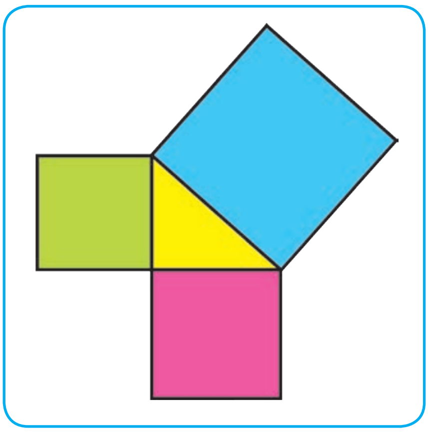
A.A. RAHIMKARIÝEW, M.A. TOHTAHODJAÝEWA

GEOMETRIÝA 8

Umumy orta bilim berýän mekdepleriň 8-nji synpy üçin derslik

Gaýtadan işlenen we doldurylan 4-nji neşir

Özbegistan Respublikasynyň Halk bilimi ministrligi tarapyndan neşire hödürlenen



DAŞKENT
«O‘ZBEKISTON»
2019

UO‘K: 514(075)
KBK 22.151ya721
R 30

S y n   ý a z a n l a r :

N.A. Umarowa — Daşkent welaýatynyň HTIGT we HKI uly mugallymy;
G.A. Fozilowa — Ýunusabat tümenindäki 274-nji mekdebiň matematika mugallymy.

Derslik Respubllikan tälim merkezi tarapyndan 2018-nji ýylyň 25-nji noýabrynda berlen «Anyk ylymlar blok moduly boýunça umumy orta tälimiň okuw maksatnamasy (VIII synp)» esasynda ýazylan. Derslikde belgilenen umumy orta tälimde matematika predmetini okatmagyň maksady we wezipeleri, okuwçylara okuw işi netijesinde goýulýan talaplar öz beýanyny tapan. Derslik okuwçylarda şekillendirilýän daýanç kompetensiýalaryň elementlerini öz içine alýar.

Gaýtadan işlenende ekspertleriň we synçylaryň teklipleri hasaba alyndy.

Her bir babyň ahyrynda ýazma barlag işlerinden nusgalar we testler getirilen bolup, olar okuwçylaryň barlag işine pugta taýýarlanmaklaryna kömek edýär.

Taryhy maglumatlar bölüminde ýurdumyzyň we dünýä alymlarynyň ylma goşan uly goşantlary we taryhy-ylmy işleri bilen tanyşarsyňyz.

«Iňlis dilini öwrenýäris» bölüminde temalarda duşýan möhüm geometrik düşünjeleriň iňlis dilindäki terjimesi berlen.

Gaýtalamaga berlen meselelerden ýylyň dowamynda peýdalanyp bilersiňiz.

Temalarda açyp görkezilen bilimleri öwrenmegiňizde Size üstünlik arsuw edýäris!

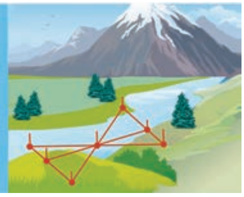
DERSLIKDÄKI ŞERTLI BELGILER:

– kadalar, häsiýetler, kesgitlemeler;
? – ugrukdyryjy soraglar we ýumuşlar;
– synpda işlenýän gönükmeler;
– ösdüriji gönükmeler;
– mesele çözmegiň nusgasy;
– öý işi üçin gönükmeler.

Respublikanyň ýörite kitap gaznasynyň serişdeleriniň hasabyndan çap edildi.

ISBN 978-9943-25-817-4

7-NJI SYNPDA GEÇILENLERI GAÝTALAMAK



1. Üçburçlugyň perimetrine, bissektrisasyna we beýikligine degişli meseleler

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. Üçburçlugyň perimetri, medianasy, beýikligi we bissektrisasy diýip nämä aýdylýar?

2. Perimetri 18 cm-e deň bolan üçburçlugyň bissektrisasy ony perimetri 12 cm we 15 cm-e deň bolan üçburçluklara bölýär. Üçburçlugyň bissektrisasyny tapyň (1-nji surat).

3. Üçburçlugyň esasyna geçirilen medianasy ony perimetri 18 cm we 24 cm-e deň iki üçburçluga bölýär. Berlen üçburçlugyň kiçi gapdal tarapy 6 cm-e deň. Onuň uly gapdal tarapyny tapyň (2-nji surat).

4. ABC üçburçlukda $AB=BC$ we BD mediana 6 cm-e deň. ABD üçburçlugyň perimetri 24 cm-e deň. Berlen üçburçlugyň perimetrini tapyň (3-nji surat).

Berlen: $\triangle ABC$-da: $AB=BC, BD=6$ cm – mediana, $P_{ABD}=24$ cm.

Tapmaly: $P_{ABC}=?$

Çözülişi. 1) $P_{ABD}=AB+BD+AD$, mundan:

$$24=AB+AD+6,\ \ AB+AD=24-6,\ \ AB+AD=18 \text{ (cm)}.$$

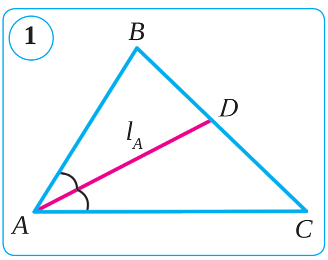
2) $AB=BC$ we $AC=2AD$, onda

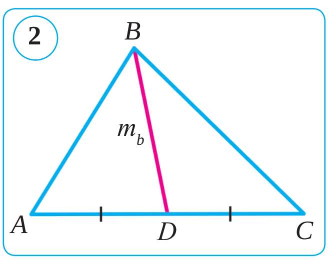
$$P_{ABC}=AB+BC+AC=2(AB+AD)=2\cdot 18=36 \text{ (cm)}.$$

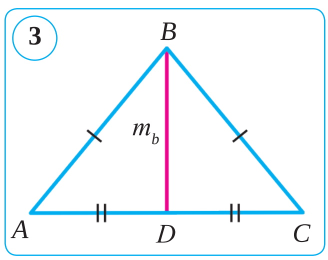
Jogaby: $P_{ABC}=36$ cm.

5. Üçburçlugyň iki tarapy 0,5 dm we 8,7 dm-e deň. Üçünji tarapynyň uzynlygy natural sandygyny bilmek bilen şu tarapyny tapyň.

6. Perimetri 30 cm-e deň bolan üçburçlugyň bissektrisasy ony perimetrleri 16 cm we 24 cm-e deň bolan üçburçluklara bölýär. Üçburçlugyň bissektrisasyny tapyň.







7. Perimetri 36 cm-e deň bolan üçburçlugyň beýikligi ony perimetrleri 18 cm we 24 cm-e deň bolan üçburçluklara bölýär. Üçburçlugyň beýikligini tapyň.

8. Deňýanly üçburçlugyň perimetri 22,5 cm, gapdal tarapy bolsa 0,6 dm. Şu üçburçlugyň esasyny tapyň.

2. Üçburçluklaryň deňliginiň nyşanlary, üçburçlugyň burçlarynyň jeminiň we daşky burçunyň häsiýetine degişli meseleler

9. ABC we DEF üçburçluklarda: $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A=\angle D$. Bu üçburçluklar deňmi?

10. Üçburçlugyň 117°-le daşky burçuna goňşy bolmadyk içki burçlarynyň gatnaşygy 5 : 4 ýaly. Üçburçlugyň içki burçlaryny tapyň.

11. Deň taraply ABC üçburçlugyň AD we BE bissektrisalary O nokatda kesişýär. Bissektrisalaryň arasyndaky AOE burçy tapyň.

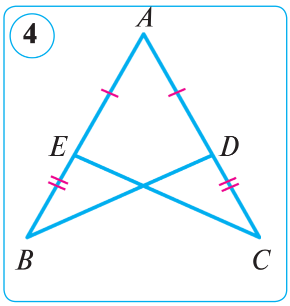
12. Deňýanly üçburçlugyň esasyndaky burçy kütek bolup bilermi?

Çözülişi. Bize mälim bolşy ýaly, deňýanly üçburçlugyň esasyndaky burçlary deň. Emma iki kütek burçuň jemi 180°-dan uly bolýar. Bu üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi baradaky teorema ters. *Jogaby:* ýok, bolup bilmeýär.

13. Üçburçlugyň 108°-ly daşky burçuna goňşy bolmadyk içki burçlarynyň gatnaşygy 2 : 7 ýaly. Üçburçlugyň içki burçlaryny tapyň.

14. Bir üçburçlugyň iki tarapy we burçy degişlilikde ikinji üçburçlugyň iki tarapyna we burçuna deň. Mundan şu üçburçluklaryň deňligi gelip çykarmy?

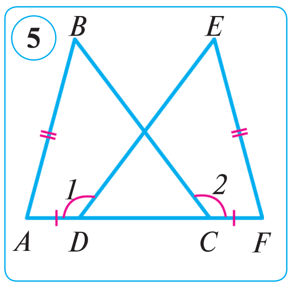
15. ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklarda AB we A_1B_1, BC we B_1C_1 taraplar deň hem-de degişlilikde AB we A_1B_1 taraplara geçirilen CD we C_1D_1 medianalar hem deň. Üçburçluklaryň deňdigini subut ediň.



16. 4-nji suratda $AB=AC$ we $AE=AD$. $BD=CE$ bolýandygyny subut ediň.

17. 5-nji suratda $AD=CF$, $AB=FE$ we $CB=DE$.

$\angle 1=\angle 2$ bolýandygyny subut ediň.



18. ABC üçburçlugyň B burçy 42°-a, A depesindäki daşky burçy bolsa 100°-a deň. ACB burçy tapyň.

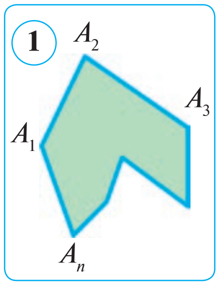
19. Gönüburçly ABC üçburçlugyň C burçy göni, A depesindäki daşky burçy bolsa 136°-a deň. B burçy tapyň.

I BAP
DÖRTBURÇLUKLAR

1-§. ESASY DÖRTBURÇLUKLAR WE OLARYŇ HÄSIÝETLERI

1. KÖPBURÇLUGYŇ IÇKI WE DAŞKY BURÇLARYNYŇ HÄSIÝETI

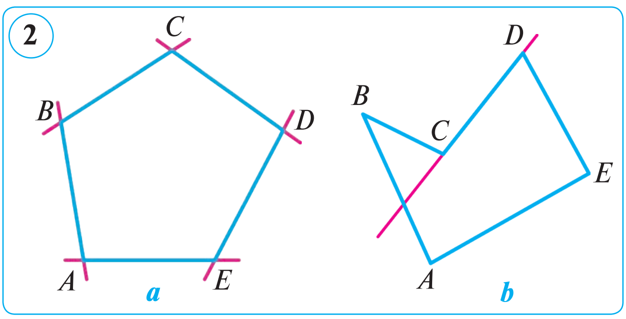
1. Köpburçluklar. A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 kesimlerden düzülen şekile garap geçýäris. Kesimler şeýle ýerleşen bolup, hiç bir iki *goňşy kesim* (olar umumy uja eýe) bir göni çyzykda ýatmaýar, goňşy bolmadyk kesimler bolsa umumy nokada eýe däl (1-nji surat). Şeýle şekile ***köpburçluk*** diýilýär. A_1, A_2, ..., A_n nokatlar (depeler) *köpburçlugyň* ***depeleri***, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 kesimler bolsa *köpburçlugyň* ***taraplary*** diýlip atlandyrylýar.

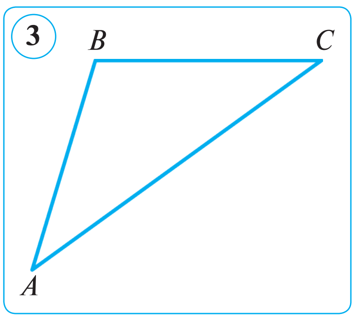


Köpburçlugyň taraplarynyň sany onuň depeleriniň sanyna, ýagny burçlarynyň sanyna deň. Köpburçluklar depeleriniň (taraplarynyň) sanyna görä *üçburçluklara*, *dörtburçluklara*, *bäşburçluklara* we başgalara bölünýär.

Eger ýapyk döwük çyzyk öz-özi bilen kesişmese, şeýle döwük çyzyga ***ýönekeý ýapyk döwük çyzyk*** diýilýär. Ol tekizligiň şu döwük çyzyga degişli bolmadyk nokatlaryny *iki zolaga – içki* we *daşky zolaga* bölýär hem-de umumy araçäk wezipesini ýerine ýetirýär. 1-nji suratda içki zolak boýap görkezilen.

1-nji kesgitleme. *Eger köpburçluk onuň islendik tarapyny öz içine alan göni çyzyk bilen bir ýarym tekizlikde ýatsa, oňa* ***güberçek köpburçluk*** *diýilýär. Munda göni çyzygyň özi-de şu ýarym tekizlige degişli hasaplanýar.*





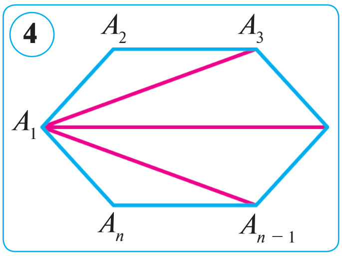
2-nji *a* we 3-nji suratda güberçek köpburçluk, 2-nji *b* suratda bolsa güberçek däl köpburçluk şekillendirilen. Islendik üçburçluk – güberçek köpburçlukdyr (3-nji surat).

2. Köpburçlugyň içki we daşky burçlarynyň häsiýeti.

2-nji kesgitleme. ***Köpburçlugyň berlen depesindäki içki burçy*** *diýip, onuň şu depesinde duşuşýan taraplary emele getiren burça aýdylýar.*

1-nji teorema.

Güberçek *n* burç içki burçlarynyň jemi 180°(*n*−2)-a deň, bu ýerde *n* – taraplaryň sany.

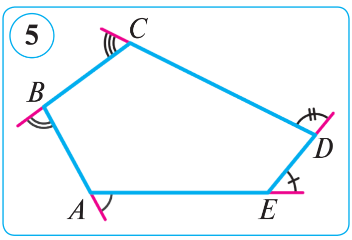


Subudy. $A_1A_2A_3...A_n$ – berlen güberçek *n* burç we $n>3$ bolsun (4-nji surat). Käbir depesinden, meselem A_1-den, köpburçlugyň ähli diagonallaryny geçirýäris. Bu diagonallar ony $(n-2)$ üçburçluga bölýär. Hakykatdan hem, *iki çetki üçburçluklar* ($\Delta A_1A_2A_3$ we $\Delta A_1A_{n-1}A_n$) köpburçlugyň iki tarapy we bir diagonaly, galan üçburçluklar bolsa köpburçlugyň bir tarapyndan we iki diagonalyndan düzülen. Şonuň üçin üçburçluklar $(n-2)$ sany, ýagny köpburçlugyň taraplarynyň sanyndan ikä kem bolýar. Köpburçlugyň burçlary jemi ony düzýän üçburçlugyň burçlarynyň jemine, ýagny $S_n = 180°(n-2)$-ä deň bolýar. Teorema subut edildi.

3-nji kesgitleme. ***Köpburçlugyň berlen depesindäki daşky burçy*** *diýip, onuň şu depesindäki içki burçuna goňşy burça aýdylýar.*

2-nji teorema.

Güberçek *n* burçuň her bir depesinden bir sanydan alnan daşky burçlarynyň jemi 360°-a deň.



Subudy. Köpburçlugyň her bir depesinde bir sanydan daşky burç guryarys. Köpburçlugyň içki burçy we oňa goňşy bolan daşky burçunyň jemi 180°-a deň (5-nji surat). Şu sebäpli ähli içki we her bir depesinden bir sanydan alnan daşky burçlarynyň jemi 180°*n*-e deň. Emma köpburçlugyň hemme içki burçlarynyň jemi 180°(*n*−2)-a deň. Onda her bir depesinden bir sanydan alnan daşky burçlaryň jemi

$$180°n-180°(n-2)=180°n-180°n+360°=360°$$

-a deň bolýar. Teorema subut edildi.

1-nji mesele. Taraplary deň bolan (dogry) *n* burçuň her bir içki burçy (α_n) nämä deň?

Çözülişi. Bize mälim bolşy ýaly, islendik güberçek n burçuň burçlarynyň jemi $180°(n-2)$-a deň. Dogry köpburçlugyň burçlary deň bolany üçin olaryň her biri aşakdaka deň: $\alpha_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$.

2-nji mesele. Taraplary deň bolan (dogry) n burçuň her bir daşky burçy (β_n) nämä deň?

Çözülişi. Bize mälim bolşy ýaly, islendik güberçek n burçuň her bir depesinden bir sanydan alnan daşky burçlarynyň jemi 360°-a deň.

Şeýdip, taraplary deň bolan n burçuň her bir daşky burçy aşakdaka deň:

$$\beta_n = \frac{360°}{n}.$$

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Köpburçlugyň berlen depesindäki içki burçy diýip nähili burça aýdylýar? Daşky burçy diýip nähili?

?

2) Güberçek n burçuň içki burçlarynyň jemi nämä deň?

2. Köpburçlugyň burçlarynyň jemi: 1) 1080°-a; 2) 1620°-a; 3) 3960°-a deň. Köpburçlugyň näçe tarapy bar?

3. 1) Dörtburçlugyň; 2) onikiburçlugyň; 3) otuzburçlugyň; 4) elliburçlugyň içki burçlarynyň jemini tapyň. *Nusga.* 1) $S_{13} = 180° \cdot (13-2) = 180° \cdot 11 = 1980°$.

4. Eger dörtburçlugyň üç sanydan alnan burçlarynyň jemi degişlilikde 240°, 260° we 280° bolsa, onuň iň kiçi burçuny tapyň.

5. Her bir içki burçy: 1) 150°-a; 2) 170°-a; 3) 171°-a deň bolan güberçek köpburçlugyň näçe tarapy bar?

6. Köpburçlugyň içki burçlarynyň jemi her bir depesinden bir sanydan alnan daşky burçlarynyň jeminden üç esse uly. Şu köpburçlugyň taraplarynyň sany näçe? Boş ýerlere degişli sanlary goýuň.

Çözülişi. Meseläniň şertine görä, $180°(n-2) = \ldots \cdot 360°$. mundan

$$180°(n-2) = \ldots \cdot 2 \cdot 180°,\ n-2 = 6,\ n = \ldots .$$

Jogaby: $n = \ldots$.

7. Daşky burçunyň her biri: 1) 18°-a; 2) 24°-a; 3) 60°-a deň bolan güberçek köpburçlugyň näçe tarapy bar?

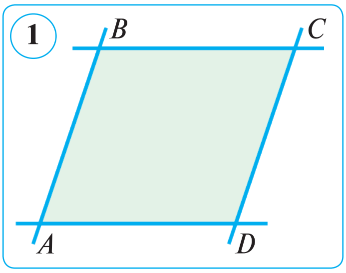
8. Eger dörtburçlugyň üç burçy kütek bolsa, onda dördünji burçy ýiti bolýar. Şony subut ediň.

9. Daşky burçunyň her biri: 1) 15°-a; 2) 45°-a; 3) 72°-a deň bolan güberçek köpburçlugyň näçe tarapy bar?

10. Güberçek dörtburçlugyň burçlary 1, 2, 3 we 4 sanlaryna proporsional. Şu burçlary tapyň.

2. PARALLELOGRAM WE ONUŇ HÄSIÝETLERI

1. Parallalogram. Tekizlikde iki parallel göni çyzygyň başga iki parallel göni çyzyk bilen kesişmeginden emele gelen dörtburçluga garap geçýäris (1-nji surat). Bu dörtburçluk *ýörite* ada eýe bolup, oňa ***parallelogram*** diýýäris.



Kesgitleme. *Garşylykly taraplary özara parallel bolan dörtburçluk* ***parallelogram*** *diýlip atlandyrylýar.*

Eger $ABCD$ parallelogram bolsa, $AB \| DC$ we $AD \| BC$ bolýar (1-nji surat).

1-nji mesele. 2-nji suratda $\triangle ABC = \triangle CDA$. $ABCD$ dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň.

