kiçi tizligini tapyň:

1) $s=13t$; 2) $s=17t-5$; 3) $s=t^2+5t+18$; 4) $s=t^3+2t^2+5t+8$; 5) $s=2t^3+5t^2+6t+3$; 6) $s=13t^3+2t^2$; 7) $s=t^3+t^2+3$.

113. Berlen funksiýanyň grafigine: 1) $x_0=-1$; 2) $x_0=2{,}2$; 3) $x_0=0$ abssissaly nokatda geçirilen galtaşmany tapyň:

1) $f(x)=12x^2+5x+1$; 2) $f(x)=13x+4$; 3) $f(x)=60$; 4) $f(x)=x^3+4x$;

114. Berlen funksiýa üçin $y=-7x+2$ göni çyzyga parallel bolan galtaşma deňlemesini ýazyň:

1) $f(x)=5x^3-2x^2+16$; 2) $f(x)=-4x^2+5x+3$; 3) $f(x)=-8x+5$.

115. Berlen $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalar grafikleriniň galtaşmalary parallel bolýan nokatlaryny tapyň:

1) $f(x)=2x^2-3x+4$, $g(x)=12x-8$;
2) $f(x)=18x+19$, $g(x)=-15x+18$;
3) $f(x)=2x+13$, $g(x)=4x-19$;
4) $f(x)=2x^3$, $g(x)=4x^2$;
5) $f(x)=2x^3+3x^2$, $g(x)=15x-17$;
6) $f(x)=2x^4$, $g(x)=4x^3$;

116. 1) $y=\frac{1}{x}$ funksiýanyň grafiginiň $x=-\frac{1}{2}$ nokatdan geçýän galtaşma deňlemesini düzüň. 2) $y=x^2$ parabolanyň $x=1$ we $x=3$ abssissalara degişli nokatlary utgaşdyrylan. Parabolanyň şu 2 nokady utgaşdyrýan kesime parallel bolan galtaşmasy haýsy nokatdan geçýär?

3) Maddy nokat $s(t)=\frac{2}{9}\cdot\sin\frac{\pi t}{2}+3$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär. (s-santimetrde, t-sekuntda). Maddy nokadyň 1-nji sekuntdaky tizlenmesini tapyň.

117. Funksiýanyň görkezilen nokatdaky önümini hasaplaň:

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=-\frac{1}{2}$; 2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=-\pi$;

3) $f(x)=\dfrac{3}{x}$, $x_0=-2$;

4) $f(x)=-\sin x$, $x_0=-\dfrac{\pi}{3}$.

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=5$;

6) $f(x)=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $x_0=-2$;

8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$, $x_0=-\dfrac{\pi}{8}$.

118. Görkezilen wagtdaky tizligi we tizlenmäni tapyň:

1) $s(t)=5t^2-t+50$ $t_0=2$;

2) $s(t)=t^3+12t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=2t+t^3$, $t_0=5$;

4) $s(t)=8\sin t$, $t_0=\dfrac{\pi}{2}$.

119. Funksiýanyň abssissasy görkezilen nokatdaky önümini hasaplaň:

1) $f(x)=x^2-15$, $x_0=\dfrac{1}{2}$;

2) $f(x)=3\cos x$, $x_0=\pi$;

3) $f(x)=\dfrac{3}{x}$, $x_0=2$;

4) $f(x)=-\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

5) $f(x)=x^3-4$, $x_0=-5$;

6) $f(x)=\sin x$, $x_0=-\dfrac{\pi}{6}$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $x_0=2$;

8) $f(x)=\cos 5x$, $x_0=-\dfrac{\pi}{4}$;

9) $f(x)=-\cos 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{8}$;

10) $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

120. Görkezilen wagtdaky tizligi we tizlenmäni tapyň:

1) $s(t)=3t^2-2t+10$, $t_0=2$;

2) $s(t)=t^3-6t^2+1$, $t_0=1$;

3) $s(t)=5t+2t^3$, $t_0=5$;

4) $s(t)=8\cos t$, $t_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Berlen funksiýanyň önümini tapyň (**121–122**):

121. 1) $f(x)=-x^2+x+30$; 2) $f(x)=\sin x-\cos x$; 3) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$;

4) $f(x)=4^x-\sin x$; 5) $f(x)=8\cos x$; 6) $f(x)=\ln x-10x^2+x-1$.

122. 1) $y=x^4$; 2) $y=\dfrac{x-1}{x+2}$; 3) $y=x-\dfrac{20}{x}$; 4) $y=x^2\ln x$;
5) $y=x^3\sin x$; 6) $y=e^x\sin x$; 7) $y=\dfrac{x+1}{4x^2}$; 8) $y=2(10x-1)\sin x$.

123. Berlen funksiýalar üçin $f'(-\frac{\pi}{2}), f'(\frac{\pi}{4})$ sanlary hasaplaň:

1) $f(x)=e^x\cos x$; 2) $f(x)=3x+1$; 3) $f(x)=2x^2+x+3$;
4) $f(x)=\sin x+x^2$; 5) $f(x)=\sin x+\cos x$; 6) $f(x)=\sin x$;
7) $f(x)=\cos x+x^4$; 8) $f(x)=\sin 3x+\cos 3x$.

124. Maddy nokat $x(t)=-\dfrac{t^3}{6}+6t^2+15$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär.

1) tizlenme nol bolan t_0 wagty; 2) şu t_0 wagtdaky tizligi tapyň.

125*. $f(x)=x^2-13x+2$ funksiýa Ox oky bilen nähili burç astynda kesişýär?

126. $f'(0)$ sany tapyň: 1) $f(x)=x^6-4x^3+4$; 2) $f(x)=(x+10)^6$.

127. $y'(x)$ ni tapyň: 1) $y(x)=\sin^2 x$; 2) $y(x)=\cos^2 x$; 3) $y(x)=\mathrm{tg}^2 x$.

128. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

1) $f(x)=3+7x$; 2) $f(x)=x^3+17x$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{4}x+18$;
4) $f(x)=\dfrac{x+21}{x}$; 5) $f(x)=x^2+5x-14$; 6) $f(x)=x(x^2+8)$;
7) $f(x)=-x^2-4x+6$; 8) $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$;
9) $f(x)=x^3-12x^2-17x-23$; 10) $f(x)=3x^4+18x^3-6$;
11) $f(x)=x^3-5x^2+19x+22$; 12) $f(x)=x^4+7x^2$.

129. Funksiýanyň stasionar nokatlaryny tapyň:

1) $f(x)=3x^2-7x+9$; 2) $f(x)=19x-\dfrac{1}{7}x^3$; 3) $f(x)=5x^3$;
4) $f(x)=8x^2$; 5) $f(x)=7x-14$; 6) $f(x)=27-x^3$;
7) $f(x)=12x^3+13x^2-16$; 8) $f(x)=x^3-6x^2+9$.

130. Funksiýanyň lokal maksimum we mimimumlarini tapyň:

1) $f(x)=x^2-\frac{1}{4}x^4$; 2) $f(x)=14+13x^2-12x^3$;

3) $f(x)=x^4-3x^3+x^2+9$; 4) $f(x)=2x^4-x^3+7$.

131. Funksiýanyň artýan, kemelýän aralyklaryny hem-de lokal maksimumlaryny we minimumlaryny tapyň:

1) $f(x)=x^3-64x$; 2) $f(x)=2x^3-24$; 3) $f(x)=4x^3-108x$.

132. Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň:

1) $f(x)=x^4-3x^2+2$, $x\in[-4;1]$; 2) $f(x)=x^5+6x^3+1$, $x\in[-1;2]$;

3) $f(x)=\frac{x}{x+4}$, $x\in[1;5]$; 4) $f(x)=x^3+6x^2+5x+8$, $x\in[-3;4]$.

133. Funksiýanyň grafigini guruň:

1) $y=x^3-2x^2+3x-2$; 2) $y=\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3$; 3) $y=x^4+4x^3$.

134. Gönüburçluk şeklindäki ekin meýdanynyň daşyny gurşamak üçin 1000 metr germew sotib alyndy. Bu germewiň kömeginde iň köpi bilen näçe kwadrat metr meýdany gurşamak mümkin?

135. Tarapy 16 dm bolan kwadrat şeklindäki kartondan üsti açyk guty taýýarlandy. Munda kartonyň uçlaryndan birmeňzeş kwadratjyklar kesip alyndy. Gutynyň göwrümi iň uly bolmagy üçin onuň esasy näçe santimetr bolmaly?

136*. Konserw banka silindr şeklinde bolup, onuň doly üsti 512π sm^2-a deň. Banka iň köp suw sygmagy üçin bankanyň esasynyň radiusy we beýikligi nähili bolmaly?

137. Gönüburçluk şeklindäki uçastoguň meýdany 3600 m^2. Uçastoguň taraplary nähili bolanda ony gurşamak üçin iň kem germew zerur bolýar?

138*. Radiusy 8 dm bolan şara iň kiçi göwrümli konus daşyndan çyzylan. Şu konusyň beýikligini tapyň.

139*. Esasy kwadrat bolan gönüburçly parallelepiped şeklindäki açyk metal gaba 32 l suwuklyk gidýär. Gabyň ölçegleri nähili bolanda ony ýasamaga iň kem metal sarplanýar?

140. Maddy nokat $s(t)=-\frac{t^4}{4}+10t^3$ kanunalaýyklyk bilen hereketlenýär (s(t) metrde, t sekuntda ölçelýär).

1) iň uly tizlenmä ýetýän (t_0) wagty;

2) t_0 wagtdaky pursatlaýyn tizligi;

3) t_0 wagtda geçilen ýoly tapyň.

141. Howa şaryna $t\in[0;10]$ minut aralygynda $V(t) = t^3+3t^2+2t+4$ m^3 howa pürkülýär.

1) başlangyç wagtdaky howanyň göwrümini;

2) t=10 minutdaky howanyň göwrümini;

3) t=5 minutdaky howa pürkeme tizligini;

142. Akram jalbar tikmek üçin buýurma aldy. Bir aýda x sany jalbar tikse, $p(x)=-2x^2+240x$ (müň som) girdeji alýar.

1) girdejini iň uly etmek üçin näçe jalbar tikmeli?

2) iň uly girdeji näçe som bolýar?

143. Funksiýanyň önümini tapyň:

1) $y=e^{3x}$;	2) $y=e^{\sin x}$;	3) $y=\sin(3x+2)$;	4) $y=(2x+1)^4$;
5) $y=\frac{x-2}{x^2+1}$;	6) $y=\frac{\ln x}{x}$;	7) y=arctg2x;	8) $y=x^2\cdot\cos x$.

144. $f(x)=e^{2x}$ we $g(x)=4x+2$ funksiýalar üçin $F(x)$ çylşyrymly funksiýany düzüň:

1) $F(x)=f(g(x))$; 2) $F(x)=f(x)^{g(x)}$;

3) $F(x)=g(f(x))$; 4) $F(x)=\sqrt{g(g(x))}$.

145. Çylşyrymly funksiýanyň önümini tapyň:

1) $y=(x^2+1)^5$; 2) y=lncos$x$;

3) $y=\sqrt{5x-7}$; 4) $y=\sqrt{\operatorname{tg}(2x-3)}$;

5) y=arctg(3x–4); 6*) y=sin(arctg2x);

7) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$; 8*) $y=e^{\sin(\cos x)}$.

146. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

1) $y = 2 + x - x^2$;

2) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100} \quad (x \geq 0)$;

3) $y = 3x - x^3$;

4) $y = 2x - \sin x$;

5) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$;

6) $y = \dfrac{x^2}{2^x}$.

7) $y = (x-1)^3$;

8) $y = (x-1)^4$.

147. Funksiýanyň stasionar nokatlaryny, lokal maksimumlaryny we minimumlaryny tapyň:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$;

2) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$;

3) $y = x + \dfrac{1}{x}$;

4) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

148. Funksiýanyň görkezilen aralykdaky iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň:

1) $f(x) = 2^x$, $[-1; 5]$;

2) $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $[-3; 10]$;

3) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $[0{,}01; 100]$;

4) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$, $[-1; 1]$;

5) $f(x) = \cos x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$;

6) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $[-10; 10]$;

7) $f(x) = \sin x$, $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$;

8) $f(x) = |x^2 + 3x + 2|$, $[-15; 10]$.

149. Funksiýany barlaň we grafigini guruň:

1) $y = 3x - x^3$;

2) $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$;

3) $y = (x+1)(x-2)^2$.

4) $y = x + \dfrac{1}{x}$;

5) $y = \sqrt{16 - x^2}$;

6) $y = \sqrt{x^2 - 9}$;

7) $y = x^2 - 5|x| + 6$;

8) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2$.

II BAP

INTEGRAL WE ONUŇ ULANYLYŞY

37–39 BAŞLANGYÇ FUNKSIÝA WE ANYK DÄL INTEGRAL DÜŞÜNJELERI

Eger nokat hereket başlanandan başlap t wagtyň dowamynda $s(t)$ aralygy geçen bolsa, onuň pursatlaýyn tizligi $s(t)$ funksiýanyň önümine deňdigini bilýärsiňiz: $v(t)=s'(t)$. Amalyýetde *ters mesele:* nokadyň berlen hereket tizligi $v(t)$ boýunça onuň geçen ýoly $s(t)$ -ni tapmak meselesi hem duşýar. Şeýle $s(t)$ funksiýany tapmaly bolup, ýagny onuň önümi $v(t)$ bolsun. Eger $s'(t)=v(t)$ bolsa, $s(t)$ funksiýa $v(t)$ funksiýanyň *başlangyç funksiýasy* diýilýär. Umuman, şeýle kesgitleme girizmek mümkin:

Eger $(a;\ b)$-ge degişli islendik x üçin $F'(x)=f(x)$ bolsa, $F(x)$ funksiýa $(a;\ b)$ aralykda $f(x)$-iň *başlangyç funksiýasy* diýilýär.

1-nji mysal. a – berlen käbir san we $v(t)=at$ bolsa, $s(t)=\frac{1}{2}at^2$ funksiýa $v(t)$ funksiýanyň başlangyjydyr, çünki $s'(t)=(\frac{at^2}{2})'=at=v(t)$.

2-nji mysal. $f(x)=x^2$, $x\in(-\infty;\ \infty)$, bolsa, $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ funksiýa $f(x)$-iň $(-\infty;\ \infty)$ bolandaky başlangyç funksiýasy bolýar, çünki

$$F'(x)=(\frac{1}{3}x^3)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x).$$

3-nji mysal. $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, munda $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$, funksiýa üçin $F(x)=\mathrm{tg}x$ başlangyç funksiýa bolýar, çünki $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

4-nji mysal. $f(x)=\frac{1}{x}, x>0$, bolsa, $F(x)=\ln x$ funksiýa $\frac{1}{x}$ iň başlangyç funksiýasy bolýar, çünki $F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

1-nji mesele. $F_1(x)=\frac{x^4}{4}$, $F_2(x)=\frac{x^4}{4}+17$, $F_3(x)=\frac{x^4}{4}-25$ funksiýalar şol bir $f(x)=x^3$ funksiýanyň başlangyç funksiýalary bolýandygyny subut ediň.

Δ Önümleriň jedweline görä ýazyp bileris:

1) $F_1'(x)=(\frac{x^4}{4})'=4\cdot\frac{x^3}{4}=x^3=f(x).$

2) $F_2'(x)=(\frac{x^4}{4}+17)'=(\frac{x^4}{4})'+(17)'=4\cdot\frac{x^3}{4}+0+x^3=x^3=f(x)$

3) $F_3'(x)=(\frac{x^4}{4}-25)'=(\frac{x^4}{4})'-(25)'=4\cdot\frac{x^3}{4}-0=x^3=f(x).$

Bu meseleden şeýle netijä gelmek mümkin: islendik $F(x)=\frac{x^4}{4}+C$ funksiýa (C – käbir hemişelik san) hem $f(x)=x^3$ üçin başlangyç funksiýa bolup bilýär. Çyndanam, $F'(x)=(\frac{x^4}{4}+C)'=(\frac{x^4}{4})'+C'=4\cdot\frac{x^3}{4}+0=x^3=f(x)$. ▲

Bu meseleden ýene şeýle netijä gelmek mümkin: berlen $f(x)$ funksiýa üçin onuň başlangyç funksiýasy bir bahaly kesgitlenmeýär.

Eger $F(x)$ funksiýa $f(x)$-iň käbir aralyklary başlangyç funksiýasy bolsa, $f(x)$ funksiýanyň ähli başlangyçlary $F(x)+C$ (C – islendik hemişelik san) görnüşinde ýazylýar.
$F(x)+C$ görnüşindäki ähli funksiýalar toplumy $f(x)$-iň *anyk däl integraly* diýilýär we $\int f(x)dx$ ýaly kesgitlenýär.

Diýmek, $\int f(x)dx=F(x)+C.$

$\int$ – integral belgisi, $f(x)$ – integralyň astyndaky funksiýa, $f(x)dx$ bolsa integralyň astyndaky aňlatma diýilýär.

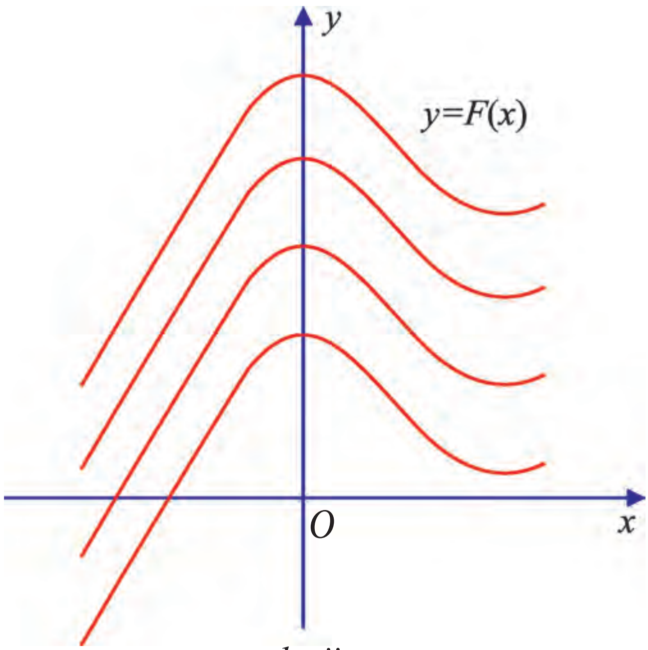
5-nji mysal. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$, çünki önümleriň jedweline görä,

$$(\frac{a^x}{\ln a}+C)'=(a^x)'\cdot\frac{1}{\ln a}+C'=a^x\cdot\ln a\cdot\frac{1}{\ln a}+0=a^x.$$

6-njy mysal. $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1,$

Çünki $\left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + C\right)' = \frac{1}{k+1} \cdot (x^{k+1})' + C' = \frac{k+1}{k+1} \cdot x^k + 0 = x^k.$ $k=-1$ bolsa, $x>0$ bolanda 4-nji mysala görä, $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$

$y=F(x)+C$ funksiýanyň grafigi $y=F(x)$ funksiýanyň grafigini Oy ok boýunça süýşürmekden alynýar (1-nji surat). Hemişelik san C-ni saýlamak hasabyna başlangyç funksiýanyň grafigini berlen nokat arkaly geçmegini gazanmak mümkin.



1-nji surat.

2-nji mesele. $f(x)=x^2$ funksiýanyň grafiginiň $A(3;\ 10)$ nokatdan geçýän başlangyç funksiýasyny tapyň.

Δ $f(x)=x^2$ funksiýanyň ähli başlangyç funksiýalary $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ görnüşde bolýar, çünki $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + C' = x^2 + 0 = x^2.$

Hemişelik san C-ni $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ funksiýanyň grafiginiň (3; 10) nokatdan geçýän edip saýlaýarys: x=3 da F(3)=10 bolmaly.

Mundan $10=\frac{3^3}{3}+C$, $C=1$.

Diýmek, gözlenýän başlangyç funksiýa $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$ bolýar. *Jogaby:* $\frac{x^3}{3}+1$. ▲

3-nji mesele. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ funksiýanyň grafiginiň $A(8;15)$ nokatdan geçýän başlangyç funksiýasyny tapyň.

∆ $f(x)=\sqrt[3]{x}$ -iň ähli başlangyç funksiýalary $F(x)=\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}$ +C görnüşinde bolýar, çünki

$$F'(x)=\left(\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+C\right)'=\frac{3}{4}(x^{\frac{4}{3}})'+C'=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}+C'=x^{\frac{1}{3}}+0=\sqrt[3]{x}.$$

Hemişelik san C-ni şeýle saýlaýarys, $F(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$ funksiýanyň grafigi A(8, 15) nokatdan geçsin, ýagny F(8)=15 deňlik ýerine ýetirilen ýaly.

$x^{\frac{4}{3}}=x\sqrt[3]{x}$ ekenliginden $15=\frac{3}{4}\cdot 8\cdot\sqrt[3]{8}+C$, mundan C=3. Diýmek, gözlenýän başlangyç funksiýa $F(x)=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$ bolýar. *Jogaby:* $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+3$. ▲

4*-nji mesele. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$ bolýandygyny görkeziň.

∆ x>0 da $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$, çünki $(\ln x+C)'=\frac{1}{x}+0=\frac{1}{x}$;

x<0 da $\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C$, çünki $(\ln(-x)+C)'=\frac{(-1)}{(-x)}+0=\frac{1}{x}$. ▲

? Soraglar we ýumuşlar

1. Başlangyç funksiýa näme? Mysallar getiriň.
2. Berlen $f(x)$ funksiýa üçin başlangyç funksiýa bir bahaly tapylýarmy? Näme üçin?
3. Başlangyç funksiýa $F(x)$-iň grafigini berlen nokatdan geçmegini nädip gazanmak mümkin? Mysalda düşündiriň.

Gönükmeler

1. Hakyky sanlar toplumy $R=(-\infty,\infty)$ bolanda $f(x)$ funksiýa üçin $F(x)$ funksiýanyň başlangyç funksiýa bolýandygyny subut ediň:

1) $F(x)=x^2-\sin 2x+2018$, $\quad f(x)=2x-2\cos 2x$;

2) $F(x)=-\cos\frac{x}{2}-x^3+28$, $\quad f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-3x^2$;

3) $F(x)=2x^4+\cos^2 x+3x$, $\quad f(x)=8x^3-\sin 2x+3$;

4) $F(x)=3x^5+\sin^2 x-7x$, $\quad f(x)=15x^4+\sin 2x-7$.

Aşakdaky funksiýalaryň ähli başlangyç funksiýalaryny, önümleriň jedwelinden peýdalanyp tapyň (**2–6**):

2. 1) $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$; 2) $f(x)=6x^5$; 3) $f(x)=x^{10}$; 4) $f(x)=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x}$;
5) $f(x)=\sin x$; 6) $f(x)=\cos x$; 7) $f(x)=\sin 2x$; 8) $f(x)=\cos 2x$;

3. 1) $f(x)=4^x$; 2) $f(x)=\pi^x$; 3) $f(x)=e^x$; 4) $f(x)=a^x$;
5) $f(x)=a^{2x}$; 6) $f(x)=e^{\pi x}$; 7) $f(x)=10^{3x}$; 8) $f(x)=e^{2x+3}$.

4. 1) $f(x)=\frac{1}{2x+3}$; 2) $f(x)=\frac{1}{4x-5}$; 3) $f(x)=\frac{1}{2x+7}$;
4) $f(x)=\frac{1}{ax}$; 5) $f(x)=\frac{1}{ax+b}$; 6) $f(x)=\frac{a}{ax-b}$.

5. 1) $f(x)=\sin 3x$; 2) $f(x)=\sin(2x+5)$; 3) $f(x)=\sin(4x+\pi)$;
4) $f(x)=\cos 5x$; 5) $f(x)=\cos(3x-2)$; 6) $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$.

6. 1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^5}$; 3) $f(x)=(3x+2)^2$; 4) $f(x)=(2x-1)^3$.

7. Berlen $f(x)$ funksiýa üçin onuň görkezilen A nokatdan geçýän başlangyç funksiýasyny tapyň:

1) $f(x)=2x+3$, $A(1;5)$; $\quad$ 2) $f(x)=-x^2+2x+5$, $A(0;2)$;

3) $f(x)=\sin x$, $A(0;3)$; $\quad$ 4) $f(x)=\cos x$, $A(\frac{\pi}{2};5)$.

Berlen $f(x)$ funksiýa üçin onuň şeýle başlangyç funksiýasyny tapyň, ýagny bu başlangyç funksiýanyň grafigi y göni çyzyk bilen diňe bir umumy nokada eýe bolsun (**8–9**):

8. 1) $f(x)=4x+8$, $y=3$; 2) $f(x)=3-x$, $y=7$,

3) $f(x)=4{,}5x+9$, $y=6{,}8$; 4) $f(x)=2x-6$, $y=1$.

9*. $f(x)=ax+b$, $y=k$.

Görkezme: $F(x)=\frac{ax^2}{2}+bx+C$, meseläniň şertinden we

$\frac{ax^2}{2}+bx+C=k$ kwadrat deňlemeden C-ni tapyň.

$C=\frac{2ak+b^2}{2a}=k+\frac{b^2}{2a}$ bolýar.

10*. $f(x)$ üçin onuň şeýle başlangyç funksiýasyny tapyň, ýany şu başlangyç funksiýanyň grafigi görkezilen nokatlardan geçsin:

1) $f'(x)=\frac{16}{x^3}$,	$A\,(1;\,10)$ we $B\,(4;\,-2)$;
2) $f'(x)=\frac{54}{x^4}$,	$A(-1;\,4)$ we $B\,(3;\,4)$;
3) $f'(x)=6x$,	$A(1;6)$ we $B(3;30)$;
4) $f'(x)=20x^3$;	$A(1;9)$ we $B(-1;7)$.

Görkezme: Berlen $f'(x)$ boýunça $f(x)+C_1$ tapylýar. Soňra $f(x)+C_1$ üçin başlangyç funksiýasy $F(x)=\int f(x)dx+C_1x+C_2$ tapylýar. Berlen nokatlar koordinatalaryny ahyrky deňlige goýup, C_1 we C_2 sanlary tapmak üçin çyzykly deňlemeler sistemasyna gelinýär.

11*. Berlen $f(x)$ funksiýa üçin onuň şeýle başlangyç funksiýasyny tapyň, ýagny şu başlangyç funksiýanyň grafigi bilen $f(x)$ önüminiň grafiginiň abssissasy görkezilen nokatda kesişsin:

1) $f(x)=(3x-2)^{\frac{1}{3}}$, $x_0=1$;	2) $f(x)=(4x+5)^{\frac{1}{4}}$, $x_0=-1$;
3) $f(x)=(7x-5)^{\frac{1}{7}}$, $x_0=1$;	4) $f(x)=(kx+b)^{\frac{1}{k}}$, $x_0=\frac{1-b}{k}$.

12. Berlen $f(x)$ funksiýa üçin görkezilen nokatdan geçýän başlangyç funksiýany tapyň:

1) $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$, $A(3;\ 7)$; 2) $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$, $A(0;\ 1)$;

3) $f(x)=\cos x$, $A(\dfrac{\pi}{2};8)$; 4) $f(x)=\sin x$, $A(\pi;10)$.

13. $F(x)$ funksiýa san okunda $f(x)$ funksiýanyň başlangyç funksiýasy bolýandygyny görkeziň:

1) $F(x)=k\cdot e^{\frac{x}{k}}$, $f(x)=e^{\frac{x}{k}}$, $k\neq 0$;

2) $F(x)=C+\sin kx$, $f(x)=k\cdot\cos kx$, C – hemişelik san;

3) $F(x)=C+\cos kx$, $f(x)=-k\cdot\sin kx$, C – hemişelik san;

4) $F(x)=\dfrac{1}{5}\sin(5x+12)$, $f(x)=\cos(5x+12)$.

14. $f(x)$ funksiýanyň görkezilen nokatdan geçýän başlangyç funksiýasyny tapyň:

1) $f(x)=\sin 3x$, $A(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{1}{3})$; 2) $f(x)=\cos 5x$, $A(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{4}{5})$;

3) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$, $A(\dfrac{\pi}{3};1)$; 4) $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}$, $A(\pi;\dfrac{9}{2})$.

15. $f(x)$ funksiýa üçin onuň berlen deňlemeler sistemasynyň çözüwi $(x_o;\ y_o)$ nokatdan geçýän başlangyç funksiýasyny tapyň:

1) $f(x)=3x^2$; $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=3,\\ 4\log_2 x-\log_2 y=2.\end{cases}$

2) $f(x)=4x^3$; $\begin{cases}5^x+5^y=30,\\ 3\cdot 5^x-2\cdot 5^y=15.\end{cases}$

3) $f(x)=\cos x$; $\begin{cases}x+y=\dfrac{3\pi}{2},\\ 4x-3y=-\pi.\end{cases}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{5x+e}$; $\begin{cases}2^x+3^y=4,\\ 3\cdot 2^x-3^y=0.\end{cases}$

40–43 INTEGRALLAR JEDWELI. INTEGRIRLEMEGIŇ IŇ ÝÖNEKEÝ DÜZGÜNLERI

Integrallar jedwelini önümleriň jedweliniň kömeginde düzmek mümkin.

№	Funksiýa $f(x)$	Başlangyç funksiýa $F(x)+C$
1	$x^p, \quad p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1}+C$
2	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert+C$
3	e^x	e^x+C
4	$\sin x$	$-\cos x+C$
5	$\cos x$	$\sin x+C$
6	$(kx+b)^p, \quad p \neq -1, \quad k \neq 0$	$\dfrac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
7	$\dfrac{1}{kx+b}, \quad k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$
8	$e^{kx+b}, \; k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}e^{kx+b}+C$
9	$\sin(kx+b), \quad k \neq 0$	$-\dfrac{1}{k}\cos(kx+b)+C$
10	$\cos(kx+b), \quad k \neq 0$	$\dfrac{1}{k}\sin(kx+b)+C$
11	$1/\cos^2 x$	$\mathrm{tg}x+C$
12	$1/\sin^2 x$	$-\mathrm{ctg}x+C$
13	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
14	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}x+C$
15	$f(kx+b)$	$\dfrac{1}{k}F(kx+b)+C$
16	$f(g(x))g'(x)$	$F(g(x))+C$

Käbir X aralykda kesgitlenen $F(x)$ funksiýa $f(x)$ funksiýanyň başlangyç funksiýasy bolmagy üçin iki funksiýa hem – $F(x)$ we $f(x)$ – hut şu X aralykda kesgitlenen bolmaly.

Meselem, $\frac{1}{5x-8}$ funksiýanyň $5x-8>0$, ýagny $x>1{,}6$ aralykdaky integraly, jedwele görä, $\frac{1}{5}\ln(5x-8)+C$ -ge deň.

Differensirleme düzgünlerinden peýdalanyp, *integrirlemek düzgünlerini* beýan etmek mümkin.

$F(x)$ we $G(x)$ funksiýalar käbir aralykda, degişlilikde, $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalaryň başlangyç funksiýalary bolsun. Şu düzgünler ýerliklidir:

1-nji düzgün: $a\cdot F(x)$ funksiýa $a\cdot f(x)$ funksiýanyň başlangyç funksiýasy bolýar, ýagny

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot F(x)+C.$$

2-nji düzgün: $F(x)\pm G(x)$ funksiýa $f(x)\pm g(x)$ funksiýanyň başlangyç funksiýasy bolýar, ýagny:

$$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx=F(x)\pm G(x)+C$$

1-nji mysal. $f(x)=5\sin(3x+2)$ funksiýanyň integralyny tapyň.

Δ Bu funksiýanyň integralyny 1-nji düzgün we integrallar jedweliniň 9-njy bendine görä tapýarys:

$$\int f(x)dx=\int 5\sin(3x+2)dx=5\int\sin(3x+2)dx=$$
$$=5\cdot(-\frac{1}{3}\cos(3x+2))+C=-\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C,$$

çünki integrallar jedweline görä

$$\int\sin(3x+2)dx=-\frac{1}{3}\cos(3x+2)+C.$$

Jogaby: $-\frac{5}{3}\cos(3x+2)+C.$ ▲

2-nji mysal. $f(x)=8x^7+2\cos 2x$ funksiýanyň integralyny tapyň.

Δ Bu funksiýanyň integralyny 1 we 2-nji düzgünler hem-de integrallar jedweliniň 1 we 10-njy bendine görä tapýarys:

$$\int f(x)dx = \int (8x^7 + 2\cos 2x)dx = 8\int x^7 dx + 2\int \cos 2x dx$$

$$= 8\cdot\frac{1}{8}x^8 + 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C = x^8 + \sin 2x + C$$

Jogaby: $x^8 + \sin 2x + C$. ▲

3-nji mysal. $\int \frac{xdx}{x^2+8}$ integraly hasaplaň.

Δ Şular ýaly mysallary çözende *üýtgeýäni çalşyrmak* amatly. Eger $x^2+8=u$ diýilse, $du=2xdx$, $xdx=\frac{1}{2}du$ bolýar. Onda

$$\int \frac{xdx}{x^2+8} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|+C = \frac{1}{2}\ln(x^2+8)+C.$$

Barlamak: Tapylan başlangyç funksiýadan önüm alynsa, integral astyndaky funksiýa $\frac{x}{x^2+8}$ alynmaly. Çyndan hem,

$$\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+8)+C\right)' = \frac{1}{2}(\ln(x^2+8))' + C' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+8}\cdot(x^2+8)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+8} = \frac{x}{x^2+8}.$$

Jogaby: $\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+8)+C$. ▲

4-nji mysal. $\int e^{\sin x}\cos x dx$ integraly hasaplaň.

Δ $\sin x = t$ çalşyrmany ýerine ýetirýäris. Onda $dt=\cos x dx$ we berlen integral $\int e^t dt$ görnüşi alýar. Integrallar jedwelleriniň 3-nji bendine görä $\int e^t dt = e^t + C$ bolýar. Diýmek, $\int e^{\sin x}\cos x dx = e^{\sin x}+C$.

Barlamak. $(e^{\sin x}+C)' = (e^{\sin x})'+C' = e^{\sin x}(\sin x)'+0 = e^{\sin x}\cos x$ – berlen integral astyndaky funksiýany aldyk.

Jogaby: $e^{\sin x}+C$. ▲

5-nji mysal. $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx$ integraly hasaplaň.

∆ Munda $2\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 8x + \sin 2x$ deňlik kömek edýär. Onda

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}(-\cos 8x) + \frac{1}{4}(-\cos 2x) + C = -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Jogaby: $-\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$ ▲

6*-njy mysal. $\int \cos mx \cos nx dx$ integraly hasaplaň.

∆ $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$ deňlige we integrirlemek jedweliniň 10-nji bendine görä:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C.$$

Jogaby: $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + C.$ ▲

7-nji mysal. $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ integraly hasaplaň.

∆ Integral astyndaky funksiýa üçin aşakdaky deňlikler ýerliklidir:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

Mundan

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C,$$

Jogaby: $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.$ ▲

8-nji mysal. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ integraly hasaplaň.

Δ Bu integraly hasaplamak üçin $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ we $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C$ bolýanlygyndan peýdalanýarys. Onda

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}=\int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2}+C=\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$$

Barlamak: $(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C)'=(\mathrm{tg}\frac{x}{2})'+C'=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot(\frac{x}{2})'+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+\cos x}$

– integral astyndaky funksiýa emele geldi.

Jogaby: $\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C.$ ▲

9-njy mysal. $\int \sin^2 2x dx$ integraly hasaplaň.

Δ Integraly hasaplamak üçin $2\sin^2 2x=1-\cos 4x$ deňlikden peýdalanýarys.

$$\int \sin^2 2x dx=\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 4x dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$$

Jogaby: $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C.$ ▲

? Soraglar we ýumuşlar

1. Integrallar jedwelidäki özüňiz islän 4 mysaly saýlaň we ony subut ediň.
2. Integrirlemegiň ýönekeý düzgünlerini beýan ediň. Mysallarda düşündiriň.
3. Üýtgeýän çalyşma usuly näme? $\int e^{\cos 2x}\sin 2x dx$ integraly hasaplanda şu usuly ulanyň we mysalyň çözülişini dündiriň.

Gönükmeler

Berlen funksiýanyň başlangyç funksiýalaryndan birini tapyň (**16–18**):

16. 1) $3x^5-4x^3$; 2) $8x^7-5x^4$; 3) $\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}$; 4) $\frac{5}{x^4}+\frac{3}{x^5}$;

5) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x}$; 6) $7\sqrt[3]{x}-5\sqrt{x}$; 7) $5x^4+4x^3-2x^2$.

17. 1) $5\cos x-3\sin x$; 2) $7\sin x+4\cos x$; 3) $2\cos x-a^x$;

4) $5e^x+2\cos x+1$; 5) $4+2\cdot e^{-x}-7\sin x$; 6) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{x}-e^{-x}$.

18. 1) $(x-2)^3$; 2) $(x+5)^4$; 3) $\frac{1}{\sqrt{x-5}}$ 4) $\frac{6}{\sqrt[3]{x+7}}$;

5) $4\cos(x+5)+\frac{8}{x-7}$; 6) $2\sin(x-3)-\frac{4}{x-2}$; 7) $(3x+7)^4+\frac{1}{x^5}$.

Berlen funksiýanyň ähli başlangyç funksiýalaryny tapyň (**19–20**):

19. 1) $\cos(5x+3)$; 2) $\sin(7x-6)$; 3) $\cos(\frac{2x}{3}+1)$;

4) $\sin(\frac{5x}{7}-2)$; 5) $e^{\frac{2x+3}{4}}$; 6) e^{3-2x};

7) $\frac{4}{\cos^2 x}$; 8) $\frac{3}{\cos^2 4x}$; 9) $\frac{5}{\sin^2 5x}$.

20. 1) $\frac{4}{x^5}-(1-2x)^3$; 2) $(3x+2)^4-\frac{1}{x^6}$; 3) $x+\frac{2}{\cos^6 x}-1$;

4) $2x-\frac{3}{\sin^2 x}+6$; 5) $(1+3x)(x-1)$; 6) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+2\sin(3x-1)$.

21. Berlen $f(x)$ funksiýa üçin grafigi $A(x;y)$ nokatdan geçýän başlangyç funksiýany tapyň:

1) $f(x)=\sin 4x,\ A(\frac{\pi}{4};7)$; 2) $f(x)=\cos 5x,\ A(\frac{\pi}{4};4)$;

3) $f(x)=3x^2+\frac{2}{\sqrt{x+2}},\ A(-1;0)$; 4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\ \ A(2;0)$;

5) $f(x)=\cos^2 3x+\sin^2 3x+\frac{1}{4}\sin 4x,\ A(\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8})$;

6) $f(x)=\text{tg}x\cdot\text{ctg}x-2\cos\frac{x}{2}$, $A(2\pi;2\pi)$;

7) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{5-2x}}+4x$, $A(2;6)$; 8) $f(x)=6x^2-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$, $A(-2;4)$.

Integrallary tapyň (**22–28**):

22. 1) $\int(x^3-\sin 2x-3)dx$; 2) $\int(x^4+\cos 3x+4)dx$;

3) $\int(x^2-\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})dx$; 4) $\int(4x^3+\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{3})dx$;

23*. 1) $\int(\frac{8}{\sin^2 x}+6\cos^2 x+2)dx$; 2) $\int(\frac{6}{\cos^2 x}-8\sin^2 x+3)dx$;

3) $\int\sin 2x\cos 2x dx$; 4) $\int(\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x)dx$;

5) $\int(\sin 2x\cdot\sin 4x+\cos 2x\cos x)dx$; 6) $\int\cos^2 5x dx$.

24*. 1) $\int\sin 5x\cos 3x dx$; 2) $\int\cos 2x\cos 3x dx$; 3) $\int\sin 7x\sin 3x dx$.

25*. 1) $\int\frac{x}{x+1}dx$; 2) $\int\frac{dx}{x^2-7x+12}$; 3) $\int\frac{(x-3)dx}{x^2-4x+3}$; 4) $\int\frac{(x+4)dx}{x^2-16}$.

26. 1) $\int\frac{x^5+x^3-2}{x^2+1}dx$; 2) $\frac{x^2-1}{x^2+1}dx$; 3) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$;

4) $\frac{dx}{1-\cos 2x}$; 5) $\int\frac{dx}{4(x^2-4)}$; 6) $\int(1-2\sin^2 5x)dx$.

27. 1) $\int(x^3-1)^4x^2dx$; 2) $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^3}$; 3) $\int\frac{\text{tg}x}{\cos^3 x}dx$;

4) $\int\frac{\text{ctg}x}{\sin^2 x}dx$; 5) $\int\sin^3 x dx$; 6) $\int\cos^3 x dx$.

28*. 1) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 2) $\int x\cdot\sqrt{x-4}dx$; 3) $\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{x+1}}$;

4) $\int(\text{tg}^2x+\text{tg}^4x)dx$; 5) $\int(\text{ctg}^2x+\text{ctg}^4x)dx$.

Berlen $f(x)$ funksiýa üçin grafigi $A(x;y)$ nokatdan geçýän başlangyç funksiýany tapyň **(29–30)**:

29. 1) $f(x)=\frac{3}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}$, $A(\pi;\ 4)$;

2) $f(x)=\frac{3}{5}\cdot\sin 5x$, $A(\frac{\pi}{2};3)$;

3) $f(x)=2\sin 5x+2\cos\frac{x}{2}$, $A(\frac{\pi}{3};0)$;

30. 1) $f(x)=3x^2-2x+8$, $A(1;9)$;

2) $f(x)=4x^3-3x^2+2x+1$, $A(-1;4)$;

3) $f(x)=5x^4+3x^2+2$, $A(-2;\ 1)$.

31. Integraly tapyň:

1) $\int(x^2-1)(x+2)dx$;

2) $\int(x+2)(x^2-9)dx$;

3) $\int(x^2+1)(x^3-1)dx$;

4) $\int\frac{1-4x^2+\sqrt{1-2x}}{1-2x}dx$;

5) $\int\frac{9x^2-4-\sqrt{3x+2}}{3x+2}dx$;

6) $\int(e^{5-2x}-2^x)dx$;

7) $\int(e^{3x+2}+10^x)dx$.

32. Integraly hasaplaň:

1) $\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$;

2) $\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$;

3) $\int\frac{dx}{x^2+10x+26}$.

N a m u n a : $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$ integraly hasaplaň.

Δ $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{1+(x+2)^2}$; $x+2=u$ diýilse, $1+(x+2)^2=1+u^2$ $x'=u'$

we integrallar jedweliniň 14-15-nji bentlerine görä

$$I=\int\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{arctg}u+C=\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

Barlamak:

$(\operatorname{arctg}(x+2)+C)'=(\operatorname{arctg}(x+2))'+C'=\frac{1}{1+(x+2)^2}+0=$

$$=\frac{1}{1+(x+2)^2}=\frac{1}{x^2+4x+5}.$$

Jogaby: $\operatorname{arctg}(x+2)+C$. ▲

Integrirlemek düzgünlerinden ýene biri *bölekläp integrirlemekdir*.

3-nji düzgün*. Eger käbir X aralykda $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalar üznüksiz $f'(x)$ we $g'(x)$ önüme eýe bolsa, onda

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \qquad (1)$$

formula ýerliklidir. Bu formula *bölekläp integrirlemek formulasy* diýilýär.

Bu formulanyň subudy $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalaryň köpeltmek hasylyny differensirleme düzgüni $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ we $\int f'(x)dx=f(x)+C$ bolýanlygyndan gelip çykýar.

Formuladan *peýdalanmagyň ýoly*: 1) integral astyndaky aňlatma $f(x)$ we $g'(x)$ lar köpeltmek hasyly görnüşinde ýazyp alynýar; 2) $g'(x)$ we $g(x)f'(x)$ aňlatmalaryň integrallaryny aňsat (amatly) hasaplanýan edip almak nazarda tutulýar.