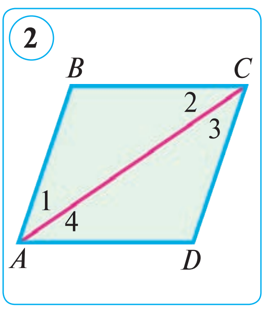
Çözülişi. ABC we CDA üçburçluklaryň deňliginden aşakdaky gelip çykýar: $\angle 1 = \angle 3$ we $\angle 2 = \angle 4$. 1 we 3 burçlar – AB we CD parallel göni çyzyklar we AC kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin deň. Edil şonuň ýaly, 2 we 4 burçlar BC we AD parallel göni çyzyklar hem-de AC kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin deň. Parallel göni çyzyklaryň nyşanyna görä aşakdaka eýe bolarys: $AB \| DC$ we $BC \| AD$. Diýmek, $ABCD$ dörtburçlukda garşylykly taraplar jübüt-jübütden parallel, ýagny kesgitlemä görä, $ABCD$ – parallelogram.

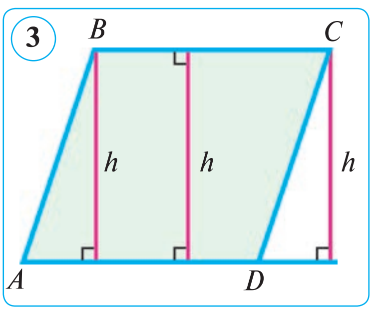
Parallelogramyň bir tarapynda ýatýan nokatdan garşylykly tarapy öz içine alan göni çyzyga geçirilen perpendikulýara parallelogramyň ***beýikligi*** diýilýär. Parallelogramyň bir tarapyna çäksiz köp beýiklikler geçirmek mümkinligi aýdyň (3-nji surat), olar parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyklar bolany üçin özara deň. Parallelogramyň bir depesinden onuň dürli tarapyna bir-birinden tapawutlanýan iki beýiklik geçirmek mümkin. Meselem, 4-nji suratda BP we BF – beýikliklerdir.

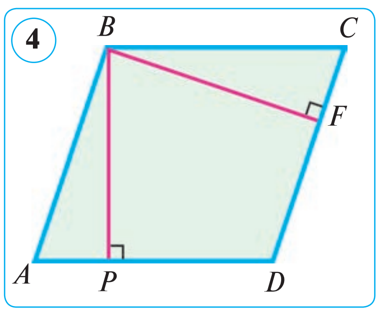
2. Parallelogramyň häsiýetleri.

1-nji teorema.

(1-nji häsiýet.) Parallelogramyň bir tarapyna ýapyşan burçlarynyň jemi 180°-a deň.







Subudy. Parallelogramyň bir tarapyna ýapyşan burçlar içki bir taraply burçlar bolýar. Şonuň üçin olaryň jemi 180°-a deň. Teorema subut edildi.

2-nji teorema.

(2-nji häsiýet.) Parallelogramyň garşylykly taraplary we garşylykly burçlary özara deň.

Subudy. $ABCD$ – berlen parallelogram bolsun, ýagny $AB \| CD$ we $BC \| AD$. Parallelogramyň AC diagonalyny geçirýäris (2-nji surata g.) hem-de ABC we CDA üçburçluklara seredýäris. Olarda AC tarap – umumy, 1 we 3 burçlar – AB we CD parallel göni çyzyklar hem-de AC kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin deň, 2 we 4 burçlar bolsa AD we BC parallel göni çyzyklar hem-de AC kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin deň. Diýmek, üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşanyna görä, ABC we CDA üçburçluklar deň. Hususan-da mundan, $AB=CD$, $AD=BC$ we $\angle B=\angle D$ hem-de $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3$, ýagny $\angle A=\angle C$ bolýandygy gelip çykýar.

2-nji mesele. Parallelogramyň burçlaryndan ikisiniň jemi 172°-a deň. Onuň burçlaryny tapyň.

Çözülişi. $ABCD$ parallelogram berlen bolsun. Parallelogramyň goňşy burçlarynyň jemi 180°-a deň bolany üçin berlen burçlar goňşy burçlar bolup bilmeýär, diýmek, olar garşylykly burçlardyr. $\angle A+\angle C=172°$ bolsun. Parallelogramyň garşylykly burçlary deň bolany üçin munda burçlaryň her biri $\angle A=\angle C=172°:2=86°$ bolýar. Parallelogramyň hemme burçlarynyň jemi 360°-a deň, şonuň üçin galan iki burçy $\angle B=\angle D=(360°-172°):2=94°$-dan bolýar.

Jogaby: 86°, 94°, 86°, 94°.

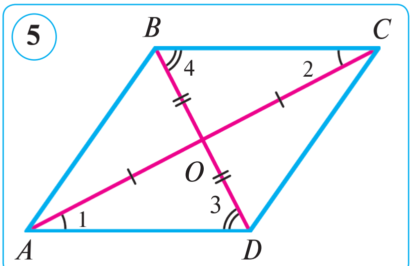
3-nji teorema.

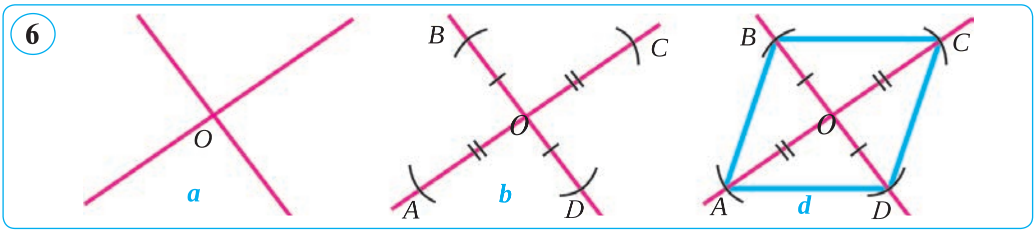
(3-nji häsiýet.) Parallelogramyň diagonallary kesişýär we kesişme nokadynda deň ikä bölünýär.

Subudy. $ABCD$ berlen parallelogram we O – AC we BD diagonallaryň kesişme nokady bolsun (5-nji surat). $AO=OC$ we $DO=OB$ bolýandygyny subut edýäris.

AOD we COB üçburçluklara garap geçýäris. Bu üçburçluklarda $AD=BC$ (parallelogramyň 2-nji häsiýetine görä onuň garşylykly taraplary deň), $\angle 1=\angle 2$ we $\angle 3=\angle 4$ (AD we BC parallel göni çyzyklaryň, degişlilikde, AC we BD kesijiler bilen kesişmeginden emele gelen içki atanak burçlar bolany üçin). Diýmek, üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşanyna görä, $\triangle AOD=\triangle COB$. Mundan $AO=CO$ we $DO=OB$, ýagny AC we BD

5





diagonallaryň her biriniň O kesişme nokadynda deň ikä bölünýändigi gelip çykýar. Teorema subut edildi.

3-nji mesele. 3-nji häsiýetden peýdalanyp parallelogram çyzyň.

1-nji ädim. Kesişýän iki göni çyzyk geçirýäris we olaryň kesişme nokadyny O harpy bilen belgileýäris (6-njy *a* surat).

2-nji ädim. Sirkulyň kömeginde göni çyzyklaryň birinde özara deň OA we OC, ikinjisinde bolsa özara deň OB we OD kesimleri goýýarys (6-njy *b* surat).

3-nji ädim. A, B, C we D nokatlary yzygider utgaşdyryp, gözlenýän $ABCD$ parallelogramy alarys (6-njy *d* surat).

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Nähili dörtburçluga parallelogram diýilýär? Parallelogramyň bir tarapyna ýapyşan burçlaryň jemi nämä deň?
2) Parallelogramyň diagonallary barada näme diýmek mümkin?

2. Parallelogramyň perimetri 152 cm, taraplaryndan biri ikinjiden 25 cm artyk. Parallelogramyň taraplaryny tapyň.

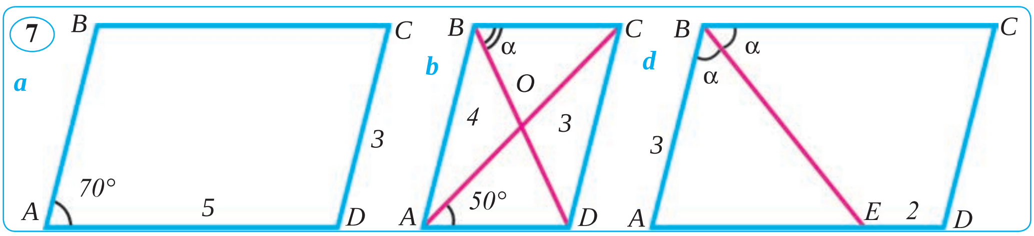
3. Parallelogramyň burçlaryndan ikisiniň jemi: 1) 70°-a; 2) 110°-a; 3) 170°-a deň bolsa, onuň hemme burçlaryny tapyň.

4. $ABCD$ parallelogramda: $AB = 7$ cm, $BC = 11$ cm, $AC = 14$ cm, $BD = 12$ cm; O – diagonallaryň kesişme nokadydygy mälim. ABO we BOC üçburçluklaryň perimetrlerini tapyň.

5. Parallelogramyň goňşy taraplarynyň jemi 20 cm-e, tapawudy bolsa 12 cm-e deň. Şu parallelogramyň taraplaryny tapyň.

6. Parallelogramyň iki tarapynyň gatnaşygy 5:3 -e, perimetri bolsa 6,4 dm-e deň. Parallelogramyň taraplaryny tapyň.

7. 7-nji suratda parallelogramyň käbir elementleriniň ululygy görkezilen. Ýene haýsy ululyklary tapmak mümkin?



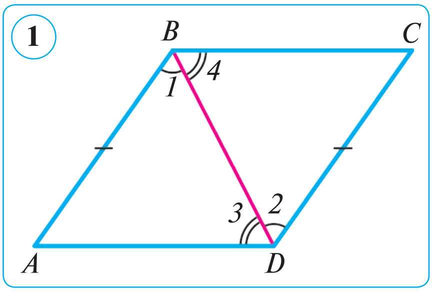
3. PARALLELOGRAMYŇ NYŞANLARY

Öňki temadan mälim bolşy ýaly, parallelogramyň häsiýetlerini ulanmak üçin köp ýagdaýlarda berlen dörtburçlugyň hakykatdan hem parallelogramdygyna göz ýetirmeli. Muny kesgitlemä görä (2-nji temadaky 1-nji meselä g.) ýa-da berlen dörtburçlugyň parallelogramdygyny tassyklaýan şertler – nyşanlar arkaly subut etmeli bolýar. Köplenç amalyýetde ulanylýan parallelogramyň nyşanlaryny subut edýäris. Indi parallelogramyň nyşanlary bilen tanyşýarys.

1-nji teorema.

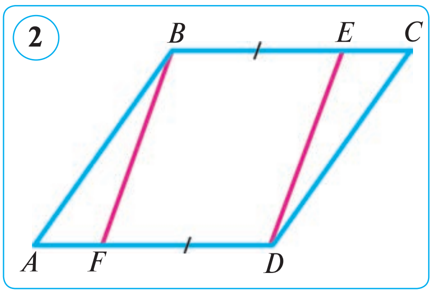
(1-nji nyşany.) Eger dörtburçlugyň iki tarapy deň we parallel bolsa, bu dörtburçluk parallelogramdyr.

Subudy. $ABCD$ dörtburçlukda $AB \parallel CD$ we $AB=CD$ bolsun (1-nji surat). Onuň BD diagonalyny geçirýäris. Netijede iki deň ABD we CDB üçburçluklara eýe bolarys (iki tarapyna we olaryň arasyndaky burçuna görä), çünki olarda $AB=CD$ (şerte görä), BD tarap – umumy, $\angle 1=\angle 2$ (AB we CD parallel göni çyzyklar hem-de BD kesiji kesişmeginden emele gelen içki atanak burçlar bolany üçin). Üçburçluklaryň deňliginden, $\angle 3=\angle 4$ bolýandygy gelip çykýar. Bu burçlar AD we BC göni çyzyklar hem-de BD kesiji kesişmeginden emele gelen içki atanak burçlar, diýmek, $AD \parallel BC$. Şeýle qilib, $ABCD$ dörtburçlugyň garşylykly taraplary jübüt-jübütden parallel. Şonuň üçin, parallelogramyň kesgitlemesine görä, $ABCD$ dörtburçluk – parallelogram.



Teorema subut edildi.

1-nji mesele. $ABCD$ parallelogramyň BC we AD taraplaryna deň kesimler goýlan: $BE=DF$ (2-nji surat). $BEDF$ dörtburçluk parallelogram bolarmy?

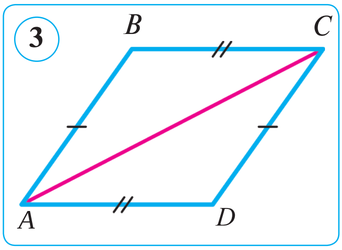


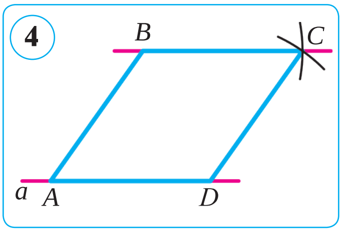
Çözülişi. $BEDF$ dörtburçlugyň BE we DF garşylykly taraplary deň hem-de parallel. Şonuň üçin, parallelogramyň 1-nji nyşanyna görä, $BEDF$ dörtburçluk – parallelogram.

Jogaby: hawa, bolýar.

2-nji teorema.

(2-nji nyşany.) Eger dörtburçlugyň garşylykly taraplary jübüt-jübütden deň bolsa, bu dörtburçluk parallelogramdyr.





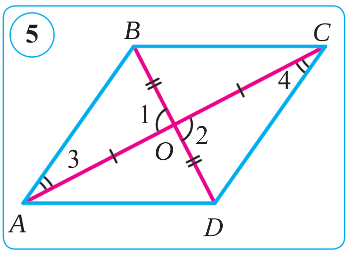
Subudy. $ABCD$ dörtburçlukda $AB=CD$ we $BC=DA$ bolsun. Onuň AC diagonalyny geçirýäris (3-nji surat). Netijede ABC we CDA üçburçluklar emele gelýär. Üçburçluklaryň deňliginiň 3-nji nyşanyna görä, bu üçburçluklar deň (AC tarap – umumy, teoremanyň şertine görä bolsa $AB=CD$ we $BC=DA$). Üçburçluklaryň deňliginden CAB we ACD burçlaryň deňligi gelip çykýar. Bu burçlar bolsa AB we DC göni çyzyklar hem-de AC kesiji emele getiren içki atanak burçlardyr. Göni çyzyklaryň parallellik nyşanyna görä, $AB \parallel CD$. Şeýdip, $ABCD$ dörtburçlukda AB we CD taraplar deň hem-de parallel, diýmek, parallelogramyň 1-nji nyşanyna görä, $ABCD$ dörtburçluk – parallelogram. Teorema subut edildi.

2-nji mesele. Berlen nokatdan geçýän we berlen göni çyzyga parallel göni çyzygy çyzyň.

Çözülişi. a – göni çyzyk, B – onda ýatmaýan nokat bolsun. a göni çyzykda A we D nokatlary belgileýäris (4-nji surat). B, D nokatlardan radiuslary degişlilikde AD we AB bolan töwerekler geçirýäris. Olaryň kesişme nokadyny C bilen belgileýäris. BC göni çyzygy geçirýäris, ol gözlenýän göni çyzyk bolýar. Hakykatdan hem, $ABCD$ dörtburçlugyň garşylykly taraplary deň. Parallelogramyň 2-nji nyşanyna görä, $ABCD$ dörtburçluk – parallelogram. Şonuň üçin, $BC \parallel AD$.

3-nji teorema.

(3- nji nyşany.) Eger dörtburçlugyň diagonallary kesişme nokadynda deň ikä bölünse, bu dörtburçluk parallelogramdyr.



Subudy. O – $ABCD$ dörtburçlugyň diagonallary kesişen nokat bolsun. Şerte görä, $AO=OC$ we $BO=DO$ (5-nji surat). AOB we COD üçburçluklara garap geçýäris. Bu üçburçluklarda: $\angle 1=\angle 2$ (wertikal burçlar), $AO=CO$ we $BO=DO$ (şerte görä). Diýmek, üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşanyna görä, AOB we COD üçburçluklar deň. Bu üçburçluklaryň deňliginden olaryň degişli taraplarynyň we burçlarynyň deňligi gelip çykýar: $AB=CD$, $\angle 3=\angle 4$. Göni çyzyklaryň parallellik nyşanyna görä, $AB \parallel CD$, çünki 3 we 4 burçlar AB we CD göni çyzyklar hem-de AC kesiji emele getiren içki atanak burçlardyr. $ABCD$ dörtburçlukda $AB=CD$ we $AB \parallel CD$ bolany üçin parallelogramyň 1-nji nyşanyna görä, $ABCD$ dörtburçluk parallelogram bolýar. Teorema subut edildi.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Eger dörtburçlugyň iki tarapy deň we parallel bolsa, bu dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut edip bilersiňizmi?
2) Parallelogramyň 2–3-nji nyşanlaryny beýan ediň.

2. (*Ugrukdyryjy mesele.*) 1) Iki deň we parallel kesimler berlen. Olaryň ahyrlary özara kesişmeýän kesimler bilen utgaşdyrylan. Emele gelen dörtburçluk parallelogram bolarmy?
2) Eger dörtburçlugyň iki garşylykly burçy deň bolsa, ol parallelogrammy?

3. $ABCD$ dörtburçlukda AB we CD taraplar parallel, $AB=CD=11$ cm, $AD=5$ cm. Şu dörtburçlugyň perimetrini tapyň.

4. Eger: 1) $\angle 1=70°$, $\angle 3=110°$, $\angle 2\neq\angle 4$; 2) $\angle 1=\angle 2=60°$, $\angle 3=\angle 115°$ bolsa (6-njy surat), onda $ABCD$ dörtburçluk parallelogram bolarmy?
Çözülişi. 1) $ABCD$ dörtburçlukda iki AB we CD tarap parallel, çünki $\angle 1+\angle 3=70°+110°=180°$. Bu burçlar – AB we DC göni çyzyklar hemde AD kesiji emele getiren içki bir taraply burçlar. $AB \| DC$ bolany sebäpli, $\angle 1=\angle 4$ bolýar (degişli burçlar). $ABCD$ dörtburçlugyň galan iki AD we BC tarapy parallel däl, çünki içki atanak 1 we 2 burçlar deň däl ($\angle 1=\angle 4\neq\angle 2$). Diýmek, $ABCD$ dörtburçluk parallelogram bolup bilmeýär.
Jogaby: ýok, $ABCD$ dörtburçluk parallelogram bolup bilmeýär.
2) 1-nji bende meňzeş çözülýär.

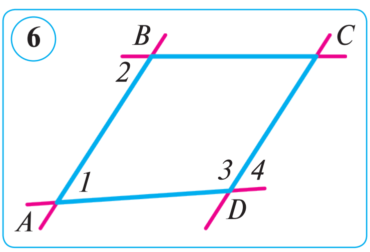
5. $ABCD$ parallelogramyň AB tarapynyň ortasy E nokatdan, CD tarapynyň ortasy F nokatdan ybarat. $EBFD$ dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň (7-nji surat).

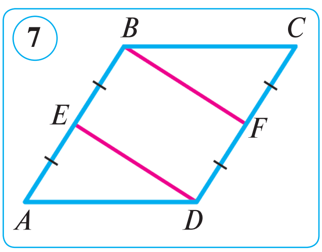
6. $ABCD$ dörtburçlukda: $AD=BC$, $\angle 1=\angle 2$ (8-nji surat). $ABCD$ dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň.

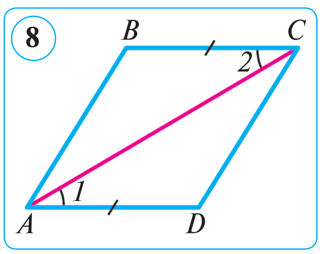
7. $ABCD$ dörtburçlukda AB we CD taraplar parallel, $AB=CD=9$ cm, $AD=4$ cm. Şu dörtburçlugyň perimetrini tapyň.

8. $ABCD$ dörtburçlukda: $AB=CD$, $AD=BC$, A burç B burçdan üç esse uly. Şu dörtburçlugyň burçlaryny tapyň.

9. Parallelogramyň burçlaryndan biriniň bissektrisasy özi kesip geçýän tarapy 4 cm we 5 cm-lik kesimlere bölýär. Parallelogramyň perimetrini tapyň.

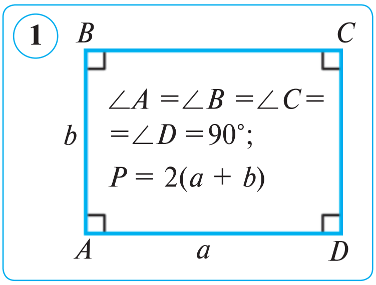






4. GÖNÜBURÇLUK WE ONUŇ HÄSIÝETLERI

Kesgitleme. *Hemme burçlary göni bolan parallelogram* ***gönüburçluk*** *diýlip atlandyrylýar* (1-nji surat).