1-nji mysal. $\int x \cdot e^x dx$ integraly hasaplaň.

∆ Bu ýerde $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$ diýip almak amatly, çünki

$g(x) = \int g'(x)dx = \int e^x dx = e^x$, $\quad f'(x)=1$. Onda (1)-a esasan, $\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$.

Diýmek, $\int xe^x dx = e^x \cdot (x-1) + C$.

Jogaby: $e^x(x-1)+C$. ▲

2-nji mysal. $\int \ln x dx$ integraly hasaplaň.

∆ Integral astyndaky $\ln x$ funksiýany $f(x)=\ln x$ we $g'(x)=1$-leriň köpeltmek hasyly diýip hasaplaýarys: $\ln x=f(x) \cdot g'(x)$.

Onda $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \int 1 \cdot dx = x + C$.

(1) formula görä,

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C =$$

$$= x(\ln x - 1) + C = x \cdot (\ln x - \ln e) + C = x \cdot \ln \frac{x}{e} + C.$$

Diýmek, $\int \ln x dx = x \cdot \ln \frac{x}{e} + C.$

Barlamak:

$$(x\ln\frac{x}{e}+C)' = (x\ln\frac{x}{e})' + C' = x'\cdot\ln\frac{x}{e} + x(\ln\frac{x}{e})' + 0 =$$

$$= \ln\frac{x}{e} + x\cdot\frac{e}{x}\cdot\frac{1}{e} = \ln x - \ln e + 1 = \ln x - 1 + 1 = \ln x.$$

Jogaby: $x \cdot \ln\frac{x}{e} + C.$ ▲

3-nji mysal. $\int x\cos x dx$ integraly hasaplaň.

∆ Integraly hasaplamak üçin $f(x)=x,\ g'(x)=\cos x$ diýmek amatly. Onda $f'(x)=1,\ \ g(x)=\int\cos x dx = \sin x$ (bu ýerde başlangyç funksiýalardan birini aldyk, şonuň üçin hemişelik san C-ni ýazmadyk). Bölekläp integrirlemek formulasyna görä,

$$\int x\cos x dx = x\cdot\sin x - \int\sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Jogaby: $x\sin x + \cos x + C.$ ▲

Integrallary hasaplaň (**33–35**):

33*. 1) $\int x\sin x dx$;	2) $\int x^2\cos x dx$;	3) $\int x\ln x dx$;	4) $\int 2x\ln x dx$.
34*. 1) $\int x\cos 2x dx$;	2) $\int x\sin 3x dx$;	3) $\int x\sin\frac{x}{3} dx$;	4) $\int x\cos\frac{x}{4} dx$.
35*. 1) $\int 2^x\cdot x dx$;	2) $\int 3^x\cdot x dx$;	3) $\int 5^x\cdot x dx$.	4) $\int \mathrm{tg}^2 nx dx$;

5) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; 6) $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$; 7) $\int(3^x+4^x)^2 dx$;

8) $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx$; 9) $\int\frac{e^{4x}-1}{e^{2x}-1}dx$; 10) $\int\frac{e^x dx}{\pi+e^x}$;

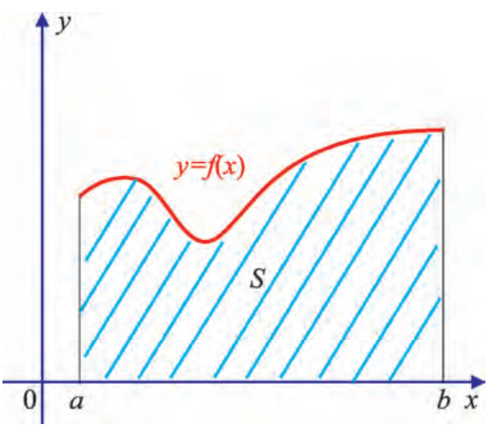
11) $\int x\cdot e^{-x^2}dx$; 12) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 13) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$.

44–46 ANYK INTEGRAL. NÝUTONYŇ-LEÝBNISIŇ FORMULASY

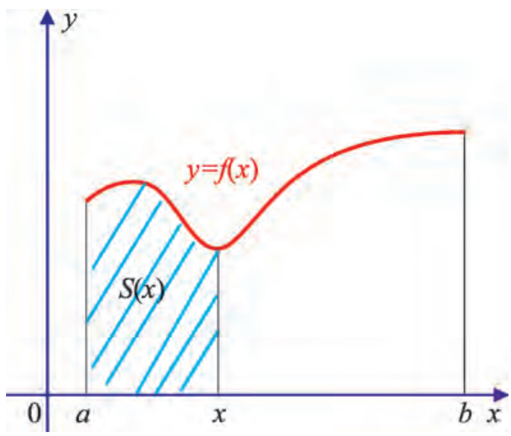
2-nji suratda görkezilen şekil *egri çyzykly trapesiýa* diýilýär. Bu şekil ýokardan $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi bilen, aşakdan $[a, b]$ kesim bilen, gapdal taraplardan bolsa $x=a$, $x=b$ göni çyzyklaryň kesimleri bilen araçäklenen. $[a, b]$ kesime egri çyzykly trapesiýanyň esasy diýilýär.

Egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyny haýsy formula görä hasaplaýarys, diýen sorag döreýär.

Bu meýdany S diýip belgiläliň. S meýdany $f(x)$ funksiýanyň başlangyç funksiýasynyň kömeginde hasaplamak mümkin eken. Şoňa degişli pikir ýöretmeleri getirýäris.



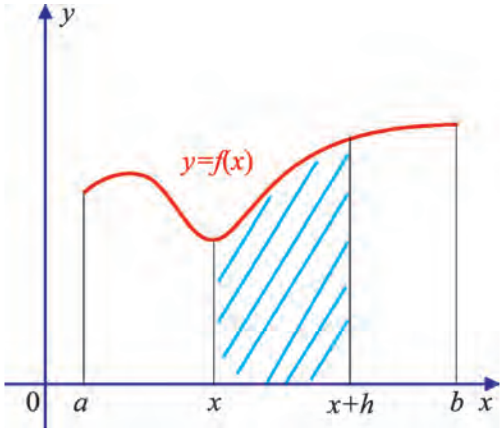
2-nji surat.



3-nji surat.

$[a;x]$ esasly egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyny $S(x)$ diýip belgileýäris (3-nji surat), munda x şu $[a; b]$ kesimdäki islendik nokat: $x=a$ bolanda $[a; x]$ kesim nokada öwrülýär, şonuň üçin $S(a)=0$; $x=b$ bolanda $S(b)=S$.

$S(x)$ ni $f(x)$ funksiýanyň başlangyç funksiýasy bolýangyny, ýagny $S'(x)=f(x)$ bolýandygyny görkezýäris.



4-nji surat.

∆ $S(x+h)$ – $S(x)$ tapawuda garalyň, munda h>0 (h<0 ýagdaý hem edil şeýle garalýar). Bu tapawut esasy [x; $x+h$] bolan egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyna deň (4-nji surat). Eger h san kiçi bolsa, onda bu meýdan takmynan $f(x)\cdot h$ -a deň, ýagny $S(x+h)-S(x)\approx f(x)\cdot h$. Diýmek,

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h}\approx f(x).$$

Bu ýakynlaşan deňligiň çep bölegi $h\to 0$ da önümiň kesgitlemesine görä $S'(x)$-e ymtylýar. Şonuň üçin $h\to 0$ bolanda $S'(x)=f(x)$ deňlik emele gelýär. Diýmek $S(x)$ meýdan $f(x)$ funksiýa üçin başlangyç funksiýasy eken. ▲

Başlangyç funksiýa $S(x)$-dan islendik başga başlangyç $F(x)$ funksiýa hemişelik sana tapawutlanýar, ýagny

$$F(x)=S(x)+C.$$

Bu deňlikden $x=a$ bolanda $F(a)=S(a)+C$ we $S(a)=0$ bolany üçin $C=F(a)$. Onda (1) deňligi aşakdaky ýaly ýazmak mümkin:

$S(x)=F(x)-F(a)$. Mundan $x=b$ da $S(b)=F(b)-F(a)$ bolýandygyny tapýarys.

Diýmek, *egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyny* (2-nji surat) aşakdaky formulanyň kömeginde hasaplamak mümkin:

$$S=F(b)-F(a), \qquad (2)$$

munda $F(x)$ – berlen $f(x)$ funksiýanyň islendik başlangyç funksiýasy.

Şeýdip, egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak $f(x)$ funksiýanyň $F(x)$ başlangyç funksiýasyny tapmaga, ýagny $f(x)$ funksiýany integrirlemäge getirilýär.

$F(b)–F(a)$ tapawuda $f(x)$ funksiýanyň $[a; b]$ kesimdäki *anyk integraly* diýilýär we şeýle kesgitlenýär: $\int_a^b f(x)dx$

(okalyşy: „a-dan b çenli integral ef iks de iks“), ýagny

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (3)$$

(3) formula *Nýutonyň-Leýbnisiň formulasy* diýlip atlandyrylýar.

(2) we (3) formula görä:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (4)$$

Integraly hasaplamakda, adatda, aşakdaky ýaly belgileme girizilýär:

$F(b)–F(a)=F(x)\Big|_a^b$. Onda (3) formulany şeýle ýazmak mümkin:

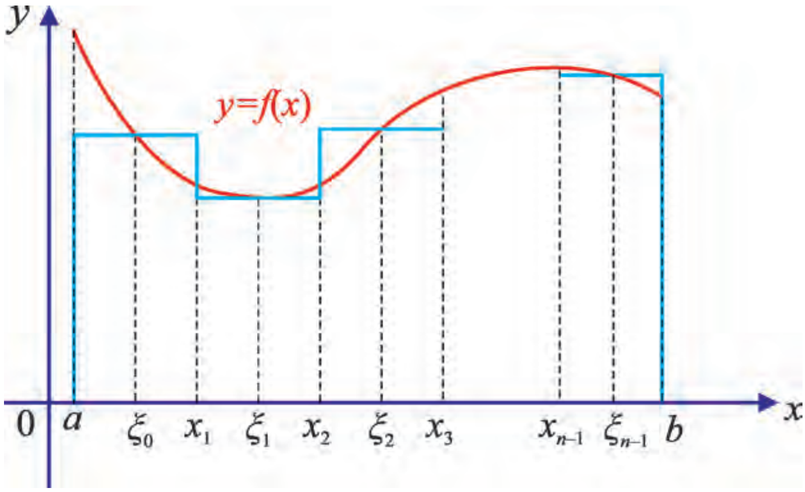
$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \quad (5)$$

Şu orunda gysgaça *taryhy maglumaty* aýtmak ýerlikli.

Egri çyzyklar bilen araçäklenen şekiliň meýdanyny hasaplamak meselesi anyk integral düşünjesine getiripdir. Üznüksiz $f(x)$ funksiýa kesgitlenen $[a, b]$ kesim $a=x_0, x_1.., x_{n-1}.., x_n=b$ nokatlaryň kömeginde özara deň $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0, 1, .., n–1)$ kesimlere bölünen we her bir $[x_k, x_{k+1}]$ kesimden islendik ξ_k nokat alnan. $[x_k, x_{k+1}]$ kesimiň uzynlygy $\Delta x_k=x_{k+1}–x_k$-i berlen $f(x)$ funksiýanyň ξ_k nokatdaky bahasy $f(\xi_k)$-na köpeldilen we şu

$$S_n=f(\xi_0)\Delta x_0+f(\xi_1)\Delta x_1+...+f(\xi_{k-1})\Delta_{n-1} \quad (6)$$

jemi düzülen, munda her bir goşulyjy esasy Δx_k we beýikligi $f(\xi_k)$ bolan gönüburçlugyň meýdanydyr. S_n jem egri çyzykly trapesiýanyň S meýdanyna takmynan deň: $S_n \approx S$ (5-nji surat).



5-nji surat.

(6) jeme $f(x)$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki *integral jemi* diýilýär. Eger n çäksizlige ymtylanda ($n\to\infty$), Δx_k nola ymtylsa ($\Delta x_k\to 0$), onda S_n integral jem käbir sana ymtylýar. Hut şu san $f(x)$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki *integraly* diýlip atlandyrylýar.

1-nji mysal. 6-njy suratda görkezilen egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyny tapyň.

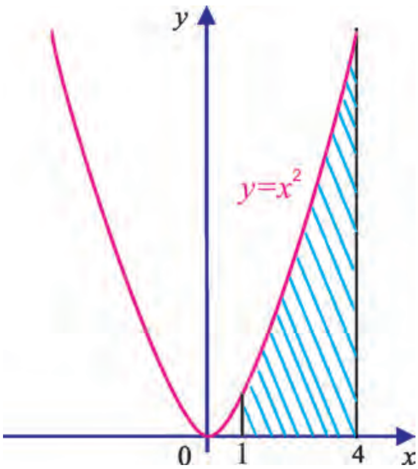
△ (4) formula görä $S=\int_1^4 x^2dx$. Bu integraly Nýutonyň-Leýbnisiň formulasynyň (3) kömeginde hasaplaýarys. $f(x)=x^2$ funksiýanyň başlangyç funksiýalaryndan biridigi $F(x)=\frac{x^3}{3}$ aýdyň. Diýmek,

$$S=\int_1^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^4=\frac{1}{3}(4^3-1^3)=\frac{1}{3}\cdot 63=21 \text{ (kw. birlik).}$$

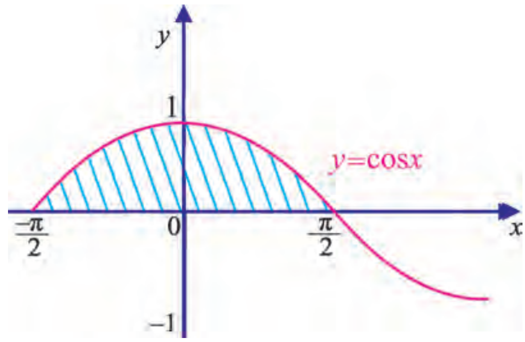
Jogaby: S=21 kw. birlik. ▲

2-nji mysal. 7-nji suratdaky ştrihlenen zolagyň meýdanyny tapyň.

△ Ştrihlenen zolak egri çyzykly trapesiýa bolup, ol ýokardan $y=\cos x$ funksiýanyň grafigi, aşakdan bolsa $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesim bilen araçäklenen. $y=\cos x$ – jübüt funksiýa, Oy zolak oka görä simmetrik. Şu maglumatlara görä, zolagyň üstüniň $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$ üstüniň iki essesine deň diýmek mümkin.



6-njy surat.



7-nji surat.

▲ Nýutonyň-Leýbnisiň formulasyna we (5) formula görä:

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin(\frac{-\pi}{2})=1-(-1)=1+1=2\ (\text{kw. birlik}).$$

Jogaby: 2 kw.birlik. ▲

3-nji mysal. $\int_0^{\pi}\cos x dx$ anyk integraly hasaplaň.

▲ Nýutonyň-Leýbnisiň formulasyna we (5) formula görä:

$$\int_0^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0.$$

Jogaby: 0. ▲

4-nji mysal. $\int_{-1}^{2}(2x^2-3x+4)dx$ anyk integraly hasaplaň.

▲ Nýutonyň-Leýbnisiň formulasyna we (5) formula görä:

$$\int_{-1}^{2}(2x^2-3x+4)dx=(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x)\Big|_{-1}^{2}=\frac{22}{3}-(-\frac{37}{6})=\frac{81}{6}=13{,}5.(\text{kw. birlik})$$

Jogaby: 13,5 kw. birlik. ▲

5-nji mysal. $S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2(3x+\frac{\pi}{6})\,dx$ anyk integraly hasaplaň.

Δ Ilki anyk däl integraly tapýarys:

$$\int \sin^2(3x+\frac{\pi}{6})dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos(6x+\frac{\pi}{3}))dx=\frac{1}{2}\cdot(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3})).$$

Onda $S=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}\sin(6x+\frac{\pi}{3}))\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}\sin(2\pi+\frac{\pi}{3}))-\frac{1}{2}(0-\frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{3})=$

$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{12}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}.$

Jogaby: $S=\frac{\pi}{6}$. ▲

6-njy mysal. $\int_2^6\sqrt{2x-3}\,dx$ anyk integraly hasaplaň.

Δ Ilki anyk däl integraly tapýarys:

Integrallar jedweline görä $\int\sqrt{2x-3}dx=\frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$
Onda

$$\int_2^6\sqrt{2x-3}dx=\frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6=\frac{1}{3}\cdot\left((2\cdot6-3)^{\frac{3}{2}}-(2\cdot2-3)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\cdot(27-1)=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}.$$

Jogaby: $8\frac{2}{3}$. ▲

Anyk integral aşakdaky häsiýetlere eýe:

1. $\int_a^a f(x)dx=0.$ Hakykatdan hem, $\int_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)=0.$

2. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$

Δ $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a);\ \int_b^a f(x)dx=F(a)-F(b)=-(F(b)-F(a)).$

Diýmek, $-\int_b^a f(x)dx=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$ ▲

3. a, b, c – hakyky sanlar bolsa, $\int_b^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (anyk integralyň additiwlik häsiýeti).

4. $f(x)$, $x \in R$, jübüt funksiýa bolsa, onda $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$

5. Eger $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ bolsa, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bolýar.

6. $x \in [a, b]$ da $f(x) < g(x)$ bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ bolýar.

? Soraglar we ýumuşlar

1. Anyk integral näme?
2. Egri çyzykly trapesiýa meýdanyny hasaplamak meselesini aýdyň. Mysallarda düşündiriň.
3. Nýutonyň-Leýbnisiň formulasy näme? Onuň mazmunyny aýdyň.
4. Anyk integralyň häsiýetlerini aýdyň. Mysallarda düşündiriň.

Gönükmeler

Anyk integrallary hasaplaň (**36–41**):

36. 1) $\int_0^2 3x^2 dx$; 2) $\int_0^2 2xdx$; 3) $\int_{-1}^4 5xdx$; 4) $\int_1^2 8 \cdot x^3 dx$;

5) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$; 6) $\int_3^4 \frac{1}{x^2} dx$; 7) $\int_1^2 \frac{1}{x^4} dx$; 8) $\int_0^1 \sqrt{2x} dx$;

9) $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$; 10) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 11) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$; 12) $\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx$.

37. 1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) dx$; 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2xdx$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \cos 3xdx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) dx$.

38. 1) $\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx$; 2) $\int_0^2 e^{4x}dx$; 3) $\int_1^3 (e^{2x}-e^x)dx$.

39. 1) $\int_{-1}^1 (x^2+3x))(x-1)dx$; 2) $\int_{-1}^0 (x+2)(x^2-3)dx$;

3) $\int_1^3 (x+\frac{1}{x})^2 dx$; 4) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}(1-\frac{1}{x})dx$.

40*. 1) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$; 2) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin^4 2x+\cos^4 2x)dx$.

41*. 1) $\int_1^5 x^2\cdot\sqrt{x-1}dx$; 2) $\int_1^5 \frac{x^2-6x+10}{x-3}dx$; 3) $\int_0^1 \frac{x^2+2x+4}{x+1}dx$.

42*. 1) Şeýle a we b sanlary tapyň, ýagny $f(x)=a\cdot 2^x+b$ funksiýa $f'(1)=2$,

$\int_0^3 f(x)dx=7$ şertleri kanagatlandyrsyn.

2) $\int_1^b (b-4x)dx \geq 6-5b$ deňsizlik ýerine ýetirilýän ähli $b>1$ sanlary tapyň.

43*. 1) $\int_1^2 (b^2+(4-4b)x+4x^3)dx \leq 12$ deňsizlik ýerine ýetirilýän ähli b sanlary tapyň.

2) Nähili $a>0$ sanlar üçin $\int_{-a}^a e^x dx > \frac{3}{2}$ deňsizlik ýerine ýetirilýär?

44. $f(x)$ funksiýany a-nyň islendik bahasynda deňlikler ýerine ýetirilýän edip saýlaň:

1) $\int_0^a f(x)dx=2a^2-3a$; 2) $\int_0^a f(x)dx=4a-a^2$;

3) $\int_0^a f(x)dx=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2$; 4) $\int_0^a f(x)dx=a^2+a+\sin a$.

Integrallary hasaplaň (**45–46**):

45. 1) $\int_0^1 (e^{-x}+1)^2 dx$; 2) $\int_{-2}^{-1} 10^x \cdot 2^{-x} dx$; 3) $\int_0^1 (e^{-x}-1)^2 dx$;

4) $\int_{-3}^{-1} 3^{-x} 6^x dx$; 5) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-3x} dx$; 6) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$.

46*. 1) $\int_0^1 \frac{2^x+3^x}{6^{x+1}} dx$; 2) $\int_0^1 \frac{2^{x-1}+5^{x-1}}{10^x} dx$; 3) $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2xdx}{x^2+1}$;

4) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{e+2}} \frac{2xdx}{x^2-2}$; 5) $\int_0^1 \frac{3^x+4^x}{12^x} dx$; 6) $\int_0^2 4^{-x} \cdot 8^x dx$.

47. $x=a$, $x=b$ göni çyzyklar, Ox oky we $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi bilen araçäklenen egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyny tapyň. Degişli çyzgy çyzyň:

1) $a=1$, $b=2$, $f(x)=x^3$; 2) $a=2$, $b=4$, $f(x)=x^2$;

3) $a=-2$, $b=1$, $f(x)=x^2+2$; 4) $a=1$, $b=2$, $f(x)=x^3+2$;

5) $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{2\pi}{3}$, $f(x)=\sin x$; 6) $a=\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\cos x$.

48. Ox oky we berlen parabola bilen araçäklenen şekiliň meýdanyny tapyň:

1) $y=9-x^2$; 2) $y=16-x^2$; 3) $y=-x^2+5x-6$;

4) $y=-x^2+7x-10$; 5) $y=-x^2+4x$; 6) $y=-x^2-3x$.

Aşakdaky çyzyklar bilen araçäklenen şekiliň meýdanyny tapyň. Degişli çyzgy çyzyň (**49–50**):

49. 1) $y=-x^2+2x$, $y=0$; 2) $y=-x^2+3x+18$, $y=0$;

3) $y=2x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$; 4) $y=-x^2+2x$, $y=x$.

50. 1) $y=-2x^2+7x$, $y=3{,}5-x$; 2) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$;

3) $y=x^2$, $y=0$, $y=-x+2$; 4) $y=2\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

5) $y=\frac{1}{a}\cdot x^2, y=a\cdot\sqrt{x}$; 6) $y=2^x, y=2, x=0$;

7) $y=|\lg x|, y=0, y=2, x=0$.

Barlag işiniň nusgasy
I Wariant

1. $f(x)=\frac{x^3}{2}-\cos 3x$ funksiýanyň ähli başlangyç funksiýalaryny tapyň.

2. Eger $F(\frac{3}{2})=1$, bolsa, $f(x)=\frac{6}{(4-3x)^2}$ funksiýanyň başlangyç funksiýasy $F(x)$-i tapyň.

3. Hasaplaň: $\int_{-1}^{2}(x^2-6x+9)dx.$

4. Hasaplaň: $\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{3}dx.$

5. *Ox* oky, $x=-1$ we $x=2$ göni çyzyklar we $y=9-x^2$ parabola bilen araçäklenen egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplaň.

II Wariant

1. $f(x)=\frac{x^4}{3}+\sin 4x$ funksiýanyň ähli başlangyç funksiýalaryny tapyň.

2. Eger $F\left(\frac{1}{2}\right)=2$ bolsa, $f(x)=\frac{3}{(2-5x)^3}$ funksiýanyň başlangyç funksiýasy $F(x)$ -i tapyň.

3. Hasaplaň: $\int_{-3}^{1}(x^2+7x-8)dx$

4. Hasaplaň: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx$

5. *Ox* oky, $x=-2$ we $x=3$ göni çyzyklar we $y=x^2-1$ parabola bilen araçäklenen egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplaň.

Jogaplar
I BAP

1. *a*) Pulsuň ýygylygy – bu ýüregiň bir minutda näçe urşuny görkezýän belgi. Diýmek, bir minutda Medinäniň ýüregi 67 gezek uryar. *b*) 4020. **2.** *a*) ≈ 0,00150 $\frac{\text{ýalňyş}}{\text{söz}}$. Hili artdy. *b*) ≈ 0,15. **3.** Ma'ruf önümliräk işläpdir.

4. ***a)*** ≈0,000177 $\frac{\text{mm}}{\text{km}}$. **5.** 89$\frac{\text{km}}{\text{sagat}}$ ýa-da 89$\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **6.** a) 0,1 $\frac{m}{s}$; b) 0,9 $\frac{m}{s}$ c) 0,5 $\frac{m}{s}$. **7.** a) 3,1 $\frac{\text{sany}}{g}$; 4,22 $\frac{\text{sany}}{g}$; b) Doza 2 gramdan 8 grama çenli artdyrylanda mör-möjekler sany tiz kemelýär, soň bolsa kemelişi pes bolýar. **8.** a) 7; b) 7; c) 11; d) 16; e) 0; f) 5. **9.** a) 5; b) 7; c) c. **10.** a) –2; b) 7; c) –1; d) 1. **11.** a) –3; b) –5; c) –1 d) 6; e) –4; f) –8; g) 1; h) 2; i) 5.

13. a) $3x^2$ b) $-\frac{1}{x^2}$ c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; d) 0. **15.** a) 2; b) $6x+5$; c) $6x^2+8x+6$. **16*.** a) $f'(x)=a$; b) $f'(x)=2ax+b$; c) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. **20.** 1) $4x^3$; 2) $-2x^{-3}$; 3) $-3x^{-4}$. **21.** 2) $-x^{-2}+1$; 4) $4x^3+3x^2+2x-1+x^{-2}+2x^{-3}$. **22.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{(2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2)}$.

23. 2) 53,25. **24.** 2) –3; 4) 2. **25.** 2) $-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{4}$; 4) $2x-\frac{2}{x^3}$. **26.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $2x$.

27. 3) $-\frac{2x^9+4x^3}{(x^6-1)^2}$; 4) $-\frac{1}{(x-1)^2}$; 6) $4x^3-4$; 8) $7x^6+3x^2-3x^{-4}-7x^{-8}$. **28.** 2) 0; 4) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 6) $\frac{1}{x\ln 2}$; 8) $1+\ln x$; 10) $2e^x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$. **29.** 2) $2e^x\cos x$; 4) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 6) $5+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 8) $3(2+x)^2$. **30.** 2) 11. **31.** 2) 0. **32.** 2) $-\frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $-\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 6) $2x\sin x+x^2\cdot\cos x$; 8) $x\cos x$. **33.** 2) 1. **34.** 2) $n\pi$, $n\in z$; 4) 1. **35.** 1) $\frac{1}{x^2}-1$; 2) $4x^2-1$. **36.** 2) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; 4) $\frac{x+2}{x}$. **37.** 2) x^4; 4) x^2-1. **38.** 2) x^3+3x^2+3x+1; 4) x^6+1.

39. x^2-2x. **43.** 2) $e^{\sin x}\cos x$; 4) $\sin 2x$; 6) $\frac{4}{4x-1}$; 8) $20(2x-1)^9$. **44.** 3) $-\text{tg}x$; 8) $-30x^2\cos^{29}x\cdot\sin x+2x\cos^{30}x$; 9) $\frac{5\text{ctg}x}{x}-\frac{5\ln x}{\sin^2 x}$. **45.** 2) $y=3x-4$; $y=3x-4$; $y=3x-4$. 4) $y=-x-2$; $y=8x+16$; $y=-4x$. **46.** 2) $y=7x-6$. **47.** 2) ýok; 4) 0 we $\frac{2}{3}$; 6) 0 we $\frac{3}{4}$. **48.** 1) $y=-x$; $y=-x+21$; $y=-x+1$. **49.** 2) 0,1 ; 0,331 . **50.** 2) a) 0,2718; b) 9,06 . 4) a) 0,938127;

b) 31,2709. **51.** 2) a) 0; b) 0. 4) a) 0,119401; b) 11,9401 . **52.** 1) 4; 2) –7; 3) 6; 4) 19/28; 5) 0. **53.** 2) 29; 4) $32x–3$; 6)$18–2x$; 8) $48x^2+10x–2$. **54.** 1) a) 15; b) 15; c) 15; d) 15; 4) a) –29; b) 12; c) 5; d) –1. **55.** 2) $3(x+2)^2$; 4) $1–x^{-2}$. **56.** 1) 12; 2) 3. **57.** 15 m/sek. **58.** 3) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}+\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{1}{x\ln 3}$; 10) $7^x x^7\ln7+7^x\cdot7x^6$; 12) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x$; 14) $8–2^x$. **59.** 2) 4; 4) 2. **60.** 2) Ø. **61.** 1 we 2 . **62.** 2) $-2x^{-3}-1$. **63.** 2) 2,75.

64. 2) $\frac{x^2+16x-24}{(x+8)^2}$; 4) $6x^2+8x+5$; 6) $14x+12$. **65.** 2) $\frac{-2x^7-4x^5-5x^4+21x^2+7}{(x^5+7)^2}$.

66. 2) $e^{5x}(4\cos x–6\sin x)$; 4) $\frac{1-2\ln x}{x^3}$. **67.** 2) –4; 4) $-\frac{1}{\sin^2 1}-\frac{1}{20}$.

68. 1) $2x\sin x+x^2\cos x$; 2) $-\frac{\operatorname{tg}x}{\ln 15}$; 4) $\frac{35\operatorname{tg}^{34}x}{\cos^2 x}$; 8) $(2x–10)\ln\cos x–(x^2–10x+7)\operatorname{tg}x$.

69. 3) artýan: $(–\infty; –3) \cup (3; –\infty)$ kemelýän: $(–3;3)$.
4) artýan: $(–\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; kemelýän: Ø.
6) artýan: $(-\infty;\ \sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$; kemelýän: $-\sqrt{2};\ \sqrt{2}$.
8) artýan: $(–\infty; 0)$; kemelýän: $(0; +\infty)$.
9) artýan: $(–1; 0) \cup (1; +\infty)$; kemelýän: $(–\infty; –1) \cup (1; +\infty)$.
10) artýan: $(2; +\infty)$; kemelýän: $(–\infty; 2)$.
14) artýan: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \frac{\pi}{2}+n\pi),\ n\in\mathbb{Z}$; kemelýän: Ø.

70. 2) –3; 3 . 4) 0. 6) Ø. 8) 0; –1.

71. 2) lokal minimum $x=4$; lokal maksimum bar emas.
4) lokal minimum $x=5$; lokal maksimum $x=-5$.
6) lokal minimum $x=0,75$; lokal maksimum bar emas.
8) lokal minimum $x=2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$; lokal maksimum $x=\pi+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

72. 2) artýar $(–1; 1)$; kemelýär: $(–\infty; –1) \cup (1; +\infty)$.
4) artýar: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \frac{\pi}{2}+n\pi),\ n\in\mathbb{Z}$; kemelýär: $(-\frac{\pi}{2}+2n\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2n\pi),\ n\in\mathbb{Z}$;
6) artýar: Ø ; kemelýär: $(-\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \frac{\pi}{2}+n\pi),\ n\in\mathbb{Z}$.

73. 2) iň uly baha: 57; iň kiçi baha: –55.
4) iň uly baha: 84; iň kiçi baha: $-\frac{28}{9}$.

76. 5625m^2. **80.** 80 m. **83.** 1) 5 sek; 2) 250 m/sek; 3) $\frac{1875}{4}m$.

87. 1) 4m^3; 2) 5324 m^3; 3) $407\ \frac{m^3}{\min}$;

89. 1) 30 sany; 2) 1800000 som .

91. d) 24,52, –0,1; e) 40,52, 9,86. **93.** g) 2,0004. **94.** e) 0,9302.

95. d) 0,526. **96.** d) 0,1247. **112.** 1) iň uly 13; iň kiçi 13. 3) iň uly ýok; iň kiçi 5. 5) iň uly ýok; iň kiçi $\frac{11}{6}$.

113. 2) $y=13x+4; y=13x+4; y=13x+4$. **114.** 1) ýok. **115.** 3) ýok.

117. 1) –1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $-\sqrt{2}$.

118. 1) 19; 10; 2) 27;30; 3) 77; 30; 4) 0; –8.

119. 1) 1; 2) 0; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 75; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $-\frac{3}{16}$; 8) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; 9) $\sqrt{2}$; 10) 0.

120. 1) 10; 6. 2) 15; 18. 3) 225; 80.

121. 1) $-2x+1$; 2) $\cos x+\sin x$; 4) $4^x\ln 4-\cos x$; 6) $\frac{1}{x}-20x+1$. **122.** 1) $4x^3$; 3) $1+\frac{20}{x^2}$; 6) $e^x(\sin x+\cos x)$;8) $20\sin x+2(10x-1)\cos x$.

123. 1) $\frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$; 0; 2) 3; 3; 3) $-2\pi+1$; $\pi+1$. 4) $-\pi$; $\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 1; 0; 6) 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $1-\frac{\pi^3}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi^3}{16}$. 8) 3; $-3\sqrt{2}$.

124. 1) 12; 2)72. **126.** 1) 0; 2) 600 000. **127.** 2) $-\sin 2x$.

128. 2) artýan: $(-\infty; +\infty)$; kemelýän: Ø.
4) artýan: Ø; kemelýän: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
6) artýan: $(-\infty; +\infty)$; kemelýän: Ø.
8) artýan: $(0; +\infty)$; kemelýän: $(-\infty; 0)$.

129. 2) $\sqrt{\frac{133}{3}}$; $-\sqrt{\frac{133}{3}}$. 4) 0; 6) 3; –3; 8) 0; $-\frac{13}{18}$.

130. 2) lokal minimum: $x=9$. lokal maxsimum: bar emas.

131. 2) iň uly: 81; iň kiçi: –6. **134.** 62 500 m^2.

143. 1) $3e^{3x}$; 2) $e^{\sin x}\cos x$; 3) $3\cos(3x+2)$; 4) $8(2x+1)^3$;

144. 1) e^{8x+4}; 2) e^{8x^2+4x}; 3) $4e^{2x}+2$; 4) $\sqrt{16x+10}$.

145. 1) $10x(x^2+1)^4$; 3) $\frac{5}{2\sqrt{5x-7}}$; 8) $-e^{\sin(\cos x)}\cdot\cos(\cos x)\cdot\sin x$.

146. 1) artýar: $(-\infty; 0,5)$; kemelýär: $(0,5; -\infty)$;
3) artýar: $(-1; 1)$; kemelýär: $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$.
4) artýar: $(-\infty; +\infty)$; kemelýär: Ø.
7) artýar: $(-\infty; +\infty)$; kemelýär: Ø.
8) artýar: $(1; +\infty)$; kemelýär: $(-\infty; 1)$.

147. 1) stasionar nokatlary: 1 we 3; lokal maksimum: 0; lokal minimum: –4.

II BAP

2. 2) x^6+C; 4) $x^{\frac{3}{2}}+C$; 6) $\sin x+C$; 8) $\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **3.** 2) $\frac{\pi^x}{\ln\pi}+C$; 4) $\frac{a^x}{\ln a}+C$; 6) $\frac{e^{\pi x}}{\pi}+C$. **4.** 4) $\frac{1}{a}\ln x+C$. **5.** 4) $\frac{1}{5}\sin 5x+C$; 6) $\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

6. 4) $\frac{1}{8}(2x-1)^4+C$. **7.** 2) $-\frac{1}{3}x^3+x^2+5x+2$; 4) $\sin x+4$. **8.** 1) $2x^2+8x+11$; 2) $-\frac{x^2}{2}+3x+2,5$; 3) $\frac{9}{4}x^2+9x+15,8$; 4) $x^2-6x+10$. **10.** 1) $\frac{8}{x}-2x+4$; 2) $\frac{9}{x^2}+2x-3$; 3) x^3-x+6; 4) x^5+7x+1. **11.** 1) $\frac{1}{4}\cdot(3x-2)^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{5}\cdot(4x+5)^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{5}$; 3) $\frac{1}{8}\cdot(7x-5)^{\frac{8}{7}}+\frac{7}{8}$; 4) $\frac{1}{k+1}\cdot(kx+b)^{\frac{k+1}{k}}+\frac{k}{k+1}$.

12. 1) $5\ln|x-2|+7$; 2) $3\ln|x+1|+1$; 3) $\sin x+7$; 4) $-\cos x+9$. **14.** 2) $\frac{1}{5}\cdot\sin 5x+\frac{3}{5}$; 4) $-3\cos\frac{x}{3}+6$. **15.** 1) x^3-4; 2) x^4-15. **16.** 2) x^8+x^5; 4) $-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^4}$.

17. 2) $-7\cos x+4\sin x$; 4) $5e^x+2\sin x$. **18.** 2) $\frac{1}{5}(x+5)^5$; 4) $9\cdot(x+1)^{\frac{2}{3}}$; 6) $-2\cos(x-3)-4\ln|x-2|$. **19.** 2) $-\frac{1}{7}\cdot\cos(7x-6)+C$; 4) $-\frac{7}{5}\cos(\frac{5x}{7}-2)+C$; 6) $-\frac{1}{2}\cdot e^{3-2x}+C$; **20.** 2) $\frac{1}{15}\cdot(3x+2)^5+\frac{1}{5}x^{-5}+C$; 4) $x^2+3\operatorname{ctg}x+6x+C$. **21.** 2) $\frac{1}{5}\sin 5x+3\frac{4}{5}$;

4) $x^4-\sqrt{x-1}-15$. **22.** 2) $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}\sin 3x+4x+C$; 4) $x^4+3\sin\frac{x}{3}-3\cdot\cos\frac{x}{3}+C$.

23. 2) $\frac{-1}{4}\cos 4x+C$; **24.** 1) $\frac{-1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 4x$; **25.** 2) $\ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+C$, 4) $\ln|x-4|+C$.

26. 2) $x-\operatorname{arctg}x+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C$. **27.** 2) $-\frac{1}{4(1+x^2)^2}+C$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2x+C$.

28. 2) $\frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}}+C$. 4) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+C$. **29.** 2) $-\frac{3}{25}\cos 5x+3$. **31.** 4) $x+x^2-\sqrt{1-2x}+C$. **33.** 1) $\sin x-x\cos x+C$; 2) $x^2\cdot\sin x-2\sin x+2x\cos x+C$; 3) $\frac{1}{2}\cdot x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$; 4) $x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

34. 1) $\frac{1}{2}\cdot(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)+C$; 3) $9\sin\frac{x}{3}-3x\cdot\cos\frac{x}{3}+C$.

36. 4) 30. **37.** 4) $\frac{1}{4}$. **38.** 2) $\frac{1}{4}\cdot(e^8-1)$. **39.** $\frac{1}{8}$. **40.** 2) 2. **41.** 1,5+ln2. **42.** 1) $a=\frac{1}{\ln 2}$, $b=\frac{7(\ln^2 2-1)}{3\ln^2 2}$; 2) $b=2$. **43.** 1) $b=3$; 2) $a>\ln 2$. **44.** 1) $f(x)=4x-3$; 2) $f(x)=4-2x$; 3) $f(x)=x^2-3x$; 4) $f(x)=1+2x+\cos x$. **45.** 2) $\frac{4}{5\ln 5}$; 6) 8. **46.** 2) $\frac{0,4}{\ln 5}+\frac{0,1}{\ln 2}$; 4) 1. **47.** 2) $\frac{56}{3}$; 4) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **48.** 2) $85\frac{1}{3}$. **49.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 121,5; 3) $\frac{10}{3}$; 4) $\frac{1}{6}$.

50. 1) 9; 2) 9; 3) 4,5;

Peýdalanylan we hödürlenilýän edebiýatlar

1. *Ш.А. Алимов и др.* Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10–11 класса. Учебник для базового и профильного образования, Москва, “Просвещение”, 2016.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. *А.Н. Колмогоров и др.* Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10–11 классов. Москва, “Просвещение”, 2018.
4. *Э. Сайдаматов и др.* Алгебра и основы математического анализа. часть 2 учебное пособие, Ташкент, “Ilm ziyo”, 2016.
5. *A.U. Abduhamidov va boshqalar.* Algebra va matematik analiz asoslari, 1- qism, Toshkent, “O‘qituvchi”, 2012.
6. *Н.П. Филичева.* Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. “Рязань”. 2009.
7. *М.И. Исроилов.* Ҳисоблаш методлари. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1988.
8. *Г.К. Муравин и др.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, “Дрофа”, 2006.
9. Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, “Просвещение”, 2004.
10. *Г.П. Бевз* и др., Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 класса. Киев, 2011.
11. http://www.ams.org/mathweb/ – Internetda matematika (ingliz tilida).
12. “Математика в школе” jurnali.

13. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001- yildan boshlab chiqa boshlagan).
14. *M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov.* Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.
15. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1979.
16. *M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev.* O‘quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1993.
17. *M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismoilov.* 10-sinf uchun “Algebra va analiz asosolari”dan testlar, G‘.G‘ulom NMIU, Toshkent, 2005.
18. *В.М. Говоров и др.*, Сборник конкурсных задач по математике, Наука, М., 1984.
19. *T.A. Azlarov, X. Mansurov*. Matematik analiz asoslari. 3-nashr, “Universitet”, Toshkent, 2005.
20. *Б.П. Демидович.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Наука, М., 1990.
21. *Силм А.Ш.*, Математикадан тест саволлари, Тошкент, 1996.
22. Материалы ЕГЭ по математике, М., 2016.
23. *Е.П. Кузнецова, Г.А. Муравьева*, Сборник задач по алгебре, 11-класс, “Мнемозика”, 2016.
24. *А.Г. Мордкович*, Сборник задач по алгебре, 10-11 классы, “Мнемозика”, 2016.
25. *М.И. Шкиль, З.И. Слепкаль,* Алгебра, учебник для 11 класса, Киев, 2016.
26. *Е.П. Нелина, О.Е. Долгова,* Алгебра, учебник для 11 класса, Киев, 2015.
27. http://www.uzedu.uz – Halk bilimi ministrliginiň informasion tälim portaly.
28. http://www.eduportal.uz – Multimedia merkeziniň informasion tälim portaly.
29. http://www.problems.ru – Matematikadan meseleler gözlemegiň ulgamy (rus dilinde).
30. http://matholymp.zn.uz – Özbegistanda we dünýäde matematiki olimpiadalar.

MAZMUNY

GEOMETRIÝA

I BAP. GIŇIŞLIKDE DEKART KOORDINATALARY WE WEKTORLAR

1. FAZODA KOORDINATALAR SISTEMASI

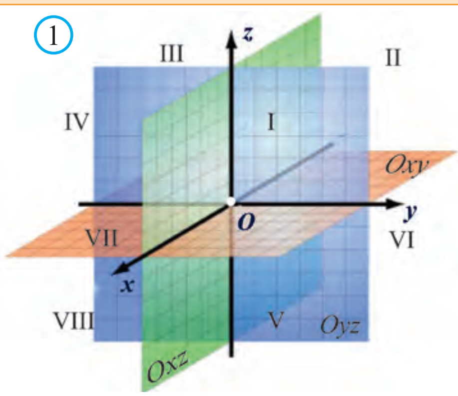
Giňişlikde koordinatalar sistemasy

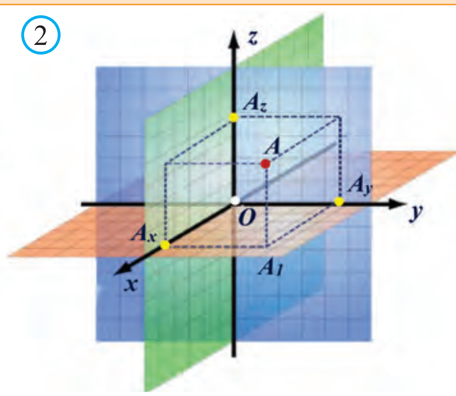
Tekizlikde dekart koordinatalar sistemasy bilen aşaky synplarda tanşypdyňyz. Giňişlikde koordinatalar sistemasy hem tekizlikdäkä meňzeş girizilýär.

O nokatda kesişýän we koordinata başlangyjy şu nokatda bolan özara perpendikulýar üç *Ox*, *Oy* we *Oz* koordinata oklaryna garaýarys.

Bu göni çyzyklaryň her bir jübüti arkaly *Oxy*, *Oxz* we *Oyz* tekizlikler geçirýäris (1-nji surat). Giňişlikde gönüburçly dekart koordinatalary sistemasy şeýle girizilýär we onda

O nokat – *koordinatalar başlangyjy*,
Ox, *Oy* we *Oz* göni çyzyklar – *koordinata oklary*,
Ox oky – *abssissalar*, *Oy* oky – *ordinatalar we Oz* oky *applikatalar oky*,
Oxy, *Oyz* we *Oxz* tekizliklere – *koordinatalar tekizlikleri* diýilýär.

1


2


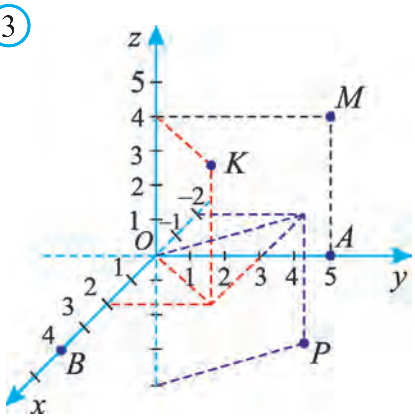
Koordinata tekizlikleri giňişligi 8 sany *oktanta* (*ýarym çetbere*) bölýär (1-nji surat).

Giňişlikde islendik *A* nokat berlen bolsun. Bu nokatdan *Oxy*, *Oyz* we *Oxz* koordinata tekizliklerine perpendikulýar tekizlikler geçirýäris (2-nji surat). Bu tekizliklerden biri *Ox* oky A_x nokatda kesip geçýär. A_x nokadyň *x* okundaky koordinatasy *A* nokadyň *x* – *koordinatasy* ýa-da *abssissasi* diýlip atlandyrylýar.

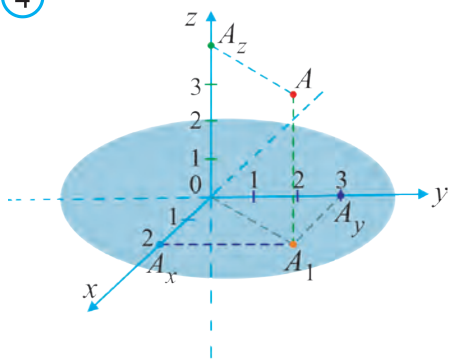
A nokadyň *y – koordinatasy* (*ordinatasy*) hem-de *z – koordinatasy* (*ap-pilkatasy*)hem şeýle anyklanýar.

A nokadyň koordinatalary $A(x; y; z)$ ýa-da gysgarak $(x; y; z)$ görnüşde belgilenýär. 3-nji suratda görkezilen nokatlar aşakdaky koordinatalara eýe: $A(0; 5; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $M(0; 5; 4)$, $K(2; 3; 4)$, $P(-2; 3; -4)$,

3



4



1-nji mesele. Giňişlikde dekart koordinatalary sistemasy girizilen. Ondaky *A* (2; 3;4) nokadyň ornuny anyklaň.

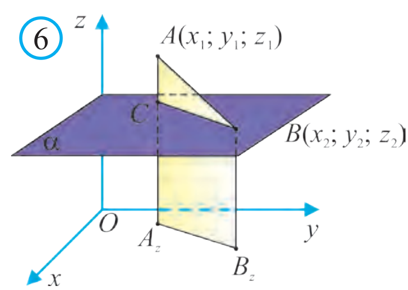
Çözülişi. Koordinata başlangyjyndan *Ox* we *Oy* oklarynyň položitel ugurda degişlilikde $OA_x = 2$ we $OA_y = 3$ kesimleri goýýarys (4-nji surat).

A_x nokatdan *Oxy* tekizlikde ýatýan we *Oy* okuna parallel göni çyzyk geçirýäris. A_y nokatdan *Oxy* tekizlikde ýatýan we *Ox* okuna parallel göni çyzyk geçirýäris. Bu göni çyzyklaryň kesişme nokadyny A_1 bilen belgileýäris. A_1 nokatdan *Oxy* tekizlige perpendikulýar geçirýäris we onda *Oz* okunyň položitel ugrunda $AA_1 = 4$ kesim goýýarys. Emele gelen $A(2; 3; 4)$ nokat gözlenýän nokat bolýar.

Häzirki zaman sifrli-maksatnamaly dolandyrylýan stanoklar we awtomatlaşdyrylan robotlar üçin koordinatalar sistemasyndan peýdalanyp maksatnamalar düzülýär we olar esasynda metallar işläp taýýarlanylýar (5-nji surat).

5

6



Iki nokadyň arasyndaky aralyk

Iki $A(x_1, y_1, z_1)$ we $B(x_2, y_2, z_2)$ nokatlar berlen bolsun.

1. Ilki AB göni çyzyk Oz okuna parallel bolmadyk ýagdaýa garaýarys (6-njy surat). A we B nokatlar arkaly Oz okuna parallel çyzyklar geçirýäris. Olar Oxy tekizligi A_z we B_z nokatlarda kesip geçsin.

Bu nokatlaryň z – koordinatasy 0-a deň bolup, x we y – koordinatalary bolsa degişlilikde A, B nokatlaryň x we y – koordinatalaryna deň.

Indi B nokat arkaly Oxy tekizlige parallel tekizlik α geçirýäris. Ol AA_z göni çyzygy käbir C nokatda kesip geçýär.

Pifagoryň teoremasyna görä: $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Ýöne, $CB = A_zB_z$, $A_zB_z^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ we $AC = |z_1 - z_2|$.

Şonuň üçin, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

2. AB kesim Oz okuna parallel bolan ýagdaýda: $AB = |z_2 - z_1|$

Ýokardaky formula hem şu netijäni berýär, çünki bu ýagdaýda $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Diýmek, *A we B nokatlaryň arasyndaky aralyk*:

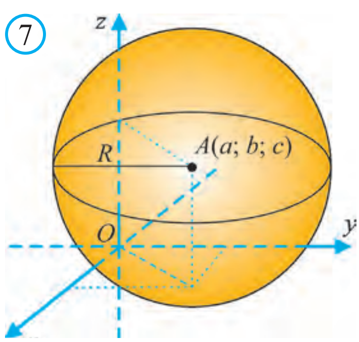
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_2)^2} \qquad (1)$$

Düşündiriş. (1) formula gönüburçly parallelepipediň ölçegleri $a = |x_2 - x_1|$, $b = |y_2 - y_1|$, $c = |z_2 - z_1|$ bolanda, onuň diagonalynyň uzynlygyny aňladýar.

Sferanyň we şaryň deňlemesi. Mälim bolşy ýaly, $A(a; b; c)$ nokatdan R aralykda ýatýan ähli $M(x; y; z)$ nokatlar sferany düzýär (7-nji surat). Onda (1) formula görä, merkezi $A(a; b; c)$nokatda radiusy R-e deň bolan sferada ýatýan ähli nokatlaryň koordinatalary $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ deňligi kanagatlandyrýar.

Onda görnüşi ýaly, merkezi $A(a; b; c)$nokatda radiusy R-e deň bolan şaryň deňlemesi $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$ ýaly aňladylýar.

7



2-nji mesele. Depeleri $A(9;\ 3;\ –5)$, $B(2;\ 10;\ –5)$, $C(2;\ 3;\ 2)$ nokatlarda bolan ABC üçburçlugyň perimetrini tapyň.

Çözülişi: ABC üçburçlugyň perimetri $P=AB+AC+BC$. Iki nokadyň arasyndaky aralygyň formulasyndan $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ peýdalanyp üçburçlugyň taraplaryny tapýarys:

$$AB=\sqrt{(2-9)^2+(10-3)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

$$AC=\sqrt{(2-9)^2+(3-3)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2},$$

$$BC=\sqrt{(2-2)^2+(3-10)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=7\sqrt{2}$$

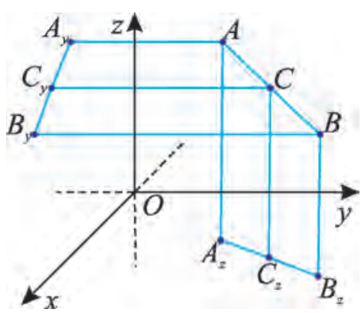
Diýmek, üçburçluk deň taraply we onuň perimetri: $P=3\cdot 7\sqrt{2}=21\sqrt{2}$.

Jogaby: $21\sqrt{2}$

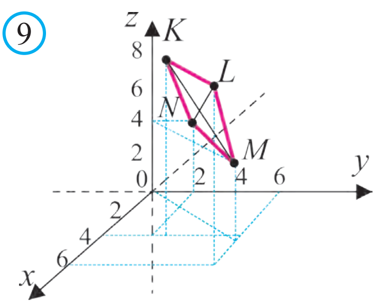
Kesimiň ortasynyň koordinatalary

$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ we $B(x_2;\ y_2;\ z_2;)$ – islendik nokatlar bolup, AB kesimiň ortasy $C(x;\ y;\ z)$ bolsun (7-nji surat).

8



9



A, B we C nokatlar arkaly Oz okuna parallel göni çyzyklar geçirýäris. Olar Oxy tekizligi $A_z(x_1;\ y_1;\ 0)$, $B_z(x_2;\ y_2;\ 0)$ we $C_z(x;\ y;\ 0)$ nokatlarda kessin.

Falesiň teoremasyna görä C_z nokat A_zB_z kesimiň ortasy bolýar. Onda tekizlikde kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapmagyň formulasyna görä

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

z -i tapmak üçin Oxy tekizligiň ýerine Oxz ýa-da Oyz tekizligi almak ýeterli.

Munda z üçin hem ýokardakylara meňzeş formula alynýar.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}\ .$$

Şuňa meňzeş, berlen AB kesimi gatnaşykda ($AP:PB=\lambda$) bolýan $P(x_1;\ y_1;\ z_1)$ nokadyň koordinatalary A we B nokatlaryň koordinatalary arkaly

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\qquad (4)$$

formulalar tapylýar. Bu deňlikleriň dogrudygyny özbaşdak görkeziň.

3-nji mesele. Depeleri $M(3;\,6;\,4)$, $N(0;\,2;\,4)$, $K(3;\,2;\,8)$, $L(6;\,6;\,8)$ nokatlarda bolan $MNKL$ dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň (9-njy surat).

Subudy: Meseläni çözende diagonallary kesişme nokadynda deň ýarpa bölünýän dörtburçlugyň parallelogramdygyndan peýdalanýarys.

MK kesimiň ortasynyň koordinatalary:

$$x=\frac{3+3}{2}=3; \qquad y=\frac{6+2}{2}=4; \qquad z=\frac{4+8}{2}=6.$$

NL kesimiň ortasynyň koordinatalary:

$$x=\frac{0+6}{2}=3; \qquad y=\frac{2+6}{2}=4; \qquad z=\frac{4+8}{2}=6.$$

MKwe NL kesimleriň ortalarynyň koordinatalary birmeňzeşdigini görýäris. Bu, şu kesimleriň kesişýändigini we kesişme nokadynda olar deň ýarpa bölünýändigini aňladýar.

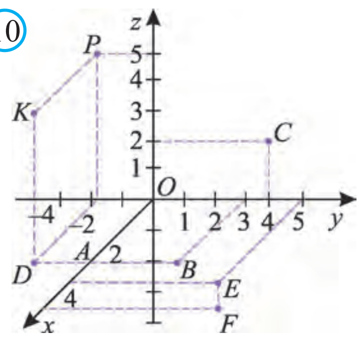
Diýmek, $MNLK$ dörtburçluk – parallelogram. □

Tema degişli meseleler we amaly ýumuşlar

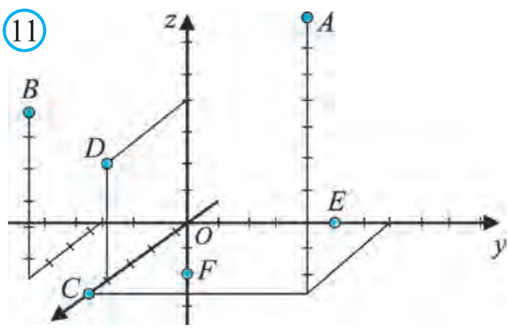
1. 10-njy suratda şekillendirilen nokatlaryň koordinatalaryny anyklaň.

2. Giňişlikde dekart koordinatalar sistemasy girizilen bolup, onda $A(0;\,3;\,1)$, $B(-2;\,0;\,0)$, $C(0;\,0;\,8)$, $D(0;\,-9;\,0)$, $E(5;\,-1;\,2)$, $F(-6;\,2;\,1)$ nokatlar berlen. Bu nokatlar haýsy *a*) koordinatalar okunda; *b*) kordinatalar tekizliginde; *c*) oktantda ýatýar?

10



11



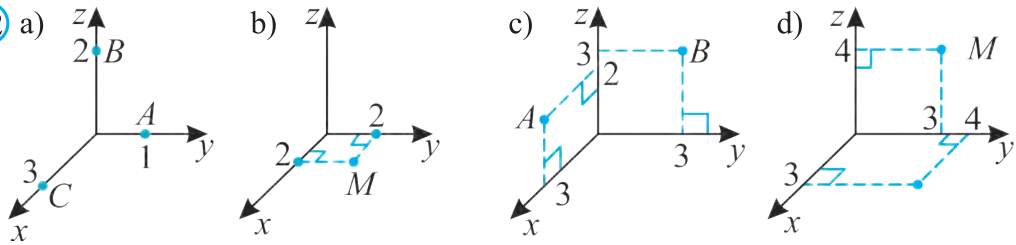
3. 11-nji suratdaky nokatlaryň koorginatalaryny tapyň.

4. 12-nji suratda belgilenen nokatlaryň koordinatalaryny tapyň.

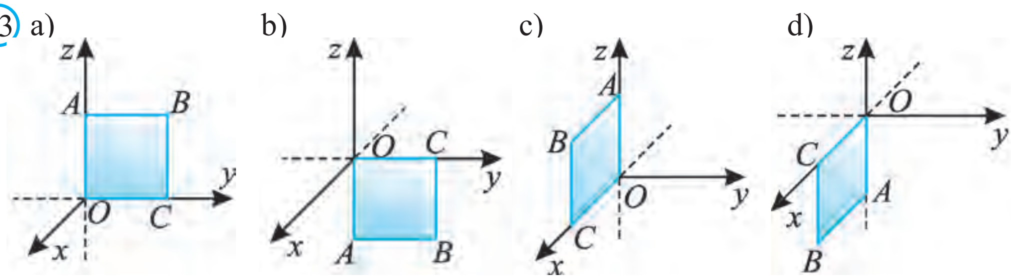
5. 13-nji suratda diagonaly $\sqrt{2}$ -ä deň bolan kwadrat şekillendirilen. Onuň depeleriniň koordinatalaryny tapyň.

6. A (3; 2; 4) nokadyň koordinata tekizliklerindäki proýeksiýasynyň koordinatalaryny tapyň.

12



13



7. Giňişlikde dekart koordinatalary sistemasy girizilen bolup, onda A (–1; 2; –3), B(0; 1; 2), C(0; 0; 5), D(–2; 2; 0), E(5; –1; 0), F(0; 2; 0), G(9; 0; 0), H(9; 0; 2), I(6; 3; 1), J(–6; 3; 5), K(–6; –2; 3), L(6; –2; 4), M(6; 3; –9), N(–6; 3; –8), O(–6; –3; –6), P(6; –3; –2) nokatlar berlen bolsun. Bu nokatlar haýsy koordinatalar okunda, kordinatalar tekizliginde we oktantda ýatýar? Aşakda berlen nusga görä jedweli dolduryň.

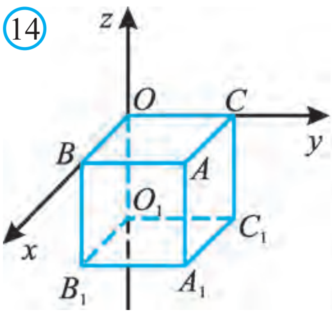
Nokat ýerleşýän zolak	Nokadyň koordinatalarynyň aýratynlygy	Berlen nokatlar
Ox ok	$y=0$, $z=0$ diňe x koordinata noldan tapawutly	G(9; 0; 0)
Oy ok		
Oz ok		
Oxy tekizlik	$z=0$, x we y koordinatalar noldan tapawutly	D(–2; 2; 0)
Oyz tekizlik		
Oxz tekizlik		
1-nji oktant	$x>0, y>0, z>0$	I(6; 3; 1)
2-nji oktant		
3-nji oktant		
4-nji oktant		
5-nji oktant		
6-nji oktant		
7-nji oktant		
8-nji oktant		

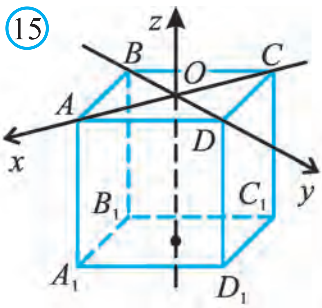
8. $A(2; 0; -3)$ we $B(3; 4; 0)$ nokatlaryň arasyndaky aralygy tapyň.

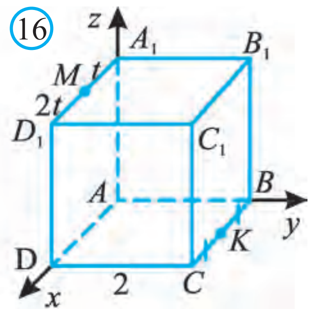
9. $A(3; 3; 3)$ nokatdan a) koordinata tekizliklerine çenli; b) koordinata oklaryna çenli; c) koordinata başlangyjyna çenli bolan aralyklary tapyň.

10. $M(2; -3; 1)$ nokatdan koordinata tekizliklerine çenli aralyklary tapyň.

11. Koordinata tekizlikleriniň her birinden 3 birlik aralykda uzaklaşýan nokadyň ornuny anyklaň.







12. Eger $OA = 2\sqrt{2}$ -ä deň bolsa, 14-nji suratda şekillendirilen kubuň depeleriniň koordinatalaryny tapyň.

13. $C(2; 5; -1)$ we $D(2; 1; -6)$ nokatlaryň haýsy biri koordinata başlangyjyna ýakyn ýerleşýär?

14. Depeleri $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 1; 2)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň perimetrini tapyň.

15. Depeleri $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 4)$, $C(3; 4; 5)$ nokatlarda bolan üçburçluk barmy?

16. $A(-2; 0; 5)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(1; 1; -3)$, $D(0; -1; -1)$ nokatlar parallelogramyň depeleridigini subut ediň.

17. ABC üçburçlugyň görnüşini anyklaň we onuň perimetrini we meýdanyny tapyň:
a) $A\ (3; 0; 0)$, $B\ (0; 3; 0)$, $C\ (0; 0; 3)$; b) $A\ (2; 0; 5)$, $B\ (3; 4; 0)$, $C\ (2; 4; 0)$;
c) $A\ (2; 4; -1)$, $B\ (-1; 1; 2)$, $C\ (5; 1; 2)$.

18. Oxy tekizliginde ýatýan we $A(0; 1; -1)$, $B(-1; 0; -1)$, $C(0; -1; 0)$ nokatlardan deň uzaklykda ýatýan nokadyň koordinatalaryny tapyň.

19. $A\ (1; 1; 1)$, $B\ (-1; 1; 1)$, $C\ (-1; -1; 1)$, $C_1\ (-1; -1; -1)$ nokatlar $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ kubuň depeleri bolsa, onuň galan depeleriniň koordinatalaryny tapyň.

20. Gapyrgalary $S\ (0; 0; 0)$, $A\ (2; 0; 0)$, $B\ (0; 2; 0)$, $C\ (0; 0; 2)$ nokatlarda bolan $SABC$ piramidanyň dogrudygyny subut ediň.

21. Merkezi koordinatalar başlangyjynda radiusy 5-e deň bolan sferanyň we şaryň deňlemelerini ýazyň.

22. Merkezi A (1; 2; 4) nokatda radiusy 3-e deň bolan şaryň deňlemelerini ýazyň.

23. Radiusynyň depeleri A (–2; 1; 3), B (0; 2; 1) nokatlarda ýatýan sferanyň deňlemesini ýazyň.

24. Galyň kagyzdan kubuň modelini guruň. Onuň bir depesini koordinata başlangyjjyny, ondan çykýan gapyrgalaryny birlik syrtlar hökmünde alyp, onuň başga depeleriniň koordinatalaryny tapyň.

25. AB kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapyň:

1) $A(-1;0;0)$, $B(1;2;0)$; 2) $A(0;0;0)$, $B(2;2;2)$; 3) $A(-2;4;2)$, $B(2;-4;2)$,

4) $A(1{,}2; -3; 6{,}3)$, $B(-2{,}6; 3{,}2; -5{,}1)$; 5) $A(\sqrt{3}; 2; 1-\sqrt{2})$, $B(3\sqrt{3}; 1; 1+\sqrt{2})$.

26. 13-nji suratda şekillendirilen kubuň gapyrgalarynyň ortalarynyň we granlary merkezleriniň koordinatalaryny tapyň.

27. $A(3;-1;4)$, $B(-1;1;-8)$, $C(2;1;-6)$, $D(0;1;2)$ nokatlar berlen. a) AB we CD; b) AC we BD kesimler ortasynyň koordinatalaryny tapyň.

28. $M(1;-1;2)$ we $N(-3;2;4)$ nokatlar, AB kesimi üç deň böleklere bölýär. AB kesimiň depeleriniň koordinatalaryny tapyň.

29. $ABCD$ dörtburçlugyň taraplary we $A_1B_1C_1D_1$ gönüburçlugyň taraplaryna degişlilikde parallel. $ABCD$ – gönüburçlukdygyny subut ediň?

30. $ABCD$ gönüburçlugyň A depesinden onuň tekizligine perpendikulýar AK göni çyzyk geçirilen. K nokatdan gönüburçlugyň başga depelerine çenli bolan aralyklar 6 sm, 7 sm we 9 sm. AK kesimiň uzynlygyny tapyň.

31*. Giňişlikde $A(3; 0; -1)$, $B(-4; 1; 0)$, $C(5; -2; -1)$ nokatlar berlen. Oyz tekizlikde A, B, C nokatlardan deň uzaklykda ýerleşýän nokady tapyň.

32. $ABCD$ parallelogramyň depeleri: $A(-2; -4; 3)$, $B(3; 1; 7)$, $C(4; 2; -5)$; b) $A(4; 2; -1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-6; 2; 1)$ c) $A(-1; 7; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(9; -3; -8)$ bolsa, D depesiniň koordinatalaryny tapyň.

33. CK kesimi $CK{:}KM =$ gatnaşykda bolýan $M(x; y; z)$ nokadyň koordinatalaryny tapyň. a) $C(-5; 4; 2)$, $K(1; 1;-1)$ we $\lambda=2$; b) $C(1; -1; 2)$, $K(2; -4; 1)$ we $\lambda=0{,}5$; c) $C(1; 0; -2)$, $K(9; -3; 6)$ we $\lambda=\frac{1}{3}$.

34. Depeleri $A(3; 2; 4)$, $B(1; 3; 2)$, $C(-3; 4; 3)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokady M-iň koordinatalaryny tapyň.

35. Depeleri $A(5; 6; 3)$, $B(3; 5; 1)$, $C(0; 1; 1)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň BL bissektrisasynyň L depesiniň koordinatalaryny tapyň.

36*. Depeleri $A(4; 0; 1)$, $B(5; -2; 1)$, $C(4; 8; 5)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň AL bissektrisasynyň uzynlygyny tapyň.

37*. Depeleri $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 1)$, $C(3; 1; -1)$ nokatlar bolan üçburçluk berlen. Onuň a) uly tarapyna düşürilen beýikligini; b) burçlaryny c) meýdanyny tapyň.

38*. 14-nji suratda şekillendirilen kub baradaky maglumatlardan peýdalanyp *MK* kesimiň uzynlygyny tapyň.

Taryhy maglumatlar

Abu Reýhan Biruny meşhur tebip we matematik Abu Ali ibn Sina bilen hat alyşmalarynda oňa aşakdaky soragy berýär: ,,Näme üçin Aristotel we başgalar (filosoflar) taraplary alty sany diýip atlandyrýarlar?''

Biruny alty granly kuby alyp, ,,başgaça sandaky taraplara eýe bolan'' jisimler barada aýdýar we ,,şar şekilli jisimiň taraplary ýokdugyny'' goşup goýýar.

Ibn Sina bolsa ,,hemme ýagdaýlarda-da taraplar alty sany diýip hasaplamaly, çünki her bir jisimde, onuň şekline seretmezden üç ölçeg — uzynlyk, çuňluk we giňlik bar'' diýip jogap berýär.

Bu ýerde Ibn Sina ,,alty tarap'' diýip alamatlary bilen alnan üç ,,koordinatany'' düşünýär.

Biruny ,,Kanuny Mas'udiý'' eserinde alty tarapyň anyk matematiki manysyny getirýär: ,,Taraplar alty sany, çünki olar jisimleriň ölçegleri boýunça hereketleri araçägidir. Ölçegler üç, bu uzynlyk, giňlik we çuňluk, olaryň depeleri bolsa ölçeglerden iki esse köp''.

Eseriň öňki kitaplarynda awtor ýagtylgyçlaryň asmandaky ýagdaýyny asman sferasyna görä iki koordinata – ekliptik giňlik we uzaklyk arkaly ýa-da edil şeýle koordinatalar arkaly, emma asman ekwatoryna ýa-da gorizonta görä kesgitleýär. Emma ýyldyzlaryň we ýagtylgyçlaryň özara ýerleşişini kesgitlemek meselesinde olaryň bir-birlerini öňüni ýapyp galýan ýagdaýlaryny hem hasaba almaly bolýar. Ynha şeýle ýagdaýda üçünji sferik koordinata zerurlyk döreýär. Ine şu zerurlyk Abu Reýhan Birunyny giňişlikdäki koordinatalar taglymyny öňe sürmäge getiripdir.

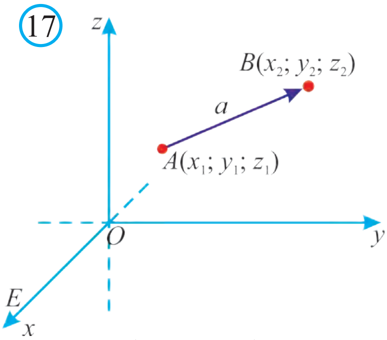
2. GIŇIŞLIKDE WEKTORLAR WE OLARYŇ ÜSTÜNDE AMALLAR

2.1 Giňişlikde wektorlar

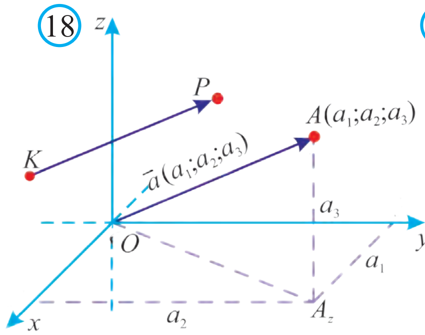
Giňişlikde wektor düşünjesi tekizlikdäki ýaly girizilýär.

Giňişlikde *wektor* diýip ugrukdyrylan kesime aýdylýar.

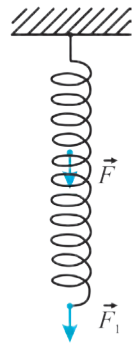
Giňişlikde wektorlara degişli esasy düşünjeler: wektoryň uzynlygy (moduly), wektoryň ugry, wektorlaryň deňligi tekizlikdäki ýaly kesgitlenýär.

17


$\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$

18


$\overline{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$

19


Başlangyjy $A(x_1; y_1; z_1)$ nokatda we ahyry $B(x_2; y_2; z_2)$ nokatda bolan wektoryň koordinatalary diýip $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$, $a_3=z_2-z_1$ sanlara aýdylýar (17-nji surat).

Wektorlaryň tekizlikdäkä meňzeş ençeme häsiýetleri hem bolup, olary subutsyz getirýäris.

Edil tekizlikdäki ýaly deň wektorlaryň degişli koordinatalary deň bolýar we tersine, degişli koordinatalary deň bolan wektorlar deň bolýar.

Bu wektory onuň koordinatalary bilen aňlatma esas bolýar. Wektorlar $\overline{AB}(a_1;a_2;a_3)$ ýa-da $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ ýa-da gysgarak $(a_1;a_2;a_3)$ ýaly (18-nji surat) belgilenýär.

Wektor koordinatalarysyz $\overline{AB}$ (ýa-da gysgarak $\overline{a}$) ýaly hem belgilenýär. Munda onuň başlangyjy birinji orunda, ahyry bolsa ikinji orunda ýazylýar.

Koordinatalary nollardan ybarat wektor *nol wektor* diýlip atlandyrylýar we $\overline{0}(0;0;0)$ ýa-da $\overline{0}$ ýaly belgilenýär hem-de bu wektoryň ugry bolmaýar.

Eger O koordinata başlangyjy we a_1, a_2 we a_3 sanlar A nokadyň koordinatalary ýagny $A(a_1; a_2; a_3)$ bolsa, bu sanlar $\overline{OA}$ wektoryň hem koordinatalary bolýar: $\overline{OA}(a_1; a_2; a_3)$.

Ýöne, koordinatalar giňişliginde başlangyjy $K(c_1; c_2; c_3)$ nokatda, ahyry $P(c_1+a_1; c_2+a_2; c_3+a_3)$ nokatda bolan $\overline{KP}$ wektor hem şu koordinatalar bilen aňladylýar: $\overline{KP}(c_1+a_1-c_1; c_2+a_2-c_2; c_3+a_3-c_3)=\overline{KP}(a_1; a_2; a_3)$.

Şondan gelip çykyp, wektory koordinatalar giňişliginde islendik nokada goýlan edip şekillendirmek mümkin. Geometriýada biz şeýle *erkin* wektorlar bilen iş salyşýarys. Fizikada bolsa adatda wektorlar käbir *nokada goýlan* bolýar. Meselem, 19-njy suratdaky F güýç puržiniň haýsy nokadyna goýlandygy bilen ähmiýetli hasaplanýar.

Wektoryň uzynlygy diýip ony şekillendirýän ugrukdyrylan kesimiň uzynlygyna aýdylýar (17-nji surat). $\overline{a}$ wektoryň uzynlygy $|\overline{a}|$ ýaly aňladylýar.

$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ wektoryň uzynlygy onuň koordinatalary arkaly $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}$ formula bilen aňladylýar.

1-nji mesele. $A(2; 7; –3)$, $B(1; 0; 3)$, $C(–3; –4; 5)$ we $D(–2; 3; –1)$ nokatlar berlen. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AD}$ we $\overline{BD}$ wektorlardan haýsylary özara deň bolýar?

Çözülişi: Deň wektorlaryň degişli koordinatalary deň bolýar. Şonuň üçin wektorlaryň koordinatalaryny tapýarys:

$$\overline{AB} = (1 – 2,\ 0 – 7,\ 3 – (–3)) = (–1,\ –7,\ 6)$$

$$\overline{DC} = (–3 – (–2),\ –4 – 3,\ 5 – (–1)) = (–1,\ –7,\ 6).$$

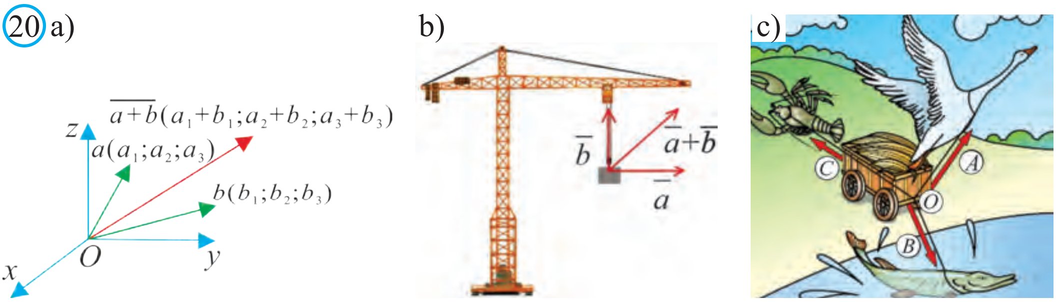
Diýmek, $\overline{AB} = \overline{DC}$. $\overline{BC} = \overline{AD}$ ekenligini özbaşdak görkeziň.

2.2 Giňişlikde wektorlaryň üstünde amallar

Wektorlaryň üstünde amallar: olary goşmak, sana köpeltmek we skalýar köpeltmek amallary edil tekizlikdäki ýaly anyklanýar.

$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ we $\overline{b}(b1;\ b2;\ b3)$ *wektorlaryň jemi* diýip $\overline{a} + \overline{b} = (a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$ wektora aýdylýar (20-nji surat).

20 a) b) c)



20-nji b suratda kran $\overline{a}$ wektor boýunça, ýük bolsa krana görä $\overline{b}$ wektor boýunça hereketlenýän bolsun. Netijede ýük $\overline{a}+\overline{b}$ wektor boýunça hereketlenýär. Şonuň ýaly-da, 20-nji c suratda şekillendirilen rus ýazyjysy Krylowyň basnýasynyň gahrymanlary näme sebäpden arabany ýerinden gozgan bilmeýändiklerini duýan bolsaňyz gerek.

Wektorlaryň jeminiň häsiýetleri.

Islendik $\overline{a}$, $\overline{b}$ we $\overline{c}$ wektorlar üçin aşakdaky häsiýetler ýerlikli:

a) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ – wektorlary goşmagyň orun çalşyrma kanuny;
b) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$ – wektorlary goşmagyň paýlama kanuny.

Wektorlary goşmagyň üçburçluk düzgüni.

Islendik A, B we C nokatlar üçin (21-nji surat): $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

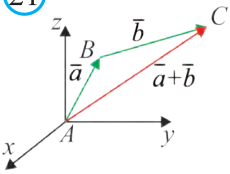
Wektorlary goşmagyň parallelogram düzgüni.

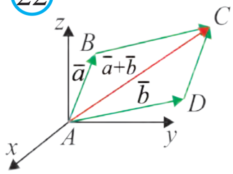
Eger $ABCD$ – parallelogram (22-nji surat) bolsa, $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

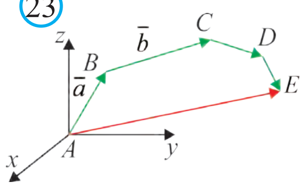
Wektorlary goşmagyň köpburçluk düzgüni.

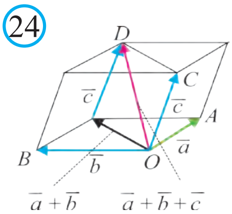
$A, B, C, D,$ we E nokatlar üçin (23-nji surat) bolsa,

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE} \quad \text{bölýär.}$$

21


22


23


24


Bir tekizlikde ýatmaýan üç *wektorlary goşmagyň parallelepiped* düzgüni.
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – parallelepiped (24-nji surat) bolsa,

$$\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA_1}=\overline{AC} \quad \text{bölýär.}$$

$\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ *wektoryň λ sana köpeltmek hasylы* diýip $\lambda\overline{a}=(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$ wektora aýdylýar (25-nji surat).

Islendik $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlar hem-de λ we μ sanlar üçin

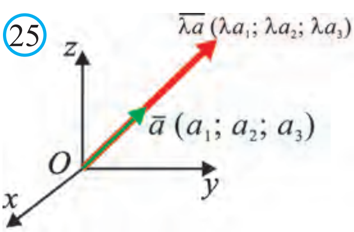
a) $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$;

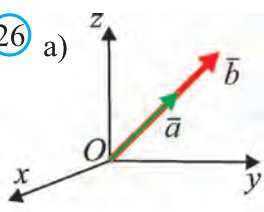
b) $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}$;

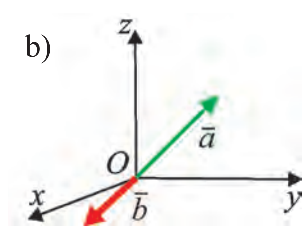
c) $|\lambda\overline{a}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$ we $\lambda\overline{a}$ wektoryň ugry

$\lambda>0$ bolanda, $\overline{a}$ wektoryň ugry bilen birmeňzeş we

$\lambda<0$ bolanda, $\overline{a}$ wektoryň ugruna garşylykly bolýar.

25


26 a)


b)


2.3 Kollinear we komplanar wektorlar

Nol wektordan tapawutly $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlar berlen bolsun. $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlar birmeňzeş ýa-da garşylykly ugrugan bolsa, olar *kollinear wektorlar* diýlip atlandyrylýar (26-njy surat).

1-nji häsiýet. $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlar üçin $\overline{a} = \lambda\overline{b}\ (\lambda \neq 0)$ deňlik ýerlikli bolsa, olar özara kollinear bolýar we tersine.

Eger $\lambda > 0$ bolsa, $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlar bir tarapa ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$), eger $\lambda < 0$ bolsa, garşylykly tarapa ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$) ugrugan bolýar.

2-nji häsiýet. $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ we $b(b_1;\ b_2;\ b_3)$ wektorlar özara kollinear bolsa, olaryň koordinatalary özara proporsional bolýar: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ we tersine.

2-nji mesele. Başlangyjy $A\ (1,\ 1,\ 1)$ nokatda we ahyry Oxy tekizlikdäki B nokatda bolan we $\overline{a}(1,\ 2,\ 3)$ wektora kollinear wektory tapyň.

Çözülişi: B nokadyň koordinatalary $B(x;\ y;\ z)$ bolsun. B nokat Oxy tekizlikde ýatýandygy üçin $z=0$. Onda $\overline{AB}\ (x-1;\ y-1;\ -1)$ bolýar.

Şerte görä, $\overline{AB}\ (x - 1;\ y - 1;\ -1)$ we $\overline{a}(1,\ 2,\ 3)$ wektorlar kollenear. Diýmek, olaryň koordinatalary özara proporsional bolýar.

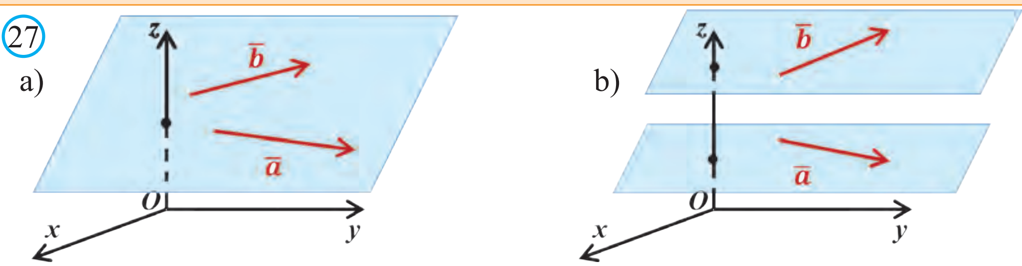
Mundan $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{-1}{3}$ proporsiýalary alýarys.

Olardan $x = \dfrac{2}{3},\quad y = \dfrac{1}{3}$ bolýandygyny tapýarys.

Onda $\overline{AB}\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};-1\right)$ bolýar. □

Bir tekizlikde ýa-da parallel tekizliklerde ýatýan wektorlar *komplanar wektorlar* diýlip atlandyrylýar (27-nji surat).

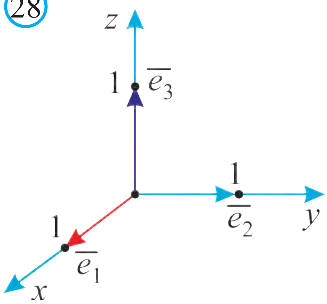
27



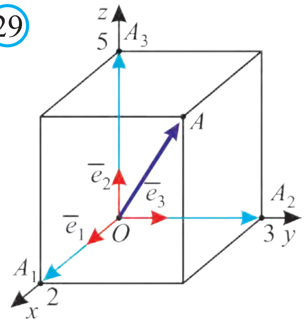
$\overline{e}_1\ (1;\ 0;\ 0)$, $\overline{e}_2\ (0;\ 1;\ 0)$ we $\overline{e}_3\ (0;\ 0;\ 1)$ *wektorlar syrtlar* diýilýär (28-nji surat).

Islendik $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ wektory $\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3$ görnüşde, bitewi ýagdaýda *syrtlar boýunça ýaýmak* mümkin (29-njy surat).

28



29



Şonuň ýaly-da, üç komplanar bolmadyk $\overline{OA}, \overline{OB}$ we $\overline{OC}$ wektorlar berlen bolsa, islendik $\overline{OD}$ wektory aşakdaky görnüşde, bitewi ýagdaýda aňlatmak mümkin:

$$\overline{OD} = a_1 \cdot \overline{OA} + a_2 \cdot \overline{OB} + a_3 \cdot \overline{OC}.$$

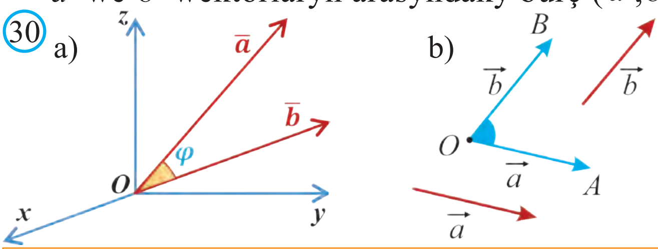
Bu ýerde a_1, a_2, a_3 nähilidir hakyky sanlar. Muňa *wektory berlen wektorlar boýunça ýaýmak* diýlip atlandyrylýar.

2. 4 Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly

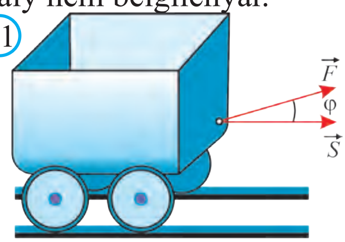
Nol wektordan tapawutly $\overline{a}$ we $\overline{b}$ *wektorlaryň arasyndaky burç* diýip O nokatdan çykýan $OA = \overline{a}$ we $OA = \overline{b}$ wektorlaryň ugrukdyryjy kesimleriniň arasyndaky burça aýdylýar (30-njy surat).

$\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryň arasyndaky burç $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$ ýaly hem belgilenýär.

30



31



$\overline{a}$ we $\overline{b}$ *wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly* diýip, bu wektorlaryň uzynlyklarynyň olaryň arasyndaky burçuň kosinusynyň köpeltmek hasylyna aýdylýar.

Eger wektorlaryň biri nol wektor bolsa, olaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deň bolýar.

Skalýar köpeltmek hasyly $\overline{a} \cdot \overline{b}$ ýa-da $(\overline{a}, \overline{b})$ ýaly belgilenýär. Kesgitlemä görä

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi \qquad (1)$$

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deň bolsa, olar *perpendikulýar* bolýar we tersine.

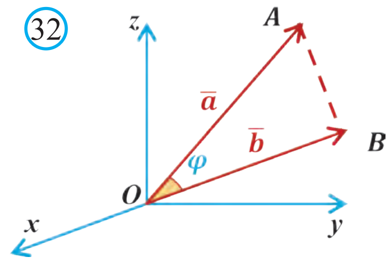
Fizikada jisimi $\overline{F}$ güýjüň täsiri astynda $\overline{s}$ aralyga süýşürmekde edilen A iş (31-nji surat) $\overline{F}$ we $\overline{s}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyna deň bolýar:

$$A = (\overline{F}, \overline{s}) = |\overline{F}| \cdot |\overline{s}| \cos\varphi.$$

Häsiýet. $\bar{a}\,(a_1;a_2;a_3)$ we $b\,(b_1;b_2;b_3)$ wektorlar üçin $(\bar{a}, \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Subudy. $\bar{a}$ we $\bar{b}$ wektorlary koordinata başlangyjy O nokada goýýarys (32-nji surat). Onda $\overline{OA} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ we $\overline{OB} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$ bolýar. Eger berlen wektorlar kollinear bolmasa, ABO üçburçlukdan ybarat bolýar we onuň üçin kosinuslar teoremasy ýerlikli bolýar:

32



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\varphi.$$ Ondan

$OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \dfrac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)$ bolýar. Ýöne, $OA^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$,

$OB^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ we $AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$.