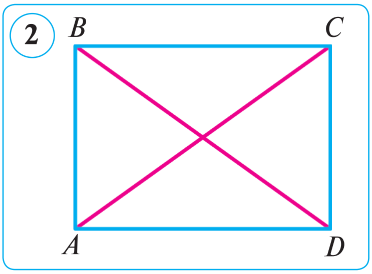


Gönüburçluk parallelogramyň hususy haly bolany üçin ol parallelogramyň ähli häsiýetlerine eýe bolýar: gönüburçlugyň garşylykly taraplary deň, diagonallary kesişme nokadynda deň ikä bölünýär, gönüburçlugyň diagonaly ony iki deň gönüburçly üçburçluga bölýär.

Gönüburçlugyň özboluşly häsiýetine garap geçýäris.

Teorema.

Gönüburçlugyň diagonallary özara deň.



Subudy. $ABCD$ gönüburçlukda AC we BD diagonallar berlen bolsun. $AC=BD$ bolýandygyny subut edýäris (2-nji surat).

Gönüburçly ACD we DBA üçburçluklar iki katetine (AD – umumy tarap, $CD=BA$) görä deň. Mundan şu üçburçluklaryň gipotenuzalarynyň deňligi, ýagny $AC=BD$ gelip çykýar.

Ýokardaky teoremadan aşakdaky ters teorema gelip çykýar (**gönüburçlugyň nyşany**).

Ters teorema.

Eger parallelogramyň diagonallary deň bolsa, ol gönüburçlukdyr.

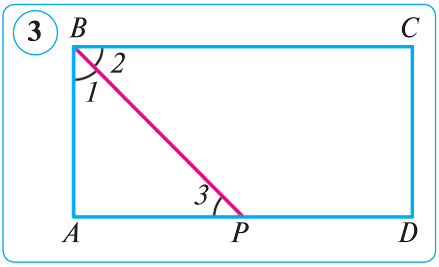
Subudy. $ABCD$ parallelogramda AC we BD diagonallar deň bolsun (2-nji surat). ABD we DCA üçburçluklar üç tarapyna görä deň ($AB=DC$, $BD=CA$, AD – umumy tarap). Mundan $\angle A=\angle D$ gelip çykýar. Parallelogramyň garşylykly burçlary deň, şonuň üçin $\angle A=\angle C$ we $\angle B=\angle D$. Şeýdip, $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$. Parallelogram – güberçek dörtburçluk, şonuň üçin: $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$. Mundan $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$, ýagny $ABCD$ parallelogramyň gönüburçlukdygy gelip çykýar. Teorema subut edildi.

1-nji mesele. $ABCD$ gönüburçlugyň perimetri 24 cm-e, BD diagonaly bolsa 9 cm-e deň. ABD üçburçlugyň perimetrini tapyň.

Çözülişi. $AB+AD=P_{ABCD}:2=24:2=12$ (cm) – goňşy taraplar jemi (2-nji surata g.). $P_{ABD}=AB+AD+BD=12+9=21$ (cm).

Jogaby: $P_{ABD}=21$ cm.

2-nji mesele. *ABCD* gönüburçluk *B* burçunyň bissektrisasy *AD* tarapy *P* nokatda kesýär hem-de ony $AP=17$ cm we $PD=21$ cm-lik kesimlere bölýär (3-nji surat). Şu gönüburçlugyň perimetrini tapyň.



Çözülişi. 1) *ABCD* – gönüburçluk bolany üçin $AD \parallel BC$ we şonuň üçin $\angle 2=\angle 3$ (içki atanak burçlar). Ýöne, şerte görä, $\angle 2=\angle 1$, diýmek, $\angle 1=\angle 3$ hem-de $\triangle ABP$ – esasy *BP* bolan deňýanly üçburçluk. Şeýdip, $AB=AP=17$ cm.

2) $AD=AP+PD=17+21=38$ (cm);

$$P_{ABCD}=2(AB+AD)=2\cdot(17+38)=2\cdot 55=110 \text{ (cm)}.$$

Jogaby: $P_{ABCD}=110$ cm.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Nähili parallelogram gönüburçluk diýlip atlandyrylýar?

? 2) Gönüburçlugyň nähili özboluşly häsiýeti bar?

3) Gönüburçlugyň nyşanyny beýan ediň.

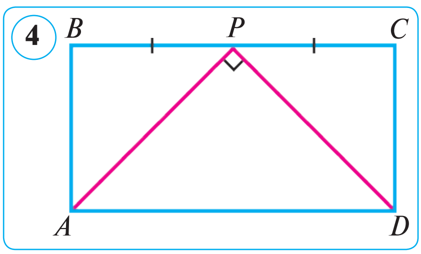
2. *ABCD* gönüburçlukda: $AB=9$ cm, $BC=7$ cm.

1) *C* nokatdan *AD* tarapa çenli bolan aralygy tapyň.

2) *AB* we *CD* göni çyzyklaryň arasyndaky aralygy tapyň.

3. Gönüburçlugyň perimetri 24 cm. Gönüburçlugyň islendik içki nokadyndan onuň taraplaryna çenli bolan aralyklaryň jemini tapyň.

4. *ABCD* gönüburçlugyň perimetri 24 cm-e deň. *P* nokat *BC* tarapyň ortasy, $\angle APD=90°$ (4-nji surat). Gönüburçlugyň taraplaryny tapyň.



5. Eger dörtburçlukda diagonallar deň we olar kesişme nokadynda deň ikä bölünse, bu dörtburçluk gönüburçluk bolýandygyny subut ediň.

6. Parallelogramyň taraplary 4 cm we 7 cm. Bu parallelogramyň diagonallary: 1) 12 cm we 5 cm; 2) 10 cm we 3 cm bolmagy mümkinmi?

7. Gönüburçlugyň perimetri 42 cm, taraplaryndan biri bolsa ikinjiden iki esse uly. Gönüburçlugyň taraplaryny tapyň.

5–6. ROMBUŇ WE KWADRATYŇ HÄSIÝETLERI

1. Romb we onuň häsiýetleri.

Kesgitleme. *Taraplary deň bolan parallelograma* ***romb*** *diýilýär* (1-nji surat).

Romb parallelogramyň umumy häsiýetlerine eýe bolmak bilen ýene aşakdaky häsiýete eýe.

Teorema.

Rombuň diagonallary özara perpendikulýar hem-de rombuň burçlaryny deň ikä bölýär.

Subudy. $ABCD$ – berlen romb (2-nji surat), O – onuň diagonallary kesişen nokat bolsun. $AC \perp BD$ we her bir diagonal rombuň degişli burçlaryny deň ikä bölýändigini (meselem, $\angle BAC = \angle DAC$) subut edýäris.

Rombuň kesgitlemesine görä, $AB = AD$, şonuň üçin BAD – BD esasly deňýanly üçburçluk. Romb parallelogram bolany üçin onuň diagonallary kesişme nokadynda deň ikä bölünýär, ýagny $BO = OD$. Diýmek, AO – deňýanly BAD üçburçlugyň medianasy. Deňýanly üçburçlugyň häsiýetine görä, onuň esasyna geçirilen mediana hem beýiklik, hem bissektrisa bolýar. Şonuň üçin $AC \perp BD$ we $\angle BAC = \angle DAC$. Şony subut etmek talap edilipdi.

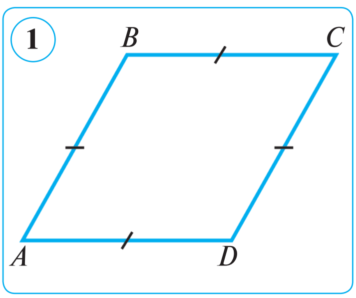
1-nji mesele. $ABCD$ rombuň BD diagonaly tarapy bilen 35°-ly burçy emele getirýär. Onuň burçlaryny tapyň.

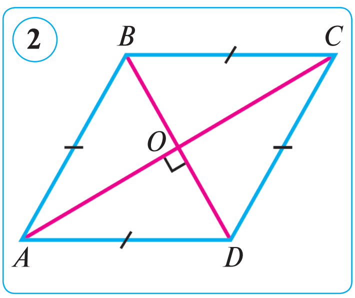
Çözülişi. $\angle ABD = 35°$, diýeliň (3-nji surat). Onda $\angle CBD = 35°$ (rombuň häsiýetine görä). $\angle ABC = 2\angle ABD = 2 \cdot 35° = 70°$, $\angle ADC = \angle ABC = 70°$ (parallelogramyň 2-nji häsiýetine görä), $\angle DAB = 180° - \angle ABC$ (parallelogramyň 1-nji häsiýetine görä). Diýmek, $\angle DAB = 180° - 70° = 110°$, $\angle BCD = \angle DAB = 110°$ (parallelogramyň 2-nji häsiýetine görä).

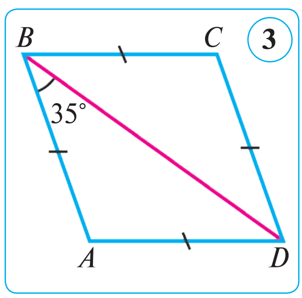
Jogaby: 110°, 70°, 110°, 70°.

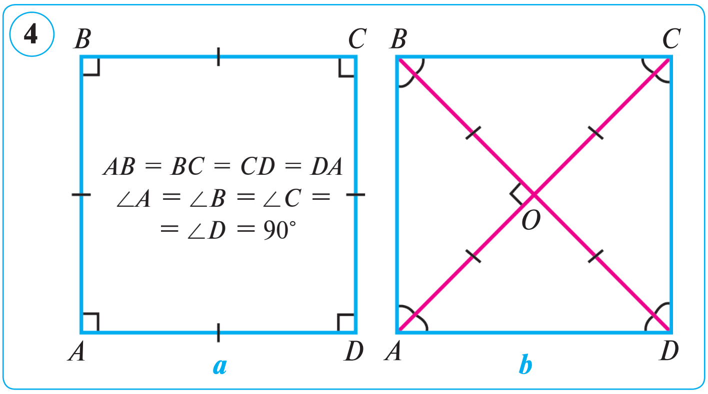
2-nji mesele. Dürli romblaryň perimetrleri deň bolmagy mümkinmi?

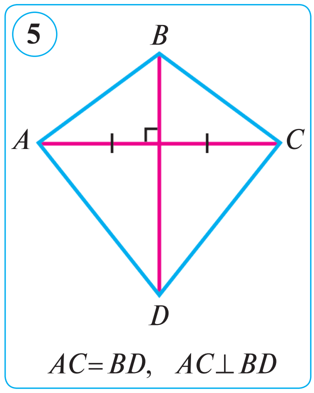
Çözülişi. Perimetrleri deň bolan romblar bir-birinden burçlary bilen tapawutlanýar. Eger rombuň ýiti burçy: 1) 40°-a deň bolsa, onda galan burçlary degişlilikde 140°, 40°, 140° bolýar; 2) 15°-a deň bolsa, onda galan burçlary de-











gişlilikde 165°, 15°, 165° bolýar we ş.m. Şonuň ýaly-da, ýiti burçuň ýerine dürli kütek burçlary almak mümkin. *Jogaby:* hawa, mümkin.

2. Kwadrat we onuň häsiýetleri.

Kesgitleme. *Taraplary deň bolan gönüburçluga* ***kwadrat*** *diýilýär.*

Kwadratyň we rombuň kesgitlemelerinden kwadrat burçlary göni bolan rombdugy gelip çykýar (4-nji *a* surat). Kwadrat hem parallelogram, hem gönüburçluk, hem romb bolany üçin olaryň ähli häsiýetlerine eýe. Kwadratyň esasy häsiýetlerini getirýäris.

1. Kwadratyň hemme burçlary göni.

2. Kwadratyň diagonallary özara deň.

3. Kwadratyň diagonallary özara perpendikulýar we kesişme nokadynda deň ikä bölünýär hem-de kwadratyň burçlaryny deň ikä bölýär (4-nji surat).

Şu häsiýetleri özbaşdak subut ediň.

3-nji mesele. Eger rombuň diagonallary deň bolsa, onda şeýle rombuň kwadratdygyny subut ediň.

Subudy. Romb parallelogram bolany üçin gönüburçlugyň nyşanyndan diagonallary deň bolan rombuň gönüburçlukdygy gelip çykýar we diýmek, ol kwadrat bolýar.

4-nji mesele. Dörtburçlugyň diagonallary perpendikulýar we özara bir-birine deň. Şu dörtburçluk kwadrat bolarmy?

Çözülişi. Meseläniň şertini kanagatlandyrýan dörtburçluklardan biri 5-nji suratda şekillendirilen. Munda diagonallardan biri deň ikä bölünen. Emma bu kwadratyň 2-nji häsiýetini hem-de 3-nji häsiýetde getirilen şertiň bir bölegi – diňe özara perpendikulýarlyk şertini kanagatlandyrýar. Bu ýagdaýda diňe diagonallaryndan biri deň ikä bölünen, şu sebäpli bu dörtburçluk kwadrat bolup bilmeýär. Mälim bir ýagdaýda dörtburçlugyň iki diagonalynyň hem kesişme nokadynda deň ikä bölünmegi mümkin. Diňe şonda dörtburçluk kwadrat bolup biler.

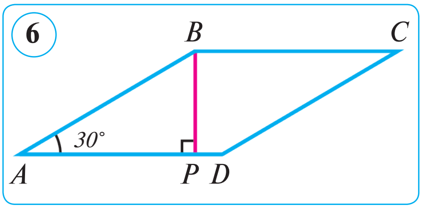
Jogaby: dörtburçlugyň kwadrat bolmagy hökman däl.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Romb diýip nämä aýdylýar? Rombuň häsiýetini aýdyň.
2) Kwadrat diýip nämä aýdylýar? Onuň häsiýetlerini aýdyň.
3) Kwadrata: a) «parallelogram»; b) «romb»; d) «gönüburçluk» düşünjeleriniň kömeginde kesgitleme beriň.

2. Kwadratyň tarapy 20 cm-e deň. Diagonallary kesişme nokadyndan taraplaryndan birine çenli bolan aralygy tapyň.

3. $ABCD$ rombuň tarapy 24 cm-e, A burçy bolsa 30°-a deň. B depesinden oňa garşylykly AD tarapa çenli bolan aralygy tapyň (6-njy surat).
Boş ýerlere degişli sanlary goýuň.



Çözülişi. B nokatdan AD göni çyzyga çenli bolan aralyk B nokatdan şu göni çyzyga geçirilen perpendikulýar, ýagny BP kesimiň uzynlygyna deň. ABP üçburçluga garap geçýäris. Onda $\angle APB = ...°$, $\angle A = ...°$, $AB = ...$. Onda $BP = 0{,}5 \cdot ... = 0{,}5 \cdot ... = ...$ (cm) (...°-ly burçuň garşysynda ýatýan katetiň häsiýetine görä). *Jogaby:* $BP = ...$ cm.

4. 1) (*Amaly ýumuş.*) 1) Iki deň üçburçlukdan; 2) dört deň üçburçlukdan nädip romb we kwadrat gurmak mümkin? Mümkin bolan hemme çözüwleri görkeziň.

5. Deňýanly gönüburçly üçburçlugyň içinden kwadrat şeýle çyzylan, ýagny onuň iki depesi gipotenuzada, galan iki depesi bolsa katetlerde ýatýar. Gipotenuza 21 cm-e deňdigi mälim bolsa, kwadratyň tarapyny tapyň.

6. Rombuň diagonallary bilen taraplarynyň arasynda emele gelen burçlaryň gatnaşygy $2:7$ ýaly. Rombuň burçlaryny tapyň.

7. Kwadratyň taraplarynyň ortalary yzly-yzyna birikdirilen. Netijede nähili şekil emele gelýär?

8. Rombuň hemme beýiklikleri özara deň bolýandygyny subut ediň.

9. Dörtburçlugyň taraplary $2:4:5:7$ ýaly gatnaşykda, perimetri bolsa 108 cm-e deň. Şu dörtburçlugyň taraplaryny tapyň.

10. Burçlaryndan biri 60°, kiçi diagonalynyň uzynlygy 16 cm bolan rombuň perimetrini tapyň.

11. Rombuň diagonallary bilen taraplarynyň arasynda emele gelen burçlaryň gatnaşygy $5:4$ ýaly. Rombuň burçlaryny tapyň.

12. Gönüburçlugyň uzynlygy 32 cm, ini bolsa 28 cm-e deň. Şu gönüburçlugyň perimetrine deň bolan kwadratyň tarapyny tapyň.

13. Dörtburçlugyň iň kiçi tarapy 5 cm-e deň, galan taraplarynyň her biri öňküsinden degişlilikde 2 cm-e uly. Şu dörtburçlugyň perimetrini tapyň.

7–8. TRAPESIÝA WE ONUŇ HÄSIÝETLERI

1. Trapesiýanyň kesgitlemesi. Bize mälim bolşy ýaly, islendik parallelogramda iki jübüt parallel taraplar bolýar. Indi biz diňe bir jübüt parallel taraplara eýe bolan dörtburçluklara garap geçýäris.

1-nji kesgitleme. *Iki tarapy parallel, galan iki tarapy parallel bolmadyk dörtburçluk* ***trapesiýa*** *diýlip atlandyrylýar.*

Trapesiýanyň parallel taraplary onuň *esaslary*, parallel bolmadyk taraplary bolsa *gapdal taraplary* diýlip atlandyrylýar. 1-nji suratdaky $ABCD$ trapesiýada AD we BC taraplar *esaslar*, AB we CD taraplar bolsa *gapdal taraplar* bolýar.

2-nji kesgitleme. *Taraplaryndan biri esasyna perpendikulýar bolan trapesiýa* ***gönüburçly trapesiýa*** *diýilýär* (2-nji surat).

3-nji kesgitleme. *Gapdal taraplary deň bolan trapesiýa* ***deňýanly trapesiýa*** *diýilýär.*

3-nji suratda deňýanly $ABCD$ trapesiýa şekillendirilen: $AB=CD$.

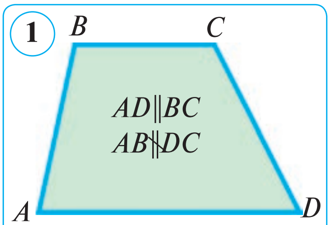
2. Trapesiýanyň nyşany. Indi $ABCD$ dörtburçlugyň trapesiýa bolmagy üçin nähili şerti kanagatlandyrýandygyna garap geçýäris.

Teorema.

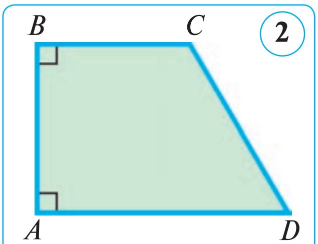
Eger dörtburçlugyň bir tarapyna ýapyşan iki burçunyň jemi 180°-a deň hem-de oňa goňşy taraplara ýapyşan iki burçunyň jemi 180°-dan tapawutly bolsa, şeýle dörtburçluk *trapesiýa* bolýar.

Subudy. $ABCD$ dörtburçlukda: $\angle A+\angle B=180°$, $\angle A+\angle D\neq 180°$ bolsun. $ABCD$ dörtburçlugyň trapesiýadygyny subut edýäris.

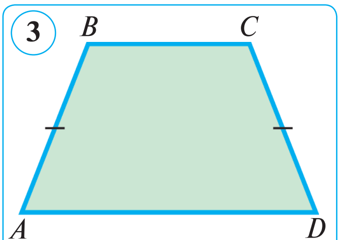
Birinjiden, bir jübüt garşylykly taraplar parallel bolýandygyny görkezýäris. AB, $BC(l_1)$ we AD (l_2) göni çyzyklary geçirýäris (4-nji surat). Şerte görä, $\angle A+\angle B=180°$, onda AD we BC kesimler parallellik nyşanyna görä parallel bolýar. (*Iki a we b göni çyzyklary üçünji c göni çyzyk kesende içki bir taraply burçlaryň jemi 180°-a deň bolsa, onda a we b göni çyzyklar parallel bolýar.*)



AD we BC – esaslar, AB we DC – gapdal taraplar



$\angle A=90°$, gönüburçly trapesiýa



$AB=DC$, deňýanly trapesiýa

Ikinjiden, $ABCD$ dörtburçlugyň galan iki tarapy parallel dälligini görkezýäris. Şerte görä, $\angle A + \angle D \neq 180°$, munda AB we DC kesimler parallel bolup bilmeýär (*Ýewklidiň parallel göni çyzyklar baradaky 5-nji aksiomasyna görä, ýagny göni çyzyklaryň paralleldiginiň zerur şerti ýerine ýetirilmedi*). Diýmek, $ABCD$ dörtburçluk trapesiýa eken. Şony subut etmek talap edilipdi.