Diýmek, $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi = \dfrac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) =$

$$= \frac{1}{2}(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2 -$$
$$- (b_3 - a_3)^2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Berlen wektorlar kollinear bolmadyk ($\varphi = 0^0$, $\varphi = 180^0$) ýagdaýda-da bu deňlik ýerlikli bolýandygyny özbaşdak görkeziň. □

Skalýar köpeltmek hasylynyň häsiýetleri.

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ orun çalşyrma häsiýeti.

2. $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ paýlama häsiýeti.

3. $\lambda \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \cdot \bar{b})$ toparlama häsiýeti.

4. Eger we wektorlar birmeňzeş ugurdaky kollinear wektorlar bolsa, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|$ bölýär, çünki $\cos 0° = 1$.

5. Eger garşylykly ugrugan bolsa, $\bar{a} \cdot \bar{b} = -|\bar{a}|\,|\bar{b}|$, çünki $\cos 180° = -1$.

6. $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}||\bar{a}| \cos 0° = |\bar{a}|^2 \Rightarrow \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$

7. $\bar{a}$ wektor $\bar{b}$ wektora perpendikulýar bolsa, $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ bolýar.

<u>*Netijeler:*</u>

a) $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$ wektoryň uzynlygy $|\bar{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$; (1)

b) $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$ we $\bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$ wektorlaryň arasyndaky burçuň kosinusy:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}}; \qquad (2)$$

c) $\overline{a}=(a_1;a_2;a_3)$ we $\overline{b}=(b_1;b_2;b_3)$ wektorlaryň perpendikulýarlyk şerti:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \qquad (3)$$

3-nji mesele. $A(0;\ 1;\ –1)$, $B(1;\ –1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 0)$, $D(2;\ –3;\ 1)$ nokatlar berlen. $\overline{AB}$ we $\overline{CD}$ wektorlaryň arasyndaky burçuň kosinusyny tapyň.

Çözülişi. $\overline{AB}$ we $\overline{CD}$ wektorlaryň koordinatalaryny soň uzynlyklaryny tapýarys: $\overline{AB} = (1 – 0;\ –1 – 1;\ 2 – (–1)) = (1, –2, 3)$,

$\overline{CD} = (2 – 3;\ – 3 – 1;\ 1 – 0) = (–1, –4, 1)$.

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14},$$

$$\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

Diýmek, $\cos\varphi=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}=\dfrac{1\cdot(-1)+(-2)(-4)+3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\dfrac{5}{\sqrt{63}}$. □

4-nji mesele. $\overline{a}(1;2;0)$, $\overline{b}(1;-\frac{1}{2};0)$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.

Çözmek: $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}=\dfrac{1\cdot 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot 0}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2}}=\dfrac{0}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}}}=0.$

Diýmek, $\varphi = 90°$. □

5-nji mesele. $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$, we bu wektorlaryň arasyndaky burça $\dfrac{2\pi}{3}$ deň bolsa, $|\overline{a}+\overline{b}|$ -ni tapyň.

Çözülişi: $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\sqrt{\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2}=\sqrt{\overline{a}^2+2\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)+\overline{b}^2}=\sqrt{\left|\overline{a}\right|^2+2\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\phi+\left|\overline{b}\right|^2}=$

$$=\sqrt{9+25+2\cdot 15\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{34-15}=\sqrt{19}$$

6-njy mesele. Eger $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}$ we $\overline{b}=-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ bolsa, 1) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{d}=2\overline{a}-\overline{b}$ wektoryň koordinatalaryny we uzynlygyny tapyň.

Çözmek: $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryň dagytmalarynyň koordinatalary gözlenýän wektoryň aňlatmasyna goýýarys:

1) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}=\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}$.

Diýmek, $\overline{c}=\overline{(1;2;-2)}$. Onda $|\overline{c}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$;

2) $\overline{d}=2\overline{a}-\overline{b}=2(2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k})-(-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k})=4\overline{i}+6\overline{j}-8\overline{k}+\overline{i}+\overline{j}2\overline{k}=$ $=5\overline{i}+7\overline{j}-10\overline{k}$.

Diýmek, $\overline{d}=\overline{(5;7;-10)}$. Onda $\left|\overline{d}\right|=\sqrt{5^2+7^2(-10)^2}=\sqrt{174}$. □

7-nji mesele. $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryň arasyndaky burç 30°-a deň we $|\overline{a}| = \sqrt{3}$, $|\overline{b}|=2$ bolsa, $(2\overline{a} + 3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})$ köpeltmek hasylyny hasaplaň.

Çözmek: Ilki $\overline{a}$ we $\overline{b}$ wektorlaryň köpeltmek hasylyny hasaplaýarys:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos 30° = \sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3,$$

Soň wektorlaryň köpeltmek hasylynyň paýlama häsiýetine görä, berlen wektorlaryň aňlatmalaryny köpagzany köpagza köpeltmek ýaly köpeldýäris:

$$(2\overline{a}+3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})=-4\overline{a}^2+2(\overline{a},\overline{b})-6(\overline{a},\overline{b})+3\overline{b}^2=-4\overline{b}^2-4(\overline{a},\overline{b})+3\overline{b}^2$$

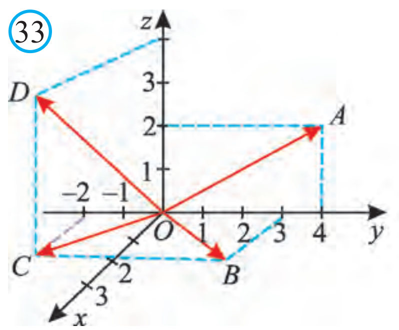
$\overline{a}^2=|\overline{a}|^2=9$, $\overline{b}=|\overline{b}|^2=4$, $(\overline{a}, \overline{b})=3$ bolýandygyny hasaba alsak, gözlenýän köpeltmek hasyly $(2\overline{a}+3\overline{b})(-2\overline{a}+\overline{b})=-4\cdot 9-4\cdot 3+3\cdot 4=-36$. □

Tema degişli meseleler we amaly ýumuşlar

39. 33-nji suratdaky wektorlaryň koordinatalaryny anyklaň.

40. $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$ we $O(0;\ 0;\ 0)$ nokatlar berlen. $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{BO}, \overline{CO}$ we $\overline{AB}$ wektorlaryň koordinatalaryny anyklaň.

33



41. $\overline{AB}$ $(a;\ b;\ c)$ bolsa, $\overline{BA}$ wektor koordinatalaryny aýdyň.

42. Eger a) $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(3;\ 7;\ 6)$; b) $A(-3;\ 2;\ 1)$, $B(1;\ -4;\ 3)$ bolsa, $\overline{AB}$ wektor koordinatalaryny tapyň.

43. $\overline{a}(1;\ -1;\ 1)$, $\overline{b}(0;\ 2;\ -4)$, $\overline{c}(2;\ 3;\ -1)$, $\overline{d}(1;\ 2;\ 5)$ wektorlaryň uzynlygyny tapyň.

44. Eger $\overline{a}(2;\ 1;\ 3)$ we $\overline{b}(-1;\ x;\ 2)$ wektorlar uzynlygy deň bolsa, x-i tapyň.

45. Uzynlygy $\sqrt{54}$ -e deň bolan $\overline{a}$(c; 2c; –c) wektoryň koordinatalaryny tapyň.

46. *A*, *B*, *C*, *D*, *E* we *F* nokatlar dogry altyburçlugyň depeleri bolsa, olar arkaly a) iki deň; b) iki birmeňzeş ugrugan; c) iki garşylykly ugrugan we deň; d) iki garşylykly ugrugan we deň bolmadyk wektorlara mysal getiriň.

47. k-nyň nähili bahasynda a) $\overline{a}(4;\ k;\ 2)$; b) $\overline{a}(k-1;1;4)$; c) $\overline{a}(k;\ 1;\ k+2)$; d) $\overline{a}(k-1;\ k-2;\ k+1)$ wektoryň uzynlygy $\sqrt{21}$ -e deň bolýar?

48. Üç nokat berlen: $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$. şeýle $D(x;\ y;\ z)$ nokady tapyň, ýagny $\overline{AB}$ we $\overline{CD}$ wektorlar deň bolsun.

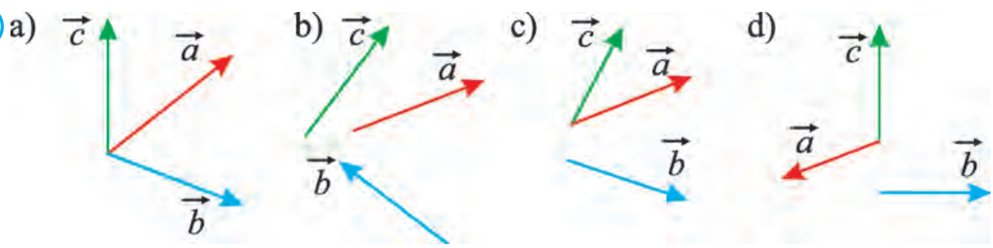
49. Üç nokat berlen: $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 2;\ -1)$. Eger a) $\overline{AB}$ we $\overline{CD}$ wektorlar deň; b) $\overline{AB}$ we $\overline{CD}$ wektorlaryň jemi nola deň bolsa, $D\ (x;\ y;\ z)$ nokady tapyň.

50*. $(2;\ n;\ 3)$ we $(3;\ 2;\ m)$ wektorlar berlen. m we n-iň nähili bahalarynda bu wektorlar kollinear bolýar?

51. Başlangyjy $A(1;\ 1;\ 1)$ nokatda we ahyry Oxy tekizlikdäki B nokatda bolan, hem-de $a(1;-2;\ 3)$ wektora kollinear wektory tapyň.

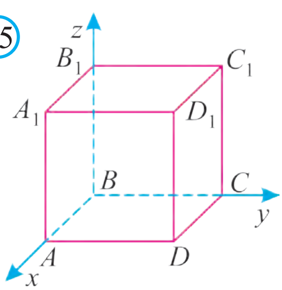
52. $ABCD$ parallelogramyň depeleri
a) $A(-2;-4;3)$, $B(3;\ 1;\ 7)$, $C(4;\ 2;\ -5)$ b) $A(4;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ -3;\ -2)$, $C(-6;\ 2;\ 1)$
c) $A(-1;\ 7;\ 4)$, $B(1;\ 5;\ 2)$, $C(9;\ -3;\ -8)$ d) $A(-2;\ -4;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ 7)$, $C(4;\ 2;\ -5)$
bolsa, D depesiniň koordinatalaryny tapyň.

53. 34-nji suratda şekillendirilen wektorlaryň parallelepiped düzgünine görä jemini tapyň.

34


54. Eger $A(6;7;8)$, $B(8;2;6)$, $C(4;3;2)$, $D(2;8;4)$ we $M(3;5;2)$, $N(7;1;2)$, $P(3;-3;2)$, $K(-1;1;2)$ bolsa $ABCD$ we $MNPK$ dörtburçluklardan haýsy biri romb, haýsysy kwadrat bolýar?

55. 35-nji suratda şekillendirilen $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubda a) $\overline{AB}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{AC}$ wektorlara deň; b) $\overline{A_1D_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{BD}$, wektorlara garşylykly ugrugan; c) $\overline{BA}$, $\overline{AA_1}$, wektorlara kollinear; d) $\overline{AB}$ we $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, we $\overline{A_1C}$ wektorlar jübütine komplanar wektorlary anyklaň.

35


56. Eger 1) $\overline{a}(1;-4;0)$, $\overline{b}(-4;0;8)$; 2) $\overline{a}(0;2;5)$, $\overline{b}(4;3;0)$ bolsa, $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$ wektoryň koordinatalaryny we uzynlygyny tapyň.

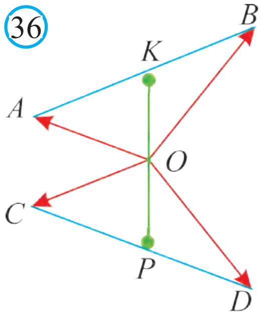
57. Eger 1) $\overline{a}(1;\ -4;\ 0)$, $\overline{b}(-4;\ 8;\ 0)$; 2) $\overline{a}(0;\ -2;\ 7)$, $\overline{b}(0;\ 4;\ -1)$ bolsa, wektoryň koordinatalaryny we uzynlygyny tapyň.

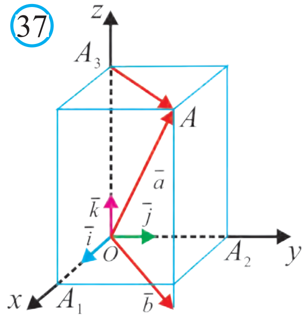
58. Eger $\overline{b}(-4;\ 8;\ 2)$ bolsa, a) $2\overline{b}$; b) $-3\,\overline{b}$; c) $-1{,}5\,\overline{c}$; d) $0\cdot\overline{b}$ wektoryň koordinatalaryny we uzynlygyny tapyň.

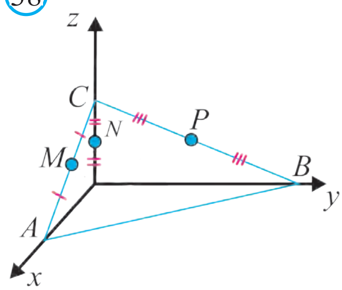
59. $\overline{a}(1; -1; 1)$, $\overline{b}(0; 2; -4)$, $\overline{c}(2; 3; -1)$, $\overline{d}(1; 2; 5)$ wektorlary syrtlar boýunça dagydyň.

60*. $\overline{a}(1; -1; 1)$, $\overline{b}(0; 2; -4)$, $\overline{c}(2; 3; -1)$, $\overline{d}(1; 2; 5)$ wektorlar berlen. $|\overline{a}+2\overline{b}|$, $|\overline{a}-3\overline{b}|$, $|\overline{c}-2\overline{d}|$, $|3\overline{a}+4\overline{d}|$ -i tapyň.

61*. K we P nokatlar atanak göni çyzyklarda ýatýan AB we CD kesimleriň ortasy hem-de O nokat KP kesimiň ortasy bolsa (36-njy surat), $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=\overline{0}$ bolýandygyny subut ediň.

36


37


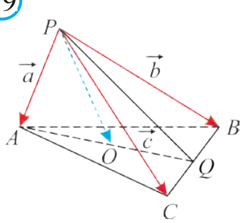
38


62. 37-nji suratda $OA_1 = 2$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 3$. $\overline{a}$, $\overline{b}$ we A_3A wektorlaryň koordinatalaryny anyklaň.

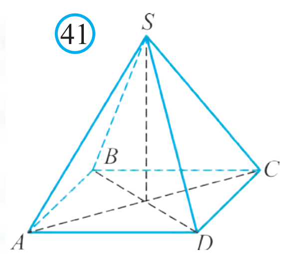
63. 38-nji suratda $OA=4$, $OB=9$, $OC=2$, M, N we P nokatlar degişlilikde AC, OC we CB kesimleriň ortasy. $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AB}$, $\overline{PC}$, $\overline{MC}$ we $\overline{CN}$ wektorlaryň koordinatalaryny tapyň.

64. Nokat $PABC$ tetraedriň BC gapyrgasynyň ortasy we O nokat A kesim ortasy bolsa (39-njy surat), $\overline{PO}$ wektory $\overline{PA}=\overline{a}$, $\overline{PB}=\overline{b}$ we $\overline{PC}=\overline{c}$ wektorlar arkaly aňladyň.

65*. 40-njy suratda şekillendirilen gaýyga derýanyň akymy $\overline{F_1} = 120\ N$ güýç bilen we kenardan öwüsýän şemal $\overline{F_2} = 100\ N$ güýç bilen täsir edýär. Gaýygy derýada ýerinden gozganman durmagy üçin ony nähili güýç bilen saklap durmaly?

39


40


41


66. Skalýar köpeltmek hasyly a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) 0; d) $-\frac{1}{2}$; e) b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ä deň bolan birlik wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.

67. a) $\overline{a}$ (1; –1; 1), $\overline{b}$ (0; 2; –4); b) $\overline{c}$(2; 3; –1), $\overline{d}$ (1; 2; 5); c) $\overline{e}$(1; –1; 1), $\overline{f}$ (0; 2; –4); d) $\overline{g}$(2; 3; –1), $\overline{h}$(1; 2; 5) wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.

68. ABC üçburçlukda $\angle A= 50°$, $\angle C= 90°$. a) $\overline{BA}$ we $\overline{BC}$; b) $\overline{CA}$ we $\overline{AB}$; c) $\overline{AB}$ we $\overline{BA}$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.

69. $\overline{a}$ we ($\overline{b}$) wektorlaryň uzynlyklary we olaryň arasyndaky burç degişlilikde a) 5, 12, 50°; b) 3, $\sqrt{2}$, 45°; c) 5, 6, 120°; d) 4, 7, 180° bolsa, olaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.

70. n-iň nähili bahasynda wektorlar perpendikulýar bolýar?

1) $\overline{a}(2; -1; 3)$, $\overline{b}(1; 3; n)$; 2) $\overline{a}(n; -2; 1)$, $\overline{b}(n; -m; 1)$;

3) $\overline{a}(n;-2;1)$, $\overline{b}(n; 2n; 4)$; 4) $\overline{a}(4; 2n; -1)$, $\overline{b}(-1; 1; n)$.

71. $\overline{a}(1;-5;2)$, $\overline{b}(3;1;2)$ wektorlar berlen. a) $\overline{a}+\overline{b}$ we $\overline{a}-\overline{b}$; b) $\overline{a}+2\overline{b}$ we $3\overline{a}-\overline{b}$; c) $2\overline{a}+\overline{b}$ we $3\overline{a}-2\overline{b}$ wektorlar skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.

72. A (1; 0; 1), B (–1; 1; 2), C (0; 2; –1) nokatlar berlen. Oz koordinatalar okunda şeýle D nokady tapyň, ýagny ol $\overline{AB}$ we $\overline{CD}$ wektorlar perpendikulýar bolsun.

73*. $(\overline{a}, \overline{b}) \leq |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$ bolýandygyny esaslandyryň. Bu wektorlar nähili bolanda deňlik ýerlikli bolýar?

74*. $SABCD$ piramidanyň hemme gapyrgalary özara deň (41-nji surat) we esasi kwadratdan ybarat. a) $\overline{SA}$ we $\overline{SB}$; b) $\overline{SD}$ we $\overline{AD}$; c) $\overline{SB}$ we $\overline{SD}$ d) $\overline{AS}$ we $\overline{AC}$; e) $\overline{AC}$ we $\overline{AD}$ wektorlaryň arasyndaky burçlary tapyň

75*. Uzynlyklary bire deň $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ wektorlar jübüt- jübüti bilen 60°-ly burçy emele getirýär. a) $\overline{a}$ we $\overline{b}+\overline{a}$; b) $\overline{a}$ we $\overline{b}-\overline{c}$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.

76. O nokat $ABCD$ kwadratyň diagonallarynyň kesişme nokady. Kwadratyň B depesinden diagonala parallel we DA göni çyzyk bilen F nokatda kesişýän göni çyzyk geçirilen. $\overline{BF}$ wektory $\overline{DO}$ we $\overline{DC}$ wektorlar arkaly aňladyň.

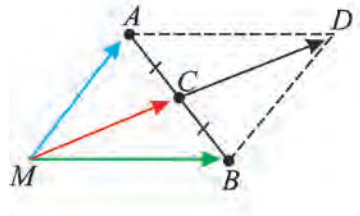
77. O nokat ABC üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokady bolsa, $\overline{OC}$ wektory $\overline{AB}$ we $\overline{AC}$ wektorlar boýunça dagydyň.

78*. C nokat AB kesimiň ortasy bolsa (42-nji surat), onda islendik M nokat üçin $\overline{MC}=\frac{1}{2}(\overline{MA}+\overline{MB})$ bolýandygyny subut ediň.

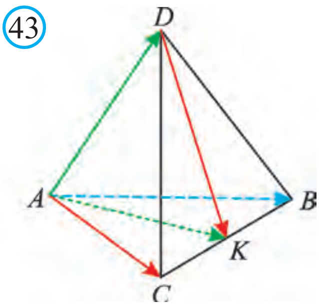
79. K nokat $ABCD$ tetraedr BC gapyrgasynyň ortasy bolsa (43-nji surat), $\overline{DK}$ wektory $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ we $\overline{AC}$ wektorlar boýunça dagydyň.

80*. Jisimiň süýşme ugruna görä 30°-ly burç astynda goýlan $\overline{F}=20N$ güýç täsirinde jisim 3 m-e süýşdi. Şu halatda edilen işi tapyň.

42



43



81*. Jisimiň süýşme ugruna görä 60°-ly burç astynda goýlan $\overline{F}=50N$ güýç täsirinde jisim 8 m-e süýşdi. Şu halatda edilen işi tapyň.

82*. (Koşi-Bunýakowskiýniň deňsizligi) Islendik $a_1; a_2; a_3$, $b_1; b_2; b_3$ sanlary üçin $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$ deňsizligiň ýerlikli bolýandygyny wektorlardan peýdalanyp subut ediň.

3. GIŇIŞLIKDE ÇALŞYRMALAR WE MEŇZEŞLIK

3.1 *Giňişlikde geometrik çalşyrmalar*

Giňişlikde berlen F şekiliň her bir nokady käbir bir usulda orun üýtgedilse, täze F_1 şekil emele gelýär. Eger bu orun üýtgetmede (şöhlelendirmede) birinji şekiliň dürli nokatlary ikinji şekiliň dürli nokatlaryna orun üýtgetse, bu orun üýtgetmä *geometrik şekil çalşyrma* diýlip atlandyrylýar.

Tutuş giňişligi hem geometrik şekil hökmünde garasak, giňişlikdäki şekil çalşyrma barada hem aýtmak mümkin.

Görşümiz ýaly, giňişlikde geometrik çalşyrmalar düşünjesi tekizlikdäki ýaly birmeňzeş girizilýär. Şonuň ýaly-da, onuň aşakda garalýan ençeme görnüşleriniň häsiýetleri we olaryň subudy-da tekizlikdäkisine meňzeş. Şu sebäpli, bu häsiýetleriň subudyna durup geçmeýäris we olary özbaşdak ýerine ýetirmegi maslahat berýäris.

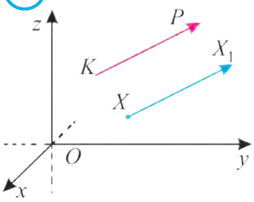
3.2 Hereket we parallel orun üýtgetme

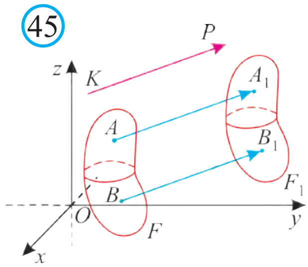
Nokatlaryň arasyndaky aralygy saklaýan şekil çalşyrmalar *hereket* diýlip atlandyrylýar. Hereketiň aşakdaky häsiýetlerini getirmek mümkin.

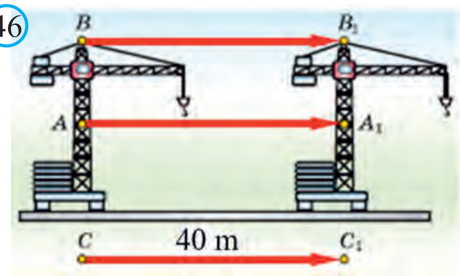
Hereketde göni çyzyk göni çyzyga, şöhle-şöhlä, kesim oňa deň kesime, burç oňa deň burça, üçburçluk oňa deň üçburçluga, tekizlik tekizlige we tetraedr oňa deň tetraedre ornuny üýtgedýär (şöhlelenýär).

Giňişlikde käbir hereketiň kömeginde birini ikinjisine orun üýtgetmek mümkin bolan şekiller *deň* diýilýär.

Herekete iň ýönekeý mysal bu parallel orun üýtgetmekdir.

44


45


46


Giňişlikde käbir $\overline{KP}$ wektor we islendik X nokat berlen bolsun (44-nji surat). Eger X_1 nokat $\overline{XX_1} = \overline{KP}$ şerti kanagatlandyrsa, X nokat X_1 nokada $\overline{KP}$ wektor boýunça parallel orun üýtgeden diýlip atlandyrylýar.

Eger giňişlikde berlen F şekiliň her bir nokady $\overline{KP}$ wektor boýunça orun üýtgedilse (45-nji surat), täze F_1 şekil emele gelýär. Bu ýagdaýda F şekil F_1 şekile parallel orun üýtgeden diýilýär. Parallel orun üýtgetmede F şekiliň her bir nokady birmeňzeş ugurda birmeňzeş aralyga orun üýtgeden bolýar.

46-njy suratda şekillendirilen göterme kranyň her bir nokady başlangyç ýagdaýyna görä 40 m-e parallel orun üýtgeden.

Görnüşi ýaly, parallel orun üýtgetmek hereketdir. Şonuň üçin, parallel orun üýtgetmede göni çyzyk göni çyzyga, şöhle-şöhlä, tekizlik-tekizlige, kesim oňa deň kesime orun üýtgedýär we başgalar.

Aýdaly $\overline{KP} = (a; b; c)$ wektor boýunça parallel orun üýtgetmede F şekiliň nokady $X(x; y; z)$ we F_1 şekiliň nokadyna $X_1(x_1; y_1; z_1)$ geçsin. Onda kesgitlemä görä aşakdakylara eýediris:

$x_1 - x = a,\ \ y_1 - y = b,\ \ z_1 - z = c$ ýa-da $x_1 = x + a,\ \ y_1 = y + b,\ \ z_1 = z + c.$

Bu deňlikler *paralel orun üýtgetme formulalary* diýlip atlandyrylýar.

1-nji mesele. $\overline{p} = (3; 2; 5)$ wektor boýunça parallel orun üýtgetmede $P(-2; 4; 6)$ nokat haýsy nokada orun üýtgedýär?

Çözülişi. Ýokardaky parallel orun üýtgetme formulalardan peýdalanýarys:

$x_1 = -2 + 3 = 1,\ \ y_1 = 4 + 2 = 6,\ \ z_1 = 6 + 5 = 11.$ Jogaby: $P_1(1; 6; 11)$. □

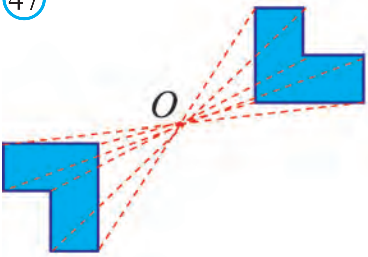
3.3 Giňişlikde merkezi simmetriýa

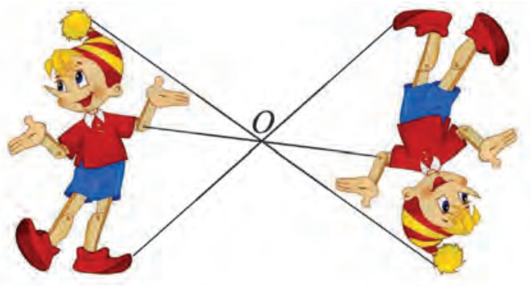
Giňişlikde berlen A we A_1 nokatlar O nokada görä simmetrik diýilýär, eger $\overline{AO} = \overline{OA_1}$ bolsa, ýagny O nokat AA_1 kesimiň ortasy bolsa.

Eger giňişlikde berlen F şekiliň her bir nokady O nokada görä simmetrik nokada orun üýtgetse (47-nji surat), şeýle çalşyrma *O nokada görä simmetriýa* diýlip atlandyrylýar. 48-49-njy suratlarda O nokada görä simmetrik şekiller şekillendirilen.

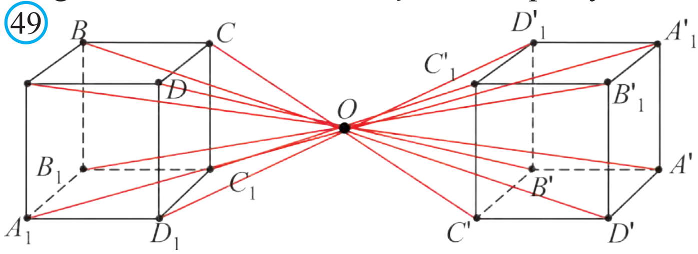
Nokada görä simmetriýa – hereketdir.

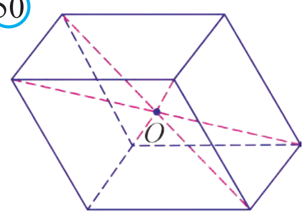
Eger F şekil O nokada görä simmetrik çalşyrmada özüne orun üýtgetse, ol *merkezi simmetrik şekil* diýlip atlandyrylýar.

47


48


Meselem, parallelepipediň (50-nji surat) diagonallarynyň kesişme nokady O-a görä merkezi simmetrik şekil hasaplanýar.

49


50


2-nji mesele. O (2; 4; 6) nokada görä merkezi simmetriýada A=(1; 2; 3) nokat haýsy nokada geçýär?

Çözülişi. A_1= (x; y; z) gözlenýän nokat bolsun. Kesgitlemä görä, O nokat AA_1 kesimiň ortasy. Diýmek, $2=\frac{x+1}{2}$, $4=\frac{y+2}{2}$, $6=\frac{z+3}{2}$.

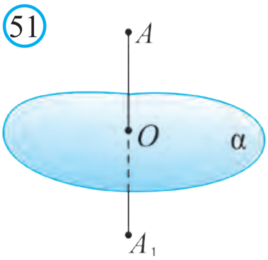
Bu deňliklerden $x=4-1=3$, $y=8-2=6$, $z=12-3=9$. Jogaby: $A_1(3; 6; 9)$. □

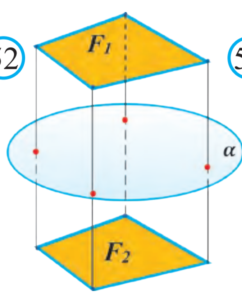
3.4 Tekizlige görä simmetriýa

Giňişlikde berlen A we A_1 nokatlar tekizlige görä simmetrik diýilýär, eger tekizlik AA_1 kesime perpendikulýar bolup, ony deň ýarpa bölse (51-nji surat).

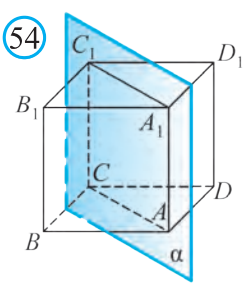
52-nji suratda tekizlige görä simmetrik bolan F_1 we F_2 şekiller getirilen. Görnüşi ýaly, göwrämiz we şöhlämiz aýnanyň tekizligine görä simmetrik bolýar (53-nji surat).

Tekizlige görä simmetriýa – hereketdir.

51


52


53


54


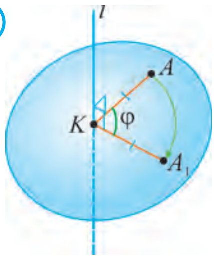
3, tekizlige görä simmatriýada kesim özüne deň kesime, göni çyzyk – göni çyzyga we tekizlik – tekizlige şöhlelenýär.

Eger F şekil tekizlige görä simmetrik çalşyrmada özüne orun üýtgetse, ol tekizlige *görä simmetrik şekil* diýlip atlandyrylýar.

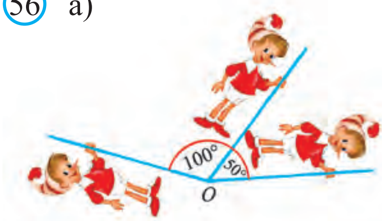
Meselem, 54-nji suratda şekillendirilen kub AA_1we CC_1 gapyrgalaryndan geçýän tekizlige görä simmetrik şekil bölýär.

3.5 Öwürmek we oka görä simmetriýa

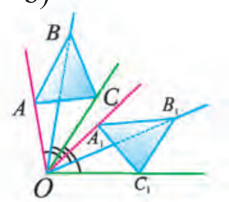
55



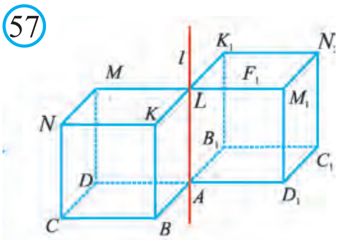
56 a)



b)



57



Aýdaly, giňişlikde A we A_1 nokatlar we l göni çyzyk berlen bolsun. Eger l göni çyzyga düşürlen AK we A_1K perpendikulýarlar deň we özara φ burç düzse, bu ýagdaýda l göni çyzyga görä φ burça öwürmek netijesinde A nokat A_1 nokada geçdi diýilýär (55-nji surat).

Eger giňişlikde berlen F şekiliň her bir nokady l göni çyzyga görä φ burça öwürsek täze F_1 şekil emele gelýär. Munda F şekil l göni çyzyga görä φ burça öwürende F_1 şekile geçdi diýilýär. 56-njy suratda şeýle simmetrik şekiller görkezilen.

Meselem, 57-nji suratda şekillendirilen kub l göni çyzyga görä 180° burça öwürene täze kuby alarys.

Göni çyzyga görä öwürmek hem hereket bolýar.

l göni çyzyga görä 180° burça öwürmek l göni çyzyga görä simmetriýa diýlip atlandyrylýar.

Şekiliň simmetiýa merkezi, oky, tekizligi onuň simmetriýa elementleri diýlip atlandyrylýar.

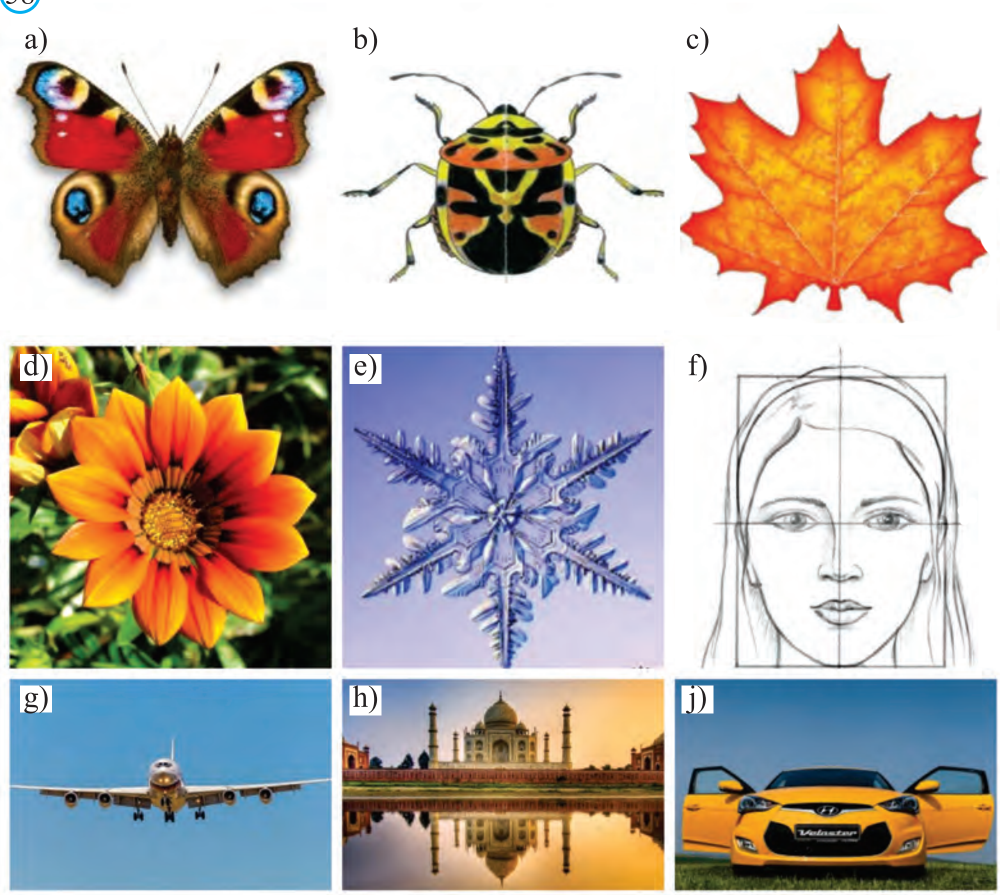
Koordinatalary bilen berlen $A(x; y; z)$ nokada koordinata tekizlikleri, koordinata oklary we koordinata başlangyjyna görä simmetrik nokatlaryň aşakdaky koordinatalara eýe bolýar:

Simmetriýa elementi	Simmetrik nokadyň koordinatalary
Oxy tekizlik	$(x; y; -z)$
Oxz tekizlik	$(x; -y; z)$

Oyz tekizlik	$(-x; y; z)$
Ox oky	$(x; -y; -z)$
Oy oky	$(-x; y; -z)$
Oz oky	$(-x; -y; z)$
O nokat	$(-x; -y; -z)$

3.6 Tebigatda we tehnikada simmetriýa

58

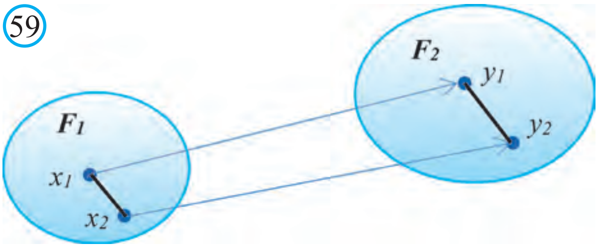


Tebigatda simmetriýany her ädimde duşmak mümkin. Meselem, janly janlaryň köpüsi, hususan-da, adamlaryň we haýwanlaryň göwresi, ösümlikleriň ýapraklary we gülleri simmetrik düzülen (58-nji surat). Şonuň ýaly-da, jansyz tebigatyň elementleri-de bar bolup, meselem-er bölejikleri, duzuň kristallary, maddalaryň molekulýar gurluşy-da ajaýyp simmetrik şekillerden ybaratdyr. Bu ýöne ýere däl, elbetde, çünki simmetrik şekiller owadan bolmagy bilen birlikde, haýsydyr manyda iň makul we kämil hasaplanýar. Şeýlelikde, tebigatdaky gözellik we kämillik simmetriýa esasyna gurlan, diýip aýdyp bileris. Tebigatdaky bu gözellik we kämillikden ülň alan gurluşykçy, inžener we arhitektor ýaly döredijiler döreden köp desgalar we binalar, gurluşlar we mehanizmler, tehnika we transport serişdeleri-de simmetrik döredilen. Bu işde olara geometriýa ylmynyň kömegi biçakdyr.

3.7 Giňişlikdäki şekilleriň meňzeşligi

Giňişlikde $k \neq 0$ we F_1 şekili F_2 şekile şöhlelendirýän çalşyrma berlen bolsun. Bu şöhlelendirmede F_1 şekiliň islendik X_1 we X_2 nokatlary we olar şöhlelenen F_2 şekiliň Y_1 we Y_2 nokatlary üçin $X_1Y_1 = k \cdot X_2Y_2$ bolsa, bu çalşyrma *meňzeşlik çalşyrmasy* diýlip atlandyrylýar (59-njy surat).

59



60

Görşümiz ýaly, giňişlikde meňzeşlik çalşyrmasy düşünjesi tekizlikdäki ýaly girizilýär. Şonuň ýaly-da, onuň aşakda garalýan ençeme görnüşleriniň kesgitlemesi, olaryň häsiýetleri we bu häsiýetleriň subudy-da tekizlikdäkisine meňzeş. Şu sebäpli, bu häsiýetleriň subudyna durup geçmeýäris we olary özbaşdak ýerine ýetirmegi maslahat berýäris.

Giňişlikdäki meňzeşlik çalşyrmasy göni çyzygy – göni çyzyga, şöhläni — şöhlä, kesimi — kesime we burçy – burça şöhlelendirýär. Şonuň ýaly-da, bu çalşyrma tekizligi-de tekizlige şöhlelendirýär.

Giňişlikde berlen iki şekiliň biri ikinjisine meňzeşlik çalşyrmasy arkaly şöhlelense, olar *meňzeş şekiller* diýlip atlandyrylýar.

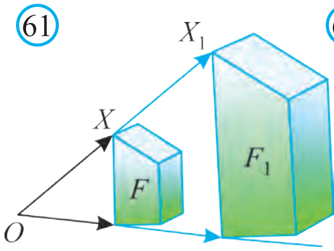
Giňişlikde F şekil, O nokat we k $(\neq 0)$ san berlen bolsun.

F şekiliň islendik X nokadyny $\overline{OX_1} = k\overline{OX}$ şerti kanagatlandyrýan X_1 nokada şöhlelendirýän çalşyrma *O nokada görä k koeffisiýentli gomotetiýa* diýlip atlandyrylýar (61-nji surat). O nokat *gomotetiýa merkezi*, k sany bolsa *gomotetiýa koeffisiýenti* diýlip atlandyrylýar.

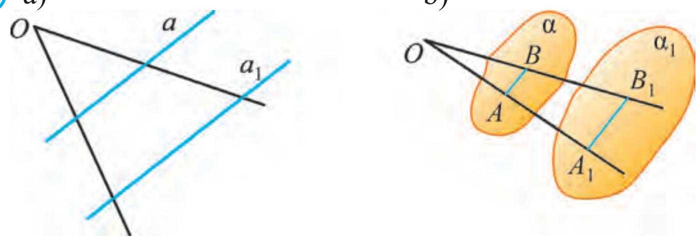
F şekiliň her bir nokady şu usulda şöhlelendirilse, netijede F_1 şekil emele gelýär we bu gomotetiýada F şekil F_1 şekile şöhlelenýär diýilýär.

Görşümiz ýaly, giňişlikde gomotetiýa kesgitlemesi tekizlikdäkisi bilen birmeňzeş diýen ýaly. Şonuň ýaly-da, onuň ençeme häsiýetleri-de bar bolup, olar hem, olaryň subutlary hem tekizlikdäkisine meňzeş. Şu sebäpli, bu häsiýetleriň subudyna durup geçmeýäris we olary özbaşdak ýerine ýetirmegi maslahat berýäris.

61



62 a) b)



O nokada görä *k* koeffisiýentli gomotetiýa meňzeşlik çalşyrmadyr.

Gomotetiýa koeffisiýenti *k* islendik noldan tapawutly san bolup, $k=1$ bolanda *F* şekil özüne-özi şöhlelenýär, $k=-1$ bolanda bolsa *F* şekil *O* nokada görä simmetrik F_1 şekile şöhlelenýär. Başga ýagdaýlarda gomotetiýa nokatlaryň arasyndaky aralygy saklamaýar, ýagny ol hereket bolmaýar. Gomotetiýa netijesinde nokatlaryň arasyndaky aralyk birmeňzeş *k* sana köpelýär, ýagny şekiliň ölçegleri üýtgeýär, ýöne onuň şekili üýtgemeýär.

Gomotetiýada onuň merkezinden geçmeýän a) göni çyzyk - parallel göni çyzyga (62-nji *a* surat); b) tekizlik bolsa parallel tekizlige şöhlelenýär (62-nji *b* surat).

Gomotetiýada onuň merkezinden geçýän göni çyzyk ýa-da tekizlik özüne-özi şöhlelenýär.

Tema degişli meseleler we amaly ýumuşlar

83. $\overline{p} = (-2; 1; 4)$ wektor boýunça parallel orun üýtgetmede a) (3; –2; 3); b) (0; 2; –3); c) (2; –5; 0) nokat haýsy nokada orun üýtgedýär?

84. Parallel orun üýtgetmede *A*(4; 2; –8) nokat (3; 7; –5) nokada ornuny üýtgetdi. Paralllel orun üýtgetme haýsy wektor boýunça amala aşyrylypdyr?

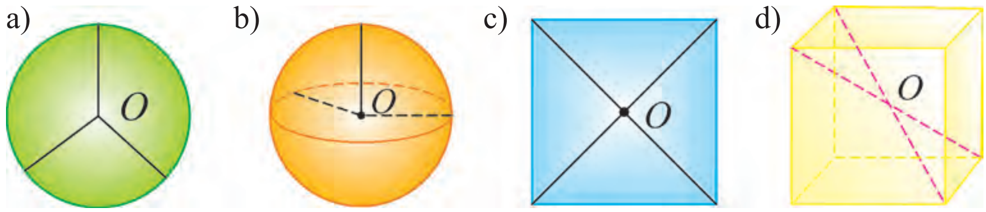
85. Parallel orun üýtgetmede a) göni çyzyk göni çyzyga; b) şöhle-şöhlä; c) tekizlik – tekizlige; d) kesim oňa deň kesime orun üýtgedýändigini subut ediň.

86. *O* (–2; 3; –1) nokada görä merkezi simmetriýada *A* (4; 2; –3) nokat haýsy nokada geçýär?

87. 63-nji suratda şekillendirilen şekillerde *O* nokadyň simmetriýa merkezidigini esaslandyryň.

88. (–2; 5; –9), (2; 2; –7), (–6; 12; –2) nokatlar koordinata başlangyjyna görä merkezi simmetriýada haýsy nokatlara geçýär?

89*. Merkezi simmetriýanyň hereketdigini subut ediň.

63


90*. Tekizlige görä simmetriýanyň hereketdigini subut ediň.

91. Parallelepipediň (50-nji surat) diagonallarynyň kesişme nokady O-a görä merkezi simmetrik şekildigini subut ediň.

92. (1; 2; –3), (0; 2; –3), (2; 2; –3) nokatlar koordinata tekizliklerine görä simmetriýalarda haýsy nokatlara geçýär?

93. (2; 4; –1) nokat koordinata tekizligine görä simmetrik şöhlelenmede (2; –4; –1) nokada geçdi. Şöhlelendirme haýsy koordinata tekizligine görä amala aşyrylypdyr?

94. Aşakdaky jedwelde berlen 1-nji nusga esasynda boş öýjükleri dolduryň.

№	Berlen nokat	Simmetrik nokat	Nämä görä simmetriýa?
1.	(1; 2; 3)	(1; 2; –3)	Oxy tekizlige görä
2.	(2; 4; –1)		Oxz tekizlige görä
3.		(1; 2; 3)	Oyz tekizlige
4.	(–1; –2; –3)	(–1; 2; 3)	
5.	(–1; 6; 3)		Oy okuna
6.		(–3; 8; –2)	Oz okuna
7.	(4; 1; –2)		O nokada

95. 49-njy suratda şekillendirilen şekillerde O nokadyň simmetriýa merkezidigini esaslandyryň.

96*. Göni çyzyga görä öwürmegiň hereketdigini görkeziň.

97. O nokada görä k koeffisiýentli gomotetiýa meňzeşlik çalşyrmasydygyny görkeziň.

98. Oxy tekizlige görä simmetriýada islendik (x; y; z) nokat (x; y; $-z$) nokada geçýändigini görkeziň.

99. Oxz tekizlige görä simmetriýada islendik (x; y; z) nokat (x; $-y$; z) nokada geçýändigini görkeziň,

100. Parallel orun üýtgetmede (1; 2; –1) nokat (1; –1; 0) nokada geçdi. Koordinata başlangyjy bu çalşyrmada haýsy nokada geçýär?

101. Parallel orun üýtgetmede (3; 4; –1) nokat (2; –4; 1) nokada geçdi. Bu çalşyrmada koordinata başlangyjy haýsy nokada geçýär?

102*. $A(2; 1; 0)$ nokat $B(1; 0; 1)$ nokada, $C(3; –2; 1)$ nokat bolsa $D(2; –3; 0)$ nokada geçýän parallel orun üýtgetme barmy?

103*. $A(–2; 3; 5)$ nokat $B(1; 2; 4)$ nokada, $C(4; –3; 6)$ nokat bolsa $D(7; –2; 5)$ nokada geçýän parallel orun üýtgetme barmy?

104. 58-nji suratlarda şekillendirilen janly we jansyz obýektler giňişlikdäki jisim hökmünde nähili simmetrik şekil bolmagy mümkinligini anyklaň.Olaryň (eger bar bolsa) simmetriýa merkezi, simmetriýa oky ýa-da simmetriýa tekizliklerini çyzyp görkeziň.

105. 60-njy suratda şekillendirilen ene-çagalaryň (matrýoşkalar) uly ene matrýoşka görä meňzeşlik koeffisiýentlerini anyklaň.

106. Dogry tetraedriň gapyrgasynyň uzynlygy 12 sm-e deň. Bu tetraedre a) 3; b) –4; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{3}$; koeffisiýentli gomotetik bolan tetraedriň gapyrgasynyň uzynlygy nämä deň?

107. Islendik ABC üçburçluk çyzyň we käbir O nokady belgiläň. Merkezi O nokatda we koeffisiýenti a) 2; b) –3; c) $-\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{4}$ -e deň bolan gomotetiýada ABC üçburçluk geçýän üçburçlugy guruň.

108. Islendik $SABC$ tetraedr çyzyň. Merkezi S nokatda we koeffisiýenti a) 1,5; b) –2; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{4}$ -e deň bolan gomotetiýada $SABC$ tetraedr geçýän tetraedri guruň.

109. Islendik kub çyzyň. Merkezi kubuň käbir gapyrgasynda we koeffisiýenti a) 2; b) –2; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$ -e deň bolan gomotetiýada bu kub geçýän giňişlikdäki geometrik şekili guruň.

110. Merkezi koordinata başlangyjynda we koeffisiýenti a) 2,5; b) –2,5; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{4}$ -e deň bolan gomotetiýada $A(–2; 3; 5)$ nokat geçýän nokadyň koordinatalaryny tapyň.

111. Merkezi $O(–1; 2; 2)$ nokatda we koeffisiýenti a) 0,5; b) –2; c) 1/4; d) – 1/4 -e deň bolan gomotetiýada $A(2; 4; 0)$ nokat geçýän nokadyň koordinatalaryny tapyň.

112. Depeleri $O(0; 0; 0)$, $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 4)$ nokatlarda bolan tetraedr a) merkezi O nokatda, koeffisiýenti –1-e deň; b) merkezi A nokatda, koeffisiýenti 2-ä deň bolan gomotetiýada geçýän tetraedriň depeleriniň koordinatalaryny tapyň.

113*. Gomotetiýada onuň merkezinden geçmeýän a) göni çyzyk – özüne parallel göni çyzyga, b) tekizlik bolsa özüne parallel tekizlige şöhlelenişini görkeziň.

114*. Gomotetiýada onuň merkezinden geçýän göni çyzyk ýa-da tekizlik özüne-özi şöhlelenişini görkeziň.

4. BABY GAÝTALAMAGA DEGIŞLI AMALY GÖNÜKMELER

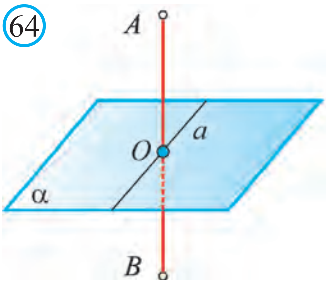
4.1 1-nji test synagy

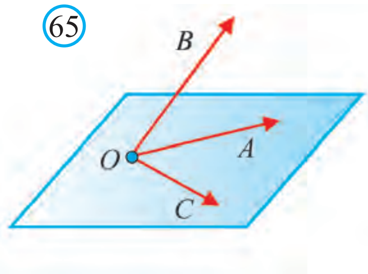
1. $A(x_1;\ x_1;\ z_1)$ we $B(x_2;\ x_2;\ z_2)$ nokatlar berlen. $z_2 - z_1$ nämäni aňladýar?

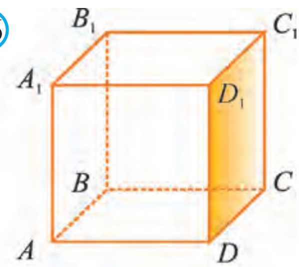
A) AB kesimiň ortasynyň koordinatasyny; B) AB kesim uzynlygyny;
C) $\overline{AB}$ wektor uzynlygyny; D) $\overline{AB}$ wektor koordinatalaryndan birini.

2. 64-nji suratda $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, $AO = OB$ bolsa,

A) A we B nokatlar O nokada görä simmetrik bolýar;
B) A we B nokatlar a göni çyzyga görä simmetrik bolýar;
C) A we B nokatlar α tekizlige görä simmetrik bolýar;
D) AB kesim a göni çyzyga görä simmetrik bolýar.

64


65


66


3. 65-nji suratda B nokat AOC tekizlikde ýatmaýar. Onda $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ we $\overline{OC}$ wektorlar …

A) kollinear; B) komplanar;
C) birmeňzeş ugurly; D) komplanar däl.

4. $M(-7;\ 1;\ 4)$ we $N(-1;\ -3;\ 0)$ nokatlar berlen. MN kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapyň.

A) $(-4;\ -1;\ 4)$; B) $(-4;\ -1;2)$; C) $(-4;\ -2;\ 2)$; D) $(-3;\ 2;\ 2)$.

5. $A(0;\ -3;\ 2)$ we $B(4;\ 0;\ -2)$ nokatlar berlen. AB kesim ortasy nämä degişli?

A) Ox okuna; B) Oy okuna; C) Oz okuna; D) Oxy tekizligine.

6. $A(3;\ 4;\ -3)$ nokatdan Oz okuna çenli bolan aralygy tapyň.

A) 3; B) 5; C) $2\sqrt{3}$; D) $\sqrt{34}$.

7. $\overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF}$ wektorlaryň jemini tapyň.

A) $\overline{O}$; B) $\overline{CF}$; C) $\overline{DF}$; D) $\overline{CE}$.

8. m-iň haýsy bahasynda $\overline{a}(m;\ 4;\ -3)$ we $\overline{b}(4;\ 8;\ -6)$ wektorlar kollinear bolýar?

A) 2; B) 5; C) 1; D) 3.

9. O nokat α tekizlikde ýatmaýar. Merkezi O nokatda bolan gomotetiýada α tekizlik ondan tapawutly bolan β tekizlige geçýär. Eger a göni çyzyk α tekizlige degişli bolsa, …

A) $\alpha \parallel \beta$ bolýar; B) α tekizlik β tekizlik bilen kesişýär;
C) $a \subset \beta$ bolýar; D) $\alpha \perp \beta$ bolýar.

10. AB göni çyzyk BCD tekizlige perpendikulýar. Haýsy wektorlaryň skalaýar köpeltmek hasyly nola deň bolýar?

A) $\overline{CA}$ we $\overline{CB}$; B) $\overline{BD}$ we $\overline{AD}$; C) $\overline{AC}$ we $\overline{BC}$; D) $\overline{AB}$ we $\overline{CD}$.

11. Gapyrgasy 1-e deň bolan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berlen (66-njy surat). $(\overline{AB}+\overline{BC})\cdot\overline{BB}$ -ni tapyň.

A) 1; B) 0; C) –1; D) 0,5.

12. p-niň haýsy bahasynda $\overline{a}(1; 1; –0)$ we $\overline{b}(0; 4; p)$ wektorlaryň arasyndaky burç 60°-a deň bolýar?

A) 4; B) 4 ýa-da –4; C) 16; D) 16 ýa-da –16;

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berlen. Parallel orun üýtgetmede A_1D kesim D_1C kesime geçýär. Bu orun üýtgetmede AA_1B_1 tekizlik haýsy tekizlige geçýär?

A) DB_1B; B) DCC_1; C) AA_1C_1; D) ABC.

14. α tekizlik onda ýatmaýan ABC üçburçlugyň simmetriýa tekizligidir. Haýsy tassyklama dogry?

A) $(ABC)\perp\alpha$; B) ABC üçburçluk deňýanly;
C) ABC üçburçlugyň simmetriýa merkezi bar;
D) ABC üçburçlugyň simmetriýa oky bar.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub berlen. $\overline{A_1B_1}+\overline{BC}-\overline{DD_1}$ -i tapyň.

A) $\overline{A_1C}$; B) $\overline{BD_1}$; c) $\overline{B_1D}$; D) $\overline{AC_1}$.

16. Haýsy geometrik çalşyrma iki atanak göni çyzyklardan birini ikinjisine geçirýär?

A) Parallel orun üýtgetme; B)Tekizlige görä simmetriýa;
C) Öwürmek; D) Gomotetiýa.

17. $M(–1; 2; –4)$ nokada Oyz tekizlige görä simmetrik bolan nokady tapyň.

A) (1; –2; 4); B) (1; 2; –4); C) (–1; –2; –4); D) (–1; 2; 4).

18. Parallel orun üýtgetmede $\overline{AB}$ wektor $\overline{DC}$ wektora geçýär. Haýsy tassyklama nädogry?

A) $\overline{AB}=\overline{DC}$; B) AC we BD kesim ortalary üstme-üst düşýär;
C) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ we $\overline{DC}$ wektorlar komplanar; D) $ABCD$ parallelogram.

19. $B(–3; 2; –5)$ nokat Oxz tekizlikden nähili aralykda ýatyr?

A) 2; B) 5; C) 3; D) $\sqrt{34}$.

20. $A(1; –2; 0)$, $B(1; –4; 2)$, $C(3; 2; 0)$ nokatlar ABC üçburçlugyň depeleri. CM medianaнyň uzynlygyny tapyň.

A) $2\sqrt{3}$; B) $3\sqrt{2}$; C) $\sqrt{6}$; D) 18.

21. Eger $\overline{a}(1; m; 2)$ we $\overline{b}(0{,}5m+1; 3; 1)$ wektorlar kollinear bolsa, $m+n$ ni tapyň.

A) 3; B) 5; C) –4; D) 9.

22. $A(–1; –9; –3)$ we $B(0; –2; 1)$ nokatlar berlen. wektory koordinata wektorlary (artlar) boýunça ýaýyň.

A) $(\overline{BA}) = \overline{i} + 9\overline{j} - \overline{k}$; B) $(\overline{BA}) = \overline{i} - 9\overline{j} + \overline{k}$;
C) $(\overline{BA}) = -\overline{i} - 9\overline{j} - 4\overline{k}$; D) $(\overline{BA}) = \overline{i} + 9\overline{j} - 4\overline{k}$.

23. $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ va $D(-5; -5; 3)$ nokatlar berlen. AC we BD wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň
A) 150°; B) 30°; C) 45°; D) 90°.

24. $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{a}+\bar{b}| = 11$, $|\bar{a}-\bar{b}| = 7$ bolýandygy mälim bolsa, $|\bar{b}|$ ni tapyň.
A) 11; B) 18; C) 20 ; D) 7.

25. Esaslary BC we AD bolan $ABCD$ trapesiýa berlen. Eger $\overline{AB}(-7; 4; 5)$, $\overline{AC}(3; 2; -1)$, $\overline{AD}(20; -4; -12)$, M we N – degişlilikde AB *we* CD taraplaryň ortasy bo‘lsa, $\overline{MN}$ wektoryň koordinatalarynyň jemini tapyň.
A) 1; B) 2 ; C) 3; D) 4.

4.2 Meseleler

115. Uçlary $A(1; -2; 4)$ we $B(3; -4; 2)$ nokatlarda bolan kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapyň.

116. $A(x; 0; 0)$ nokat $B(1; 2; 3)$ we $C(-1; 3; 4)$ nokatlardan deň uzaklykdadygy mälim bolsa, x-i tapyň.

117. Eger kesimiň bir ujy $A(1; -5; 4)$, ortasy $C(4; -2; 3)$ ikinj ujunyň koordinatalary nähili bolýar?

118. Oxz tekizligine görä $A(1; 2; 3)$ nokada simmetrik bolan nokady tapyň.

119. Koordinatalar başlangyjyna görä $A(1; 2; 3)$ nokada simmetrik bolan nokady tapyň.

120. Oxy tekizligine görä $(1; 2; 3)$ nokada simmetrik bolan nokady tapyň.

121. Oy oka görä $(2; -3; 5)$ nokada simmetrik bolan nokady tapyň.

122. Aşakdaky nokatlardan haýsysy Oyz tekizliginde ýatýar?
$A(2; -3; 0)$; $B(2; 0; -5)$; $C(1; 0; -4)$; $D(0; 9; -7)$; $E(1; 0; 0)$.

123. Aşakdaky nokatlardan haýsysy Oxz tekizliginde ýatýar?
$A(-4; 3; 0)$; $B(0; -7; 0)$; $C(2; 0; -8)$; $D(2; -4; 6)$; $E(0; -4; 5)$.

124. $A(-3; 8; 3\sqrt{33})$ nokatdan Ox oka çenli bolan aralygy tapyň.

125. $A(3; -2; 5)$ we $B(-4; 5; -2)$ nokatlar berlen. $\overline{AB}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

126. $\overline{a}(1; -2; 3)$ wektoryň ahyry $B(2; 0; 4)$ nokat bolsa, bu wektoryň başlangyjyny tapyň.

127. $B(0; 4; 2)$ nokat $\overline{a}(2; -3; 1)$ wektoryň ahyry bolsa, şu wektoryň başlangyjynyň koordinatalaryny tapyň.

128. $\overline{a}(x; 1; 2)$ wektoryň uzynlygy 3-e deň. x-iň bahasyny tapyň.

129. $\overline{a}(4; -12; z)$ wektoryň moduly 13-e deň. z-iň bahasyny tapyň.

130. Eger $\overline{a}(6; 2; 1)$ we $\overline{b}(0; -1; 2)$ bolsa, $\overline{c} = 2\overline{a} - \overline{b}$ wektoryň uzynlygyny.

131. Eger $\overline{p}(2; 5; -1)$ we $\overline{q}(-2; 2)$ bolsa, $\overline{m} = 4\overline{p} + 2\overline{q}$ wektoryň uzynlygyny tapyň.

132. $\overline{a}(2; -3; 4)$ we $\overline{b}(-2; -3; 1)$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.

133. $\overline{m}(-1; 5; 3)$ we $\overline{n}(2; -2; 4)$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.

134. m-iň nähili bahasynda $\overline{a}(1; m; -2)$ we $\overline{b}(m; 3; -4)$ wektorlar perpendikulýar bolýar?

135. n-iň nähili bahasynda $\overline{a}(n; -2; 1)$ we $\overline{b}(n; n; 1)$ wektorlar perpendikulýar bolýar?

136. m-iň nähili bahasynda $\overline{a} = m\overline{i}+3\overline{j}+4\overline{k}$ we $\overline{b}=4\overline{i}+m\overline{j}-7\overline{k}$ wektorlar perpendikulýar bolýar?

137. $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ we $D(-5; -5; 3)$ nokatlar berlen. $\overline{AC}$ we $\overline{BD}$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.

138. n-iň nähili bahalarynda $\overline{a}(2; n; 6)$ we $\overline{b}(1; 2; 3)$ wektorlar kollinear bolýar?

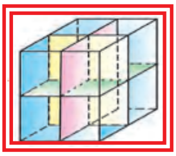
139. m-iň nähili bahasynda $\overline{a}(2; 3; -4)$ we $\overline{b}(m; -6; 8)$ wektorlar parallel bolýar?

140. m we n-iň nähili bahasynda $\overline{a}(-1; m; 2)$ we $\overline{b}(-2; -4; n)$ wektorlar kollinear bolýar?

141. $A(2; 7; -3)$ we $B(-6; -2; 1)$ nokatlar berlen. $\overline{BA}$ wektory koordinatalar wektorlary (syrtlary) boýunça dagydyň.

4.3. 1-nji barlag işiniň nusgasy

1. *Oxy* tekizligine görä (1; 2; 3) nokada simmetrik bolan nokady tapyň.
2. Eger $\overline{a}(6; 3; 2)$ we $\overline{b}(-3;1; 5)$ bolsa, $\overline{c}$=a+2$\overline{b}$ wektoryň uzynlygyny tapyň.
3. $A(2; -1; 0)$ we $B(-2; 3; 2)$ nokatlar berlen. Koordinata başlangyjyndan AB kesim ortasy çenli bolan aralygy tapyň
4. $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ we $D(-5; -5; 3)$ nokatlar berlen. $\overline{AC}$ we $\overline{BD}$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.
5. *(Gowy özleşdirýän okuwçylar üçin goşmaça mesele).*
   Depeleri $A(4; 5; 1)$, $B(2; 3; 0)$ we $C(2; 1; -1)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň BD medianasynyň uzynlygyny tapyň



I BAP. PRIZMA WE SILINDR

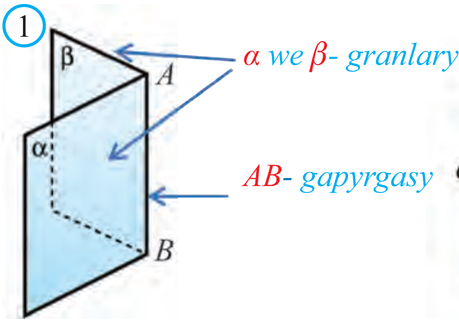
5. KÖPGRANLY BURÇLAR WE KÖPGRANLYKLAR

5.1. Köpgranly burçlar

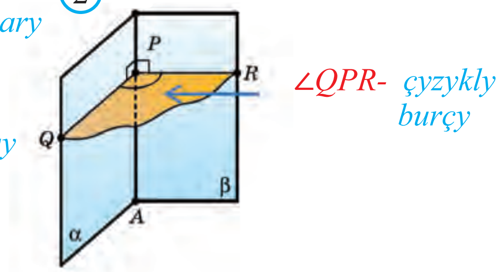
Ikigranly burçuň kesgitlemesi bilen 10-njy synpda tanşypdyňyz.

Iki α we β ýarymtekizligiň (granlary) we olary araçäkläp duran umumy AB göni çyzykdan (gapyrgasyndan) ybarat geometrik şekile ikigranly burç diýlip atlandyrylýar (1-nji surat) hem-de (α β) ýaly kesgitlenýär.

1



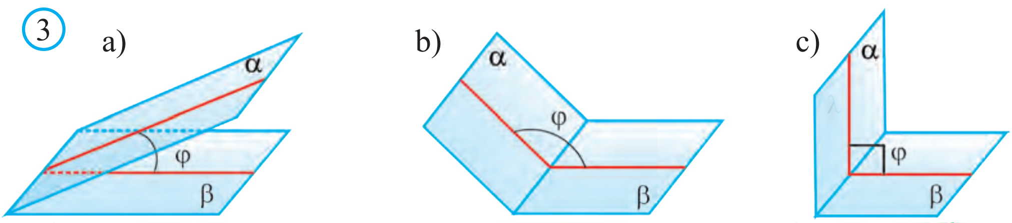
2



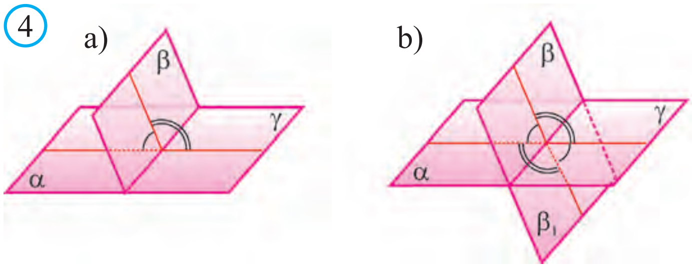
Ikigranly burçuň gapyrgasynyň islendik P nokadyndan onuň granlarynda ýatýan we bu gapyrga perpendikulýar bolan PR we PQ şöhleleri çykarýarys. ∠QPR – ikigranly burçuň çyzykly burçy diýlip atlandyrylýar (2-nji surat).

Ikigranly burçlar tekiz burçlar ýaly çyzykly burçunyň ululygyna garap ýiti, kütek, to‘g‘ri we ýazgyn bolmagy mümkin (3-nji surat). Tekiz burçlar ýaly iki ikigranly burçlar goňşy we wertikal bolmagy mümkin (4-nji surat).

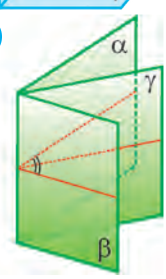
3



4



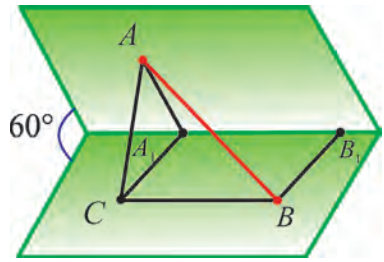
5



Ikigranly burçy deň ýarpa bölýän ýarym tekizlik onuň *bissektory* diýlip atlandyrylýar (5-nji surat).

1-nji mesele. Çyzykly burçy 60°-a deň bolan ikigranly burçuň granlarynda ýatýan A we B nokatlardan (6-njy surat) onuň gapyrgasyna AA_1 we BB_1 perpendikulýarlar düşürilen. Eger $AA_1 = 12$, $BB_1 = 10$ we $A_1B_1 = 13$ bolsa, AB kesimi tapyň.

6



Çözülişi. $BB_1 || CA_1$ we $A_1B_1 || CB$ göni çyzyklary geçirýäris. Emele gelen A_1B_1BC dörtburçluk parallelogram bolýar. A_1B_1 göni çyzyk A_1AC üçburçlugyň tekizligine perpendikulýar bolýar, çünki ol bu tekizlikde ýatýan iki A_1A we A_1C göni çyzyklara perpendikulýar. Onda BC göni çyzyk hem bu tekizlige perpendikulýar bolýar.

Diýmek, ABC üçburçluk gönüburçly üçburçluk eken.

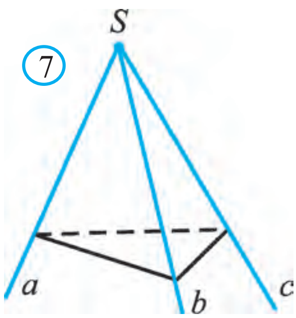
Kosinuslar teoremasyna görä:

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 124.$$

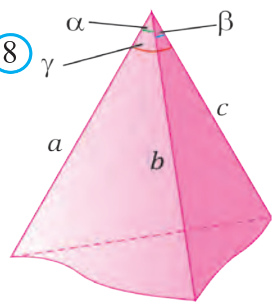
Pifagoryň teoremasyna görä: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{124 + 169} = \sqrt{293}.$

Jogaby: $AB = \sqrt{293}$ □

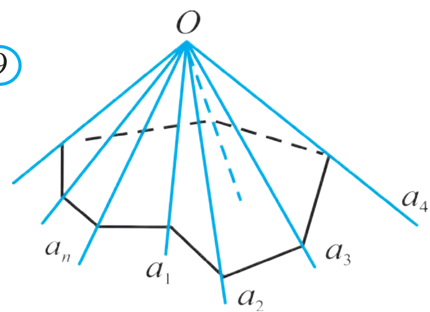
7



8



9



Giňişlikde bir nokatdan çykýan *a, b* we *c* şöhleler üç ýasy *(ab), (bc)* we *(ac)* burçlary düzýär (7-nji surat). Bu tekiz burçlardan ybarat *(abc)* şekile *üçgranly burç* diýilýär. Tekiz burçlara üçgranly burçuň *granlary*, olaryň taraplaryna üçgranly burçuň *gapyrgalary,* umumy depesine bolsa üçgranly burçuň *depesi* diýilýär.

Üçgranly burçuň granlaryndan emele gelen ikigranly burçlar üçgranly burçuň *ikigranly burçlary* diýlip atlandyrylýar.

Üç ýasy *(ab), (bc)* we *(ac)* burçlar üçgranly burçuň *tekiz burçlary* diýip hem aýdylýar.

Üçgranly burçuň tekiz burçlaryny degişlilikde α, β, γ diýip belgilesek (8-nji surat), olar üçin üçburçlugyň deňsizligi ýerlikli bolýar, ýagny olaryň islendigi galan ikisiniň jeminden kiçi bolýar:

$\alpha+\beta<\gamma$, $\alpha+\gamma<\beta$, $\beta+\gamma<\alpha$ we tekiz burçlarynyň jemi 360°-dan kiçi bolýar: $\alpha+\beta+\gamma<360°$.

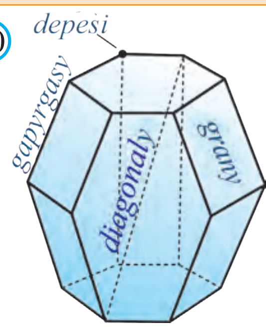
Köpgranly burç düşünjesi hem şoňa meňzeş girizilýär (9-njy surat).

5.2. Köpgranlyklar

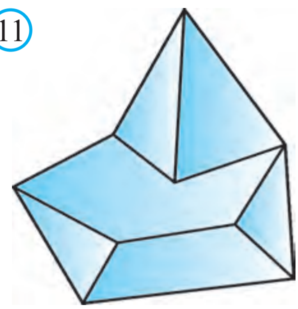
Üns beren bolsaňyz, şu wagta çenli giňişlikdäki şekil hökmünde ençeme jisimleriň, hususan-da köpgranlyklaryň häsiýetlerini öwrenip geldik. Bu giňişlikdäki şekilleriň *jisim* diýip atlandyrylmagyna sebäp, olary giňişligiň käbir maddy jisim eýeleýän we üst bilen araçäklenen bölegi hökmünde düşünmek mümkinligidir. Aşakda köpgranlyklara degişli käbir düşünjeleri ýatladyp geçýäris.

Köpgranlyk diýip tekiz köpburçluklar bilen araçäklenen jisime aýdylýar (10-njy surat).

10

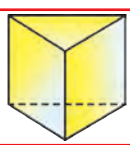
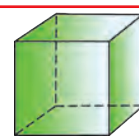


11



Köpgranlyk islendik grany ýatýan tekizligiň bir tarapynda ýatsa, şeýle köpgranlyga *güberçek köpgranlyk* diýilýär. 10-njy suratda güberçek, 11-nji suratda bolsa güberçek bolmadyk köpgranlyklar görkezilen.

Islendik güberçek köpgranlygyň granlarynyň sanyny Y, depeleriniň sanyny U we gapyrgalarynyň sanyny Q bilen belgiläliň. Bize mälim köpgranlyklar üçin aşakdaky jedweli dolduralyň:

	Köpgranlygyň ady	Y	U	Q	
	Üçburçlukly piramida	4	4	6	
	Dörtburçlukly piramida	5	5	8	
	Üçburçlukly prizma	5	6	9	
	Dörtburçlukly prizma	6	8	12	
	n- burçly piramida	$n+1$	$n+1$	$2n$	
	n- burçly prizma	$n+2$	$2n$	$3n$	

Jedwelden her bir köpgranlyk üçin $Y+U-Q=2$ bolýandygyny aňmak mümkin. Mälim bolşy ýaly, bu gatnaşyk ähli güberçek köpgranlyklar üçin dogry bolar eken. Muny ilkinji gezek 1752-nji ýylda şweýsariýaly matematik Leonard Eýler anyklapdyr.

Eýleriň teoremasy. Islendik güberçek köpgranlyk üçin: $Y + U - Q = 2$ gatnaşyk ýerlikli bolýar, bu ýerde Y – köpgranlygyň granlary, U – depeleri, Q – bolsa gapyrgalarynyň sany.

Bu teoremanyň subudyna durup geçmeýäris. Ondan aşakdaky netijeler gelip çykýar. Olary Eýleriň teoremasyndan peýdalanyp özbaşdak subut ediň.

1-nji netije. Köpgranlygyň tekiz burçlarynyň sany onuň gapyrgalarynyň sanyndan iki esse köp.

2-nji netije. Köpgranlygyň tekiz burçlarynyň sany hemişe jübüt bolýar.

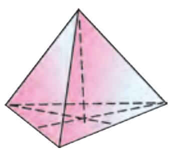
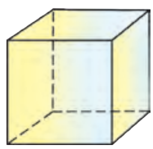
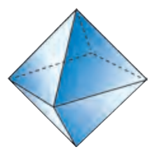
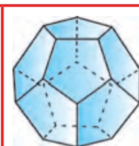
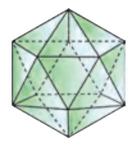
3-nji netije. Eger köpburçlugyň her bir depesinde birmeňzeş k sandaky gapyrgalar utgaşsa, $U \cdot k = 2Q$ gatnaşyk ýerlikli bolýar.

4-nji netije. Eger köpgranlygyň ähli granlary birmeňzeş n-burçlardan ybarat bolsa, $Y = 2Q$ gatnaşyk ýerlikli bolýar.

5-nji netije. Köpgranlygyň tekiz burçlarynyň jemi $360°(Y - Q)$ deň.

Granlary bir-birine deň dogry köpburçluklardan ybarat we her bir depesinden birmeňzeş sandaky gapyrgalar çykýan güberçek köpgranlyk *dogry köpgranlyk* diýlip atlandyrylýar.

Mälim bolşy ýaly dogry köpgranlyklar bäş hili bolýan eken (muny özbaşdak barlap görüň). Bular aşakdakylar:

Şekili					
Ady we onuň beýany	dogry tetraedr (dörtgranly)	Kub, geksaedr (altygranly)	Oktaedr (sekiz-granly)	Dode-kaedr (on ikigranly)	Ikosaedr (ýigrimi-granly)
Granlary	dogry üçburçluk	munta-zam dört-burçluk	dogry üçburçluk	dogry bäş-burçluk	dogry üç-burçluk
Granlar sany	4	6	8	12	20
Gapyrgalar sany	6	12	12	30	30
Depeleriniň sany	4	8	6	20	12
Her bir depeden çykýan gapyrgalar sany	3	3	4	3	5

Taryhy maglumatlar

Ähli dogry köpgranlyklar Gadymky Gresiýada mälimdi. Ýewklidiň meşhur "Esaslar"ynyň XIII kitaby dogry köpgranlyklara bagyşlanan. Bu köpgranlyklary köplenç Platonyň jisimleri diýlip atlandyrylýar. Gadymky Gresiýanyň beýik alymy Platon (miladydan öňki 427-347-nji ýyllar) beýan eden älemiň idealistik teswirinde bu jisimlerden dördüsi älemiň dört elementine meňzedilipdir: tetraedr - ot, geksaedr - Ýer, ikosaedr - suw, oktaedr - howa, bäşinji köpgranlyk - dodekaedr bolsa tutuş älem gurluşynyň belgisi ("bäşinji many") diýip atlandyrypdyrlar.

XVIII asyrda köpgranlyklar nazaryýetine Leonard Eýler (1707-1783) saldamly goşant goşupdyr. 1758-nji ýylda yglan edilen güberçek köpgranlyklaryň depeleriniň, gapyrgalarynyň we granlarynyň sanynyň arasyndaky gatnaşyk baradaky Eýleriň teoremasy we onuň subudy – köpdürli köpgranlyklar dünýäsine tertip ornaşdyrypdyr we onuň gözel geometrik täsirini algebraik nukdaý nazaryndan beýan edipdir.

Tema degişli meseleler we amaly ýumuşlar

142. Iki tekizligiň arasyndaky burç 47°. Bu tekizlikleriň kesişmeginden emele gelen ikigranly burçlaryň gradus ölçegini tapyň.

143. Ikigranly burçuň gradus ölçegi 52°-a deň. Bu burça goňşy bolan ikigranly burçuň gradus ölçegi nämä deň bolýar?

144. Tekiz burçy 100° bolan ikigranly burçuň granlaryna perpendikulýar bolan göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapyň.

145. Goňşy ikigranly burçlaryň bissektorlarynyň arasyndaky ikigranly burçuň gradus ölçegi nämä deň?

146. A nokat gradus ölçegi 60° bolan ikigranly burçuň bissektorynda ýatyr. Eger bu nokat ikigranly burçuň gapyrgasyndan 10 cm aralykda ýatýan bolsa, onda ikigranly burçuň granlaryna çenli bolan aralyklary tapyň.

147. A nokat gradus ölçegi 30° bolan ikigranly burçuň bir granyna degişli bolup, ikinji granyndan 6 cm aralykda ýatyr. Bu nokatdan ikigranly burçuň gapyrgasyna çenli bolan aralygy tapyň.

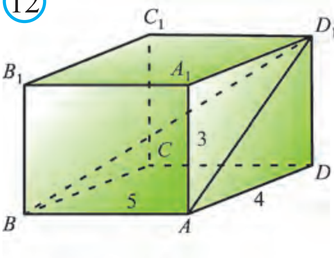
148*. A nokat dogry ikigranly burçuň granlaryndan 3 dm we 4 dm aralykda ýatyr. Bu nokatdan ikigranly burçuň gapyrgasyna çenli bolan aralygy tapyň.

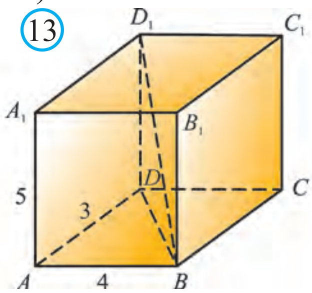
149*. Dogry tetraedriň ähli ikigranly burçlarynyň deňdigini subut ediň we olaryň gradus ölçegini tapyň.

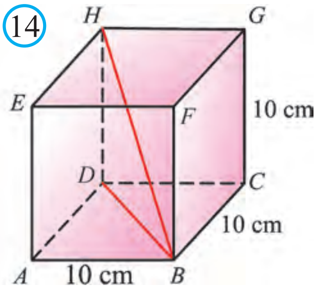
150. Tekiz burçlary a) 30°; 60°; 20°; b) 45°; 80°; 130°; c) 30°; 60°; 20°; d) 20°; 60°; 70°; e) 76°; 34°; 110° bolan üçgranly burç barmy?

151*. Güberçek köpgranly burçuň ähli tekiz burçlarynyň jemi 360°-dan kiçidigini subut ediň.

152. Gönüburçly parallelepipedde $AB=5$, $AD=4$ we $AA_1=3$ bolsa, ABD_1 burçy tapyň (12-nji surat).

12


13


14


153. Gönüburçly parallelepipedde $AB=4$, $AD=3$ we $AA_1=5$ bolsa, DBD_1 burçy tapyň (13-nji surat).

154. 14-nji suratda berlen kubdaky DBH burçy tapyň.

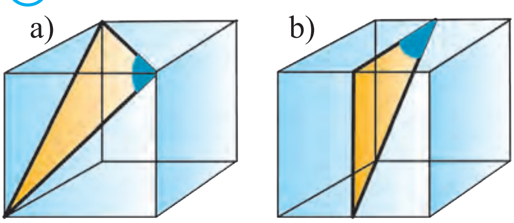
155*. n sany depesi bolan güberçek köpgranlygyň ähli tekiz burçlarynyň jemi 360°-a($n-2$) deňdigini subut ediň.

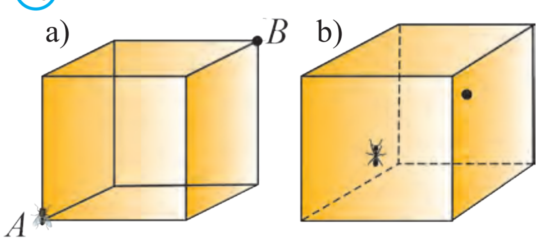
156*. Köpgranlygyň tekiz burçlarynyň sany onuň gapyrgalarynyň sanyndan iki esse köp bolýandygyny subut ediň.

157*. Köpgranlygyň tekiz burçlarynyň sany hemişe jübüt bolýandygyny subut ediň.

158*. Köpgranlygyň tekiz burçlarynyň jemi 360°-a ($Y-Q$) deň bolýandygyny subut ediň..

159. 15-nji suratlardaky kublarda tapawutlandyrylyp görkezilen burçlaryň ululygyny anyklaň.

15


16


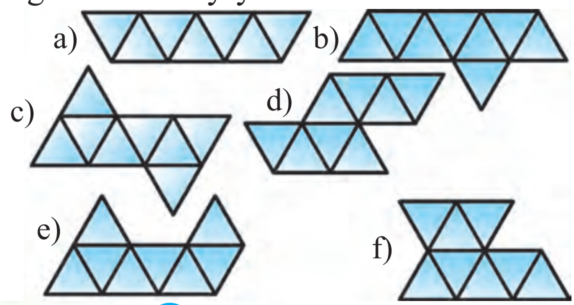
160*. 16-njy suratlardaky kubuň üstündäki siňege a) A depeden B depä; b) kubuň granynyň merkezinden garşylykly granynyň merkezine eltýän iň gysga ýoly görkeziň (Görkezme: kubuň ýaýylmasyndan peýdalanyň).

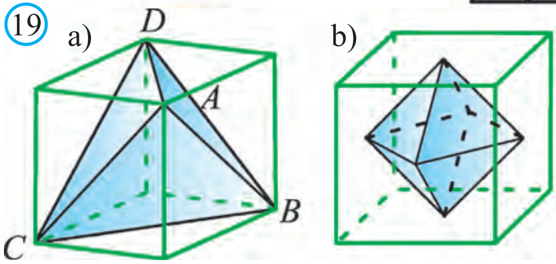
161. 17-nji suratda görkezilen giňişlikdäki şekil dogry köpgranly bolýarmy? Onuň üsti näçe kwadratdan ybarat? Onuň näçe depesi we gapyrgasy bar?

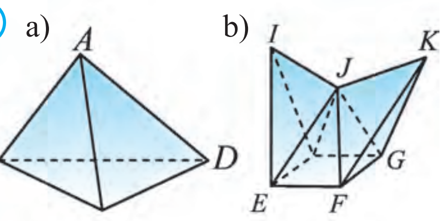
162. 18-nji suratda görkezilen ýaýylmalaryň haýsy biri oktaedre degişli?

163. 19-njy suratda görkezilen, kubuň içinden köpgranlygyň a) dogry tetraedrdigini; b) oktaedrdigini esaslandyryň.

17


18


19


20


164. 20-nji suratda görkezilen köpgranlyklaryň depeleriniň, gapyrgalarynyň we granlarynyň sanyny anyklap, olary Eýleriň deňlemesine goýup barlaň.

165. Güberçek köpgranlygyň her bir depesinden üçden gapyrga çykýar. Eger bu köpgranlygyň gapyrgalarynyň sany a) 12; b) 15-e deň bolsa, onuň näçe depesi we grany bar?

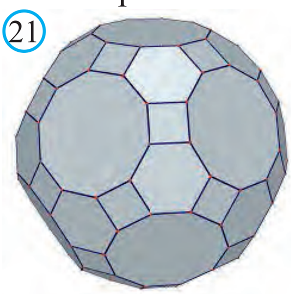
166*. 13 grany we her bir granynda 13 sanydan gapyrgasy bolan köpgranlyk barmy?

167. Güberçek köpgranlygyň her bir depesinden dört sanydan gapyrga çykýar. Eger bu köpgranlygyň gapyrgalar sany 12-ä deň bolsa, onuň näçe depesi we grany bar?

168. a) Dogry tetraedr; b) kubuň; c) oktaedriň; d) dodekaedriň; e) ikosaedriň depeleriniň, gapyrgalarynyň we granlarynyň sanyny tapyň we şu köpgranlyklar üçin Eýleriň deňlemesiniň ýerlikli bolýandygyny barlaň.

169. Depeleri sany 8 sany, gapyrgalarynyň sany bolsa 12 bolan dogry köpgranlygyň granlarynyň sanyny tapyň we onuň adyny anyklaň.

170. Depeleriniň sany 6, gapyrgalarynyň sany bolsa 12 bolan dogry köpgranlygyň granlarynyň sanyny tapyň we onuň adyny anyklaň.