Bu teoremadan aşakdaky netije gelip çykýar.

Netije. Trapesiýanyň bir burçy 90° bolsa, onuň ýene bir 90°-ly burçy bardyr.

4-nji kesgitleme. *Trapesiýanyň esaslaryndan birinde ýatýan nokatdan ikinji esasy öz içine alan göni çyzyga geçirilen perpendikulýar* ***trapesiýanyň beýikligi*** *diýlip atlandyrylýar*.

Trapesiýanyň esaslaryna perpendikulýar bolan islendik kesimi onuň beýikligi hökmünde almak mümkin. Islendik trapesiýada islendikçe beýiklik geçirmek bolýar (5-nji surat).

3. Deňýanly trapesiýanyň häsiýeti.

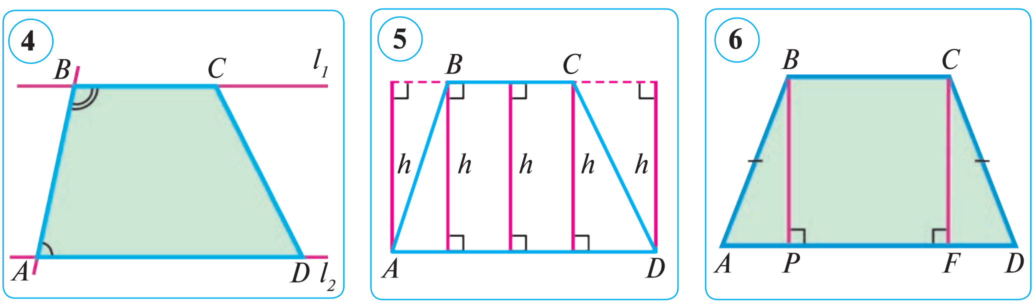
ABCD deňýanly trapesiýa garap geçýäris. Munda $AD=a$ – uly esas, $BC=b$ – kiçi esas bolsun. Kiçi esasyň B depesinden BP beýiklik geçireliň (6-njy surat). Beýikligiň P esasy AD esasy AP we PD kesimlere bölsün.

Teorema.

Deňýanly trapesiýanyň kütek burçy depesinden geçirilen beýiklik uly esasyny uzynlyklary esaslarynyň tapawudynyň ýarysyna we esaslarynyň jeminiň ýarysyna deň böleklere bölýär, ýagny:

$$AP = \frac{a-b}{2}, \quad PD = \frac{a+b}{2}.$$

Subudy. C depesinden $CF \perp AD$-ni geçirýäris. Gönüburçly ABP we DCF üçburçluklar deň: $AB=DC$ – şerte görä, $BP=CF$ bolsa BC we AD parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk bolany üçin. Üçburçluklar deňliginden $AP=FD$ gelip çykýar. Göni çyzyklaryň parallellik nyşanyna görä, $BP \parallel CF$, çünki $BP \perp AD$, $CF \perp AD$. Parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk deň bolanlygy üçin $BC=PF=b$. Diýmek,



$$AP = FD = \frac{AD - PF}{2} = \frac{a-b}{2}, \quad PD = AD - AP = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Şeýdip, $AP = \frac{a-b}{2}$ we $PD = \frac{a+b}{2}$ eken. Teorema subut edildi.

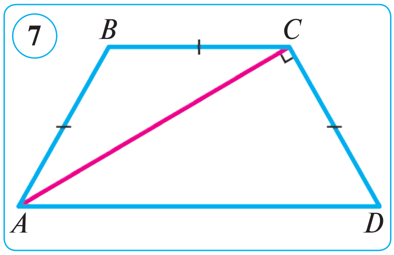
1-nji mesele. Deňýanly trapesiýanyň esasyndaky burçlaryň deňdigini subut ediň.

Çözülişi. $ABCD$ – deňýanly trapesiýa, ýagny $AB=DC$ we $AD \parallel BC$. Deňýanly trapesiýanyň AD we BC esaslaryna ýapyşan burçlarynyň deňligini subut edýäris ($\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle C$).

Trapesiýanyň kütek burçlary (B we C) depelerinden AD esasyna perpendikulýar geçirýäris: $BP \perp AD$, $CF \perp AD$ (6-njy surata g.). Gönüburçly ABP we DCF üçburçluklar (gipotenuza we katetine görä) deň: $AB=DC$ – şerte görä, $BP=CF$ bolsa BC we AD parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk bolany üçin. Üçburçluklaryň deňliginden $\angle A=\angle D$ gelip çykýar.

A we B, C we D burçlar AD we BC parallel göni çyzyklaryň, degişlilikde, AB we CD kesijiler bilen kesişmeginden emele gelen içki bir taraply burçlar, şonuň üçin $\angle A+\angle B=180°$ we $\angle C+\angle D=180°$. Mundan $\angle B=\angle C$ bolýandygy gelip çykýar. Şeýdip, deňýanly trapesiýanyň esasyndaky burçlary deň eken: $\angle A=\angle D$ we $\angle B=\angle C$. Şony subut etmek talap edilipdi.

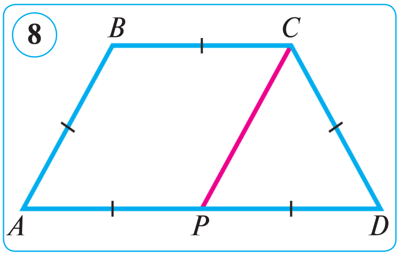
2-nji mesele. Deňýanly trapesiýanyň kiçi esasy gapdal tarapyna deň, diagonaly bolsa gapdal tarapyna perpendikulýar. Trapesiýanyň burçlaryny tapyň.



Çözülişi. Deňýanly $ABCD$ trapesiýa berlen, onda $AD \parallel BC$, $AB=BC=CD$, $AC \perp CD$ bolsun (7-nji surat). Meseläniň şertine görä, AC – deňýanly ABC üçburçlugyň esasy, diýmek, $\angle BCA=\angle CAB$. Ýöne $\angle A=\angle D$, çünki deňýanly trapesiýanyň esasyndaky burçlary deň, CAD we BCA burçlar bolsa $AD \parallel BC$ hem-de AC kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin deň, ýagny $\angle CAD=\angle BCA$.

Diýmek, $\angle A=2\angle CAD$. Şerte görä, ACD – gönüburçly, şonuň üçin $\angle CAD+\angle D=90°$, ýöne $\angle D=\angle A$, onda $90°=3\angle CAD$, diýmek, $\angle CAD=30°$ we onda $\angle D=\angle A=60°$, $\angle C=\angle B=120°$. *Jogaby:* $\angle A=\angle D=60°$, $\angle B=\angle C=120°$.

3-nji mesele. Deňýanly trapesiýanyň taraplarynyň gatnaşygy $1:1:1:2$ ýaly. Şu trapesiýanyň burçlaryny tapyň.



Çözülişi. $ABCD$ trapesiýada $AB=BC=$ $=CD=1$ we $AD=2$ bolsun. AD tarapyň ortasyny P bilen belgileýäris (8-nji surat). $ABCP$ dörtburçlugyň AP we BC taraplary deň we parallel.

Diýmek, parallelogramyň nyşanyna görä, bu dörtburçluk parallelogram bolýar. Şuňa görä, $PC=AB=1$. PCD üçburçlugyň hemme taraplary 1-e deň, şonuň üçin $\angle PDC = 60°$. Şeýlelikde, $ABCD$ trapesiýada $\angle A = \angle D = 60°$ we $\angle B = \angle C = 120°$.

Jogaby: $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

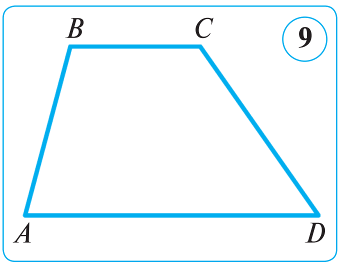
1. 1) Nähili dörtburçluga trapesiýa diýilýär?
2) Nähili trapesiýa: a) deňýanly trapesiýa; b) gönüburçly trapesiýa diýlip atlandyrylýar?

2. Trapesiýanyň depesinden geçmedik beýikligi ony iki gönüburçly trapesiýa bölýär. Şekili çyzyp görkeziň.

3. Gönüburçly trapesiýanyň gapdal taraplarynyň gatnaşygy $1:2$ ýaly. Trapesiýanyň iň uly burçuny tapyň.

4. Trapesiýanyň esaslary 12 ñm we 20 cm, gapdal taraplary bolsa 4 cm we 11 cm. Kiçi esasynyň depesinden kiçi tarapyna parallel göni çyzyk geçirilen. Şu parallel göni çyzyk bölen üçburçlugyň perimetrini tapyň.

5. AD we BC esasly $ABCD$ trapesiýanyň B we C burçlaryny tapyň, munda $\angle A = 75°$ we $\angle D = 55°$ (9-njy surat). Boş ýerlere degişli sanlary goýuň.



9

Çözülişi. A we B, C we D burçlar AD we BC parallel göni çyzyklary ... we ... kesijiler bilen kesişmeginden emele gelen ..., şonuň üçin $\angle A + \angle B = ...°$ we $\angle C + \angle D = ...°$. Şerte görä, $\angle A = 75°$ we $\angle D = 55°$, onda $\angle B = ...° - \angle A = ...° - ...° = ...°$ we $\angle C = ...° - \angle D = ...° - ...° = ...°$.

Jogaby: $\angle B = ...°$, $\angle C = ...°$.

6. Deňýanly trapesiýanyň ýiti burçlaryndan biri 60°-a, gapdal tarapy bolsa 16 cm-e deň. Eger trapesiýanyň esaslarynyň jemi 38 cm-e deň bolsa, onuň esaslaryny tapyň.

7. Deňýanly trapesiýanyň kütek burçy depesinden geçirilen beýiklik uly esasyny 3 cm we 17 cm-lik kesimlere bölýär. Onuň esaslaryny tapyň.

8. Deňýanly trapesiýanyň diagonallarynyň deňdigini subut ediň.

9. Trapesiýada: 1) üç göni burçuň; 2) üç ýiti burçuň; 3) üç burçuň jemi 180°-a deň bolup bilermi? Jogabyňyzy esaslandyryň.

10. Gönüburçly trapesiýanyň iň uly we iň kiçi burçlary gatnaşygy $5:4$-e deň. Şu trapesiýanyň burçlaryny tapyň.

11. $ABCD$ trapesiýanyň kiçi esasy 6 cm-e, ABE üçburçlugyň ($BE \parallel CD$) perimetri 36 cm-e deň. Şu trapesiýanyň perimetrini tapyň.

12. Deňýanly trapesiýanyň diagonaly kütek burçuny deň ikä bölýär. Trapesiýanyň esaslary 10 cm we 20 cm. Onuň perimetrini tapyň.

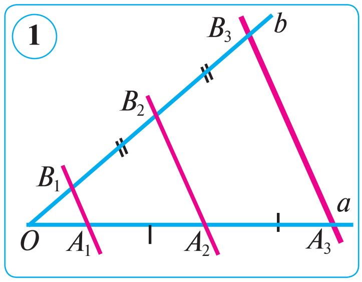
2-§. FALESIŇ TEOREMASY WE ONUŇ ULANYLYŞY

9. FALESIŇ TEOREMASY

Teorema.

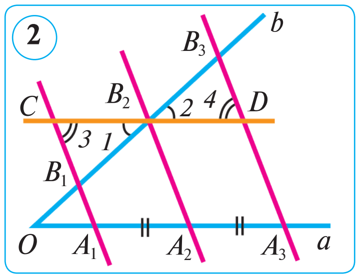
Eger burçuň taraplaryny kesiji parallel göni çyzyklar onuň bir tarapyndan deň kesimleri bölse, olar ikinji tarapyndan hem deň kesimleri bölýär.

Subudy. O burçuň bir tarapynda (a şöhlese) özara deň A_1A_2 we A_2A_3 kesimler goýlan hem-de olaryň ahyrlary (A_1, A_2, A_3) arkaly ikinji tarapy (b şöhläni) B_1, B_2, B_3 nokatlarda kesiji özara parallel A_1B_1, A_2B_2 we A_3B_3 göni çyzyklar geçirilen bolsun (1-nji surat).



Indi emele gelen B_1B_2 we B_2B_3 kesimleriň özara deňligini, ýagny $A_1A_2=A_2A_3$ bolsa, $B_1B_2=B_2B_3$ bolýandygyny subut edýäris.

Munuň üçin B_2 nokatdan a şöhlä parallel CD göni çyzyk geçirýäris (2-nji surat). Bu göni çyzyk A_1B_1 we A_3B_3 göni çyzyklar bilen degişlilikde C we D nokatlarda kesişsin. $A_1CB_2A_2$ we $A_2B_2DA_3$ dörtburçluklar – parallelogram (kesgitlemä görä), çünki olaryň garşylykly taraplary şerte we gurmaga görä parallel. Şerte görä, $A_1A_2=A_2A_3$ hem-de parallelogramyň garşylykly taraplary bolany üçin $A_1A_2=CB_2$ we $A_2A_3=B_2D$-den $CB_2=B_2D$-ge eýe bolarys.



B_1B_2C we B_3B_2D üçburçluklarda $CB_2=B_2D$ (subuda görä), şonuň ýaly-da, $\angle 1=\angle 2$ (wertikal burçlar), $\angle 3=\angle 4$ (A_1B_1 we A_3B_3 parallel göni çyzyklar hem-de CD kesiji kesişmeginden emele gelen içki atanak burçlar bolany üçin).

Üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşanyna görä, bu üçburçluklar özara deň: $\angle B_1B_2C=\angle B_3B_2D$. Mundan $B_1B_2=B_2B_3$ gelip çykýar.

Şeýlelikde, eger $A_1A_2=A_2A_3$ bolsa, $B_1B_2=B_2B_3$ bolýandygy subut edildi. Şony subut etmek talap edilipdi.

Ýatlatma! *Falesiň teoremasynyň şertinde burçuň ýerine islendik iki göni çyzygy almak mümkin, munda teoremanyň netijesi üýtgemeýär.*

Netije. Berlen iki göni çyzygy kesiji we göni çyzyklaryň birinden deň kesimleri bölüji parallel göni çyzyklar ikinji göni çyzykdan hem deň kesimleri bölýär.

1-nji mesele. (*Kesimi deň böleklere bölmek.*) Berlen AB kesimi n sany deň bölege bölüň.

Çözülişi. AB kesim berlen bolsun. Ony n sany deň bölege bölmegi görkezýäris. A nokatdan AB göni çyzykda ýatmaýan AC şöhläni geçirýäris we onda A nokatdan başlap n sany AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ deň kesimleri, ýagny berlen AB kesimi meseläniň şertinden gelip çykyp näçe bölege bölmeli bolsa, şonça deň kesimi goýýarys (3-nji surat, $n=6$). Soňra A_nB göni çyzygy (A_n nokat – ahyrky kesimiň ujy) we A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1} nokatlar arkaly A_nB göni çyzyga parallel göni çyzyklary geçirýäris. Bu göni çyzyklar AB kesimi B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-1} nokatlarda kesýär we ony Falesiň teoremasyna görä n sany deň bölege bölýär:

$$AB_1=B_1B_2=...=B_{n-1}B.$$

Diýmek, islendik kesimi islendikçe deň bölege bölmek mümkin.

2-nji mesele. ABC üçburçlugyň BC tarapy dört deň kesime bölünip, bölüniji nokatlary arkaly uzynlygy 18 cm-e deň bolan AB tarapa parallel ýagdaýda göni çyzyklar geçirilen. Şu göni çyzyklaryň üçburçlugyň içinde galan kesimleriniň uzynlyklaryny tapyň.

Berlen: $\angle ABC$-da:

$BB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3C$, $AB=18$ cm; $B_1C_3 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_1 \parallel AB$.

Tapmaly: B_1C_3, B_2C_2, B_3C_1 (4-nji surat).

Çözülişi. 1) $A_1B_3 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_1 \parallel AC$ geçirýäris.

2) Falesiň teoremasyna görä:

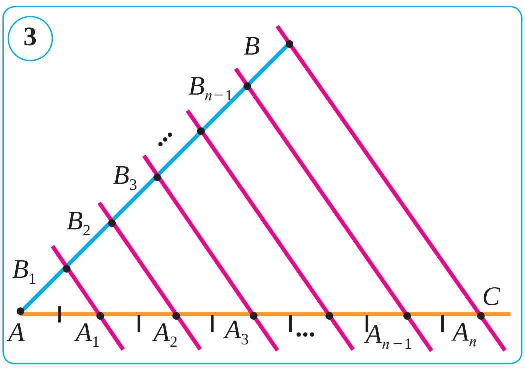
$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3B = AB:4 = 18:4 = 4{,}5 \text{ (cm)}.$$

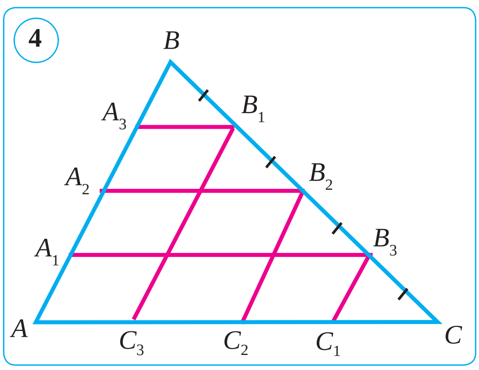
2) Kesgitlemä görä, $AA_1B_3C_1$ dörtburçluk – parallelogram, çünki $AA_1 \parallel C_1B_3$ (şerte görä) we $A_1B_3 \parallel AC_1$ (gurmaga görä).

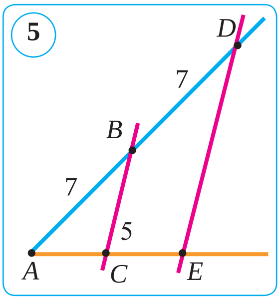
Diýmek, $AA_1=C_1B_3=4{,}5$ (cm).

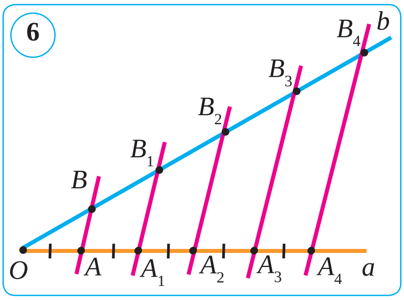
3) Kesgitlemä görä, $AA_2B_2C_2$ dörtburçluk – parallelogram, çünki $AA_2 \parallel C_2B_2$ (şerte görä) we $A_2B_2 \parallel AC_2$ (gurmaga görä). Diýmek,

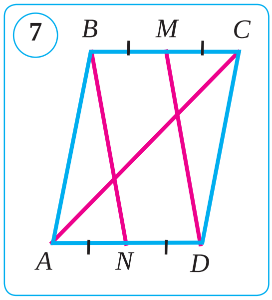
$$AA_2=C_2B_2=2AA_1=2\cdot 4{,}5=9 \text{ (cm)}.$$











4) Kesgitlemä görä, $AA_3B_1C_3$ dörtburçluk – parallelogram, çünki $AA_3 \| C_3B_1$ (şerte görä) we $A_3B_1 \| AC_3$ (gurmaga görä). Diýmek,

$$AA_3 = C_3B_1 = 3AA_1 = 3 \cdot 4{,}5 = 13{,}5 \ \text{(cm)}.$$

Jogaby: $C_1B_3 = 4{,}5$ cm, $C_2B_2 = 9$ cm, $C_3B_1 = 13{,}5$ cm.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Falesiň teoremasyny aýdyň.
2) Falesiň teoremasy diňe burç üçin ýerliklimi?
3) Berlen kesim nädip n sany deň bölege bölünýär?

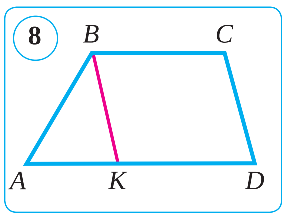
2. (*Amaly ýumuş.*) Sirkulyň we çyzgyjyň kömeginde berlen AB kesimi: 1) iki; 2) üç; 3) alty; 4) ýedi deň bölege bölüň.

3. *Berlen*: $\angle A$, $AB = BD = 7$ cm, $BC \| DE$, $CE = 5$ cm (5-nji surat).
Tapmaly: AC.

4. *Berlen:* $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
$AB \| A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$, $OB_4 = 8$ cm (6-njy surat). *Tapmaly:* OB_1, OB_2, OB_3.

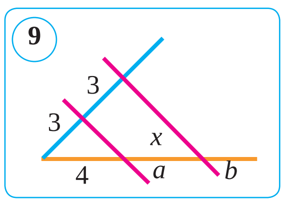
5. $ABCD$ parallelogramda M nokat BC tarapyň, N nokat AD tarapyň ortasy. BN we MD göni çyzyklar parallelogramyň AC diagonalyny deň üç bölege bölýändigini subut ediň (7-nji surat).

6. $ABCD$ trapesiýada B depesi arkaly CD tarapa parallel BK göni çyzyk geçirilen (8-nji surat).
1) $KBCD$ – parallelogramdygyny subut ediň.
2) Eger $BC = 4$ cm, $P_{ABK} = 11$ cm bolsa, trapesiýanyň perimetrini tapyň.



7. Sirkulyň we çyzgyjyň kömeginde berlen AB kesimi: 1) dört; 2) bäş sany deň bölege bölüň.

8. $a \| b$ bolýandygy mälim. 9-njy suratda berlen maglumatlardan peýdalanyp, x-i tapyň.



9. *Berlen:* $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
$AB \| A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$, $OB_4 - B_3B_4 = 18$ cm
(6-njy surata g.). *Tapmaly:* OB_1, OB_2, OB_3.

10–11. ÜÇBURÇLUGYŇ ORTA ÇYZYGYNYŇ HÄSIÝETI. TRAPESIÝANYŇ ORTA ÇYZYGYNYŇ HÄSIÝETI

1. Üçburçlugyň orta çyzygynyň häsiýeti.

Kesgitleme. *Üçburçlugyň* ***orta çyzygy*** *diýip, onuň iki tarapynyň ortalaryny utgaşdyrýan kesime aýdylýar.*

ABC üçburçlukda $AD = DB$ we $CE = EB$ bolsun, onda DE orta çyzyk bolýar (kesgitlemä görä). DE orta çyzyga görä AC tarap *esas* diýlip atlandyrylýar (1-nji surat). Islendik üçburçlugyň üç orta çyzygy bolýar (2-nji surat).

1-nji teorema.

Üçburçlugyň orta çyzygy onuň üçünji tarapyna parallel bolup, uzynlygy bu tarapyň uzynlygynyň ýarysyna deň.

Berlen: ΔABC-da: $AD = DB$, $CE = EB$, DE – orta çyzyk (3-nji surat).

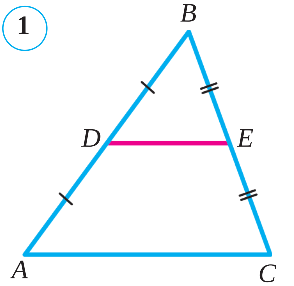
Subut etmeli: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE = \frac{1}{2} AC$.

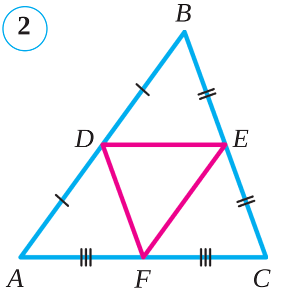
Subudy. 1) DE kesim ABC üçburçlugyň orta çyzygy bolsun. D nokat arkaly AC tarapa parallel göni çyzyk geçirýäris. Bu göni çyzyk Falesiň teoremasyna görä BC kesimi ortasyndan kesip geçýär, ýagny DE orta çyzygy öz içine alýar. Gurluşyna görä, $DE \parallel AC$.

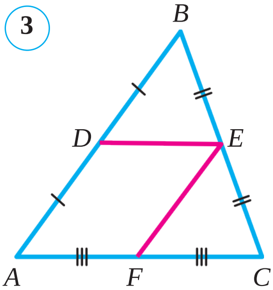
2) Indi EF orta çyzygy geçirýäris. 1-nji bentde subut edilişine görä, ol AB tarapa parallel bolýar: $EF \parallel AB$, mundan $EF \parallel AD$. $ADEF$ dörtburçlugyň garşylykly taraplary özara parallel bolany üçin ol kesgitlemä görä parallelogram bolýar. Parallelogramyň häsiýetine görä $DE = AF$, Falesiň teoremasyna görä $AF = FC$ bolany üçin $DE = \frac{1}{2} AC$. Teorema subut edildi.

1-nji mesele. Üçburçlugyň perimetri p-ge deň. Depeleri berlen üçburçlugyň taraplarynyň ortalarynda bolan üçburçlugyň perimetrini tapyň.

Çözülişi. Emele gelen üçburçlugyň taraplary berlen üçburçlugyň orta çyzyklary bolýar (2-nji surat). Diýmek, olar degişli taraplarynyň ýarysyna deň.

1


2


3


Şu sebäpli gözlenýän perimetr berlen üçburçlugyň perimetriniň ýarysyna deň bolýar: $P_{DEF} = DE + EF + FD = 0{,}5(AC + AB + BC) = 0{,}5\ p$.

Jogaby: 0,5 *p*.

2. Trapesiýa orta çyzygynyň häsiýeti.

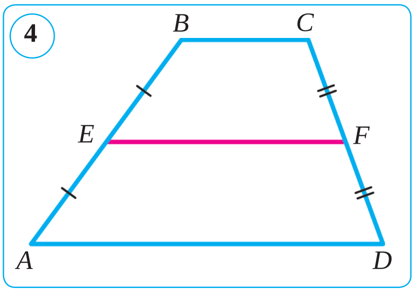
Kesgitleme. *Trapesiýanyň gapdal taraplarynyň ortasyny utgaşdyrýan kesime* ***trapesiýanyň orta çyzygy*** *diýilýär.*

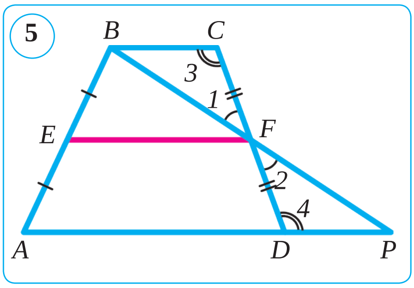
Bize *ABCD* trapesiýa berlen bolup, onda *AD* we *BC* – trapesiýanyň esaslary, *AB* we *DC* – gapdal taraplary, *E* we *F* nokatlar gapdal taraplarynyň ortalary bolsun (4-nji surat). Munda *EF* trapesiýanyň orta çyzygy bolýar.

2-nji teorema.

Trapesiýanyň orta çyzygy onuň esaslaryna parallel we onuň uzynlygy trapesiýanyň esaslarynyň uzynlyklarynyň jeminiň ýarysyna deň.

Subudy. *EF* – esaslary *AD* we *BC* bolan *ABCD* trapesiýanyň orta çyzygy bolsun ($AD \parallel BC$). *BF* göni çyzyk geçirýäris we onuň *AD* göni çyzyk bilen kesişme nokadyny *P* diýip belgileýäris (5-nji surat). Üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşanyna görä, *BCF* we *PDF* üçburçluklar deň ($CF = DF$ şerte görä, $\angle 1 = \angle 2$ – wertikal burçlar we $\angle 3 = \angle 4$ – *BC* we *AD* parallel göni çyzyklar hem-de *CD* kesiji emele getiren içki atanak burçlar bolany üçin). Bu üçburçluklaryň deňliginden taraplar deň diýen netije çykýar: $BF = PF$ we $BC = DP$. Diýmek, trapesiýanyň *EF* orta çyzygy *ABP* üçburçlugyň orta çyzygy eken. Üçburçlugyň orta çyzygynyň häsiýetine görä:





$$EF \parallel AP \text{ we } EF = \frac{1}{2}\ AP.$$

$AD \parallel BC$ bolany sebäpli, *EF* iki esasa-da parallel bolýar we aşakdaky ýaly aňladylmagy mümkin:

$$EF = \frac{1}{2}\ AP = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Diýmek, $EF \parallel AD \parallel BC$ we $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Teorema subut edildi.

Netije. Trapesiýanyň gapdal tarapy ortasyndan geçýän we esaslaryna parallel göni çyzyk ikinji gapdal tarapyny deň ikä bolýar.

Muny özbaşdak subut ediň.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

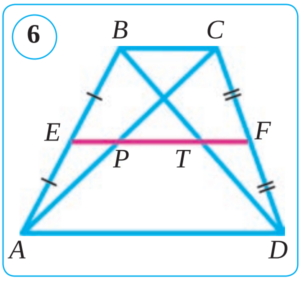
1. 1) Üçburçlugyň orta çyzygy diýip nämä aýdylýar?

? 2) Üçburçlukda näçe orta çyzyk gurmak mümkin?

2. Üçburçlugyň taraplary 5 cm, 7 cm we 11 cm-e deň. Depeleri şu üçburçlugyň taraplarynyň ortalarynda ýatýan üçburçlugyň taraplaryny tapyň.

3. Üçburçlugyň orta çyzyklary 6 cm, 7 cm we 9 cm-e deň bolan üçburçlugyň taraplaryny tapyň.

4. Trapesiýanyň diagonallary onuň orta çyzygy *EF*-i *E* depesinden başlap 5 cm, 7 cm we 4 cm-lik kesimlere bölýär (6-njy surat). Esaslaryny tapyň.



5. *ABC* üçburçlugyň taraplarynyň her biri üç deň kesime bölünen we bölünme nokatlary kesimler bilen utgaşdyrylan. *ABC* üçburçlugyň perimetri p -ge deň bolsa, 7-nji suratda emele gelen şekiliň perimetrini tapyň.

6. Trapesiýanyň esaslary: 1) 4,5 dm we 8,2 dm; 2) 9 cm we 21 cm-e deň. Onuň orta çyzygynyň uzynlygy näçe?

7. *ABCD* trapesiýada (8-nji surat) *EF* kesim *CD* tarapa parallel, *E* nokat bolsa *AB*-niň ortasy. $EF = 0{,}5CD$ bolýandygyny subut ediň.

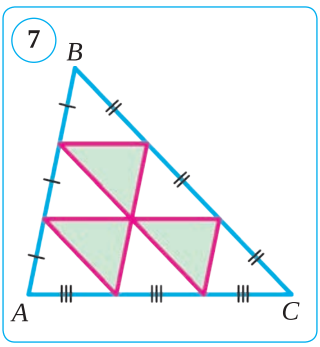
8. 9-njy suratdaky nämälim uzynlyklary hasaplaň.

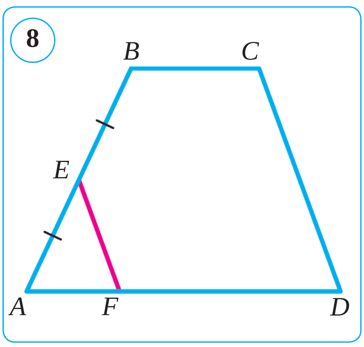
9. Trapesiýanyň diagonallary onuň orta çyzygyny her biri 6 cm-lik kesimlere bölýär. Şu trapesiýanyň esaslaryny tapyň.

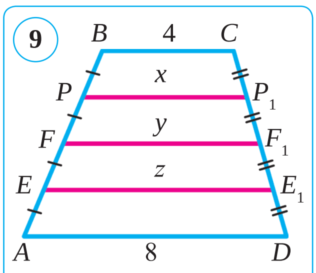
10. Deňýanly trapesiýada uzynlygy 6 cm-e deň diagonaly esasy bilen 60°-ly burçy düzýär. Trapesiýanyň orta çyzygyny tapyň.

11. Trapesiýanyň uly esasy kiçi esasyndan 3 esse uly we onuň orta çyzygy 20 cm-e deň. Trapesiýanyň esaslaryny tapyň.

12. Trapesiýanyň perimetri 40 cm-e, parallel bolmadyk taraplarynyň jemi bolsa 16 cm-e deň. Şu trapesiýanyň orta çyzygyny tapyň.







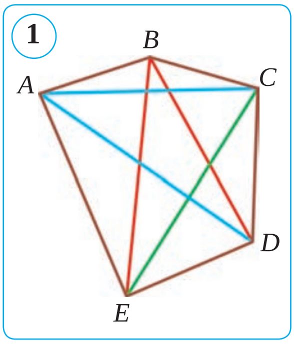
ABCD – trapesiýa.
Tapmaly: *x*, *y*, *z*.

12. AMALY GÖNÜKME WE ULANYLYŞY

Barlag üçin meseleler.

1-nji mesele. Taraplarynyň sany n bolan köpburçlugy çyzyň we onuň diagonallaryny geçiriň, munda: 1) $n=5$; 2) $n=7$; 3) $n=8$. Köpburçlugyň dürli diagonallarynyň sanyny (d_n) hasaplamagyň formulasyny pikirlenip tapyň.

Çözülişi. 1) $n=5$. A depesinden **2** sany AC we AD, B depesinden **2** sany BD we BE diagonallar çykýar we ş.m. Bäş depäniň hersinden **2** sanydan diagonal çykýar (1-nji surat). Mundan güberçek bäşburçlugyň her bir depesinden çykan diagonallarynyň sany taraplarynyň (depeleriniň) sanyndan 3-e kemligi, ýagny $5-3=2$-ä deňdigi gelip çykýar. Hemme depelerinden çykan diagonallarynyň sanyny tapmak üçin taraplarynyň sanyny **2**-ä köpeldýäris: $\mathbf{5\cdot(5-3)=5\cdot2=10}$.



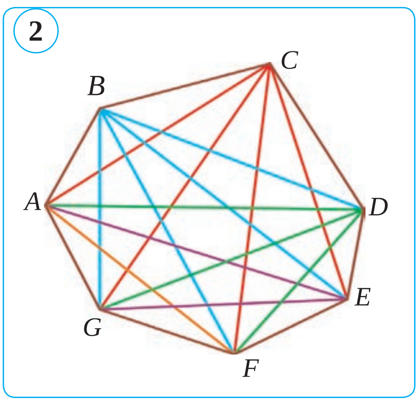
Bu köpeltmek hasylynda her bir diagonal iki gezekden hasaba alnan. Emma AC we CA, BD we DB we ş.m. bir diagonalyň iki hili belgilenmegidir, ýagny olar täze diagonallar däl. Şu sebäpli alnan köpeltmek hasylyny **2**-ä bölüp, jemi dürli diagonallaryň sanyny tapýarys: $5\cdot2:2=\mathbf{5}$.

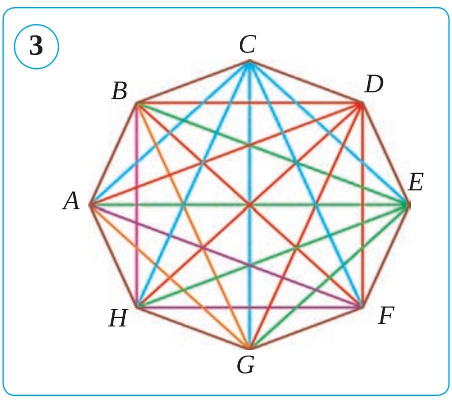
Diýmek, güberçek bäşburçlugyň jemi dürli diagonallary aşakdaka deň:

$$d_5=\frac{5\cdot(5-3)}{2}=\frac{5\cdot\cancel{2}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}}=\mathbf{5}.\qquad \textit{Jogaby: } 5 \text{ sany.}$$

2) $n=7$. Güberçek ýediburçlugyň jemi dürli diagonallarynyň sany ýokarda görkezilip geçilen meseläniň çözüwine meňzeş tapylýar. Edilen pikir ýöretmelerden anyklanan kanunalaýyklyga esaslanyp, güberçek ýediburçlugyň diagonallarynyň sanyny aşakdaky ýaly tapýarys (2-nji surat):

$$d_7=\frac{7\cdot(7-3)}{2}=\frac{7\cdot\cancel{4}^{2}}{{}_{1}\cancel{2}}=\mathbf{14}.\qquad \textit{Jogaby: } 14 \text{ sany.}$$





3) $n=8$. Güberçek sekizburçlugyň jemi dürli diagonallarynyň sany ýokarda görkezilip geçilen meseläniň çözüwine meňzeş tapylýar. Edilen pikir ýöretmelerden anyklanan kanunalaýyklyga esaslanyp, güberçek sekizburçlugyň diagonallarynyň sanyny tapýarys (3-nji surat):

$$d_8 = \frac{8\cdot(8-3)}{2} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 5}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \mathbf{20}. \qquad \textit{Jogaby:}\ 20\ \text{sany.}$$

Diýmek, islendik güberçek köpburçlugyň dürli diagonallarynyň sany aşakdaky formula boýunça tapylýar: $\boldsymbol{d_n = \frac{n(n-3)}{2}}$.

Ýatlatma! *Güberçek n burçuň bir depesinden çykan diagonallary ony (n−2) sany üçburçluga bölýär.*

2-nji mesele. Köpburçlugyň 25 diagonaly bolmagy mümkinmi?

Çözülişi. n burçuň jemi dürli diagonallarynyň sany $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ -e deň. Diýmek, $\frac{n(n-3)}{2} = 25$. Onda $n(n-3)=50$ ýa-da $n(n-3)=2\cdot5\cdot5$. Şundan görnüşi ýaly, 50-ni bir-birinden 3-e tapawutlanýan iki natural sanyň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladyp bolmaýar. Şonuň üçin jemi dürli diagonallarynyň sany 25 bolýan köpburçluk ýok. *Jogaby:* ýok.

3-nji mesele. Matematika otagyndaky suratlarda şekillendirilen üçburçluklaryň we dörtburçluklaryň sany 15. Bu şekilleriň jemi taraplarynyň sany 53. Suratlarda näçe üçburçluk we näçe dörtburçluk şekillendirilen?

Çözülişi. Dörtburçlugyň taraplarynyň sany natural sanyň islendik bahasynda dörde kratny, ýagny jübüt san bolýar. Üçburçluklaryň sany diňe täk san bolanda jem täk bolýar.

Meseläniň şertine görä deňleme düzýäris: $3x+4y=53$.

Aşakda mümkin bolan ýagdaýlara garap geçýäris. Deňlemedäki näbellileriň ýerine degişli bahalary goýup, ony kanagatlandyrýan çözüwi tapýarys.

1-nji ýagdaý. $x=1$ we $y=14$ bolsun. Onda $3\cdot1+4\cdot14=53$, ýagny $59\neq53$.

2-nji ýagdaý. $x=3$, $y=13$; $3\cdot3+4\cdot12=53$, ýagny $57\neq53$.

3-nji ýagdaý. $x=5$, $y=10$; $3\cdot5+4\cdot10=53$, ýagny $55\neq53$.

4-nji ýagdaý. $x=\mathbf{7}$, $y=\mathbf{8}$; $3\cdot7+4\cdot8=53$, ýagny $53=53$.

4-nji ýagdaý meseläniň şertini kanagatlandyrdy, şu sebäpli başga ýagdaýlara garalmaýar.

Jogaby: **7** üçburçluk, **8** dörtburçluk.

Berkitmek üçin goşmaça gönükmeler.

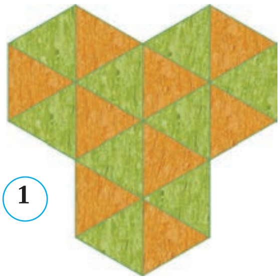
1. Güberçek köpburçlugyň bir depesinden çykan diagonallarynyň sany 13. Şu köpburçlugyň taraplarynyň sany näçe? Jemi diagonallarynyň sany näçe?
2. Diagonallarynyň sany: 1) taraplarynyň sanyna deň; 2) taraplarynyň sanyndan kem bolan; 2) taraplarynyň sanyndan artyk bolan köpburçluk barmy?

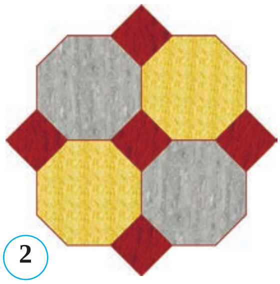
AMALY KOMPETENSIÝANI ÖSDÜRIJI GOŞMAÇA MATERIALLAR

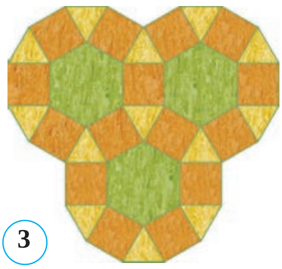
DOGRY KÖPBURÇLUKLY PARKETLER

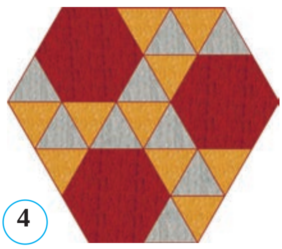
Siz, elbetde, parket barada mälim bir düşünjä eýesiňiz. Köplenç jaýlaryň, dürli desgalaryň pollary gönüburçluk, kwadrat we dogry altyburçly parketler bilen bezelýär.