21


171. Depeleriniň sany 10, granlarynyň sany bolsa 7 bolan köpgranlygyň gapyrgalarynyň sanyny tapyň.

172. Depeleriniň sany 14, gapyrgalarynyň sany bolsa 21 bolan köpgranlygyň granlarynyň sanyny tapyň.

173. 21-nji suratdaky köpgranlygyň 62 grany we 120 depesi bar bolsa, onuň gapyrgalarynyň sanyny tapyň.

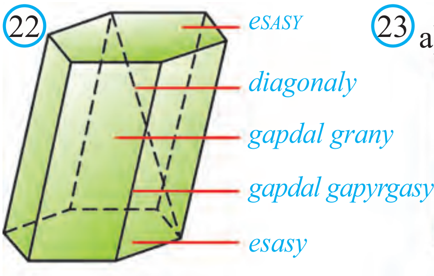
6. PRIZMA WE ONUŇ ÜSTI

6.1 Prizma we onuň kesimleri

Prizmalar bilen aşaky synplardan tanyşsyňyz. Şeýle bolsa-da, olara degişli käbir düşünjeleri we häsiýetleri ýatladyp geçýäris.

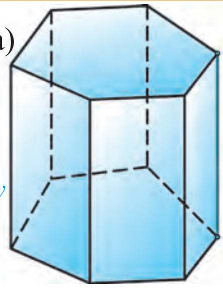
Prizma diýip iki grany (esasy) deň n-burçdan, galan n sany granlary bolsa parallelogramlardan ybarat köpgranlyga aýdylýar (22-nji surat).

22

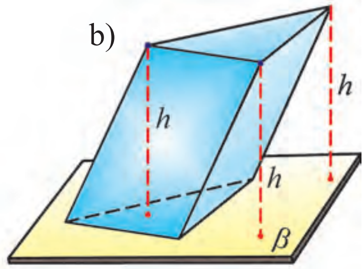


23

a)



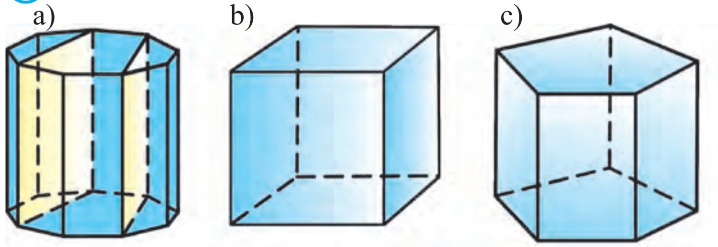
b)



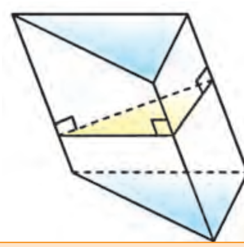
Prizmanyň gapdal granlaryniyň esasyna perpendikulýar ýa-da perpendikulýar däldigine garap *göni* ýa-da *ýapgyt* prizmalara bölünýär. 23-nji *a* suratda göni altyburçly prizma, 23-nji *b* suratda bolsa ýapgyt üçburçlukly prizma görkezilen. Görnüşi ýaly, göni prizmanyň gapdal granlary gönüburçluklardan ybarat bolýar.

24

a) b) c)



25



Esasy dogry köpburçlukdan ybarat göni prizma *dogry* prizma diýlip atlandyrylýar (24-nji surat). Dogry prizmanyň gapdal granlary bir-birine deň gönüburçluklardan ybarat bolýar.

Prizmanyň esasynyň käbir nokadyndan ikinji esasyna düşürlen perpendikulýar prizmanyň *beýikligi* diýlip atlandyrylýar (23-nji *b* surat).

Prizmanyň *diagonal kesimi* diýip, prizmanyň esaslarynyň degişli diagonallary arkaly geçirilen kesime aýdylýar (24-nji *a* surat). Prizmanyň diagonal kesimleriniň sany prizmanyň bir esasynyň diagonallarynyň sanyna deň.

Prizmanyň *perpendikulýar kesimi* diýip, onuň ähli gapdal gapyrgalaryna perpendikulýar kesime aýdylýar (25-nji surat).

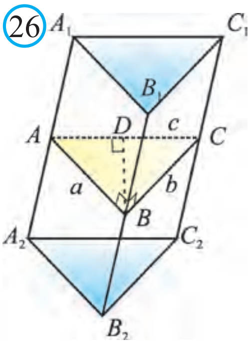
Güberçek n-burçuň $\frac{n(n-3)}{2}$ sany diagonaly bardygyny hasaba alsak, n-burçly prizmanyň diagonal kesimleriniň sany-da $\frac{n(n-3)}{2}$ sany bolýar.

Her bir diagonal kesimde prizmanyň iki diagonalyny geçirmek mümkin. Diýmek, n-burçly prizmanyň jemi $n(n–3)$ sany diagonaly bar.

1-nji mesele. Üçburçlukly ýapgyt prizmanyň gapdal gapyrgalarynyň arasyndaky aralyklar, degişlilikde, 7 cm, 15 cm we 20 cm. Prizmanyň iň uly üstli gapdal granyndan onuň garşysyndaky gapdal gapyrgasyna çenli bolan aralygy tapyň.

Çözülişi. Mälim bolşy ýaly, parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk bu göni çyzyklaryň biriniň käbir nokadyndan ikinjisine geçirilen perpendikulýaryň uzynlygyna deň. Onda berlen prizmanyň ABC perpendikulýar kesiminiň taraplarynyň uzynlygy şu aralyklara deň bolýar (26-njy surat). Prizmanyň iň uly üstli granynda iň uly AC=20 cm tarap ýatýar. B_2B_1 gapyrgadan $A_2A_1C_1C_2$ tekizlige çenli bolan aralyk ABC üçburçlugyň BD beýikligine deň bolýar. Onda Geronyň formulasyna görä:

26



$$S_{ABC} = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)},\quad p=\frac{a+b+c}{2}.$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{7+15+20}{2}=21$$

$$S_{ABC}=\sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)}=\sqrt{21\cdot14\cdot6\cdot1}=42$$

Ikinji tarapdan, $S_{ABC}=\frac{AC\cdot BD}{2}$

Mundan, $42=\frac{AC\cdot BD}{2}$ ýa-da $BD = 4{,}2$ cm.

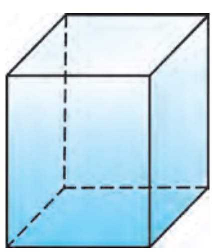
Jogaby: 4,2 cm.

6.2 Parallelepiped we kub

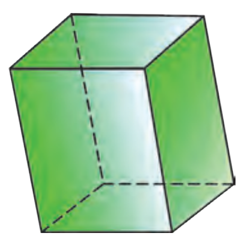
Esaslary parallelogramdan ybarat prizma *parallelepiped* diýilýär (27-nji surat). Parallelepipedler hem prizma ýaly gönii (27.a-nji surat) we ýapgyt (27.b-nji surat) bolmagy mümkin.

27

a)



b)



Parallelepipediň umumy depä eýe bolmadyk granlary *garşylykly granlary* diýlip atlandyrylýar.

Parallelepipediň

– 12 gapyrgasy bolup, olaryň her dördüsi deň kesimlerden ybarat (28-nji *a* surat),

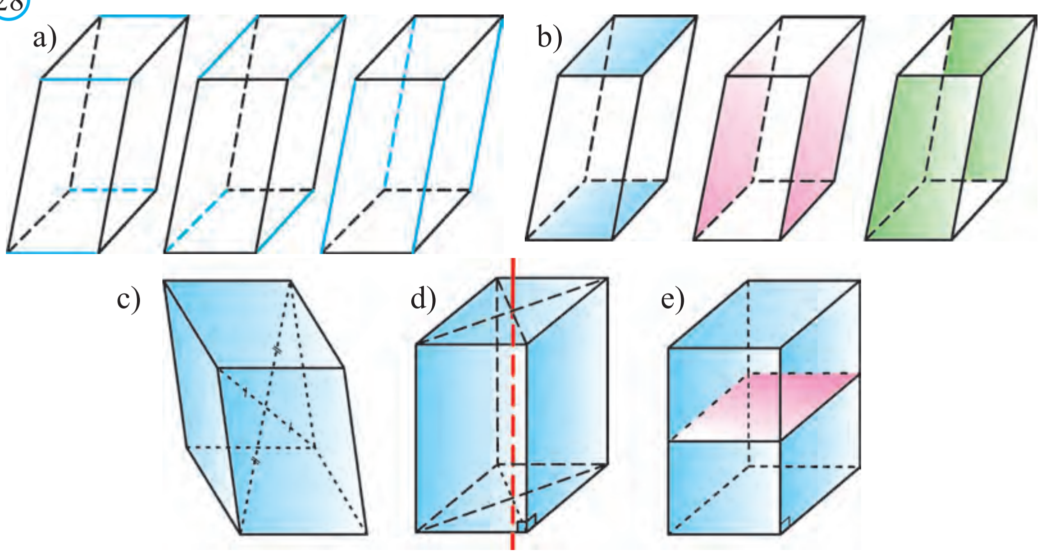
– 6 granlary bolup, onuň garşylykly granlary özara parallel we deň bolýar (28-nji *b* surat),

– 4 diagonaly bolup, olar bir nokatda kesişýär we kesişme nokadynda deň ýarpa bölünýär (28-nji *c* surat),

– diagonallarynyň kesişme nokady onuň simmetiýa merkezi bolýar (28-nji *c* surat).

Göni parallelepipediň simmetriýa oky (28-nji *d* surat) we simmetriýa tekizligi bar (28-nji *e* surat).

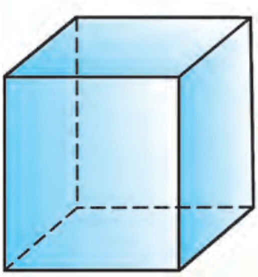
28



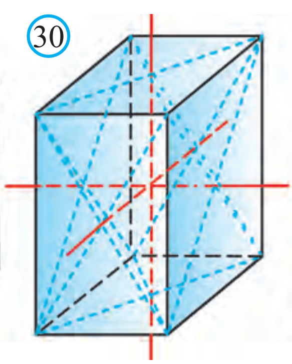
Esaslary gönüburçlukdan ybarat göni parallelepipede *gönüburçly parallelepiped* diýilýär (29-njy surat).

Görnüşi ýaly, gönüburçly parallelepipediň ähli granlary gönüburçluklardan ybarat bolýar.

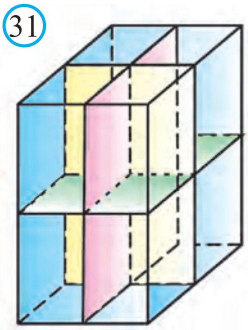
29



30

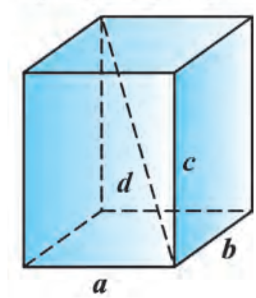


31



32

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Gönüburçly parallelepipediň üç simmetriýa oky (30-njy surat) we üç simmetriýa tekizligi bar (31-nji surat).

Gönüburçly parallelepipediň bir depesinden çykýan üç gapyrgasyna onuň *ölçegleri* diýip aýdylýar.

Häsiýet: Gönüburçly parallelepipediň d - diagonalynyň kwadraty onuň ölçegleri: a, b we c-niň kwadratlarynyň jemine deň (32-nji surat):

$$\boldsymbol{d^2 = a^2 + b^2 + c^2.}$$

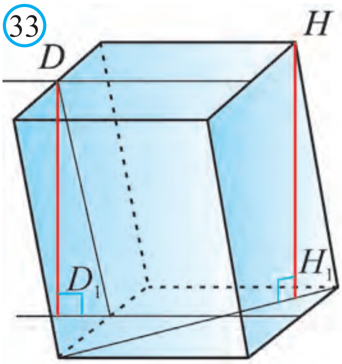
Ölçegleri deň bolan gönüburçly parallelepiped *kub* diýlip atlandyrylýar.

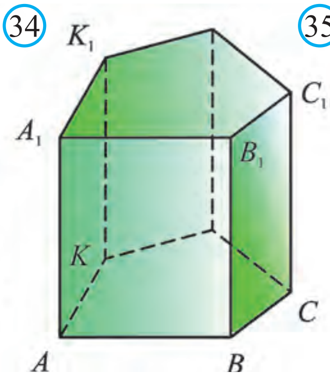
Görnüşi ýaly, kubuň ähli granlary deň kwadratlardan ybarat bolýar. Kub bir simmetriýa merkezine, 9 simmetriýa okuna we 9 simmetriýa tekizligine eýe.

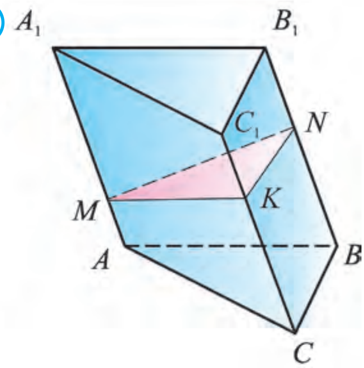
Ýokarda prizmalaryň ençeme häsiýetlerini sanap geçdik. Olaryň käbirlerini 10-njy synpda subut edipdik. Galan häsiýetleri subudyna görä ýönekeý bolanlygy üçin olary özbaşdak subut etmek üçin galdyralyň .

6.3 Prizmanyň gapdal we doly üsti

33-nji suratda $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ prizmanyň HH_1 we DD_1 beýiklikleri görkezilen. Görnüşi ýaly, dogry prizmanyň beýikligi onuň gapdal gapyrgasyna deň bolýar.

33


34


35


Prizmanyň *gapdal üsti* (has takygy, *gapdal üstüniň meýdany*) onuň gapdal granlarynyň meýdanynyň jemine deň, *doly üsti* bolsa gapdal üstüniň we iki esasynyň meýdanynyň jemine deň.

$$S_{doly} = S_{gap} + 2S_{esas}$$

Teorema. Göni prizmanyň gapdal üsti esasynyň perimetri bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň:

$$\boldsymbol{S_{gap} = P_{esas} \cdot h.}$$

Subudy. Berlen prizmanyň beýikligi h, esasynyň perimetri $P = AB + BC + \ldots + KA$ bolsun (34-nji surat). Görnüşi ýaly, göni prizmanyň her bir grany gönüburçlukdyr. Bu gönüburçlugyň esasy prizmanyň degişli tarapyna, beýikligi bolsa prizmanyň beýikligine deň.

Diýmek, $S_{gap} = AB \cdot h + BC \cdot h + ... + KA \cdot h = (AB + BC + ... KA) \cdot h = P \cdot h$ □

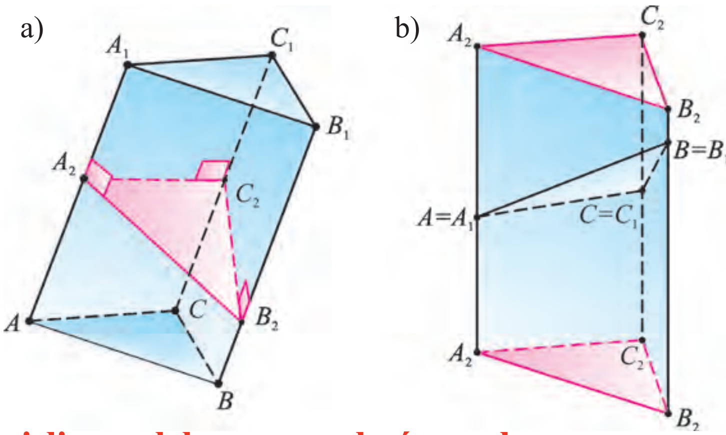
Teorema. Prizmanyň gapdal üsti onuň perpendikulýar kesiminiň perimetri bilen gapdal gapyrgasynyň uzynlygynyň köpeltmek hasylyna deň:

$$\boldsymbol{S_{gap} = P \cdot l}$$

Subudy. Perpendikulýar kesimiň perimetri P-e deň bolsun (35-nji surat). Kesim prizmany iki bölege bölýär (36-njy *a* surat). Bu bölekleriň birini alyp, prizimanyň esaslary üstme-üst düşýän edip parallel orun üýtgedýäris. Netijede täze göni prizma emele gelýär (36-njy *b* surat). Görnüşi ýaly, bu prizmanyň gapdal üsti berlen prizma gapdal üstüne deň. Onuň esasy berlen perpendikulýar kesimden ybarat bolup, gapdal gapyrgasy l-e deň bolýar.

Diýmek, ýokarda subut edilen teorema görä: $S_{gap} = P \cdot l$ □

36



Tema degişli meseleler we amaly ýumuşlar

174. Tetraedriň bir granynyň meýdany 6 cm^2 bolsa, onuň doly üstüniň meýdanyny tapyň.

175. Oktaedriň bir granynyň meýdany 5,5 cm^2 bolsa, onuň doly üstüniň meýdanyny tapyň.

176. Dodekaedr bir granynyň meýdany 6,4 cm^2 bolsa, onuň doly üstüniň meýdanyny tapyň.

177. Kubuň doly üstüniň meýdany 105,84 cm^2 bolsa, onuň her bir granynyň meýdanyny we gapyrgasynyň uzynlygyny tapyň.

178. Oktaedriň doly üstüniň meýdany $32\sqrt{3}$ cm^2 bolsa, onuň her bir granynyň meýdanyny we gapyrgasynyň uzynlygyny tapyň.

179. Gönüburçly parallelepipediň esasynyň taraplary 7:24 gatnaşykda, diagonalyň kesiminiň meýdany 50 dm^2-a deň. Gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

180. Göni parallelepipediň gapdal gapyrgasy 1 m-e, esaslarynyň taraplary

23 m we 11 m-e deň. Esasyň diagonallarynyň gatnaşygy 2:3 ýaly. Diagonalyň kesimleriniň meýdanyny tapyň.

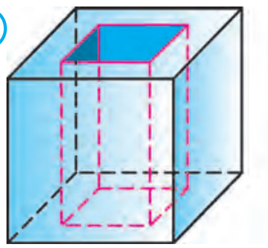
181. Göni parallelepipediň esasynyň taraplary 3 cm we 5 cm, esasynyň diagonallaryndan biri 4 cm-e deň. Parallelepipediň kiçi diagonaly esasyň tekizligi bilen 60°-ly burçy düzýär. Onuň uly diagonalynyň uzynlygyny tapyň.

182. Göni parallelepipediň gapdal gapyrgasy 5 m, esasynyň taraplary 6 m we 8 m, esasynyň diagonallaryndan biri 12 m-e deň. Parallelepipediň diagonallaryny tapyň.

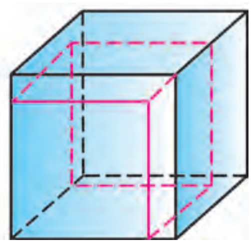
183*. Üçburçlukly dogry prizmanyň gapyrgasy 3-e deň. Esasynyň tarapy we okunyň ortasy arkaly tekizlik geçirilen. Kesimiň meýdanyny tapyň.

184. Üçburçlukly göni prizmanyň beýikligi 50 cm, esasynyň taraplary 40 cm, 13 cm we 37 cm. Prizmanyň doly üstüni tapyň.

37



38



185*. 37-nji suratda görkezilen birlik kubdan esasynyň tarapy 0,5-e gapdal gapyrgasy 1-e deň bolan gönüburçly prizma oýup alyndy. Kubuň galan böleginiň doly üstüniň meýdanyny hasaplaň.

186. Eger kubuň gapyrgasy 1 birlik artdyrylsa, onuň doly üsti 54 birlige artýar. Kubuň gapyrgasyny tapyň (38-nji surat).

187. $ABCC_1B_1A_1$ ýapgyt prizmanyň esasy ABC deňýanly üçburçluk bolup, onda $AB=AC=10$ cm we BC=12 cm. A_1 depesi A, B we C depelerden deň uzaklykda ýatýar hem-de AA_1= 13 cm-e deň. Prizmanyň doly üstüni tapyň.

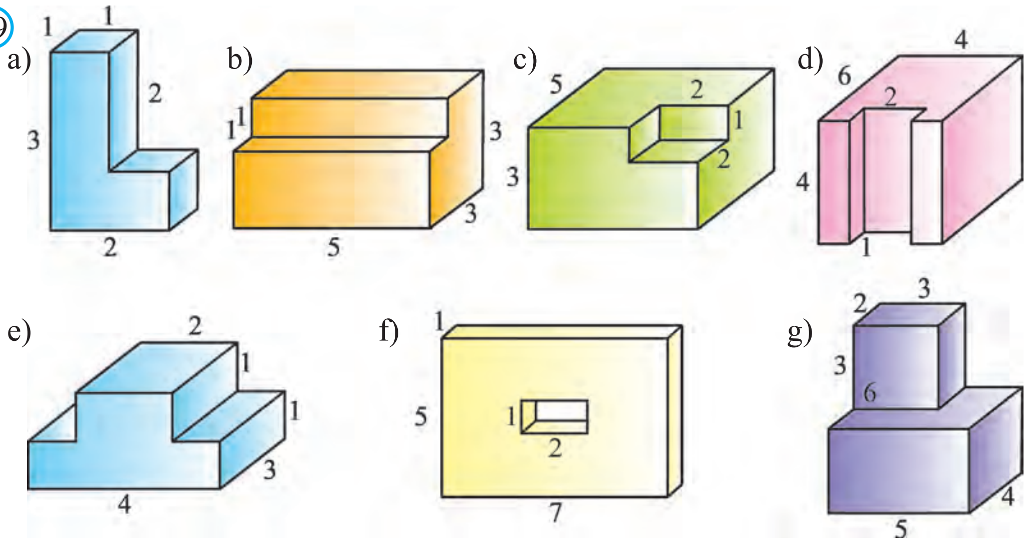
188. Dogry gönüburçly prizmanyň gapdal üsti 160-a, doly üsti 210-a deň. Prizmanyň esasynyň diagonalyny tapyň.

189. Üçburçlukly ýapgyt prizmanyň gapdal gapyrgalary ýatýan parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk 2 cm , 3 cm we 4 cm, gapdal gapyrgalary bolsa 5 cm-e deň. Prizmanyň gapdal üstüni tapyň.

190. Kubuň gapyrgalarynyň uzynlyklarynyň jemi 96-a deň. Onuň gapdal üstüni tapyň.

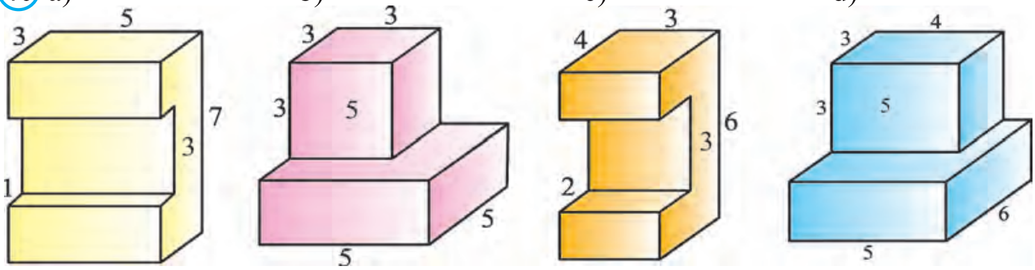
191. 39-njy suratlarda görkezilen köpgranlyklaryň doly üstüni hasaplaň (hemme ikigranly burçlar göni burç).

39



192. 40-njy suratlarda görkezilen köpgranlyklaryň doly üstüni hasaplaň (hemme ikigranly burçlar göni burç).

40



193. Altyburçly dogry prizmanyň gapdal gapyrgasy 8 cm, esasynyň tarapy bolsa 3 cm. Prizmanyň ähli gapyrgalarynyň uzynlyklarynyň jemini tapyň.

194. Dörtburçly dogry prizmanyň esasynyň tarapy 6 cm, prizmanyň beýikligi bolsa 5 cm. Onuň diagonal kesiminiň meýdanyny tapyň.

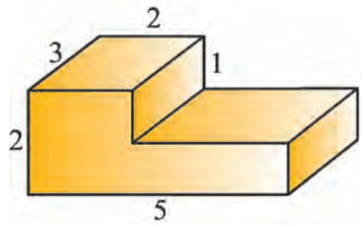
195. Üçburçly dogry prizmanyň esasynyň tarapy 6 cm, gapdal gapyrgasy bolsa 12 cm. Prizmanyň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

196. 41-nji suratlarda görkezilen köpgranlyklaryň doly üstüni hasaplaň (hemme ikigranly burçlar göni burç).

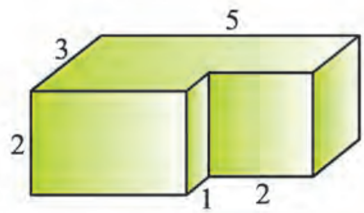
197. 42-nji suratlarda görkezilen köpgranlyklaryň doly üstüni hasaplaň (hemme ikigranly burçlar göni burç).

198*. 43-nji suratdaky öýüň esasynyň ölçegleri 6 m × 8 m. Öýüň üçeginiň esasyna 45°-ly burç astynda gyşaran. Üçegiň üstüniň meýdanyny tapyň.

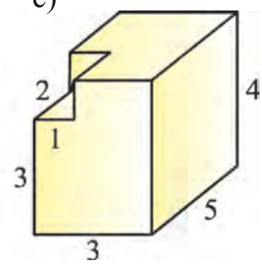
41 a)



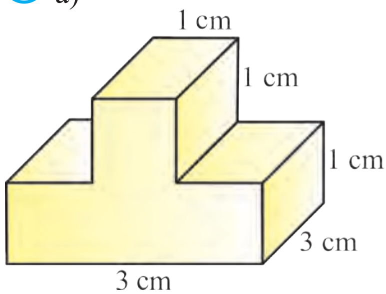
b)



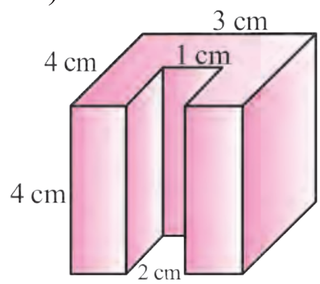
c)



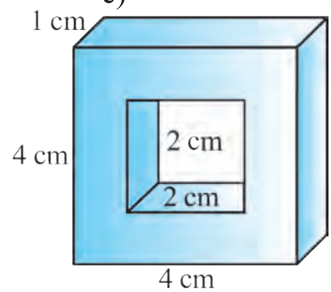
42 a)



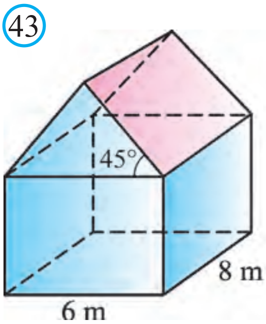
b)



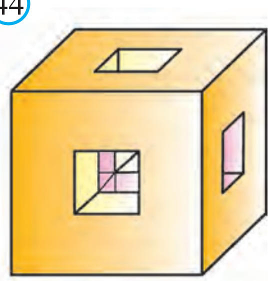
c)



43



44



45

199. Parallelepipediň bir depesinden çykýan gapyrgalary, degişlilikde, 6 cm, 8 cm we 12 cm. Parallelepipediň ähli gapyrgalarynyň uzynlyklarynyň jemini tapyň.

200. Parallelepipediň bir depesinden çykýan granlarynyň meýdanlary, degişlilikde, 6 cm^2, 12 cm^2 we 16 cm^2. Parallelepipediň doly üstüniň meýdanyny tapyň.

201*. Gapyrgasy 3 cm-e deň bolan kubuň her bir granyndan kese kesigi - esasy 1 cm-e deň kwadrat şeklindäki deşikler oýulan (44-nji surat). Kubuň galan böleginiň doly üstüniň meýdanyny tapyň.

202. Futbol topunyň üstüniň gapyrgalary özara deň bolan 12 dogry bäşburçlukdan we 20 dogry altyburçlukdan ybarat (45-nji surat). Futbol topunyň doly üstüni tapyň. Topuň kwadrat santimetri 60 somluk deriden işlenen we onuň 10 göterimi tikin we çykyndy çykýandygy mälim bolsa, topa sarp edilen deriniň nyrhyny tapyň.

7. PRIZMANYŇ GÖWRÜMI

7.1 Göwrüm düşünjesi

Giňişlikde geometrik jisime mahsus bolan aýratynlyklardan biri bu göwrüm düşünjesidir. Islendik predmet (jisim) giňişligiň nähilidir bölegini eýeleýär. Meselem, kerpiç otluçöp gutusyna garanda ulurak ýeri eýeleýär. Bu bölekleri özara deňeşdirmek üçin göwrüm düşünjesi girizilýär.

Göwrüm – giňişlikdäki jisimiň aşakdaky häsiýetlere eýe bolan mukdar (sanly)görkezijisidir:

1. Islendik jisim položitel sanlarda aňladylýan belli bir göwrüme eýe;

2. Deň jisimleriň göwrümi-de deň;

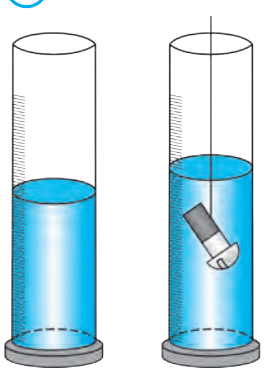
3. Eger jisim birnäçe böleklere bölünen bolsa, onuň göwrümi bölekleriň göwrümleriniň jemine deň;

4. Gapyrgasy bir birlik uzynlyga deň kubuň göwrümi bire deň.

Göwrüm – uzynlyk we meýdan ýaly sanly ululyklardan biridir. Uzynlyk ölçeg birliginiň saýlanmagyna garap *birlik* (gapyrgasy birlik uzynlyga eýe) *kubuň* göwrümi 1 cm^3, 1 dm^3, 1 m^3 we başga göwrüm birlikleri bilen ölçelýär.

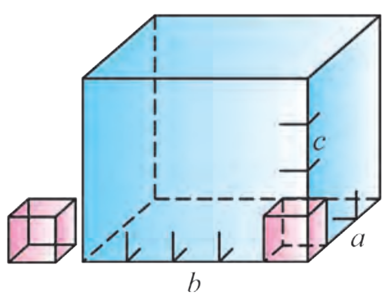
Jisimleriň göwrümini dürli usullar bilen ölçeýärler ýa-da hasaplaýarlar. Meselem, kiçiräk detalyň göwrümini paýlara (şkala) eýe bolan gabyň (menzurka) kömeginde ölçemek mümkin (46-njy surat). Bedräniň göwrümini bolsa oňa birlik göwrüme eýe bolan gabyň kömeginde suw guýup, doldurmak bilen ölçemek mümkin (47-nji surat). Ýöne, hemme jisimleriň hem göwrümini şeýle usullar bilen ölçäp bolmaýar. Şeýle ýagdaýlarda göwrüm dürli usullar bilen hasaplanýar. Aşakda şu usullar babatda durup geçýäris we olaryň käbirlerini subutsyz getirýäris.

46

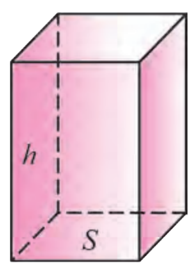


47

48



49



Parallelepipidiň göwrümi]

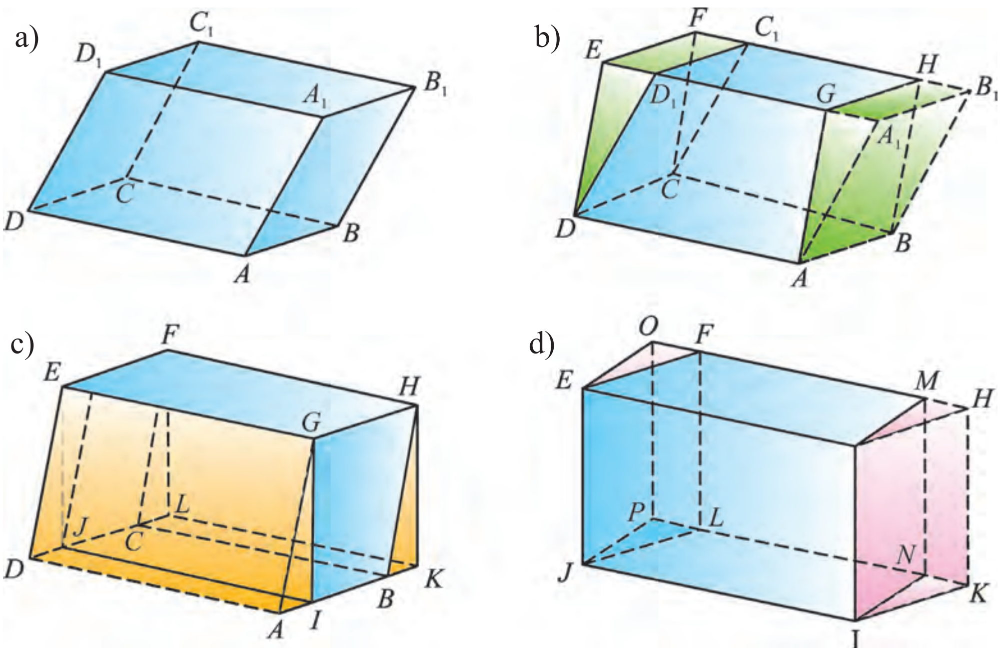
Teorema. Gönüburçly parallelepipidiň göwrümi onuň üç ölçegleriniň köpeltmek hasylyna deň (48-nji surat): $\mathbf{V = a \cdot b \cdot c.}$

Netije. Gönüburçly parallelepipediň göwrümi esasynyň meýdany bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň (49-njy surat): $\boldsymbol{V = S \cdot h.}$

Teorema. Islendik parallelepipediň göwrümi esasynyň meýdany bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň (50-nji surat): $\boldsymbol{V = S \cdot h.}$

Bu häsiýet ýokardaky netijeden gelip çykýar. Aşakdaky 50-nji suratlarda berlen parallelepiped nähili edip gönüburçly parallelepipede doldurylyşy görkezilen. Mundan peýdalanyp häsiýeti özbaşdak esaslandyryň.

50



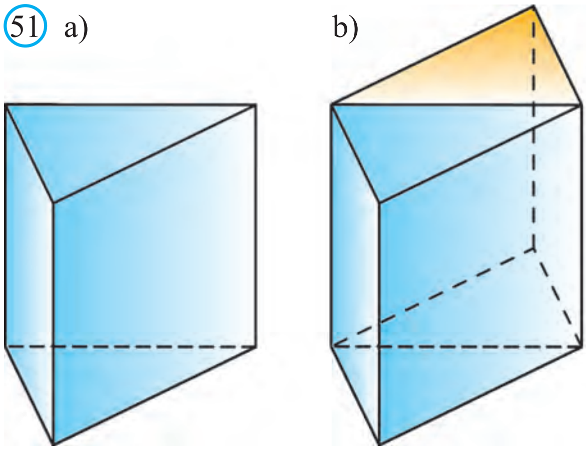
7.3. Prizmanyň göwrümi

Teorema. Göni prizmanyň göwrümi esasynyň meýdany bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň (51-nji surat): $\boldsymbol{V = S \cdot h.}$

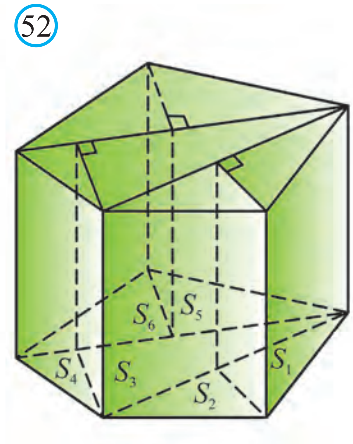
Subudy. 1-nji ýagdaý. Esasy gönüburçly üçburçlukdan ybarat göni prizma berlen bolsun (51-nji *a* surat). Bu prizmany oňa deň bolan prizma bilen gönüburçly paralelepipede çenli doldurmak mümkin (51-nji *b* surat).

Berlen prizmanyň göwrümi, esasynyň meýdany we beýikligi degişlilikde *V, S* we *h* bolsa, emele gelen gönüburçly parallelepipediň göwrümi, esasynyň meýdany we beýikligi degişlilikde *2V, 2S* we *h* bolýar.

51 a) b)



52



Diýmek, $2V=2S \cdot h$ ýa-da $V=S \cdot h$ bolýar.

2-nji ýagdaý. Islendik göni n-burçly prizma berlen bolup, onuň esasynyň meýdany S, beýikligi bolsa h -a deň bolsun. Prizmanyň esasy - n-burçy onuň diagonallary bilen üçburçluklara, üçburçluklaryň her birini bolsa gönüburçly üçburçluklara bölmak mümkin (52-nji surat). Netijede, berlen prizmany çäkli sandaky esasy gönüburçly üçburçluklardan ybarat göni prizmalara bölmek mümkinligini anyklaýarys. Bu prizmalaryň beýikligi h -a deň bolup, olaryň esaslary jemi berlen prizmanyň meýdanyna deň bolýar: $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_k$.

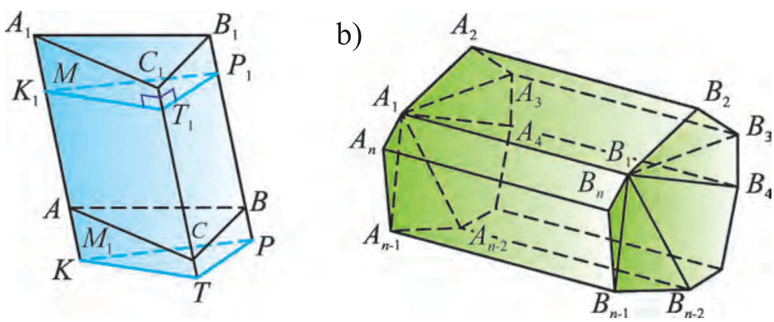
Berlen prizmanyň göwrümi ony düzýän üçburçlukly prizmalar göwrümleriniň jeminden ybarat bolýar:

$$V = S_1 h + S_2 h + \ldots + S_k h = (S_1 + S_2 + \ldots + S_k)\, h = S \cdot h, \quad \text{ýa-da} \quad V = S \cdot h. \ \square$$

Teorema. Islendik prizmanyň göwrümi esasynyň meýdany bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň: $\boldsymbol{V = S \cdot h}$.

Bu teoremany aşakdaky suratlardan peýdalanyp, ilki üçburçlukly prizma üçin, soň islendik prizma üçin özbaşdak subut ediň.

53 a) b)



1-nji mesele. Göni parallelepipediň esasynyň taraplary a we b -ge deň bolup, olar özara 30°-ly burçy düzýär. Eger parallelepipediň gapdal üsti S -e deň bolsa, göwrümini tapyň.

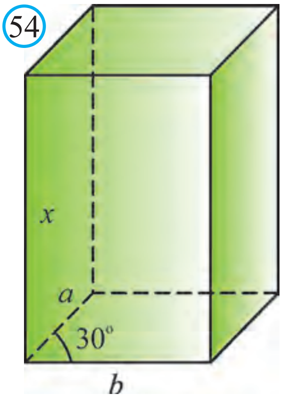
Çözülişi: Parallelepipediň beýikligini h bilen belgileýäris (54-nji surat). Onda şerte görä:

$$S = (2a+2b)\,h \text{ ýa-da } h = \frac{S}{2(a+b)}.$$

$$S_{asos} = ab\sin 30^\circ = \frac{ab}{2}.$$

$$V = S_{asos} \cdot h = \frac{ab}{2} \cdot \frac{S}{2(a+b)} = \frac{abS}{4(a+b)}.$$

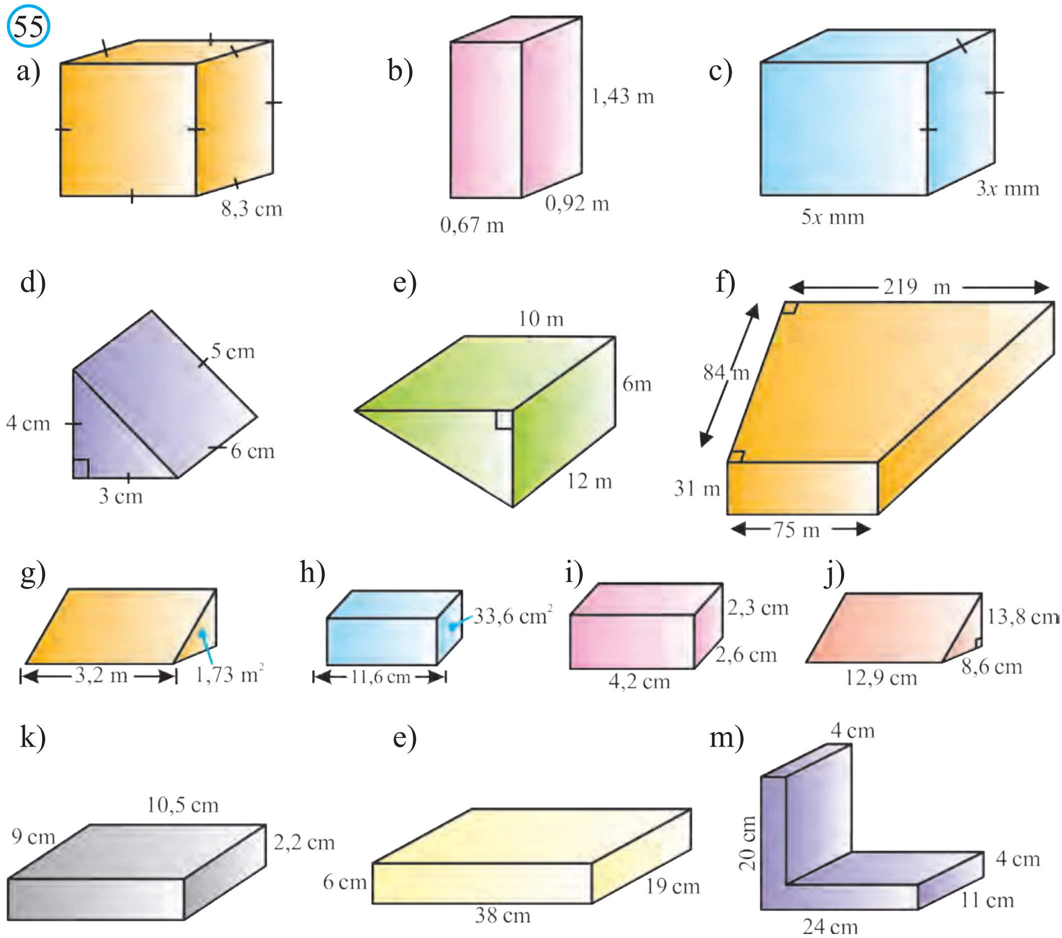
54



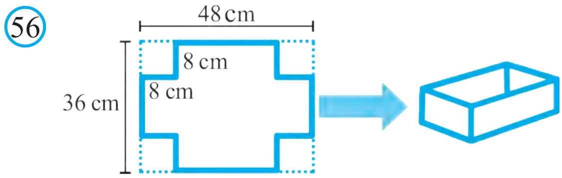
Tema degişli meseleler we amaly ýumuşlar

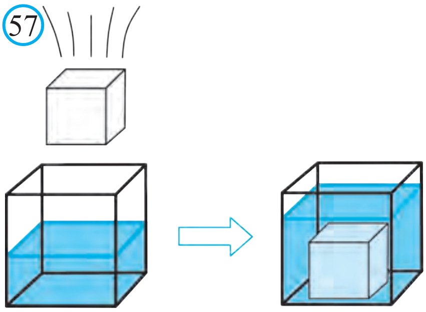
203. 55-nji suratda görkezilen köpgranlyklaryň göwrümini tapyň.

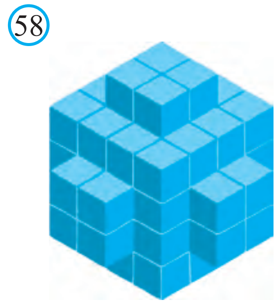
55



204. 56-njy suratda berlen ýaýylma görä gurlan gabyň göwrümini tapyň.