Matematiki nukdaý nazardan garanda, parket – bu tekizligi geometrik şekiller bilen bir-birine dykyz we olary kesişmeýän edip ýerleşdirmekdir. Ilki dogry köpburçluklar – kwadrat, dörtburçluk we altyburçly parketlere garap geçýäris. Birmeňzeş kwadratlardan düzülen gözenekli depderiňiz iň ýönekeý parketlere mysal bolýar. 1-nji suratda dogry üçburçluklardan; 2-nji suratda kwadrat bilen dogry altyburçlukdan; 3-nji suratda bolsa dogry altyburçluklar, kwadratlar we deň taraply üçburçluklardan; 4-nji suratda dogry altyburçluklardan we üçburçluklardan düzülen owadan parketler şekillendirilen.


1


2

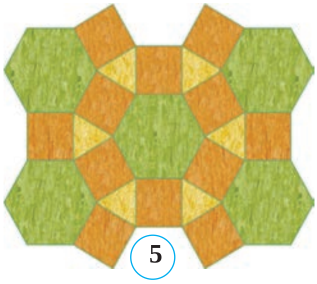

3


4

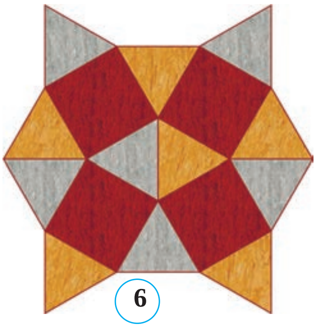
Parket diýip, tekizligi köpburçluklar bilen şeýle örtmäge aýdylýar, ýagny munda islendik iki köpburçluk umumy tarapa ýa-da umumy depä eýe bolýar, ýa-da umumy depelere eýe bolmaýar.

Eger parket dogry köpburçluklardan ybarat bolsa we her bir depäniň daşynda köpburçluklar birmeňzeş usulda ýerleşen bolsa, parket *dogry* diýilýär.

Deň taraply üçburçluklar, kwadratlar we dogry altyburçluklar tekizligi örtýän parketlere mysal bolýar. Bulardan başga dogry köpburçluklar bilen tekizligi örtmek mümkin dälligini subut edýäris. Munuň üçin parketiň



5



6

bir depesinden çykn köpburçluklaryň burçlarynyň jemi 360°-a deň bolmagyndan peýdalanýarys.

Munuň üçin dogry bäşburçluga garap geçýäris. Bize mälim bolşy ýaly, dogry bäşburçlugyň içki burçlary 108°-a deň. Parketiň bir depesine üç dogry bäşburçlugy ýerleşdirmek mümkin däl, çünki munda burçlaryň jemi $324° < 360°$ bolýar. Eger dogry bäşburçluklaryň sany 4-e deň ýa-da ondan uly bolsa, onda burçlaryň jemi $432° > 360°$ bolýar. Şonuň üçin dogry bäşburçluklardan düzülen parketler ýok. Edil şuňa meňzeş parketiň bir depesine üç ýa-da ondan köp bolan dogry ýediburçly, dogry sekizburçly we başga parket bölegini ýerleşdirip bolmaýar, çünki olaryň her bir burçy 120°-dan uly we olaryň jemi 360°-dan uly bolýar. Şu sebäpli dogry ýediburç, dogry sekizburç we başgalardan düzülen parketler bolmaýar.

5-nji suratdaky dogry altyburçlar, kwadratlar we deň taraply üçburçluklardan düzülen parketler 3-nji suratdaky parketlerden ýerleşmegi bilen tapawutlanýar. 6-njy suratda bolsa deň taraply üçburçluklardan we kwadratlardan düzülen parket şekillendirilen. Geltirilen iki parketde-de umumy kanunalaýyklygyň saklanandygyny görmek mümkin, ýagny her depesiniň daşynda ýerleşen şekilleriň içki burçlarynyň jemi 360°-a deňligi öz-özünden aýan. Meselem, 5-nji suratda $60° + 90° + 90° + 120° = 360°$, ýagny bir depesiniň daşynda bir deň taraply üçburçluk, 2 kwadrat we bir dogry altyburçluk ýerleşen; 6-njy suratda bolsa bir depäniň daşynda 3 any deň taraply üçburçluk (her bir içki burçy 60°-dan) we 2 kwadrat (her bir içki burçy 90°-dan) ýerleşen.

Tekizligi örtýän dogry parketleriň başga görnüşlerini aşakdaky jedwelde getirýäris. 5–6-njy suratlardaky parketleri gurjak boluň.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...=360°$
60°	60°	60°	60°	60°	60°	Üçburçluklardan düzülen parket
60°	60°	120°	120°			Üçburçluklardan we altyburçluklardan düzülen parket
60°	90°	90°	120°			Üçburçlukdan, kwadratlardan we altyburçlukdan düzülen parket
60°	150°	150°				Üçburçlukdan we onikiburçluklardan düzülen parket
90°	90°	90°	90°			Kwadratlardan düzülen parket
120°	120°	120°				Altyburçluklardan düzülen parket

13–14. 1-NJI BARLAG IŞI. ÝALŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK

1. Gönüburçlugyň perimetri 40 cm-e, taraplarynyň gatnaşygy 3 : 5-e deň. Şu gönüburçlugyň taraplaryny tapyň.

2. Parallelogramyň taraplaryndan biri ikinjiden 4 esse uly, perimetri bolsa 30 cm-e deň. Parallelogramyň taraplaryny tapyň.

3. Gönüburçly trapesiýanyň ýiti burçy 45°-a, kiçi gapdal tarapy hem-de kiçi esasy 16 cm-e deň. Trapesiýanyň uly esasyny tapyň.

4. *ABCD* trapesiýada *AD* – uly esasy. *B* depesi arkaly *CD* tarapa parallel we *AD* tarapy *E* nokatda kesiji göni çyzyk geçirilen, *BC* = 7 cm, *AE* = 4 cm. 1) Trapesiýanyň orta çyzygyny; 2) *ABE* üçburçlugyň perimetri 17 cm bolsa, şu trapesiýanyň perimetrini tapyň.

1-nji test

Özüňizi synap görüň!

1. Güberçek dörtburçlugyň burçlaryndan biri göni burç, galanlary bolsa özara 3 : 4 : 8 gatnaşykda. Dörtburçlugyň kiçi burçuny tapyň.

A) 72°; B) 54°; D) 144°; E) 90°.

2. Her bir içki burçy 156° bolan güberçek köpburçlugyň näçe tarapy bar?

A) 10 ; B) 15 ; D) 12 ; E) 8 .

3. *ABCD* parallelogramyň perimetri 32 cm-e, *BD* diagonaly 9 cm-e deň. *ABD* üçburçlugyň perimetrini tapyň.

A) 16 cm; B) 25 cm; D) 23 cm; E) 41 cm.

4. Iki burçunyň jemi 100°-a deň bolan parallelogramyň uly burçuny tapyň.

A) 120°; B) 110°; D) 150°; E) 130°.

5. Rombuň burçlaryndan biri 150°-a deň, kiçi diagonaly bolsa 4,5 cm. Rombuň perimetrini tapyň.

A) 27 cm; B) 18 cm; D) 13 cm; E) 21,5 cm.

6. *ABCD* trapesiýanyň orta çyzygy ony orta çyzyklary 13 cm we 17 cm-e deň bolan iki trapesiýa bölýär. Trapesiýanyň uly esasyny tapyň.

A) 19 cm; B) 21 cm; D) 18 cm; E) 30 cm.

7. Üçburçlugyň orta çyzygy onuň esasyndan 5,4 cm gysga. Üçburçlugyň orta çyzygy bilen esasynyň jemini tapyň.

A) 13,5 cm; B) 16,2 cm; D) 10,8 cm; E) 21,6 cm.

8. Deňýanly trapesiýanyň perimetri 36 cm, orta çyzygy 10 cm. Gapdal tarapynyň uzynlygyny tapyň.

A) 10 cm; B) 8 cm; D) 12 cm; E) 13 cm.

9. Trapesiýanyň orta çyzygy 9 cm, esaslaryndan biri ikinjiden 6 cm gysga. Trapesiýanyň uly esasyny tapyň.

A) 15 cm; B) 18 cm; D) 12 cm; E) 10 cm.

Iňlis dilini öwrenýäris!

Köpburçluk – polygon
Gönüburçluk – rectangle
Romb – rhombus
Kwadrat – square
Beýiklik – height

Perimetr – perimeter
Diagonal – diagonal
Parallelogram – parallelogramm
Trapesiýa – trapezoid
Burç – angle

Taryhy maglumatlar

Abu Reýhan Biruny
(973–1048)

Gadymda Müsür we Mesopotamiýa matematikasynda dörtburçluklaryň aşakdaky görnüşleri duşýar: kwadratlar, gönüburçluklar, gönüburçly we deňýanly trapesiýalar. Orta aziýaly alymlardan **Abu Reýhan Biruny** hem dörtburçluklaryň görnüşleri boýunça ençeme gözlegleri alyp barypdyr. Ol özüniň «Astronomiýa sungatyndan başlangyç maglumat berýän kitap» atly eserinde «Dörtburçluklaryň görnüşi nähili?» diýip sorag goýýar we aňa aşakdaky ýaly jogap berýär:

*«Olardan **birinjisi** – **kwadrat**, onuň ähli taraplary deň, ähli burçlary göni, diagonallary, ýagny garşylykly burçlaryny (depelerini) utgaşdyrn çyzyklary özara deň.*

***Ikinji** – **gönüburçluk**, ol kwadrata garanda uzynrak, ähli burçlary göni, dürli taraplary dürlüçe, onuň diňe garşylykly taraplary we diagonallary deň.*

***Üçünjisi** – **romb**, onuň dört tarapy deň, emma diagonallary dürlüçe, burçlary bolsa göni burç däl.*

***Dördünjisi** – **romboid**, onuň diagonallary dürlüçe, diňe garşylykly taraplary iki-ikiden deň.*

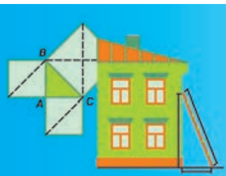
*Bu şekillerden tapawutly dörtburçluklara **trapesiýalar** diýilýär».*

Kwadrat latynça söz bolup, «dört burçly» diýen manyny aňladýar. Biruny arapça «*murabba*» adalgasyny ulanypdyr, latynça ynha şu adalga terjime edilipdir. Gönüburçluk arap dilinde «*mustatil*» – «süýri» diýen manyny aňladýar.

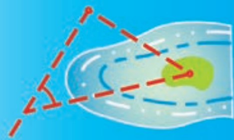
Romb adalgasynyň emele gelşi dürlüçe düşündirilýär. Ol grekçe söz bolup, romb «*aýlanýan jisim*», «*wolçok*» manysyny berýär. Geometriýa bu adalga aýlanýan kesiminiň romba meňzeşligi sebäpli girizilipdir. Arapçada «*romb*» üçin «*muaýýan*» adalgasy alnan.

Trapesiýa grekçe söz bolup, terjimesi «*stoljyga*» (nahar iýilýän stol) dogry gelýär, sözlük manysy – dört aýakly. Hakykatdan hem, grekçe «*trapedzion*» sözi «stoljyk», «iýmit stoly» diýen manyny aňladýar.

Birunynyň eserlerinde «*trapesiýa*» – «*muharrif*» diýlip atlandyrylyp, bu adalga grekçe «*trapedzion*» sözüniň arap dilindäki terjimesidir.



II BAP
GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUGYŇ TARAPLARYNYŇ WE BURÇLARYNYŇ ARASYNDAKY GATNAŞYKLAR



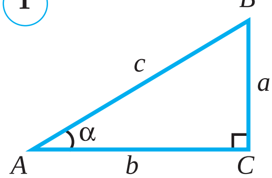
3- §. ÝITI BURÇUŇ TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALARY

15. ÝITI BURÇUŇ SINUSY, KOSINUSY, TANGENSI WE KOTANGENSI

Trigonometriýa matematikanyň bölümi bolup, üçburçlugyň taraplary bilen burçlarynyň arasyndaky baglanyşyklar, trigonometrik funksiýalaryň häsiýetleri we olaryň arasyndaky gatnaşyklary öwrenýär. «**Trigonometriýa**» sözi grekçe «**trigon**» – üçburçluk we «**metrezis**» – ölçemek diýen sözlerinden alnan bolup, türkmen dilinde «**üçburçluklary ölçemek**» diýen manyny aňladýar.

Trigonometriýanyň esasy wezipesi *üçburçluklary çözmekden* ybaratdyr. Üçburçluk geometriýanyň iň möhüm şekillerinden biri hasaplanýar. Şonuň üçin üçburçluklary öwrenmegi dowam etdirýäris. Babyň esasy maksady üçburçluklaryň käbir elementini (taraplaryny we burçlaryny) başga elementleri arkaly aňlatmakdan ybarat.

1



Katetleri $BC=a$ we $AC=b$, gipotenuzasy $AB=c$ we ýiti burçy $\angle A=\alpha$ bolan gönüburçly ($\angle C=90°$) ABC üçburçluk berlen bolsun (1-nji surat).

Şu üçburçlugyň jübüt-jübütden taraplarynyň gatnaşygyny alalyň:

$\frac{a}{c}$ – α burçuň garşysyndaky katetiň gipotenuza gatnaşygy;

$\frac{b}{c}$ – α burça sepleşýän katetiň gipotenuza gatnaşygy;

$\frac{a}{b}$ – α burçuň garşysyndaky katetiň şu burça sepleşýän katete gatnaşygy;

$\frac{b}{a}$ – α burça sepleşýän katetiň şu burçuň garşysyndaky katete gatnaşygy;

$\frac{c}{b}$ – gipotenuzanyň α burça sepleşýän katete gatnaşygy;

$\frac{c}{a}$ – gipotenuzanyň α burçuň garşysyndaky katete gatnaşygy.

Şeýlelikde, jemi 6 gatnaşygy aldyk.

Edil şuňa meňzeş, ikinji ýiti burç (B) üçin hem şu tertipde gatnaşyklary düzüp bileris.

Bu gatnaşyklardan ilkinji dördüsi *ýörite atlar* bilen atlandyrylýar.

1-nji kesgitleme. Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň **sinusy** diýip, şu burçuň garşysyndaky katetiň gipotenuza gatnaşygyna aýdylýar.

α burçuň sinusy **sin**α ýaly belgilenýär we «*sinus alfa*» diýlip okalýar.

Kesgitlemä görä:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

2-nji kesgitleme. Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň **kosinusy** diýip, şu burça sepleşýän katetiň gipotenuza gatnaşygyna aýdylýar.

α burçuň kosinusy **cos**α ýaly belgilenýär we «*kosinus alfa*» diýlip okalýar. Kesgitlemä görä:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

3-nji kesgitleme. Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň **tangensi** diýip, şu burçuň garşysyndaky katetiň burça sepleşýän katete gatnaşygyna aýdylýar.

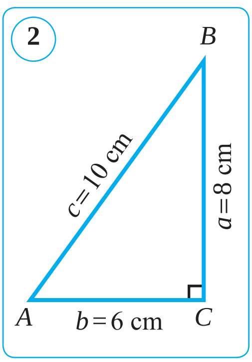
α burçuň tangensi **tg**α ýaly belgilenýär we «*tangens alfa*» diýlip okalýar. Kesgitlemä görä:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

4-nji kesgitleme. Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň **kotangensi** diýip, şu burça sepleşýän katetiň garşysyndaky katete gatnaşygyna aýdylýar.

α burçuň kotangensi **ctg**α ýaly belgilenýär we «*kotangens alfa*» diýlip okalýar. Kesgitlemä görä:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



Gönüburçly üçburçlukda katet gipotenuzadan kiçi bolany üçin ***ýiti burçuň sinusy we kosinusy birden kiçi*** bolýar.

Gönüburçly üçburçlukda katetler özara deň, biri ikinjiden uly ýa-da kiçi bolmagy mümkin. Şonuň üçin tangensiň we kotangensiň bahalary ***1-den kiçi***, ***1-e deň*** hem-de ***1-den uly*** bolmagy mümkin.

Mesele. ABC üçburçlukda $\angle C=90°$, $AB=10$ cm, $BC=8$ cm, $AC=6$ cm (2-nji surat). A burçuň trigonometrik funksiýalarynyň bahalaryny tapyň.

Çözülişi. Kesgitlemä görä:

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{8}{10}=0,8;\qquad \text{tg}A=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{\cancel{6}_{3}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3};$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{10}=0,6;\qquad \text{ctg}A=\frac{{}^{3}\cancel{6}}{\cancel{8}_{4}}=\frac{3}{4}=0,75;$$

Jogaby: $\sin A=0{,}8$; $\cos A=0{,}6$; $\text{tg}A=1\frac{1}{3}$; $\text{ctg}A=0{,}75$.

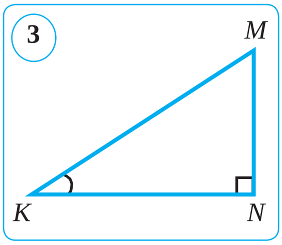
Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Gönüburçly üçburçlugyň taraplaryndan nähili gatnaşyklary düzmek mümkin we olar nähili okalýar?

? 2) Gönüburçly üçburçlukda ýiti burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi diýip nämä aýdylýar we olar nähili belgilenýär?

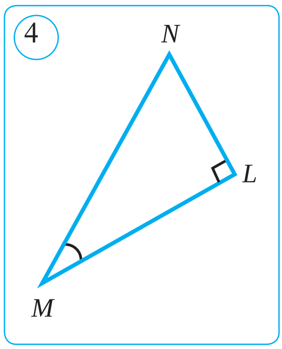
2. Her bir drob kesgitlemä görä K burçuň haýsy trigonometrik funksiýasyny aňladýar (3-nji surat): a) $\frac{KN}{KM}$; b) $\frac{MN}{KN}$; d) $\frac{MN}{KM}$; e) $\frac{KN}{MN}$?

3. $\angle ABC$ da $\angle C=90°$, $AB=6$ cm, $BC=5$ cm, $AC=\sqrt{11}$ cm (1-nji surata g.). A we B burçlaryň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensleriniň bahalaryny tapyň.



4. Gönüburçly üçburçlukda ýiti burçuň sinusy: a) 0,98; b) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{5}-2$ -ä deň bolmagy mümkinmi?

5. Gönüburçly MNL üçburçlukda $\sin N=\frac{24}{25}$ -e deň. Bu deňlikden üçburçlugyň haýsy taraplaryny tapmak mümkin (4-nji surat)?



6. MNL üçburçlukda $\angle L=90°$, $MN=13$ cm, $ML=12$ cm, $NL=5$ cm (4-nji surat). M burçuň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň bahalaryny tapyň.

7. ABC üçburçlukda $\angle C=90°$, $AB=17$ cm, $BC=8$ cm, $AC=15$ cm. A we B burçlaryň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň bahalaryny tapyň.

Şuny bilmek peýdaly!

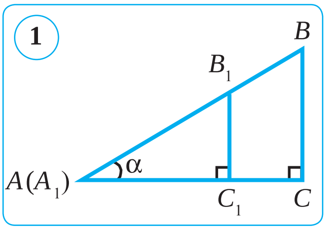
- *«**Sinus**» adalgasy latyn dilinden alnan bolup, «egilmek» diýen manyny aňladýar.*
- *«**Tangens**» adalgasy latyn dilinden terjime edilende «galtaşma» diýen manyny aňladýar.*
- *«**Kosinus**» we «**kotangens**» adalgalary «complementi sinus» we «complementi tangens»–«dolduryjy sinus» we «dolduryjy tangens» adalgalarynyň gysgaltmalaryndan ybaratdyr.*

16. ÝITI BURÇUŇ SINUSY, KOSINUSY, TANGENSI WE KOTANGENSI (DOWAMY)

1. Ýiti burçuň trigonometrik funksiýalary.

Gönüburçly üçburçlukda ýiti burçuň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň bahalary diňe ýiti burçuň ululygyna baglylygy we gönüburçly üçburçlugyň saýlanmagyna bagly dälligini görkezýäris.

Gönüburçly ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklarda $(\angle C = \angle C_1 = 90°)$ $\angle A = \angle A_1$ bolsun (1-nji surat).



Proporsiýanyň esasy häsiýetine görä:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1};\ \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1};\ \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1};\ \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Bu deňlikleriň çep we sag bölekleri degişlilikde A we A_1 ýiti burçlaryň sinuslaryna, kosinuslaryna, tangenslerine we kotangenslerine deň. Diýmek,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1, \quad \mathrm{tg}A = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \mathrm{tg}A_1,$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \cos A_1, \quad \mathrm{ctg}A = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \mathrm{ctg}A_1.$$

Şulardan görnüşi ýaly, A ýiti burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi üçburçlugyň saýlanmagyna bagly däl. Eger ýiti burçuň bahasy üýtgese, bu gatnaşyklar, hökman, üýtgeýär.

Şeýlelikde, **ýiti burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi diňe ýiti burçuň ululygyna bagly.**

Sinusa, kosinusa, tangense we kotangense ***ýiti burçuň trigonometrik funksiýalary*** diýilýär.

Ýokarda getirilen deňliklerden aşakdaky möhüm netijä gelmek mümkin:

eger A we A_1 ýiti burçlar üçin trigonometrik funksiýalardan käbiri deň bolsa, onda A we A_1 ýiti burçlar deň ($\angle A = \angle A_1$) bolýar.

Başgaça aýdanda, ***trigonometrik funksiýanyň her bir bahasyna ýeke-täk ýiti burç laýyk gelýär***.

2. Tangensiň we kotangensiň sinuslar we kosinuslar arkaly aňladylyşy.

Sinusyň we kosinusyň kesgitlemelerinden aşakdaky deňlikler gelip çykýar (15-nji tema g.):

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha, \text{ ýagny } \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \tag{1}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha, \text{ ýagny } \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{2}$$

Şeýlelikde, ýiti burçuň tangensi we kotangensi sinus we kosinus arkaly aşakdaky ýaly kesgitlenýär.

*Ýiti burç sinusynyň kosinusyna gatnaşygyna şu burçuň **tangensi** diýilýär.*

*Ýiti burç kosinusynyň sinusyna gatnaşygyna şu burçuň **kotangensi** diýilýär.*

(1) we (2) deňlikleri agzama-agza köpeldip, aşakdaky deňligi alarys:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1. \qquad (3)$$

Diýmek, α **ýiti burçuň tangensiniň we kotangensiniň köpeltmek hasyly 1-e deň**.

Mundan, α ýiti burçuň tangensi we kotangensi özara ters funksiýalardygy gelip çykýar.

Şeýlelikde, biz α ýiti burç üçin üç täze **deňligi (toždestwony)** getirip çykardyk.

3. Gönüburçly üçburçlugyň taraplary bilen burçlarynyň arasyndaky gatnaşyklar.

Trigonometrik funksiýalaryň kesgitlemelerinden aşakdaky düzgünler gelip çykýar.

1-nji düzgün. α **burçuň garşysyndaky katet gipotenuza bilen** α **burçuň sinusynyň köpeltmek hasylyna deň:**

$$a = c\sin\alpha.$$

2-nji düzgün. α **burçuň garşysyndaky katet ikinji katet bilen** α **burçuň tangensiniň köpeltmek hasylyna deň:**

$$a = b\operatorname{tg}\alpha.$$

3-nji düzgün. α **burça sepleşýän katet gipotenuza bilen** α **burç kosinusynyň köpeltmek hasylyna deň:**

$$b = c\cos\alpha.$$

4-nji düzgün. α **burça sepleşýän katet garşysyndaky katetiň** α **burçuň tangensine gatnaşygyna deň:**

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

5-nji düzgün. Gipotenuza α **ýiti burçuň garşysyndaky katetiň** α **burçuň sinusyna gatnaşygyna deň:**

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

6-njy düzgün. Gipotenuza α **ýiti burça sepleşýän katetiň** α **burçuň kosinusyna gatnaşygyna deň:**

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Mesele. *ABC* üçburçlukda *C* burç 90°-a deň. Eger:

1) $AB = 18$ cm we $\sin A = \frac{1}{3}$ bolsa, *BC* kateti; 2) $AC = 15$ cm we $\cos A = \frac{5}{6}$ bolsa, *AB* gipotenuzany; 3) $BC = 26$ cm we $\text{tg}A = \frac{13}{15}$ bolsa, *AC* kateti hasaplaň.

Çözülişi. 1) 1-nji düzgünden peýdalanyp, *BC* kateti tapýarys:

$$BC = AB\sin A = {}^{6}\cancel{18} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = 6 \text{ (cm)}.$$

Jogaby: 6 cm.

2) 6-njy düzgünden peýdalanyp, *AB* gipotenuzani tapýarys:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = 15 : \frac{5}{6} = {}^{3}\cancel{15} \cdot \frac{6}{\cancel{5}_1} = 3 \cdot 6 = 18 \text{ (cm)}.$$ *Jogaby:* 18 cm.

3) 4-nji düzgünden peýdalanyp, *AC* kateti tapýarys:

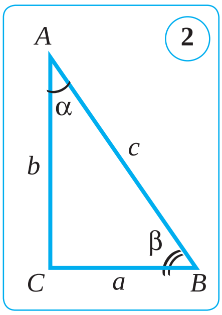
$$AC = \frac{BC}{\text{tg}A} = 26 : \frac{13}{15} = {}^{2}\cancel{26} \cdot \frac{15}{\cancel{13}_1} = 2 \cdot 15 = 30 \text{ (cm)}.$$ *Jogaby:* 30 cm.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Ýiti burçuň trigonometrik funksiýalary diýip nämä aýdylýar?

? 2) Ýiti burçuň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň ululyklary nämä bagly?

2. Aşakda berlen deňliklerden haýsy biriniň dogry bolýandygyny anyklaň (2-nji surat). Jogabyňyzy esaslandyryň.



a) $c = \frac{a}{\sin\alpha}$; b) $b = c\sin\alpha$; d) $c = a\,\text{tg}\alpha$; e) $a = \frac{b}{\text{ctg}\alpha}$.

3. Gönüburçly üçburçluk ýiti burçunyň tangensi $\sqrt{2}$; 0,001 we 100-e deň bolmagy mümkinmi? Jogabyňyzy esaslandyryň.

4. *ABC* üçburçlukda *C* burç 90°-a deň. Eger:

1) $BC = 10$ cm we $\text{tg}A = \frac{5}{8}$ bolsa, *AC* kateti; 2) $BC = 8$ cm we $\sin A = 0{,}16$ bolsa, *AB* gipotenuzany hasaplaň.

5. Gönüburçly üçburçlugyň taraplary bilen burçlary arasyndaky 6 gatnaşygy β burç üçin getirip çykaryň (2-nji surat).

6. *ABC* üçburçlukda *C* burç 90°-a deň. Eger $BC = 4$ cm we $\sin A = 0{,}25$ bolsa, *AB* gipotenuzany hasaplaň.

7. *ABC* üçburçlukda *C* burç 90°-a deň. Eger $AC = 2$ cm we $\cos A = 0{,}4$ bolsa, *AB* gipotenuzany hasaplaň.

8. *ABC* üçburçlukda *C* burç 90°-a deň. Eger $BC = 14$ cm we $\cos B = \frac{7}{25}$ bolsa, *AB* gipotenuzany hasaplaň.

4- §. PIFAGORYŇ TEOREMASY WE ONUŇ ULANYLYŞY

17. PIFAGORYŇ TEOREMASY WE ONUŇ DÜRLI SUBUTLARY

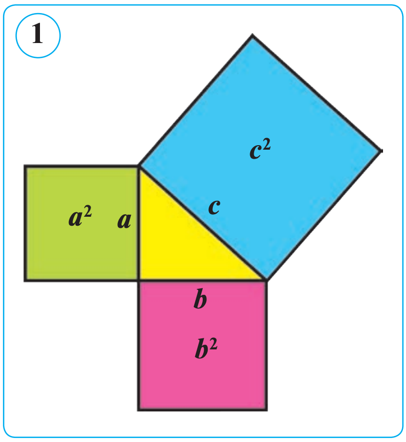
1. Pifagoryň teoremasy – geometriýanyň möhüm teoremasydyr.

Beýik grek matematigi **Pifagoryň** durmuşy barada maglumatlar gaty az. Pifagoryň mekdebi şekilleri tapawutlandyrmak we göni çyzykly şekilleri deňdeş şekillere çalşyrmagyň geometrik usulyndan teoremalary subut edende we meseleler çözende peýdalanandygy diňe grek matematikleriniň eserlerinden mälim. Hususan-da, geometriýanyň ylym hökmünde döremegine Pifagor we onuň mekdebi uly goşant goşupdyr. Aşakda getirilýän teorema Pifagoryň ady bilen aýdylýar.

Teorema.

(Pifagoryň teoremasy.) **Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasynyň kwadraty onuň katetleriniň kwadratlarynyň jemine deň.**

Bu teorema gönüburçly üçburçluga degişli bolup, üçburçlugyň taraplaryna deň kwadratlaryň meýdanlarynyň arasyndaky gatnaşygy görkezýär. Pifagor bu teoremanyň nazary subudyny getiripdir. Pifagoryň teoremasy bilen anyklanan geometrik gatnaşygyň hususy hallary Pifagordan öň hem dürli halklara mälim bolupdyr, emma teoremanyň umumy şekili Pifagoryň mekdebi tarapyndan dörediliipdir.



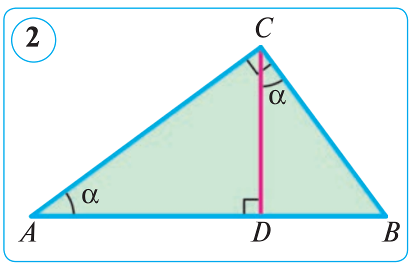
Katetleri a we b, gipotenuzasy c bolan gönüburçly ABC üçburçluk berlen bolsun, onda Pifagoryň teoremasy

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad (1)$$

formula bilen aňladylýar, munda a^2, b^2, c^2 – taraplary a, b, c bolan kwadratlaryň meýdanlaryna deň. Şonuň üçin bu deňlik **tarapy gipotenuzanyň uzynlygyna deň kwadratyň meýdany taraplarynyň katetlere deň kwadratlaryň meýdanlarynyň jemine deň** bolýandygyny görkezýär (1-nji surat).

2. Pifagoryň teoremasynyň ýiti burçuň kosinusy arkaly subut edilişi.

Subudy. ABC – berlen gönüburçly üçburçluk bolup, onuň C burçy göni burç bolsun. Gönüburçly üçburçlugyň C depesinden CD beýikligi geçirýäris (2-nji surat).



Gönüburçly ACD we ABC üçburçluklardan burçuň kosinusynyň kesgitlemesine görä:

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Mundan $AD \cdot AB = AC^2$ (2).

Gönüburçly BCD we ABC üçburçluklardan burçuň kosinusynyň kesgitlemesine görä:

$$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

Mundan $BD \cdot AB = BC^2$ (3).

Emele gelen (2) we (3) deňlikleri agzama-agza goşup we $AD + DB = AB$ bolýandygyny hasaba alyp,

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot D + BD \cdot AB = AB \cdot (AD + BD) \cdot AB = AB^2$$

deňligi alarys. Teorema subut edildi.

Gönüburçly ABC ($\angle C = 90°$) üçburçlugyň taraplaryny degişlilikde $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ diýip belgiläp, Pifagoryň formulasyny alarys:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}.$$

3. Pifagoryň teoremasynyň meýdanlar arkaly subut edilişi.

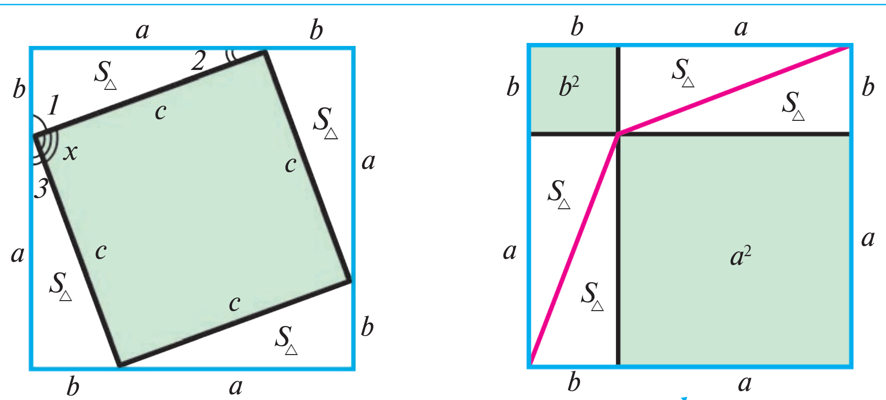
Katetleri a, b we gipotenuzasy c-ge deň bolan gönüburçly üçburçluk berlen. Bu üçburçluk üçin Pifagoryň teoremasy ýerlikli bolýandygyny subut edýäris, ýagny

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

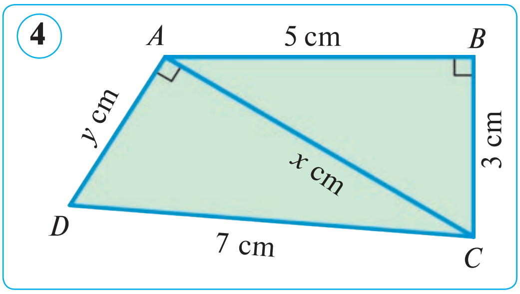
bolýandygyny görkezýäris.

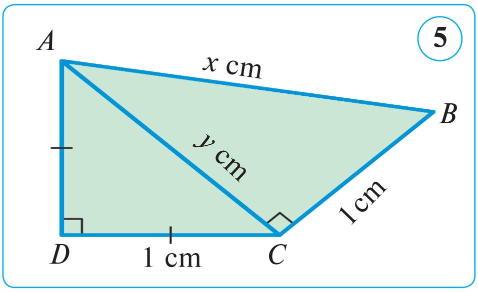
Subudy. Tarapy $(a+b)$-ge deň bolan iki kwadrat guryarys. Olary 3-nji suratda görkezilen usul bilen gönüburçly üçburçluklara, kwadratlara we gönüburçluklara bölüp çykýarys. 3-nji *a* suratdaky dörtburçlugyň tarapy c bolan kwadrat bolýandygyny görkezýäris. Hakykatdan hem, ilki bilen bu dörtburçluk romb, çünki onuň tarapy katetleri a we b bolan gönüburçly üçburçlugyň

3



a *b*





gipotenuzasy c-ge deň. Indi çyzgydaky x burçuň gönüdigini görkezýäris. Hakykatdan hem, $\angle x+\angle 1+F3=180°$, $\angle 3=\angle 2$ (çünki üçburçluklar deň) we $\angle 1=90°-\angle 2$ bolýandygyny hasaba alyp tapýarys: $\angle x=90°$. Şonuň üçin bu dörtburçlugyň burçlaryndan biri 90°-a deň bolan romb, ýagny kwadrat bolýar. Garalýan iki uly kwadrat deňdeş, ýagny olaryň meýdanlary deň. Şonuň ýalyda, birinji kwadratyň meýdany $4S_\triangle+c^2$ -a, ikinji kwadratyň meýdany bolsa $4S_\triangle+a^2+b^2$ -a deň (3-nji b surat). Şonuň üçin

$4S_\triangle+c^2=4S_\triangle+a^2+b^2$. Diýmek, $c^2=a^2+b^2$. Teorema subut edildi.

Mesele. 4-nji suratdaky näbelli kesimleriň uzynlygyny tapyň.

Çözülişi. 1) ΔABC– gönüburçly, $\angle B=90°$ (4-nji surat). Pifagoryň teoremasyna görä: $x^2=5^2+3^2$, mundan $x^2=34 \Rightarrow x=\sqrt{34}$ $(x>0)$.

2) ΔACD– gönüburçly, $\angle CAD=90°$ (4-nji surat). Pifagoryň teoremasyna görä, $y^2+(\sqrt{34})^2=7^2$, mundan $y^2+34=49$, $y^2=15$, $y=\sqrt{15}$ $(y>0)$.

Jogaby: $x=\sqrt{34}$ cm; $y=\sqrt{15}$ cm.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Pifagoryň teoremasynyň nähili subutlaryny bilýärsiňiz?
2) «Gipotenuzanyň kwadraty», «katetiň kwadraty» diýen jümleleri nähili düşünýärsiňiz?

2. Gönüburçly üçburçlugyň a we b katetleri berlen. Eger: 1) $a=5$, $b=12$; 2) $a=4\sqrt{2}$, $b=7$; 3) $a=0{,}7$, $b=2{,}4$; 4) $a=5$, $b=6$; 5) $a=\frac{5}{13}$, $b=\frac{12}{13}$ bolsa, c gipotenuzany tapyň.

3. Rombuň diagonallary: 1) 12 cm we 16 cm; 2) 14 cm we 48 cm. Rombuň perimetrini tapyň.

4. Näbelli kesimleriň uzynlygyny tapyň (5-nji surat).

5. Gönüburçly üçburçlukda a we b – katetler, c – gipotenuza. Eger: 1) $a=1{,}2$, $c=1{,}3$; 2) $a=7$, $c=9$; 3) $a=1{,}5$, $c=1{,}7$; 4) $a=2$, $c=2{,}5$ bolsa, b kateti tapyň.

6. Gönüburçlugyň taraplary: 1) 2,4 dm we 7 cm; 2) 50 cm we 12 dm; 3) 8 dm we 1,5 m. Onuň diagonalyny tapyň.

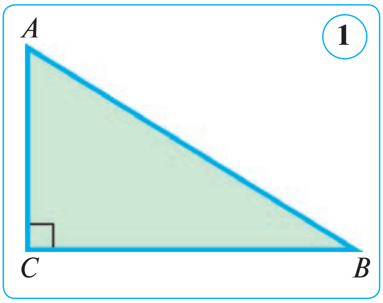
18. PIFAGORYŇ TEOREMASYNA TERS TEOREMA

1. Pifagoryň teoremasynyň käbir netijeleri.

Pifagoryň teoremasynyň netijeleriniň içinden biriniň subudyny getirýäris.

Netije. Gönüburçly üçburçlugyň islendik kateti gipotenuzadan kiçidir.

Subudy. ΔABC– gönüburçly, $\angle C=90°$ (1-nji surat). Üçburçlugyň islendik kateti gipotenuzadan kiçi bolýandygyny subut edýäris.



Hakykatdan hem, Pifagoryň teoremasyna görä katetler üçin:

$$AC^2=AB^2-BC^2 \text{ we } BC^2=AB^2-AC^2$$

gatnaşyklar ýerlikli. Mundan

$$AC^2<AB^2 \text{ we } BC^2<AB^2$$

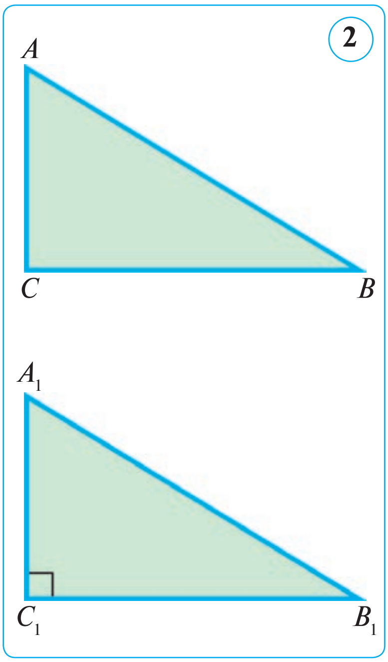
bolýandygy gelip çykýar.

Diýmek, $AC<AB$ we $BC<AB$. Netije subut edildi.

2. Pifagoryň teoremasyna ters teorema.

Teorema.

Eger üçburçlugyň taraplaryndan biriniň kwadraty onuň galan iki tarapynyň kwadratlarynyň jemine deň bolsa, onda üçburçluk gönüburçly bolýar.



Subudy. ΔABC-da $AB^2=AC^2+BC^2$ bolsun. $\angle C=90°$ -dygyny subut edýäris (2-nji surat).

C_1 burçy göni bolan gönüburçly $A_1B_1C_1$ üçburçluga garap geçýäris, onda $A_1C_1=AC$ we $B_1C_1=BC$. Pifagoryň teoremasyna görä, $A_1B_1^2=A_1C_1^2+B_1C_1^2$ we diýmek,

$$A_1B_1^2=AC^2+BC^2.$$

Teoremanyň şertine görä,

$AB^2=AC^2+BC^2$, diýmek, $A_1B_1^2=AB^2$.