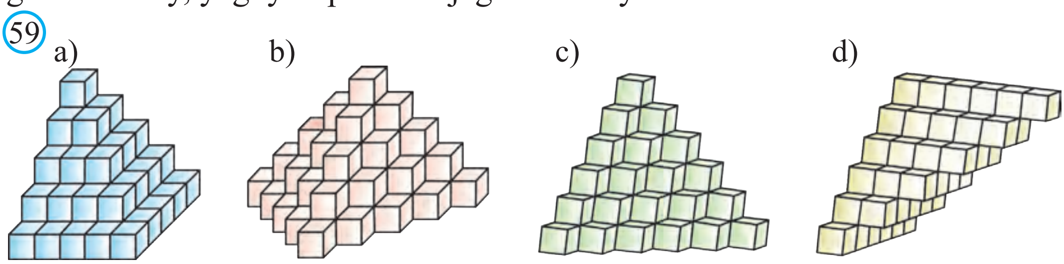


205*. 57-nji surata görä mesele düzüň we ony çözüň.

206. 58-nji suratda getirilen jisim 88 birlik kubjagazdan ýasalan. Jisimiň doly üstüni tapyň.

207. Gönüburçly parallelepipediň granynyň meýdany 12-ä we oňa perpendikulýar gapyrganyň uzynlygy 12-ä deň. Parallelepipediň göwrümini tapyň.

208. 59-njy suratda görkezilen giňişlikdäki şekillerden haýsy biriniň göwrümi uly, ýagny köpräk kubjagazlardan ybarat?



209. Gönüburçly parallelepipediň göwrümi 24-e deň we gapyrgalaryndan biriniň uzynlygy 3-e deň. Parallelepipediň bu gapyrganyň perpendikulýar granynyň meýdanyny tapyň.

210. Gönüburçly parallelepipediň göwrümi 60-a deň we granlaryndan biriniň meýdany 12-ä deň. Parallelepipediň bu granyna perpendikulýar gapyrganyň uzynlygyny tapyň.

211. Parallelepipediň bir depesinden çykýan üç gapyrgalarynyň uzynlyklary 4, 6 we 9-a deň. Oňa deňdeş kubuň gapyrgasyny tapyň.

212. Kubuň doly üstüniň meýdany 18-e deň bolsa, onuň diagonalyny tapyň.

213. Kubuň göwrümi 8-e deň bolsa, onuň doly üstüniň meýdanyny tapyň.

214. Eger kubuň gapyrgalaryny 1 birlik artdyrylsa, onuň göwrümi 19 birlige artýar. Kubuň gapyrgasyny tapyň.

215. Kubuň doly üstüniň meýdany 24-e deň. Onuň göwrümini tapyň.

216. Kubuň diagonaly $\sqrt{12}$ -ä deň bolsa, onuň göwrümini tapyň.

217. Kubuň göwrümi $24\sqrt{3}$ -e deň bolsa, onuň diagonalyny tapyň.

218. Birinji kubuň göwrümi ikinjisininkiden 8 esse uly. Birinji kubuň doly üstüniň meýdany ikinjisininkiden näçe esse uly?

219. Gapyrgasy 30 cm bolan kub şeklindäki gaba (sisterna) näçe litr suw gidýär?

220. Gönüburçly parallelepipediň bir depesinden çykýan gapyrgalary 2 we 6-a deň. Gönüburçly parallelepipediň göwrümi 48-e deň. Parallelepipediň şu depesinden çykýan üçünji gapyrgasyny tapyň.

221. Göni parallelepipediň esasynyň taraplarynyň uzynlygy $2\sqrt{2}$ cm we 5 cm, olaryň arasyndaky burç 45°-a deň. Eger parallelepipediň kiçi diagonaly 7 cm-e deň bolsa, onuň göwrümini tapyň.

222*. Göni parallelepipediň esasynyň a we b taraplary 30°-ly burçy düzýär. Gapdal üsti S -e deň. Onuň göwrümini tapyň.

223. Gönüburçly parallelepipediň ölçegleri 15 m, 50 m we 36 m. Oňa deňdeş kubuň gapyrgasyny tapyň.

224. Üçburçlukly göni prizmanyň esasynyň taraplary 29, 25 we 6-a, gapyrgasy bolsa esasynyň uly beýikligine deň. Prizmanyň göwrümini tapyň.

225. 39-njy suratlarda görkezilen köpgranlyklaryň göwrümini hasaplaň (hemme ikigranly burçlar göni burç).

226. 40-njy suratlarda görkezilen köpgranlyklaryň göwrümini hasaplaň (hemme ikigranly burçlar göni burç).

227. Göni parallelepipediň esasynyň meýdany 1 m^2 bolan rombdan ybarat. Diagonal kesimleriniň meýdany degişlilikde 3 m^2 we 6 m^2. Parallelepipediň göwrümini tapyň.

228. 41-nji suratlarda görkezilen köpgranlyklaryň göwrümini hasaplaň (hemme ikigranly burçlar göni burç).

229. 42-nji suratlarda görkezilen köpgranlyklaryň göwrümini hasaplaň (hemme ikigranly burçlar göni burç).

230. Giňligi 3 m we uzynlygy 20 m bolan ýoda galyňlygy 10 cm bolan asfalt gatlagy düşeldi. Ýoda üçin näçe göwrümdäki asfalt ulanylydy?

231*. Ýapgyt parallelepipediň esasy – tarapy 1 m-e deň bolan kwadratdan ybarat. Gapdal gapyrgalaryndan biri 2 m-e deň we esasynyň özüne ýapyşýan her bir tarapy bilen 60°-ly burçy düzýär. Parallelepipediň göwrümini tapyň.

232*. Parallelepipediň granlary – tarapy a we b -ge deň we ýiti burçy 60° bolan deň romblardan ybarat. Parallelepipediň göwrümini tapyň.

233. Parallelepipediň her bir gapyrgasy 1 cm-e deň. Parallelepipediň bir depesindäki üç tekiz burçy ýiti bolup, her biri *2a*-ga deň. Parallelepipediň göwrümini tapyň.

234*. Parallelepipediň bir depesinden çykýan üç gapyrgasynyň uzynlyklary a, b, c -ge deň. a we b gapyrgalary özara perpendikulýar, c gapyrga bolsa olaryň her biri bilen α burçy düzýär. Parallelepipediň göwrümini tapyň (60-njy surat).

235. a) Üçburçlukly; b) dörtburçlukly; c) altyburçlukly dogry prizma esasynyň tarapy a we gapdal gapyrgasy b boýunça göwrümini tapyň.

236. Göni parallelepiped esasynyň taraplary 3 cm we 5 cm-e deň bolup, olar özara 45°-ly burçy düzýär. Parallelepipediň kiçi diagonaly 7 cm-e deň bolsa, onuň göwrümini tapyň.

237. Üçburçlukly ýapgyt prizmanyň gapdal gapyrgalary 15 m-e, olaryň arasyndaky aralyk bolsa 26 m, 25 we 17 m-e deň. Prizmanyň göwrümini tapyň.

238. Dörtburçlukly dogry prizmanyň diagonaly 3,5 cm-e, gapdal granynyň diagonaly 2,5 cm-e deň. Prizmanyň göwrümini tapyň.

239. Üçburçlukly dogry prizma esasynyň tarapy a-ga, gapdal üstüniň esaslary meýdanlarynyň jemine deň. Onuň göwrümini tapyň.

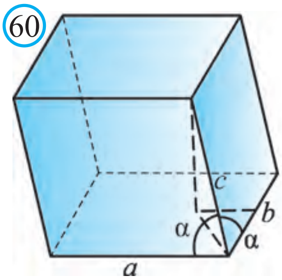
240. Altyburçly dogry prizmada iň uly diagonal kesimiň meýdany 4 m^2-a, iki garşylykly gapdal gapyrgalarynyň arasyndaky aralyk 2 m-e deň. Prizmanyň göwrümini tapyň.

241*. Ýedi gezek kir ýuwandan soň sabynyň ölçegleri iki esse kemeldi (61-nji surat). Eger her kir ýuwanda birmeňzeş göwrümdäki sabyn sarplanandygy mälim bolsa, sabyn ýene näçe gezek kir ýuwmaga ýetýär?

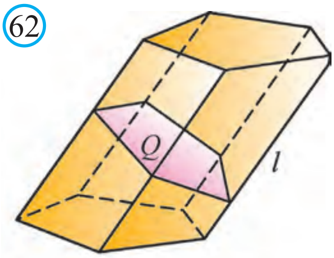
242*. Ýapgyt prizmada gapdal gapyrgalaryna perpendikulýar we hemme gapdal gapyrgalaryny kesip geçýän tekizlik geçirilen. Alnan kesimiň meýdany Q, gapdal gapyrgalary bolsa l -e deň bolsa, prizmanyň göwrümini tapyň (62-nji surat).

243. Üçburçlukly göni prizmanyň esasynyň meýdany 4 cm, 5 cm, 7 cm-e, gapdal gapyrgasy bolsa esasynyň uly beýikligine deň. Prizmanyň göwrümini tapyň.

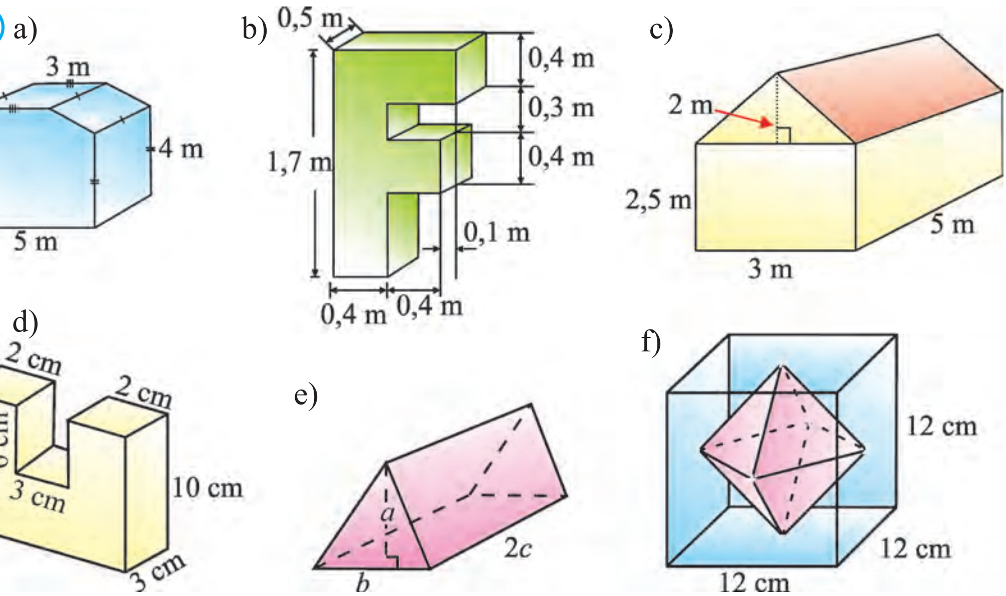
244. 63-nji suratlarda görkezilen köpgranlyklaryň göwrümini hasaplaň.

60


61


62


63



245. Üçburçlukly göni prizma esasynyň meýdany 4 cm^2-a, gapdal granlaryniyň meýdanlary 9 cm^2, 10 cm^2, 17 cm^2-a deň bolsa, onuň göwrümini tapyň.

246*. Prizmanyň esasy deňýanly üçburçluk bolup, onuň bir tarapy 2 cm, galan iki tarapy 3 cm-e deň. Prizmanyň gapdal gapyrgasy 4 cm-e deň we ol esasyň tekizligi bilen 45°-ly burçy düzýär. Bu prizma deňdeş kubuň gapyrgasyny tapyň.

247. Ýapgyt prizma esasynyň tarapy a-ga deň bolan deň taraply üçburçluk. Gapdal granlaryndan biri esasyna perpendikulýar we kiçi diagonaly S-e deň bolan rombdan ybarat. Prizmanyň göwrümini tapyň.

248. Eger dörtburçlukly göni prizmanyň beýikligi h, diagonallary esasyň tekizligi bilen α we β burçlary düzýär. Eger esasynyň diagonallarynyň arasyndaky burç γ -a deň bolsa, prizmanyň göwrümini tapyň.

249*. Kesimi esasy 1,4 m we beýikligi 1,2 m bolan deňýanly üçburçluk şeklindäki suw çykaryjy turbanyň suw geçirijilik kuwwatyny (1 sagatda akyp geçýän suwuň göwrümini) hasaplaň. Suwuň akyş tizligi 2 m/s.

250*. Demir ýol götermesiniň kesimi trapesiýa şeklinde bolup, onuň aşaky esasy 14 m, ýokarky esasy 8 m we beýikligi 3,2 m. 1 km göterme gurmak üçin näçe kub metr toprak gerek bolar?

251*. Tarapy 3,2 cm we galyňlygy 0,7 cm bolan dogry sekizburçluk şeklindäki agaç plitkanyň massasy 17,3 g. Agajyň dykyzlygyny tapyň.

252. Ölçegleri 30×40×50 (cm) bolan gönüburçly parallelepiped şeklindäki gutudan näçesini ölçegleri 2×3×1,5 m bolan maşynyň kuzowyna ýerleşmegi mümkin?

253*. Ölçegleri 420 mm × 240 mm × 90 mm bolan gönüburçly parallelepiped şeklindäki, dykyzlygy 7,8 g/cm^3 bolan polat plitalaryň näçesini ýük göterijilik kuwwaty 3 t bolan ýük maşynynda daşamak mümkin?

254. Ölçegleri 250 mm × 120 mm × 65 mm bolan gönüburçly parallelepiped şeklindäki, dykyzlygy 1,6 g/cm^3 bolan kerpijiň näçesini ýük götermek kuwwaty 3 t bolan ýük maşynynya ýüklemek mümkin?

255*. Ölçegleri 820 mm × 210 mm × 120 mm bolan gönüburçly parallelepiped şeklindäki, dykyzlygy 7,3 g/cm^3 bolan çoýun plitany ýük götermek kuwwaty 2 t bolan göterme kranyň kömeginde götermek mümkinmi?

256. Uzynlygy 105 m we kese kesiginiň ölçegleri 30 cm x 40 cm bolan gönüburçlukdan ybarat agaçdan, uzynlygy 3,5 m, ini 20 cm we galyňlygy 20 mm bolan näçe tagta bölegi çykýar?

257. Kerpijiň ölçegleri 25 × 12 × 6,5 (cm). Eger 1 m^3 göwrümdäki kerpijiň massasy 1700 kg bolsa, bir sany kerpijiň massasyny gramlarda anyklaň.

258. Sanitariýa normalaryna görä, synpdaky her bir okuwça 7,5 m^3 howa dogry gelýär. Eger synp otagynyň beýikligi 3,5 m we ol 28 okuwça niýetlenen bolsa, synp otagynyň meýdanyny tapyň.

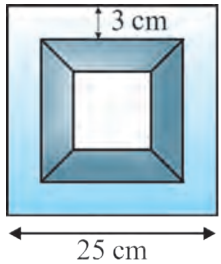
259*. Uzynlygy 100 m, ini bolsa 10 m bolan gönüburçluk şeklindäki meýdany galyňlygy 5 cm bolan asfalt bilen örtmeli. Eger 1 m^3 göwrümdäki asfaltyň massasy 2,4 tonna we bir ýük maşynynyň ýük götermek kuwwaty 5 tonna bolsa, bu meýdany asfaltlamak üçin näçe maşyn asfalt gerek bolar?

260*. Ölçegleri 3 cm, 4 cm, 5 cm bolan, gönüburçly parallelepiped şeklindäki demir parçasyna stanokda işlendi. Bu prosesde onuň her bir gapyrgasy birmeňzeş kemelip, doly üsti 42 cm^2-a kemelendigi mälim. Şu demir parçasynyň göwrümi işlenenden soň näçäni düzýär?

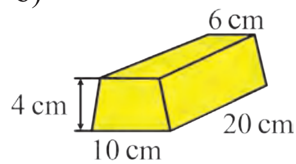
261*. 64-nji *a* suratda çoýun turbanyň kesimi görkezilen. Suratda berlen maglumatlar esasynda bir metr uzynlykdaky şeýle turbanyň massasyny anyklaň (çoýnuň dykyzlygy – 7,3 g/cm^3).

262. Ölçegleri 64-nji *b* suratda berlen altyn plitkanyň massasy 12,36 kg bolsa, onuň dykyzlygyny anyklaň.

64 a)

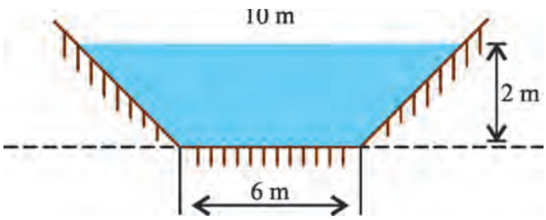


b)

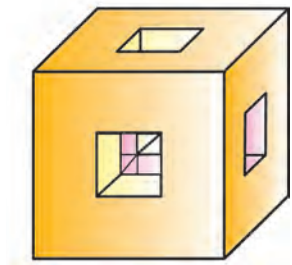


263*. Kanalyň kese kesiginiň esaslary 10 m, 6 m we beýikligi 2 m bolan deňýanly trapesiýadan ybarat (65-nji surat). Suwuň akymynyň tizligi 1 m/s bolsa, bir minutda bu kanaldan näçe göwrümdäki suw akyp geçýär?

65



66

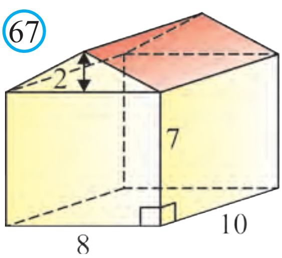


264*. Gapyrgasy 6 cm-e deň bolan, misden ýasalan kubuň her bir granyndan kese kesiginiň esasy 2 cm-e deň kwadrat şeklindäki deşikler oýulan (66-njy surat). Eger misiň udel dykyzlygy 0,9 g/cm^3 bolsa, kubuň galan böleginiň massasyny tapyň.

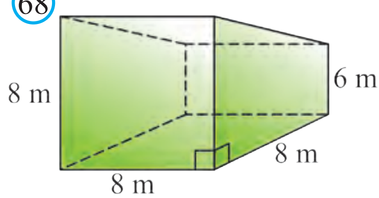
265. Gönüburçly parallelepiped şeklindäki metal bloguň esasynyň ölçegleri 7 cm we 5 cm. Bloguň massasy 1285 g we metalyň dykyzlygy 7,5 g/cm^3 bolsa, bloguň beýikligini tapyň.

266. 67-nji suratda berlen maglumatlar esasynda garažyň göwrümini tapyň.

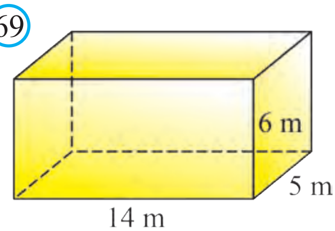
67



68



69



267. Gül ösdürilýän uly güldanyň çuňlugy 2 fut, giňligi 12 fut we uzynlygy 15 fut bolan gönüburçly parallelepiped şeklinde. Güldanyň göwrümini tapyň we kub metrlerde aňladyň (1 jübüt = 30,48 cm).

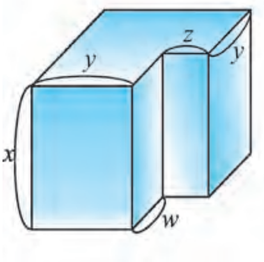
268. Ýük ammary 68-nji suratda görkezilen trapesiýaly prizma şeklinde. Suratda berlen maglumatlar esasynda ammaryň sygymyny anyklaň.

269*. 69-njy suratda gutynyň ölçegleri berlen. Gutynyň esaslary 1 kwadrat metri 1000 som, gapdal granlary bolsa 1 kwadrat metri 2000 som bolan materialdan işlenen. Gutyny ýasamaga näçe somluk material gidipdir?

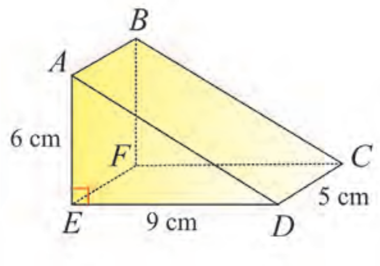
271. Uly gönüburçly parallelepipedden 70-nji suratda görkezilişi ýaly edip kiçi gönüburçly parallelepiped gyrkyp alnan. Berlen maglumatlar esasynda emele gelen jisimiň göwrümini tapyň.

272. 71-nji suratda görkezilen piramidanyň göwrümini tapyň.

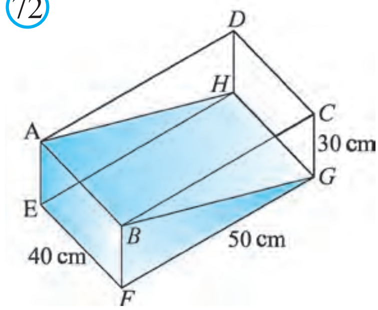
70



71



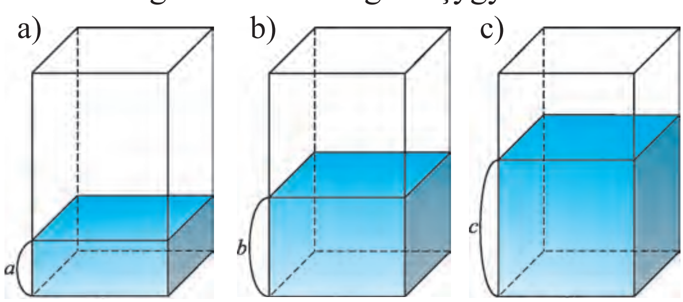
72



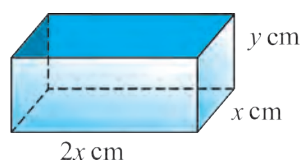
273*. 72-nji suratda görkezilen gönüburçly parallelepiped şeklindäki akwariumda näçe suw bar?

274*. Gönüburçly parallelipiped şeklindäki birmeňzeş akwariumlara 73-nji suratda görkezilişi ýaly, dürli derejedäki suw guýlan. Bu akwariumlara guýlan suwuň göwrümleriniň gatnaşygy nähili bolar?

73



74



275*. Barlag. Kärhana sygymy 1 litr, esasynyň ölçegleri gatnaşygy 1:2 bolan gönüburçly parallelepiped şeklindäki üsti açyk gutulary öndürýär (74-nji surat). Gutyny tygşytly öndürmek, ýagny oňa gidýän materialyň iň kem bolmagy üçin onuň ölçegleri nähili bolmaly? (x-a dürli bahalar berip, gutynyň göwrümini tapyň we olary deňeşdirmek bilen çözjek boluň ýa-da diferensial hasap mümkinçiliklerinden peýdalanyň).

276*. **Meseleli ýagdaý.** Geologlar daş tapyp aldylar we onuň göwrümini takmynan bolsa-da anyklamakçy. Olar kölüň ýanynda durlar we olaryň ygtyýarynda daş sygýan uly metal bak, birnäçe sygymy näbelli bedreler we sygymy 1 litr bolan butylka bar. Geologlar bu işiň nädip hötdesinden gelerler?

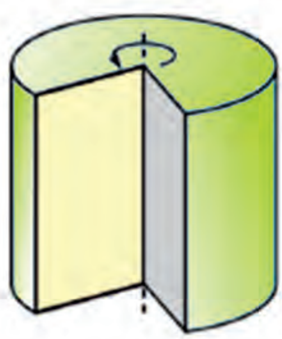
8. SILINDRIŇ ÜSTI WE GÖWRÜMI

8.1 Silindriň üsti

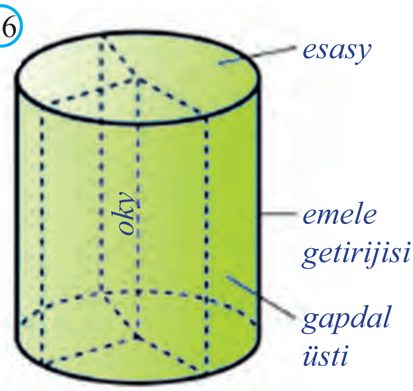
Giňişlikdäki şekilleriň ýene möhüm synplaryndan biri - bu aýlanma jisimleridir. Silindr aýlanma jisimlerden biri bolup, ol bilen aşaky synplarda tanşypdyňyz. Silindriň häsiýetleri prizmanyň häsiýetlerine meňzeýänligi üçin olary yzygider öwrenýäris.

Gönüburçlugyň bir tarapynyň daşynda aýlanmagyndan emele gelen jisime *silindr* (has takygy, göni tegelek silindr) diýlip aýdylýar (75-nji surat). Bu aýlanmada gönüburçlugy bir tarapy gozganman galýar. Ony *silindriň oky* diýip atlandyrýarys. Dörtburçlugyň bu tarapa garşylykly ýatýan tarapy aýlanmagyndan emele gelen üst - *silindriň gapdal üsti*, tarapyň özi bolsa *silindriň emele getirijisi* diýlip atlandyrylýar. Gönüburçlugyň galan taraplary bu aýlananda iki deň tegelek emele getirýär, olary *silindriň esaslary* diýip atlandyrýarys (76-njy surat).

75



76

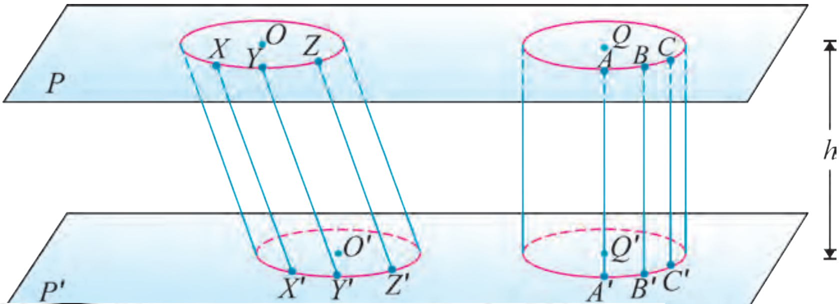


Ýatlatma. Gönüburçlugy bir tarapy daşynda aýlamakdan emele gelen jisim aslynda *göni tegelek silindr* diýlip aýdylýar. Silindr düşünjesi bolsa giň manyda aşakdaky ýaly girizilýär.

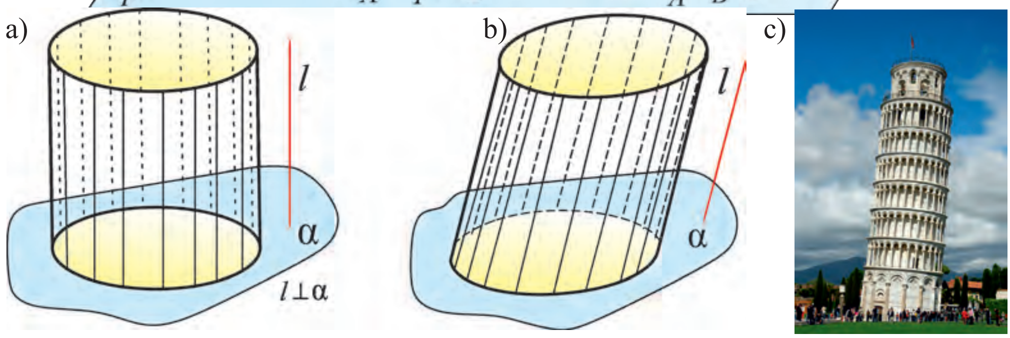
Aýdaly, giňişlikde ýasy F_1 şekil käbir parallel orun üýtgetmede F_2 şekile geçen bolsun. Bu iki şekil we bu parallel orun üýtgetmede bir-birine geçen nokatlary utgaşdyrýan kesimlerden ybarat jisim silindr diýlip atlandyrylýar (77-nji surat).

Eger parallel orun üýtgetme ýasy F_1 şekil tekizligine perpendikulýar bolsa, silindr – *göni silindr* (78-nji *a* surat) diýip, ters ýagdaýda - *ýapgyt silindr* (78-nji *b* surat) diýip aýdylýar. 78-nji *c* suratda Piza şäherindäki meşhur minara görkezilen bolup ol ýapgyt silindr şeklinde.

77



78



Eger F_1 şekil tegelekden ybarat bolsa, silindr *togalak silindr* diýlip atlandyrylýar.

Silindrleriň içinden diňe göni togalak silindr aýlanma jisim bolýar. Biz indikide ine şol göni togalak silindrler bilen iş salşarys we olary gysgalyk üçin silindrler diýip atlandyrýarys.

Silindriň esaslary özara deň tegeleklerden ybarat bolup, olar parallel tekizliklerde ýatýar. Silindriň bir esasy nokadyndan ikinji esasy tekizligine düşürilen perpendikulýar onuň *beýikligi* diýlip atlandyrylýar.

Bu parallel tekizlikleriň arasyndaky aralyk silindriň beýikligine deň bolýar. Silindriň oky onuň beýikligi hemdir.

Silindriň emele getirijileri bolsa özara parallel we deň bolýar. Şonuň ýaly-da, silindr oky, emele getirijileriniň we beýikliginiň uzynlyklary özara deň bolýar.

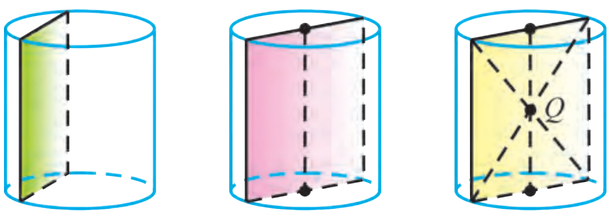
Silindri onuň okuna parallel tekizlik bilen kesende emele gelen kesim gönüburçlukdan ybarat bolýar (79-njy *a* surat). Onuň iki tarapy silindriň emele getirijileri, galan iki tarapy bolsa degişlilikde esaslaryň parallel hordalarydyr.

Hususan-da, *ok kesim* hem gönüburçlukdyr. Ol silindriň oky arkaly geçen tekizlik bilen kesende emele gelen kesimdir (79-njy *b* surat).

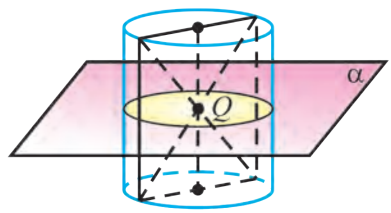
Ok kesimleriň diagonallary esasyň merkezlerini utgaşdyrýan kesimiň ortasy Q nokatdan geçýär. Şonuň üçin, bu Q nokat silindriň simmetriýa merkezinden ybarat bolýar (79-njy *c* surat).

Q nokatdan geçýän we silindriň okuna perpendikulýar bolan tekizlik silindriň simmetriýa tekizliginden ybarat bolýar (80-nji surat). Silindriň okundan geçýän tekizlikler hem onuň simmetriýa tekizlikleri bolýar (81-nji surat).

79 a) b) c)



80



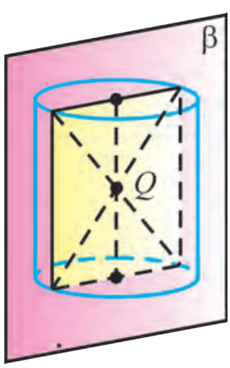
1-nji mesele. Silindriň ok kesiminiň meýdany Q-ga deň kwadratdan ybarat. Silindriň esasynyň meýdanyny tapyň.

Çözülişi. Kwadratyň tarapy $\sqrt{Q}$ -ga deň. Ol silindriň esasynyň diametrine deň. Onda silindriň esasynyň meýdany: $S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$ -e deň. □

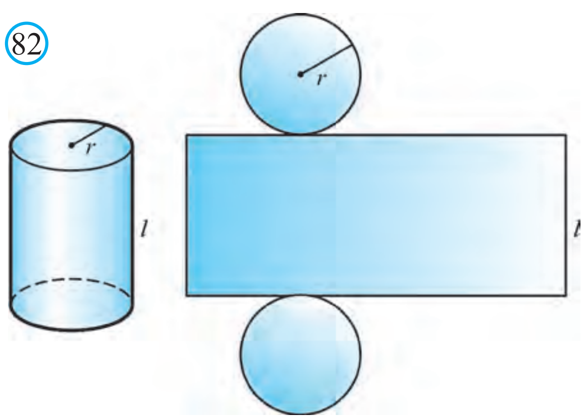
Teorema. Silindriň gapdal üsti esasynyň töwereginiň uzynlygy bilen emele getirijisiniň köpeltmek hasylyna deň: $\boldsymbol{S_{gap} = 2\pi rl}$

Bu teoremany aşakdaky 82-nji surat esasynda özbaşdak subut ediň.

81



82



Netije. Silindriň doly üsti onuň gapdal üsti bilen iki esasynyň meýdanynyň jemine deň: $S_{doly} = S_{gap} + 2S_{esas}$ *ýa-da*

$$S_{doly} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(l+r).$$

Islendik silindr berlen bolsun. Onuň esaslaryndan biriniň içinden $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ köpburçlugy çyzýarys (83-nji surat). Köpburçlugyň $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ we A_n depeleri arkaly, silindriň A_1B_1, A_2B_2, ..., $A_{n-1}B_{n-1}$ we A_nB_n emele getirijileri geçirýäris hem-de emele getirijiniň başga $B_1, B_2, ..., B_{n-1}$ we B_n depelerini yzygider kesimler bilen utgaşdyryp çykýarys. Netijede $A_1A_2...A_{n-1}A_n\,B_1B_2...B_{n-1}B_n$ prizmany alýarys. Bu prizma berlen *silindriň içinden çyzylan prizma* diýlip atlandyrylýar. Silindr bolsa *prizmanyň daşyndan çyzylan silindr* diýlip aýdylýar. Eger prizma silindriň içinden çyzylan bolsa, onda prizmanyň esasy silindriň esasyna içinden çyzylan bolýar we prizmanyň gapdal gapyrgalary silindriň gapdal üstünde ýatýar.

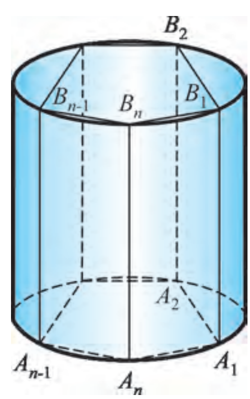
Görnüşi ýaly, eger prizmanyň esasyna daşyndan töwerek çyzmak mümkin bolsa, prizmanyň daşyndan silindr hem çyzmak mümkin.

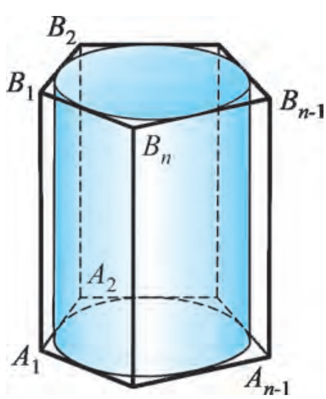
Şoňa meňzeş *silindriň daşyndan çyzylan prizma* we *prizmanyň içinden çyzylan silindr* düşünjeleri hem girizilýär (84-nji surat). Eger prizma silindriň daşyndan çyzylan bolsa, onda prizmanyň esasy silindriň esasyna daşyndan çyzylan bolýar we prizmanyň gapdal granlary silindriň gapdal üstüne galtaşýar.

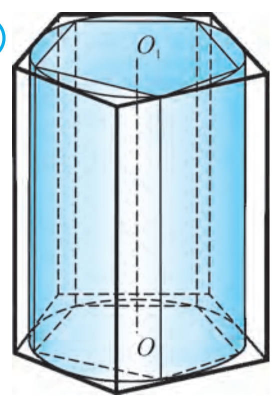
Görnüşi ýaly, eger prizmanyň esasyna daşyndan töwerek çyzmak mümkin bolsa, prizmanyň daşyndan silindr hem çyzmak mümkin.

8.2 Silindriň göwrümi

Teorema. Silindriň göwrümi esasynyň meýdany bilen emele getirijisiniň köpeltmek hasylyna deň: $V = S_{esas} \cdot l.$

83


84


85


Subudy. Oky OO_1 bolan silindr berlen bolsun (85-nji surat).

Oňa içinden çyzylan $A_1A_2 ... A_{n-1}A_n\,B_1B_2 ... B_{n-1}B_n$ we daşyndan çyzylan

$C_1C_2 \ldots C_{n-1}C_n$ $D_1D_2 \ldots D_{n-1}D_n$ prizmalary çyzýarys. Silindriň göwrümini V, içinden we daşyndan çyzylan prizmalaryň göwrümini V_1 we V_2 bilen belgilesek, onda $V_1 < V < V_2$ goşadeňsizlik ýerlikli bolýar. Prizmalaryň göwrümi aşakdaky formulalardan tapylýar:

$$V_1 = S_{A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n} \cdot l \qquad \text{we} \qquad V_2 = S_{C_1C_2 \ldots C_{n-1}C_n} \cdot l$$

Prizmalaryň esasynyň taraplarynyň sany n-i gitdigiçe artdyrýarys. Onda içinden çyzylan prizmanyň göwrümi barha artýar, daşyndan çyzylan prizmanyň göwrümi bolsa barha kemelýär. Eger taraplaryň sany n çäksiz ulalyp barsa, bu göwrümleriň arasyndaky tapawut nola ymtylýar. Silindriň içinden we daşyndan çyzylan prizmalaryň göwrümi ýakynlaşan san berlen silindriň göwrümi hökmünde alynýar.

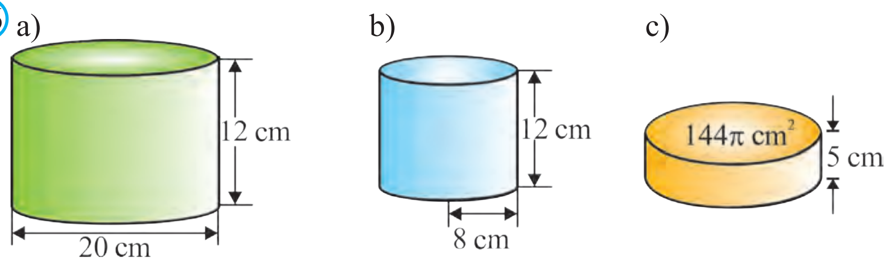
Bu prosesde $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ we $C_1C_2 \ldots C_{n-1}C_n$ köpburçluklaryň meýdany silindriň esasynda ýatýan tegelegiň S meýdanyna ýakynlaşýar.

Diýmek, $V = S_{\text{esas}} \cdot l$. $\square$

Tema degişli meseleler we amaly ýumuşlar

277. 86-njy suratda getirilen silindrleriň gapdal we doly üstüni tapyň.

86



278. Silindriň esasynyň radiusy 6 cm, onuň beýikligi 4 cm. Silindriň ok kesiminiň meýdanyny hasaplaň.

279. Silindriň esasynyň radiusy 2 m, beýikligi 3 m. Ok kesiminiň diagonalyny tapyň.

280. Silindriň esasynyň meýdany 64π cm^2, onuň beýikligi 8 cm. Silindriň ok kesiminiň meýdanyny hasaplaň.

281. Silindriň ok kesimi – meýdany Q-ga deň kwadrat. Silindriň esasynyň meýdanyny tapyň.

282. Silindriň ok kesimi meýdany 36 cm^2 bolan kwadratdan ybarat. Silindriň gapdal üstüniň meýdanyny hasaplaň.

283. Silindr ok kesiminiň meýdany 4-e deň. Onuň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

284. Silindriň beýikligi 6 cm, esasynyň radiusy 5 cm. Silindriň okuna parallel edip ondan 4 cm aralykda geçirilen kesimiň meýdanyny tapyň.

285. Silindriň esasynyň radiusy 2-ä, beýikligi 3-e deň. Silindriň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

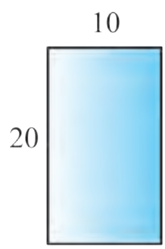
286. Silindriň esasynyň töwereginiň uzynlygy 3π-e, beýikligi 2-ä deň. Silindriň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

287. Silindr ýaýylmasynyň meýdany 24π dm^2, silindriň beýikligi 4 dm. Onuň esasynyň radiusyny tapyň.

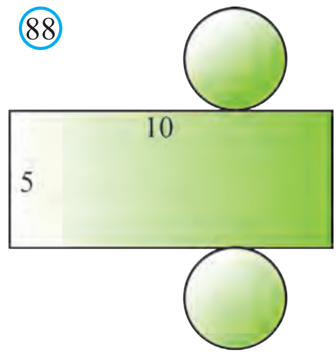
288. Silindriň esasynyň radiusy 5 cm, onuň beýikligi 6 cm. Silindriň ok kesiminiň diagonalyny tapyň.

289. Silindriň beýikligi 8 dm, esasynyň radiusy 5 dm. Silindr tekizlik bilen şeýle kesilen bolup, kesimde kwadrat emele gelen. Bu kesimden silindriň okuna çenli bolan aralygy tapyň.

87



88



290*. 87-nji suratda berlen silindriň ok kesimine görä, onuň gapdal we doly üstüniň meýdanyny tapyň.

291*. 88-nji suratda berlen silindriň ýaýylmasyna görä, onuň gapdal we doly üstüniň meýdanyny tapyň.

292. Silindriň esasynyň radiusy 3 cm, beýikligi bolsa esasyň radiusyndan 2 cm artyk. Silindiriň göwrümini hasaplaň.

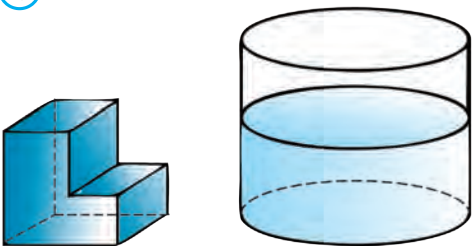
293. Silindriň göwrümi 64 π cm^3, beýikligi 4 cm. Silindriň esasynyň meýdanyny hasaplaň.

294*. Silindr şeklindäki gaba 2000 cm^3 suw salnanda suwuň derejesi 12 cm boldy. Gaba detal batyrylanda bolsa suwuň derejesi ýene 9 cm-e göterildi. Detalyň göwrümini anyklaň we jogaby cm^3-larda aňladyň.

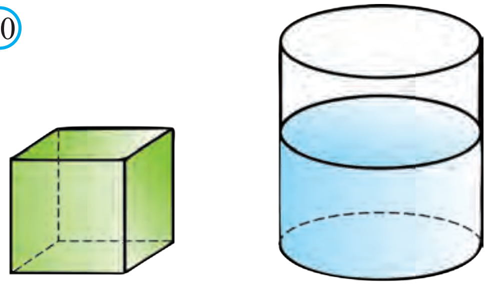
295. Silindr şeklindäki gaba 3 litr suw salnanda suwuň derejesi 15 cm boldy (89-njy surat). Gaba detal batyrylanda bolsa suwuň derejesi ýene 4 cm-e göterildi. Detalyň göwrümini anyklaň we jogaby cm^3-larda aňladyň.

296*. Silindr şeklindäki gaba 4 litr suw salnanda suwuň derejesi 20 cm boldy (90-njy surat). Gaba detal batyrylanda bolsa suwuň derejesi ýene 5 cm-e göterildi. Detalyň göwrümini anyklaň we jogaby cm^3-larda aňladyň.

89



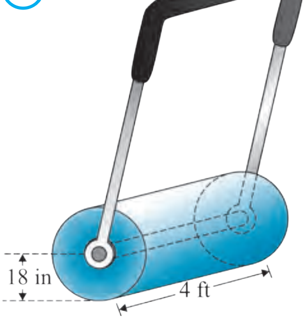
90



297*. 91-nji suratda silindr şeklindäki ýol düzleýji gurluş görkezilen. Suratda berlenlerden peýdalanyp, ol bir gezek aýlananda näçe meýdandaky ýoly tekizleýändigini anyklaň (Ýatlatma: 1 ft (fut) = 12 in (dýuým)= 30,48 cm) .

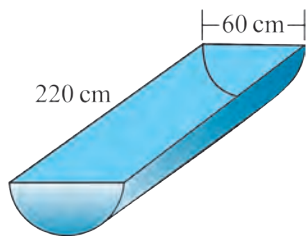
298*. 92-nji suratdaky suw sepmäge niýetlenen rezin şlangyň içki diametri 3 cm, daşky diamerti 3,5 cm, uzynlygy bolsa 20 m bolsa, oňa näçe lirt suw gidýändigini tapyň. Eger reziniň dykyzlygy 7 g/cm^3 ekenligi mälim bolsa, bu rezin şlangyň dolagynyň massasyny tapyň.

91



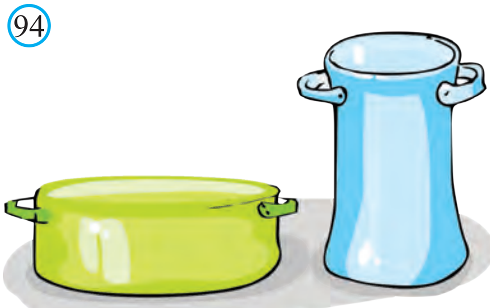
92

93



299*. 93-nji suratda gapdal üsti ýarym silindr şeklinde bolan gap berlen. Eger 1 cm^2 meýdanly üsti boýamak üçin 6 g boýag talap edilse, bu gabyň hem içki, hem daşky bölegini boýamak üçin näçe boýag gerek bolar? Gaba näçe litr suw gidýär?

94



95

96

300*. Silindr şeklindäki gaplardan biri ikinjisinden iki esse giňräk, ýöne üç esse pesräk (94-nji surat). Bu gaplaryň haýsy biriniň sygymy uly?

301*. Esasynyň radiusy 5 cm, beýikligi bolsa 20 cm bolan silindr şeklindäki apelsin şerbetiniň gabynyň esaslary metaldan, gapdal üsti bolsa kartondan ýasalan (95-nji surat). Eger 1 cm^2 metalyň nyrhy 5 som, 1 cm^2 kartonyň nyrhy bolsa 2 som bolsa, bu gaby taýýarlamak üçin näçe somluk material gerek bolar? Gaba näçe apelsin şerbeti gidýär?

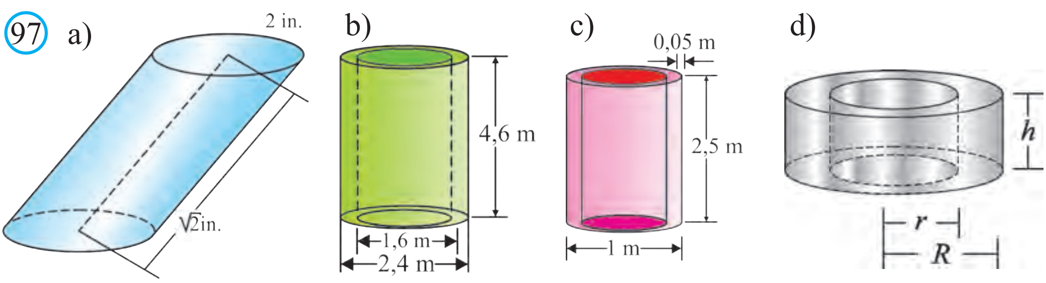
302*. Esasynyň radiusy 1,5 dýuým, beýikligi bolsa 4,25 dýuým bolan silindr şeklindäki konserw bankasy berlen (96-njy surat). Konserw bankasynyň doly üstüni we göwrümini tapyň. Eger 1 cm^2 metalyň nyrhy 5 som bolsa, bu gaby taýýarlamak üçin näçe somluk material gerek bolar? (Ýatlatma: 1 in. (dýuým) = 2,54 cm)

303*. Nebit saklanýan gabyň (sisterna) beýikligi 16 fut, esasynyň radi-usy 10 fut bolan silindr şeklinde. Eger 1 kub fut 7,5 gallona deň bolsa, bu sisternanyň gallonlardaky sygymyny anyklaň. (Ýatlatma: 1 amerikan gallony = 3,785 litr. 1 amerika barelli = 42 amerika gallony = 159 litr).

304*. Fermeriň ýangyç baky silindr şeklinde. Bakyň beýikligi 6 fut, esasynyň radiusy 1,5 fut. Bakyň gallonlardaky sygymyny anyklaň.

305. 97-nji suratdaky maglumatlardan peýdalanyp, görkezilen giňişlikdäki jisimleriň göwrümini anyklaň.

97

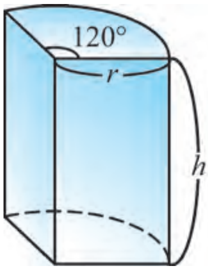


306*. Silindr şeklindäki gaba 6 cm^3 suw salyndy. Gaba detal doly batyrylanda, suwuň derejesi 1,5 esse göterilýär. Detalyň göwrümini anyklaň we jogaby cm^3-larda aňladyň.

307*. Silindr şeklindäki gapdaky suwuň derejesi 16 cm. Gaba esasynyň diametri bu gaba garanda 2 esse kiçi bolan silindr şeklindäki ikinji gap batyrylanda ondaky suwuň derejesi näçe bolar?

308. Birinji silindriň göwrümi 12 m^3. Ikinji silindriň beýikligi birinji silindre garanda 3 esse uly, esasynyň radiusy bolsa 2 esse kiçi. Ikinji silindriň göwrümini tapyň.

98

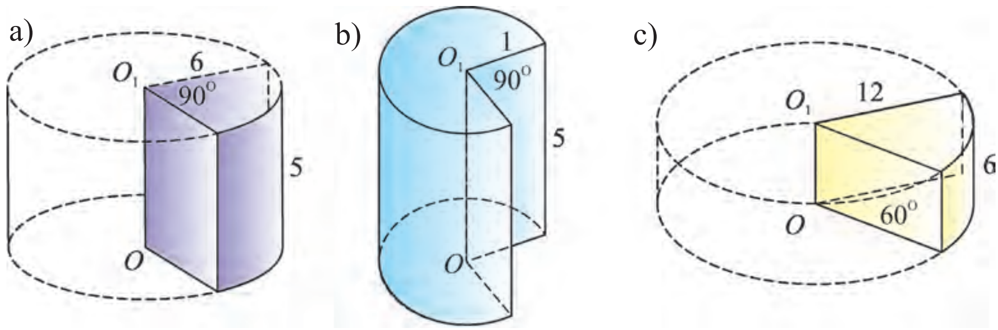


309. Silindr şeklindäki gap ikinjisinden 2 esse beýik, ýöne 1,5 esse giňräk. Şu gaplaryň göwrümleriniň gatnaşygyny hasaplaň.

310. 98-nji suratda görkezilen giňişlikdäki jisimiň göwrümini tapyň.

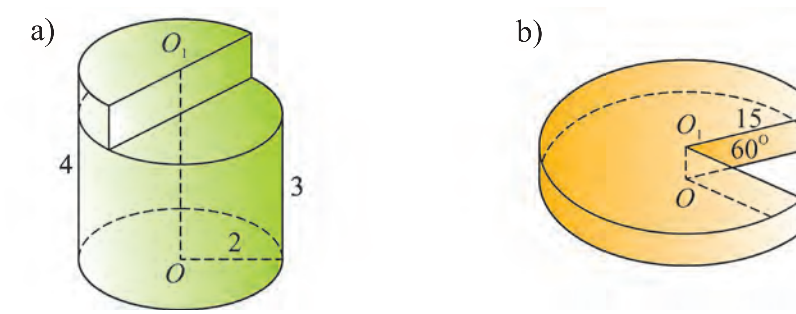
311. 99-njy suratda görkezilen silindriň böleginiň göwrümini tapyň.

99



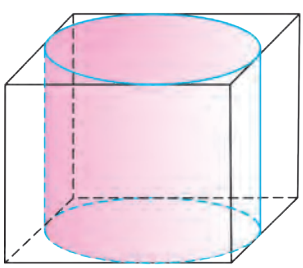
312. 100-nji suratda görkezilen silindriň böleginiň göwrümini tapyň.

100

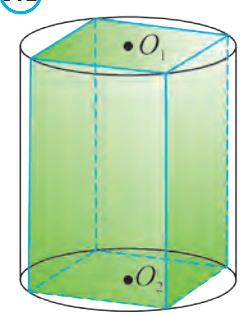


313. Gönüburçly parallelepiped esasynyň radiusy we beýikligi 1-e deň bolan silindriň daşyndan çyzylan (101-nji surat). Parallelepipediň göwrümini tapyň.

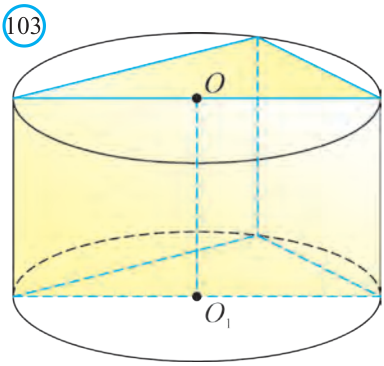
101



102



103



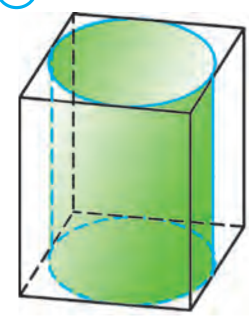
314. Gönüburçly parallelepipediň esasynyň radiusy 4-e deň bolan silindriň daşyndan çyzylan (102-nji surat). Parallelepipediň göwrümi 16-a deň bolsa, silindriň beýikligini tapyň.

315. Göni prizmanyň esasy - katetleri 6 we 8 bolan gönüburçly üçburçlukdan ybarat, gapdal gapyrgalary bolsa 5-e deň (103-nji surat). Bu prizmanyň daşyndan çyzylan silindriň göwrümini tapyň.

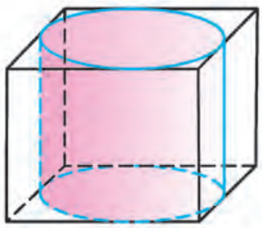
316. Göni prizmanyň esasy – tarapy 2-ä deň bolan kwadratdan ybarat, gapdal gapyrgalary bolsa 2-ä deň. Bu prizmanyň daşyndan çyzylan silindriň göwrümini tapyň.

317. Dörtburçlukly göni prizma esasynyň radiusy 2-ä deň bolan silindriň daşyndan çyzylan (104-nji surat). Prizmanyň gapdal üstüniň meýdany 48-e deň bolsa, silindriň beýikligini tapyň.

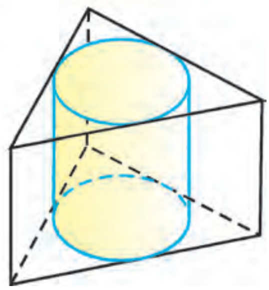
104



105



106

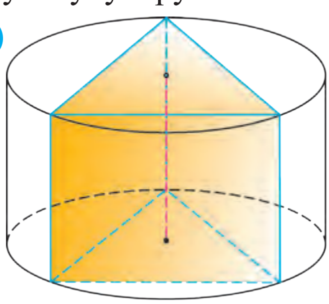


318. Dogry dörtburçlukly prizma esasynyň radiusy we beýikligi 1-e deň bolan silindriň daşyndan çyzylan (105-nji surat). Prizmanyň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

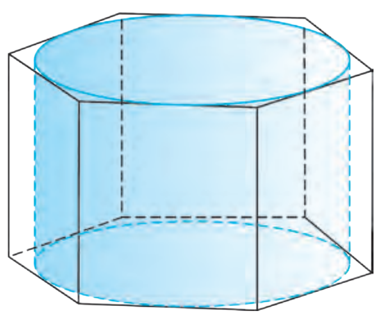
319. Üçburçlukly göni prizma esasynyň radiusy $\sqrt{3}$ -e we beýikligi 2-ä deň bolan silindriň daşyndan çyzylan (106-njy surat). Prizmanyň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

320. Üçburçlukly dogry prizma esasynyň radiusy $2\sqrt{3}$ -e we beýikligi 2-ä deň bolan silindriň içinden çyzylan (107-nji surat). Prizmanyň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

107



108



321. Altyburçlukly dogry prizma esasynyň radiusy $\sqrt{3}$-e we beýikligi 2-ä deň bolan silindriň daşyndan çyzylan (108-nji surat). Prizmanyň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

322*. 109-njy suratda görkezilen detalyň göwrümini tapyň.

323*. Uzynlygy 10 m, esasynyň diametri 1 m bolan silindr şeklindäki turbanyň daşky üstüni 1 mm-galyňlykdaky boýag bilen boýamak üçin näçe boýag gerek bolar?

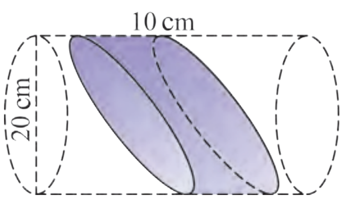
324*. 110-njy suratda görkezilen tirsekli turbanyň a) gapdal üstüniň meýdanyny; b) göwrümini tapyň. ($\pi \approx 3$ diýip alyň)

325*. Çoýun turbanyň uzynlygy 2 m, daşky diametri 20 cm. Turbanyň diwarynyň galyňlygy 2 cm we çoýnuň udel dykyzlygy 7,5 g/cm^3 bolsa, onuň massasyny tapyň.

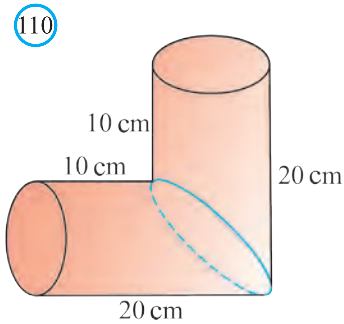
326*. 111-nji suratdan peýdalanyp, ýapgyt silindr üçin $S \cdot h = Q \cdot l$ deňligiň ýerlikli bolýandygyny esaslandyryň.

327*. 112-nji suratda görkezilen silindriň üstünden A nokatdan B nokada eltýän iň gysga ýoluň uzynlygyny tapyň (Görkezme: silindriň ýaýylmasyndan peýdalanyň).

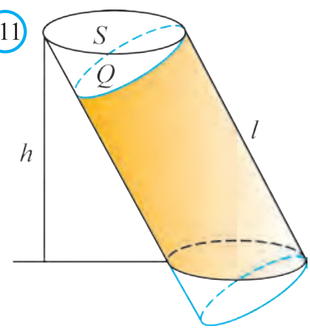
109



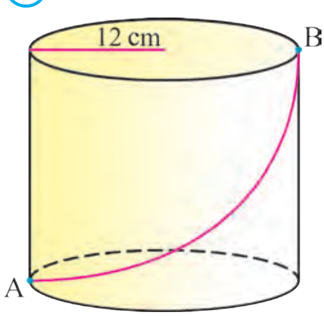
110



111



112



Taryhy maglumatlar


Abu Ali ibn Sino


G'iyosiddin al Koshiy

Abu Reýhan Birunynyň "Astronomiýa sungatyndan başlangyç maglumat berýän kitap" (gysgaça "Astronomiýa") atly eseriniň geometriýa degişli böleginde stereometriýa giriş hökmünde giňişlikdäki şekilleriň aşakdaky kesgitlemeleri getirilýär.

Kub – jisim şekili bolup, nardyň bölejigine meňzeýär, alty sany tarapyndan alty sany kwadrat bilen araçäklenen.

Prizma – jebis şekil bolup, gapdal tarapyndan kwadrat ýa-da gönüburçluk şeklindäki tekizlikler bilen, astyndan we üstünden iki üçburçluk bilen araçäklenen.

Biruny beren bu kesgitlemede prizmanyň hususy haly, ýagny üçburçlukly prizmanyň kesgitlemesi getirilen.

Abu Reýhan Birunynyň "Kanuny Ma'sudiý" kitaby 1037-nji ýylda ýazylan bolup, onda parallelepiped, prizmanyň göwrümlerini tapmagyň düzgünleri: "Eger jisim dörtburçlukly bolmazdan ýa-da başga hili bolsa, onuň ölçegi aşakdaky ýaly: onuň meýdanyny bilgin, ony çuňluga köpeltgin, netijede göwrüm emele gelýär" ýaly berlen.

Abu Ali ibn Sina "Danyşnama" atly eseriniň "Geometrik jisimlere degişli esaslar" babynda jisimiň we üçburçlukly prizmanyň kesgitlemesini berýär hem-de iki prizmanyň özara deň bolmak şertlerini beýan edýär. Ibn Sina prizmany aşakdaky ýaly kesgitleýär: "Prizma – iki üçburçlukly tekiz şekiller we taraplary özara parallel üç tekiz şekiller bilen araçäklenen jisimdir".

Giýasiddin Jemşit ibn Ma'sud al-Koşynyň "Hasap kitaby" atly eserinde üstleriň meýdanlaryny we jisimleriň göwrümlerini hasaplamagyň köp düzgünleri getirilen. Ol matematika, geometriýa, trigonometriýa, mehanika we astronomiýa ýaly ylymlary çuňňur bilenligi üçin Ulugbegiň ünsüne we hormatyna sezewar bolupdyr. Al- Koşy köpburçluklar bilen bir hatarda prizmalary, piramidalary, silindrleri, konuslary, kesik konuslary hem öwrenipdir.

9. BABY GAÝTALAMAGA DEGIŞLI AMALY GÖNÜKMELER

9.1. 2-nji test synagy

1. Kubuň näçe simmetriýa tekizligi bar?

A) 8; B) 9; C) 7; D) 10.

2. Eger kub diagonal kesiminiň meýdany $2\sqrt{2}$-ä deň bolsa, onuň göwrümini tapyň.

A) $2\sqrt{2}$; B) $\sqrt{7}$; C) $4\sqrt{2}$; D) $5\sqrt{2}$.

3. Gönüburçly parallelepipediň esasynyň taraplary 7 cm we 24 cm. Parallelepipediň beýikligi 8 cm. Diagonal kesiminiň meýdanyny tapyň.

A) 168; B) 1344; C) 100; D)200.

4. Dogry dörtburçlukly prizmanyň diagonaly 4-e deň bolup, gapdal grany bilen 30°-ly burçy düzýär. Prizmanyň gapdal üstüni tapyň.

A) $16\sqrt{2}$; B) 16; C) 18; D)$18\sqrt{2}$.

5. Dogry dörtburçlukly prizmanyň esasynyň tarapy $\sqrt{2}$-ä, diagonaly bilen gapdal granynyň arasyndaky burç bolsa 30°-a deň. Prizmanyň göwrümini tapyň.

A) $8\sqrt{2}$; B) 4; C) 16; D) $4\sqrt{2}$.

6. Prizmanyň jemi gapyrgalary 36 sany bolsa, onuň näçe gapdal grany bar?

A) 12; B) 16; C) 9; D) 10.

7. Ýapgyt prizmanyň gapdal gapyrgasy 20-a deň we esasynyň tekizligi bilen 300°-ly burçy emele getirýär. Prizmanyň beýikligini tapyň.

A) 12; B) $10\sqrt{3}$; C) 10; D) $10\sqrt{2}$.

8. Üçburçlukly göni prizma esasynyň taraplary 15; 20 we 25-e, gapdal gapyrgasynyň esasynyň beýikligine deň. Prizmanyň göwrümini tapyň.

A) 600; B) 750; C) 1800; D) 1200.

9. Dogry altyburçly prizmanyň iň uly diagonaly 8-e deň we ol gapdal gapyrgasy bilen 300°-ly burçy emele getirýär. Prizmanyň göwrümini tapyň.

A) 72; B) 64; C) 76; D) 80;

10. Ok kesiminiň meýdany 10-a deň bolan silindriň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

A) 10π; B) 20π; C) 30π; D) 15π.

11. Silindriň beýikligi 8-e gapdal üsti ýaýylmasynyň diagonaly 10-a deň. Silindriň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

A) 48; B) 48π; C) 24; D) 48π.

12. Taraplary 2 we 4-e deň bolan gönüburçluk özüniň uly tarapynyň daşynda aýlandy. Emele gelen jisimiň doly üstüni tapyň.

A) 22π; B) 23π; C) 24π; D) 20π.

13. Silindriň gapdal üstüniň meýdany 72 π -ge deň we ol ýaýylanda emele gelen gönüburçluk diagonaly esasy bilen 45° burçy düzýär. Silindriň esasynyň radiusyny tapyň.

A) 5; B) 4; C) 6; D) 8.

14. Silindriň esasynyň radiusy iki esse artdyrylsa, onuň göwrümi näçe esse artar?

A) 4; B) 2; C) 3; D) 6.

15. Silindriň göwrümi 120π-ge, gapdal üsti 60π-ge deň. Silindriň esasynyň radiusyny tapyň.

A) 4; B) 5; C) 6; D) 4; 2.

16. Silindriň beýikligi 5-e, esasynyň içinden çyzylan dogry üçburçlugyň tarapy $3\sqrt{3}$-e deň. Silindriň göwrümini tapyň.

A) 25π; B) 35π; C) 45π; D) 40π.

17. Silindriň ok kesimi diagonaly 12-ä deň bolan kwadratdan ybarat. Onuň göwrümini tapyň.

A) $108\sqrt{2}\pi$; B) $54\sqrt{2}\pi$; C) $36\sqrt{2}\pi$; D) $216\sqrt{2}\pi$;

18. Silindriň doly üsti 24π-ge, gapdal üsti bolsa 6π-ge deň. Şu silindriň göwrümini tapyň.

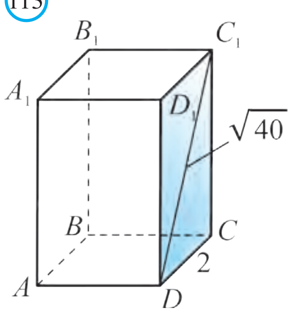
A) 7π; B) 11π; C) 8π; D) 9π.

9.2. Meseleler

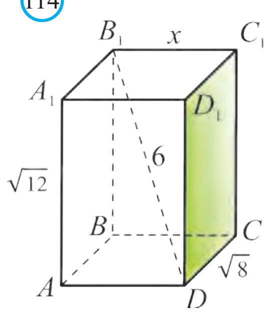
328. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ gönüburçly parallelepiped (113-nji surat). $DC_1=\sqrt{40}$, $DC=2$, $P_{ABCD}=10$. Parallelepipediň diagonalyny tapyň.

329. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ gönüburçly parallelepiped. 114-nji suratda berlen maglumatlara görä B_1C_1 gapyrganyň uzynlygyny tapyň.

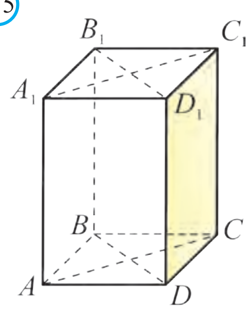
113



114

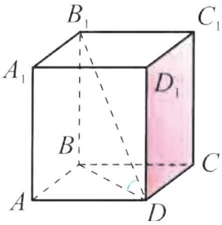


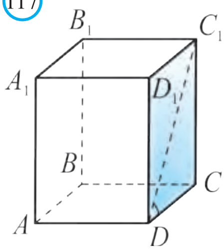
115

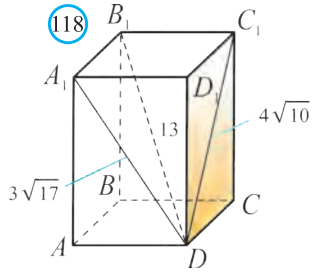


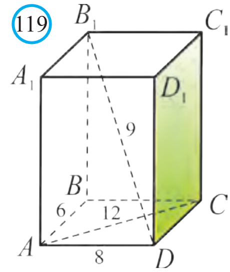
330. Göni prizmanyň esasy $ABCD$ romb (115-nji surat). Prizmanyň diagonal kesimleriniň meýdany 60 we 80-a, beýikligi bolsa 10-a deň. Prizmanyň gapdal üstüni tapyň.

331. Göni prizmanyň esasy $ABCD$ romb. Prizmanyň diagonal kesimleri meýdany 10 we 16-a, beýikligi bolsa 4-e deň. Prizmanyň gapdal üstüni tapyň.

116


117


118


119


332. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ dogry prizma (116-njy surat). $\angle B_1DB = 45°$, $S_{doly} = 32(2\sqrt{2}+1)$. AD -ni tapyň.

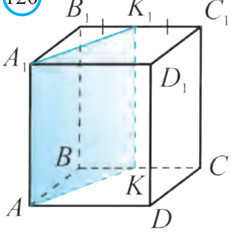
333. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ dogry prizma (117-nji surat). $\angle C_1DC = 60°$, $S_{doly} = 128(2\sqrt{3}+1)$. AD -ni tapyň.

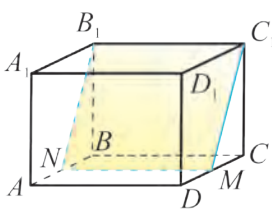
334. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ gönüburçly parallelepiped (118-nji surat). $DB_1 = 13$, $DA_1 = 3\sqrt{17}$, $DC_1 = 4\sqrt{10}$. S_{gap} -ni tapyň.

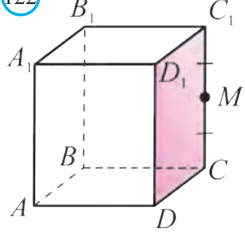
335. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ göni parallelepiped (119-njy surat). $AB = 6$, $AD = 8$, $DB_1 = 9$. S_{gap} -ni tapyň.

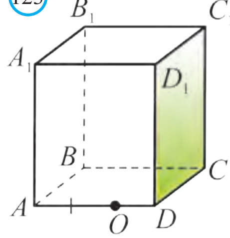
336. K nokat BC gapyrganyň ortasy (120-nji surat). $ABKA_1B_1K_1$ prizmanyň göwrüminiň $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipediň göwrümine gatnaşygyny tapyň.

337. N we M nokatlar parallelepipediň gapyrgalarynyň ortalary (121-nji surat). $AA_1B_1NDD_1C_1M$ prizmanyň göwrüminiň $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepiped göwrümine gatnaşygyny tapyň.

120


121


122


123


338. Dörtburçlukly dogry prizmanyň gapdal üstüniň meýdany 72 cm^2-a, esasynyň meýdany bolsa 64 cm^2-a deň. Prizmanyň göwrümini tapyň.

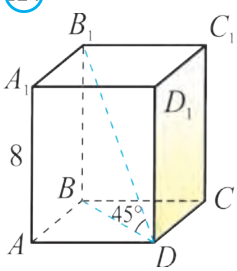
339. Dörtburçlukly dogry prizmanyň esasynyň perimetri 12 cm, gapdal granynyň perimetri bolsa 18 cm-e deň. Prizmanyň göwrümini tapyň.

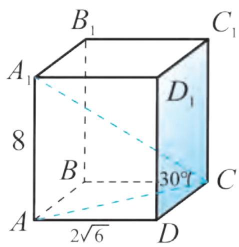
340. Kub berlen (122-nji surat). $CM = MC_1$ we ADM tekizlik kuby iki bölege bölýär. Kubuň uly böleginiň göwrüminiň kiçi bölegi göwrümine gatnaşygyny tapyň.

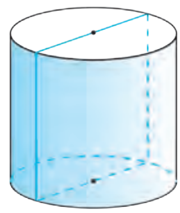
341*. Kub berlen (123-nji surat). $AM : MD = 2 : 1$ we BB_1M tekizlik kuby iki bölege bölýär. Eger kubuň kiçi bölegi göwrümi 6-a deň bolsa, kubuň göwrümini tapyň.

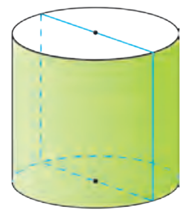
342*. Dörtburçlukly dogry prizmanyň beýikligi 8-e, diagonaly esasyň tekizligine ýapgytlygy 45°-a deň (124-nji surat). Prizmanyň göwrümini tapyň.

343*. Dörtburçlukly dogry prizmada esasynyň tarapy $2\sqrt{6}$ -a, diagonaly esasynyň tekizligi bilen 30°-ly burçy düzýär (125-nji surat). Prizmanyň göwrümini tapyň.

124


125


126


127


344. Silindriň gapdal üstüniň meýdany 91π-ge deň (126-njy surat). Silindriň ok kesiminiň meýdanyny tapyň.

345. Silindriň ok kesimi meýdany 173-e deň bolan kwadrat (127-nji surat). Silindriň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

346. Silindriň beýikligi 24-e, ok kesimiň diagonaly 26-a deň. Silindriň göwrümini tapyň.

347. Silindriň ok kesiminiň meýdany 10-a. Esasynyň töwereginiň uzynlygy 8-e deň. Silindriň göwrümini tapyň.

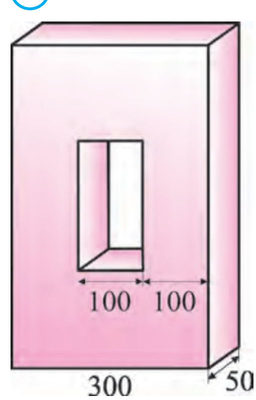
348. Silindriň radiusy 3-e, gapdal üstüniň meýdany 200-e deň. Silindriň göwrümini tapyň.

9.3. 2-nji barlag işiniň nusgasy

1. Ikigranly burçuň A nokady onuň gapyrgasyndan 10 cm, granyndan 5 cm uzaklykda ýerleşýär. Ikigranly burçuň gradus ölçegini tapyň.

2. Altyburçly dogry prizmanyň ähli gapyrgalary 2-ä deň bolsa, onuň doly üstüniň meýdanyny tapyň.

3. Esasynyň diamerti 18 m we beýikligi 7 m bolan silindr şeklindäki sisterna nebit bilen doldurylan. Eger nebitiň dykyzlygy 0,85 g/cm^3 bolsa, bu sisternadaky nebitiň massasy näçe tonna?

128


4. Her bir gapyrgasy uzynlygy 4 cm-e deň bolan dogry altyburçlukly prizmanyň içinden çyzylan silindriň göwrümini tapyň.

5. (*Gowy özleşdirýän okuwçylar üçin goşmaça mesele*). 128-nji suratda ölçegler mm-lerde berlen detalyň doly üstüni we göwrümini tapyň.

Trigonometrik funksiýalaryň ýakynlaşan bahalarynyň jedweli

A	sin A	tg A	A	sin A	tg A	A	sin A	tg A
0°	0	0	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

Jogaplar

1-nji babyň jogaplary

3. $A(5;\ 7;\ 10)$, $B(4;\ -3;\ 6)$, $C(5;\ 0;\ 0)$, $D(4;\ 0;\ 4)$, $E(0;\ 5;\ 0)$, $F(0;\ 0;\ -2)$. **6.** (3; 2; 0), (3; 0; 4), (0; 2; 4). **8.** $\sqrt{26}$. **9.** a) 3, 3, 3; b) $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$; c) $3\sqrt{2}$. **10.** 2, 3, 1. **11.** (3; 3; 3), (–3; 3; 3), (3; –3; 3), (3; 3; –3), (–3; –3; 3), (–3; 3; –3), (3; –3; –3), (–3; –3; –3). **12.** $O(0;0;0)$, $B(2;\ 0;\ 0)$, $A(2;\ 2;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$, $O_1(0;\ 0;\ -2)$, $B_1(2;\ 0;\ -2)$, $A_1(2;\ 2;\ -2)$, $C_1(0;\ 2;\ -2)$. **13.** D nokat. **14.** $3\sqrt{6}$. **15.** Ýok. **17.** *c)* deňýanly, $P=6\ (1+\sqrt{3})$, $S=9\sqrt{2}$. **18.** (–0,25; 0,25; 0). **19.** $D_1(1;\ -1;\ 1)$, $A_1(1;\ 1;\ -1)$, $B_1(-1;\ 1;\ -1)$, $D_1(1;\ -1;\ -1)$. **21.** $x^2+y^2+z^2=25$, $x^2+y^2+z^2\leq 25$. **22.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$; $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2\leq 9$. **23.** $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$. **25.** 1)(0; 1; 0); 2) (1; 1; 1); 3) (0; 0; 2), 4) (–0,7; 0,1; 0,6); 5) $(2\sqrt{3};\ 1{,}5;\ 1)$. **28.** $A(5;-4;0)$, $B(-7;5;6)$, **31**. $K\left(0;-5;\dfrac{17}{2}\right)$. **32.** a) $D(-1;\ -3;\ -9)$. **33.** *a)* $M(-1;\ 2;\ 0)$; *c)* $M(3;\frac{3}{4};\ 0)$. **35.** $L(\frac{25}{8};\frac{33}{8};\frac{9}{4})$. **36.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$. **37**. a) $\sqrt{2}$; b) 30°; 30°; 120°; c) $2\sqrt{3}$. **38.** $MK=\dfrac{\sqrt{73}}{3}$. **39.** $A(5;\ 4;\ 10)$, $B(4;\ -3;\ 6)$, $C(5;\ 0;\ 0)$, $D(4;\ 0;\ 4)$. **40.** $\overline{OA}=(1;\ 1;\ 1)$, $\overline{OB}=(-1;\ 0;\ 1)$, $\overline{OC}=(0;\ 1;\ 1)$, $\overline{BO}=(1;\ 0;\ -1)$, $\overline{CO}=(0;\ -1;\ -1)$, $\overline{AB}=(-2;\ -1;\ 0)$. **42.** a) $\overline{AB}=(2;\ 5;\ 3)$, b) $\overline{AB}=(4;\ -6;\ 2)$. **43.** $|\overline{a}|=\sqrt{3}$; $|\overline{b}|=2\sqrt{5}$, $|\overline{c}|=\sqrt{14}$, $|\overline{d}|=\sqrt{30}$. **44.** ±3. **45.** a) $\overline{a}(3;\ 6;\ -3)$, b) $\overline{a}(-3;\ -6;\ 3)$. **46.** a) 1 ýa-da –1; b) 3 ýa-da –1; c) 2 ýa-da –4; d) 3 ýa-da 5/3. **48.** $D(-2;\ 0;\ 1)$. **50.** $n=\dfrac{4}{3}$; $m=\dfrac{3}{2}$. **52.** a) $D(3;\ 0;\ 0)$. **56.** $\overline{c}(-3;\ -4;\ 8)$, $|\overline{c}|=\sqrt{89}$; 2) $\overline{c}(4;\ 5;\ 5)$, $|\overline{c}|=\sqrt{66}$. **57.** $\overline{c}(-3;\ 4;\ 0)$, $|\overline{c}|=5$; 2) $\overline{c}(0;\ 2;\ 6)$, $|\overline{c}|=2\sqrt{10}$. **59.** $\overline{a}=\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{j}-4\overline{k}$, $\overline{c}=2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$, $\overline{d}=\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k}$. **60.** $\sqrt{59}$, $\sqrt{219}$, $\sqrt{122}$, $\sqrt{918}$. **63.** $AC = AO + OC = 4i + 2k$, $AC(-4;\ 0;\ 2)$; $CB = CO + OB = 2k + 9j$, $CB\ (0;\ 9;\ 2)$; $AB = AO + OB = -4i + 9j$, $AB(-4;\ 7;\ 0)$. **65.** ≈180N. **66.** a) 60°; b) 30°; c) 90°; d) 60°; e) 45°. **67.** a) –6; b) 3; c) –6; d) 3. **68.** a) 40°; b) 140°; c) 150°. **69.** a) 30; b) 3; c) 15; d) –28. **70.** a) 1/3; b) –1; c) 2; d) 4. **71.** a) 16. **75.** a) 1; b) 0. **76.** $\overline{BF}=2(\overline{DO}-\overline{DC})$. **77.** $\dfrac{1}{3}(2\overline{AC}-\overline{AB})$. **78.** $\dfrac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AC})-\overline{AD}$.**83.** a) (1; –1; 7); b) (–2; 3; 1); c) (0; –4; 4). **84.** $\overline{p}(-1;\ 5;\ 3)$. **86.** $B(-8;\ 4;\ 1)$. **88.** (2; –5; 9); (–2; –2; 7); (6; –12; 2). **93.** *Oxz* tekizlige görä. **100.** (0; –3; 1). **106.** a) 36 sm; b) 48 sm; c) 6 sm; d) 4 sm. **110.** a) $B(-5;\ 7{,}5;\ 12{,}5)$; b) $B(5;\ -7{,}5;\ -12{,}5)$; c) $B(-0{,}5;\ 0{,}75;\ 1{,}25)$; d) $B(0{,}5;-0{,}75;-1{,}25)$. **111.** a) $B(-2{,}5;\ 1;\ 3)$; b) $B(-7;\ 2;\ 6)$. **112.** a) $O_1(0;\ 0;\ 0)$, $A_1(-4;\ 0;\ 0)$, $B_1(0;-4;\ 0)$, $C_1\ (0;\ 0;-4)$; b) $O_1(-4;\ 0;\ 0)$, $A_1(4;\ 0;\ 0)$, $B_1(-4;\ 8;\ 0)$, $C_1\ (-4;\ 0;\ 8)$. **115.** (2;–3; 3). **116.** –3. **117.** (7; 1; 2). **118.** (1; –2; 3). **119.** (–1; –2; –3). **120.** (1; 2; –3). **121.** (–2; –3; –5). **122**. $D(0;\ 9;-7)$. **123.** $C(2;\ 0;-8)$. **124.** 19. **125.** (–7; 7; –7). **126.** (1; 2; 1). **127.** (–2; 7; 1). **128.** ±2. **129.** ±3. **130.** 13. **131.** 10. **132.** 9. **133.** 0. **134.** –2. **135.** 1. **136.** 4. **137.** 90°. **138.** 4. **139.** –4. **140.** –2; 4. **141.** $8\vec{i}+9\vec{j}-4\vec{k}$.

1-nji test synagynyň jogaplary

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
C	D	D	B	D	B	B	A	A	D	B	B	B	C	A	C	B	D

1-nji barlag işiniň jogaby

1) (1; 2; -3); 2) 13; 3) $\sqrt{2}$; 4) 90°; 5) 1.

2-nji babyň jogaplary

142. 47°, 133°, 47°, 133°. **143.** 128°. **144.** 80°. **145.** 90°. **146.** 5 sm, 5 sm. **147.** 12 sm. **148.** 5 sm. **152.** 45°. **153.** 45°. **154.** 80°. **159.** 60°, 45°. **190.** 144. **191.** a)18; b)76; c) 110; d) 132; e) 48; f) 96; g) 124. **192.** a) 146; b) 126; c) 108; d) 146. **193.** 84 sm. **194.** $3\sqrt{2}$ sm^2. **195.** 216 sm^2. **196.** a) 58; b) 62; c) 94. **197.** a) 38; b) 92; c) 48. **198.** ≈68 m^2. **199.** 104 sm. **200.** 68 sm^2. **201.** 78 sm^2. **204.** 5120 sm^3. **207.** 144. **209.** 8. **210.** 5. **211.** 6. **212.** 3. **213.** 24. **214.** 2. **215.** 8. **216.** 8. **217.** 72. **218.** 4. **220.** 4. **225.** a) 4; b) 40; c) 71; d) 88; e) 18; f) 33; g) 78. **226.** a) 90; b) 77; c) 54; d) 96. **228.** a) 21; b) 26; c) 58. **241.** 1 marta. **252.** 150 ta. **256.** 90 ta. **257.** 3315 g. **258.** 60 m^2. **259.** 24 ta. **260.** 24 sm^3. **263.** 960 m^3. **264.** 144 g. **277.** 240π sm^2 , 280π sm^2. **278.** 48 sm^2. **279.** 5 sm. **280.** 128 sm^2. **281.** $\pi Q/4$. **282.** 36π sm^2. **283.** 4π. **284.** 36 sm^2. **285.** 12π. **286.** 64. 6. **287.** 3 dm. **288.** $2\sqrt{34}$ sm. **289.** 3 dm. **290.** 200π, 250π. **291.** 50, 50 $+50/\pi$. **292.** 45π sm^3. **293.** 16π sm^2. **294.** 1500 sm^3. **295.** 800 sm^2. **296.** 1000 sm^2. **297.** 5574 sm^2, 1824 sm^2. **298.** 1375π sm^3, 11,375 kg. **299.** 141900 g, 310860 sm^2. **300.** Birinjisiniň. **301.** 2041 so'm, 15700 sm^2. **302.** 349,45 sm^2, 492 sm^3, 1747 so'm. **303.** 37680-allon. **304.** 318 gallon. **306.** 3 sm^3. **307.** 4 sm . **308.** 9 m^3. **309.** 1,125. **311.** a) 45π; b) $3{,}75\pi$; c) 144π. **312.** a) 14π; b) $937{,}5\pi$. **313.** 4. **314.** 0,25. **315.** 125π. **316.** 4π. **317.** 3. **318.** 8. **319.** 36. **320.** 36. **321.** 24. **322.** ≈30 m^3. **323.** ≈3000 sm^3. **324.** a) ≈1050 sm^2; b) ≈2250 sm^3. **325.** ≈162 kg.

2-nji test synagynyň jogaplary

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
B	A	D	A	B	A	C	C	A	A	A	C	C	A	A	C	A	D

2-nji barlag işiniň jogaplary

1) 30^0; 2) $2\sqrt{3}$ +24; 3) 1513 *l*; 4) 64π sm^3; 5) 35 dm^2, 6,5 dm^3.

MAZMUNY

Dersligi düzende peýdalanylan we goşmaça öwrenmäge hödürlenilýän okuw-usuly edebiýatlary we elektron resurslar

1. Погорелов А.В. "Геометрия 10-11", учебник, Москва. Просвешение", 2009.
2. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. "Математика 11", учебник, Минск, 2013.
3. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 класс. учебник, Москва, 2008
4. Билянинa О.Я. и др. "Геометрия 11" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
5. Daniel C.Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/ Cole, Cingage Learning, 2011.
6. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
7. Norjigitov X., Mirzayev Ch. Stereometrik masallarni yechish. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. -T., 2004 y.
8. Israilov I., Pashayev Z. Geometriya. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. II qism. -T.: O‘qituvchi, 2005 y.
9. http://www.uzedu.uz - Halk bilimi ministrliginiň informasion tälim portaly.
10. http://www.eduportal.uz - Multimedia merkeziniň informasion tälim portaly.
11. http://www.ixl.com - Aralykdan durup okatmak saýty (iňlis dilinde).
12. http://www.mathkang.ru - "Kenguru" halkara matematiki saýlaw saýty (rus dilinde).
13. http://www.khanakademy.org -"Han akademiýasy" aralyk tälimi saýty (iňlis dilinde).
14. http://www.brilliant.org – Matematikadan esasy tälim saýty (iňlis dilinde).

Algebra va analiz asoslari: **M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov.**

Geometriya: **B.Q. Haydarov.**

MATEMATIKA 11
ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI
GEOMETRIYA
I QISM

(Turkman tilida)
O‘rta ta’lim muassasalarining 11-sinf o‘quvchilari uchun darslik
1- nashr

Terjime eden	K. Hallyýew
Redaktor	J. Metýakubow
Tehredaktor	A. Abdusalomov
Korrektor	J.Metýakubow
Kompýuterde sahaplaýjy:	A. Abdusalomov

Neşirýat lisenziýasy AI № 296. 22.05.2017
Çap etmäge 2018-nji ýylyň 16-nji iýunynda rugsat edildi.
Ölçegi $70\times100^{1}/_{16}$ «TimesNewRoman» garniturasy.
Göwrümi 12,0 çap listi. Neşir listi 11.
1010 nusgada çap edildi.

«Credo Print Group» JÇJ-niň çaphanasynda çap edildi.
Original-maket «Zamin Nashr» JÇJ-de taýýarlandy.
100053, Daşkent ş. Bagyşemal köçesi, 160.
Tel: 234-44-05
Buýurma № 1913.