Mundan $A_1B_1=AB$ ekenligini tapýarys. Şeýdip, ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar üç tarapyna görä deň. Şonuň üçin $\angle C=\angle C_1$, ýagny ABC üçburçlugyň C depesindäki burçuň göni burçdugy gelip çykýar.

Teorema subut edildi.

1-nji mesele. Eger üçburçlugyň taraplary: 1) $a=5$, $b=11$, $c=12$; 2) $a=\sqrt{85}$, $b=7$, $c=6$ bolsa, ol gönüburçly üçburçluk bolarmy?

Çözülişi. 1) Iki kiçi tarapynyň kwadratlarynyň jemini hasaplaýarys:

$$5^2+11^2=25+121=146.$$

Indi uly tarapynyň kwadratyny hasaplaýarys: $12^2=144$.

Alnan netijeleri deňeşdirsek, $a^2+b^2 \neq c^2$ gatnaşyk gelip çykýar. Diýmek, üçburçluk gönüburçly däl.

Jogaby: $a=5$, $b=11$ we $c=12$ bolanda üçburçluk gönüburçly bolmaýar.

2) Iki kiçi tarapynyň kwadratlarynyň jemini hasaplaýarys:

$$7^2+6^2=49+36=85.$$

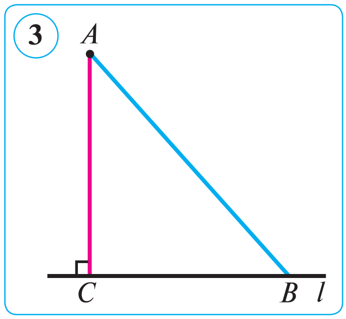
Indi uly tarapynyň kwadratyny hasaplaýarys: $(\sqrt{85})^2=85$.

Diýmek, $85=85$ – ýerlikli. Netijede $b^2+c^2=a^2$-a eýe bolarys. Mundan üçburçlugyň gönüburçlydygy gelip çykýar.

Jogaby: $a=\sqrt{85}$, $b=7$ we $c=6$ bolanda üçburçluk gönüburçly bolýar.

3. Perpendikulýar we gyşarma.

l – göni çyzyk we onda ýatmaýan A nokat berlen bolsun. Kesgitlemä görä, A-dan l göni çyzyga çenli iň gysga aralyk A-dan l-e geçirilen AC ***perpendikulýaryň*** uzynlygyna deň bolýar (3-nji surat).



Hakykatdan hem, her bir $B \in l$ üçin ACB üçburçluk – gönüburçly, munda AC we CB – katetler, AB bolsa gipotenuza bolýar. CB kesime AB gyşarmanyň l göni çyzykdaky ***proýeksiýasy*** diýilýär.

Pifagoryň teoremasy AB – gyşarma, AC – perpendikulýar we CB – proýeksiýasynyň uzynlyklaryny aşakdaky deňlik bilen baglaýar:

$$AB^2=AC^2+CB^2.$$

Şonuň üçin, *hemişe* $AB>AC$ ýa-da $AB>BC$, başgaça aýdanda, *bir nokatdan geçirilen perpendikulýaryň we gyşarmanyň proýeksiýasy gyşarmadan kiçi bolýar*.

Şonuň ýaly-da, *deň gyşarmalar deň proýeksiýalara eýe; iki gyrmadan haýsy biriniň proýeksiýasy uly bolsa, şol gyşarma uly bolýar*.

2-nji mesele. Diagonallary 10 cm we 24 cm-e deň bolan rombuň tarapyny tapyň.

Çözülişi. Rombuň diagonallary perpendikulýar we kesişme nokadynda deň ikä bölünýänliginden peýdalanýarys. Onda rombuň tarapynyň katetleri 5 cm we 12 cm-e deň bolan gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy bolýar.

$$5^2+12^2=25+144=169,\ \text{ýagny}\ 169=13^2.$$

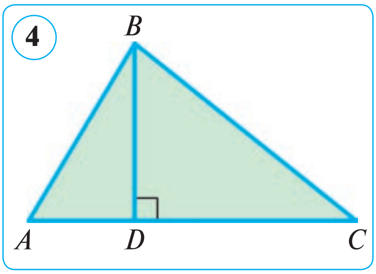
Diýmek, rombuň tarapy 13 cm-e deň eken. *Jogaby:* 13 cm.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Pifagoryň teoremasyna ters teoremany aňladyň.
2) Gyşarmanyň göni çyzykdaky proýeksiýasy diýende nämäni düşünýärsiňiz?
3) Katetiň gipotenuzadan kiçidigi dogrumy?

2. Gönüburçly üçburçlugyň taraplary aşakdaky sanlara deň bolmagy mümkinmi: 1) 11 cm, 7 cm, 17 cm; 2) 3 cm, 1,6 cm, 3,4 cm; 3) 3 cm, 4 cm, 6 cm; 4) 2 cm, $\sqrt{7}$ cm, $\sqrt{11}$ cm? Jogabyňyzy esaslandyryň.

3. ΔABC-da $AB=13$ cm, $BC=20$ cm, BD– üçburçlugyň beýikligi we ol 12 cm-e deň. AB, BC taraplaryň AC tarapa geçirilen proýeksiýalarynyň uzynlyklaryny we AC tarapyň uzynlygyny tapyň (4-nji surat). Boş ýerlere degişli jogaplary ýazyň.



Çözülişi. ΔABD we ΔBCD – gönüburçly, çünki $\angle ADB=\angle BDC=90°$. AB we BC taraplaryň AC tarapdaky proýeksiýalary degişlilikde AD we CD kesimlerden ybarat.

ΔABD-dan Pifagoryň teoremasyna görä:

$$AD^2=AB^2-BD^2=13^2-...^2=...-...=...\,(\text{cm}).$$

Mundan $AD=...$ cm.

ΔBCD-dan Pifagoryň teoremasyna görä:

$$CD^2=BC^2-BD^2=...^2-12^2=...-...=...\ (\text{cm}).$$ Mundan $CD=...$ cm.

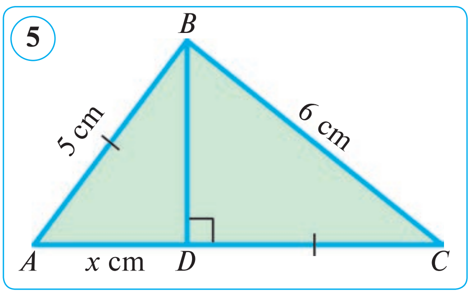
$$AC=...+DC=...+...=...\ (\text{cm}).$$

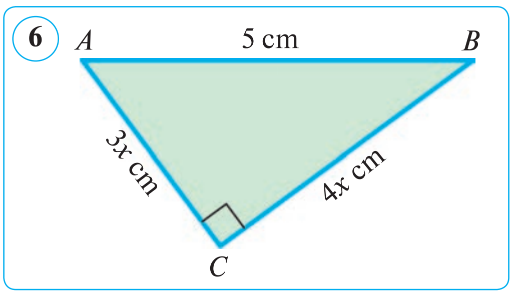
Jogaby: $AD=...$ cm, $CD=...$ cm, $AC=...$ cm.

4. Näbelli uzynlyklary tapyň (5–6-njy suratlar).

5. Gönüburçly üçburçlugyň iki tarapy 6 cm we 8 cm-e deň. Üçünji tarapyň uzynlygyny tapyň. Mesele näçe ýözüwe eýe?

6. Gönüburçly üçburçlugyň taraplary aşakdaky sanlara deň bolmagy mümkinmi: 1) $a=12$, $b=35$, $c=37$; 2) $a=11$, $b=20$, $c=25$; 3) $a=18$, $b=24$, $c=30$; 4) $a=9$, $b=12$, $c=15$?





19. PIFAGORYŇ TEOREMASYNYŇ KÄBIR ULANYLYŞY

Üç tarapyna görä üçburçlugyň beýikligini tapmak.

Taraplary a, b we c bolan ABC üçburçluga garap geçýäris. Onuň C depesinden AB tarapa geçirilen $CD=h_{\tilde{n}}$ beýikligini tapýarys (1-nji a surat).

Beýiklik esasy D nokadyň AB kesime görä nähili ýerleişine görä üç ýagdaýyň bolmagy mümkin. Şu ýagdaýlara garap geçýäris.

1-nji ýagdaý. D nokat AB kesimiň içki nokady bolsun. Eger $AD=x$ belgilemäni girizsek, onda $DB=c-x$ bolýar (1-nji a surat). ΔADC we ΔBDC-lar gönüburçly, Pifagoryň teoremasyna görä:

$$h_c^2=b^2-x^2\ (1)\quad \text{we}\quad h_c^2=a^2-(c-x)^2\ (2).$$

Bulardan aşakdaky deňligi alarys: $b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$.

Mundan

$$b^2-x^2=a^2-c^2+2cx-x^2,\ \text{ýagny}\ b^2=a^2-c^2+2cx.$$

Ahyrky deňlemeden x-i tapýarys:

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\quad \text{ýa-da}\quad x^2=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}.$$

x^2-yň bu bahasyny (1) deňlige goýup, aşakdaka eýe bolarys:

$$h_c^2=b^2-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}=\frac{4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}.$$

Bu drobuň sanawjysyny köpeldijilere dagydyp, aşakdaka eýe bolarys:

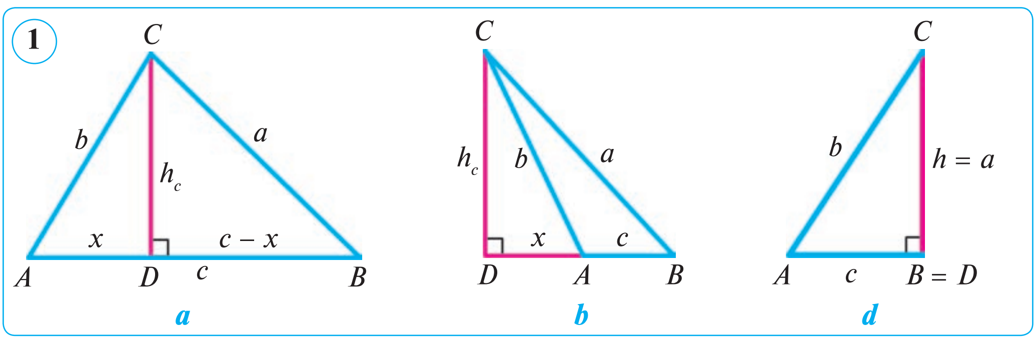
$$h_c^2=\frac{\left(2bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)\left(2bc+\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)}{4c^2}=\frac{\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}{4c^2}.$$

Emele gelen aňlatmanyň sanawjysyndaky iki köpeldijisini aşakdaky ýaly şekil çalşyrýarys:

$$2bc-b^2-c^2+a^2=a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c)\quad \text{we}$$
$$2bc+b^2+c^2-a^2=(b+c)^2-a^2=(b+c-a)(b+c+a).$$

Onda

$$h_c^2=\frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2},$$



mundan

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}.$$

Üçburçlugyň ýarym perimetrini p bilen belgileýäris, onda:

$$a+b+c=2p,$$
$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b),$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c),$$
$$b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a).$$

Alnan aňlatmalary kök aşagyndaky aňlatmalaryň ýerine goýup, aşakdaky netijäni alarys:

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c}\cdot 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Edil şonuň ly,

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{we} \quad h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2-nji ýagdaý. D nokat AB kesimiň dowamynda ýatýar, ýagny $DB=c+x$. Munda-da agzalan netije emele gelýär (1-nji b surat).

3-nji ýagdaý. D nokat B nokat bilen, ýagny $h=a$ – beýiklik katet bilen üstme-üst düşýär. Munda üçburçluk gönüburçly bolýar (1-nji d surat).

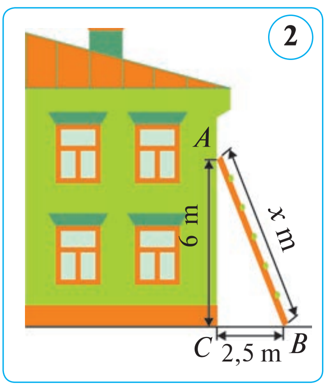
Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. Taraplary: 1) 10 cm, 10 cm, 12 cm; 2) 17 dm, 17 dm, 16 dm; 3) 4 dm, 13 dm, 15 dm bolan üçburçluklaryň beýikliklerini tapyň.

2. Beýikligi h-a deň bolan deň taraply üçburçlugyň tarapyny tapyň. Eger: 1) $h=6$ cm; 2) $h=1{,}5$ dm bolsa, tarapy tapyň.

3. Üçburçlugyň taraplary: 1) $a=5$ cm, $b=7$ cm, $c=6$ cm; 2) $a=13$ dm, $b=14$ dm, $c=15$ dm; 3) $a=24$ cm, $b=25$ cm, $c=7$ cm-e deň. Üçburçlugyň uly tarapyna geçirilen beýikligini tapyň.

4. Eger deň taraply üçburçlugyň tarapy 12 cm-e deň bolsa, onuň beýikligini tapyň.



5. Üçburçlugyň taraplary $a=8$ cm, $b=10$ cm we $c=12$ cm. Onuň iň uly we iň kiçi beýikliklerini tapyň.

6. Üçburçlugyň taraplary: 1) 17, 65, 80; 2) 8, 6, 4; 3) 24, 25, 7; 4) 30, 34, 16; 5) 15, 17, 8-e deň bolsa, onuň iň kiçi tarapyna geçirilen beýikligini tapyň.

7. Üçburçlugyň taraplary $a=16$ cm, $b=12$ cm we $c=8$ cm. Üçburçlugyň kiçi beýikligini tapyň.

8. Üzeňňiniň uzynlygyny tapyň (2-nji surat).

5-§. TRIGONOMETRIK TOŽDESTWOLAR

20–21. ESASY TRIGONOMETRIK TOŽDESTWO WE ONUŇ NETIJELERI

1. Esasy trigonometrik toždestwolar.

Bir burçuň trigonometrik funksiýalarynyň arasyndaky baglanyşygy aňladýan toždestwolary getirip çykarýarys.

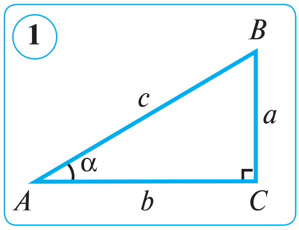
Teorema.

Islendik ýiti α burç üçin

$$\mathbf{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

deňlik ýerlikli.

Subudy. A depesindäki burçy α deň bolan gönüburçly islendik ABC üçburçlugy alýarys (1-nji surat).



Pifagoryň teoremasyna görä: $BC^2+AC^2=AB^2$.

Deňligiň iki bölegini hem AB^2 -a bölüp, aşakdaky deňlige eýe bolarys: $\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=1$.

Emma $\frac{BC}{AB}=\sin\alpha$, $\frac{AC}{AB}=\cos\alpha$. Şeýlelikde,

$$\mathbf{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}. \qquad (1)$$

(1) deňlik **trigonometriýanyň esasy toždestwosy** diýilýär.

Bize bir burçuň trigonometrik funksiýalarynyň arasyndaky baglanyşygy aňladýan üç deňlik mälim:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (2),\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (3),\quad \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1\ (4).$$

(1) deňligiň iki bölegini hem $\cos^2\alpha$ bölüp, (5) toždestwony alarys:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\ \text{ýa-da}\ 1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (5)$$

(1) deňligiň iki bölegini hem $\sin^2\alpha$ bölüp, (6) toždestwony alarys:

$$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ \text{ýa-da}\ 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (6)$$

2. Esasy trigonometrik toždestwodan gelip çykýan netijeler.

Islendik α ýiti burç üçin aşakdaky deňlikler ýerlikli:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}. \qquad (7)$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \qquad (8)$$

1-nji mesele. Eger $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ bolsa, $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$ we $\text{ctg}\alpha$ -nyň bahalaryny hasaplaň.

Çözülişi. 1) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2) $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 3) $\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Jogaby: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\text{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2-nji mesele. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1) $1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$; 2) $1-\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}$.

Çözülişi. 1) Goşulyjylary umumy maýdalawja getirýäris, soňra suratdaky meňzeş agzalary toparlap we (6) toždestwodan peýdalanyp tapýarys:

$$1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\text{ctg}^2\alpha.$$

Jogaby: $1+\text{ctg}^2\alpha$.

2) Tapawudy umumy maýdalawja getirýäris, soňra suratdaky meňzeş agzalary toparlap we (5) toždestwodan peýdalanyp tapýarys:

$$1-\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-1)}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\text{tg}^2\alpha.$$

Jogaby: $1+\text{tg}^2\alpha$.

3-nji mesele. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Çözülişi. Iki sanyň jeminiň kwadratynyň formulasyndan we esasy trigonometrik toždestwodan peýdalanyp, aňlatmany ýönekeýleşdirýäris:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 = 1.$$ *Jogaby:* 1.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Haýsy deňlige trigonometriýanyň esasy toždestwosy diýilýär?

2) Trigonometrik toždestwolary aňladýan deňliklerden haýsylaryny bilýärsiňiz?

3) Esasy trigonometrik toždestwodan nähili netijeler gelip çykýar?

2. Eger: 1) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ bolsa, $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$ we $\text{ctg}\alpha$-ny; 2) $\cos\alpha=0{,}8$ bolsa, $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$ we $\text{ctg}\alpha$-ny; 3) $\cos\alpha=0{,}28$ bolsa, $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$ we $\text{ctg}\alpha$-ny tapyň.

3. Eger $\text{tg}\alpha = \frac{5}{12}$ bolsa, $\sin\alpha$ we $\cos\alpha$-ny tapyň.

Nusga. Eger $\text{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ bolsa, $\sin\alpha$ we $\cos\alpha$-ny tapyň.

Çözülişi. $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\text{tg}^2\alpha = 1+\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1+\frac{16}{9} = \frac{25}{9}$. Diýmek, $\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$.

Mundan $\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Indi sinα-ny hasaplaýarys: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$.

Jogaby: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

4. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Nusga. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

Çözülişi. Ýönekeýleşdirmek üçin goşulyjylary toparlap, alarys:

$$1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = \underbrace{1-\cos^2\alpha}_{\sin^2\alpha}+\sin^2\alpha = \sin^2\alpha+\sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Jogaby: $2\sin^2\alpha$.

5. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1) $\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$

.

6. Gönüburçly üçburçlugyň katetleri 7 cm we 24 cm-e deň. Üçburçlugyň iň kiçi burçunyň trigonometrik funksiýalarynyň bahalaryny tapyň.

7. Eger: 1) $\operatorname{tg}A=2$; 2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ bolsa, A ýiti burçuň trigonometrik funksiýalarynyň bahalaryny tapyň.

8. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Çözülişi.

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}(1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha) = (1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha) = 1+\operatorname{tg}^6\alpha$$

Ýönekeýleşdirende (5) toždestwodan we $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ formuladan peýdalanyldy.

Jogaby: $1+\operatorname{tg}^6\alpha$.

9. Eger: 1) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ bolsa, cosα, tgα we ctgα-ny; 2) cosα = 0,6 bolsa, sinα, tgα we ctgα-ny tapyň.

10. Bir burçuň sinusy we kosinusy degişlilikde aşakdaky sanlara deň bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny anyklaň: 1) $\frac{1}{2}$ we $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$ we $\frac{3}{4}$.

11. Bir burçuň tangensi we kotangensi degişlilikde aşakdaky sanlara deň bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny anyklaň:

1) 0,4 we 2,5; 2) 1,1 we 0,9; 3) $\sqrt{5}+2$ we $\sqrt{5}-2$.

12. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$; 2) $\cos\alpha-\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

13. Gönüburçly üçburçlugyň katetleri 8 cm we 15 cm-e deň. Üçburçlugyň iň kiçi burçunyň trigonometrik funksiýalarynyň bahalaryny tapyň.

14. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; 2) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$.

22. DOLDURYJY BURÇUŇ TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALARY ÜÇIN FORMULALAR

Dolduryjy burçuň trigonometrik funksiýalary üçin formulalar.

Dolduryjy burçlar *diýip, jemi 90°-a deň bolan iki burça aýdylýar.* Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlary dolduryjy burçlara mysal bolýar, çünki olaryň jemi 90°-a deň.

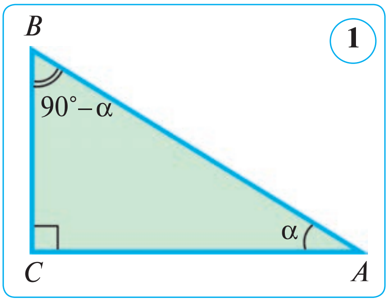
Biz garap çykan trigonometrik toždestwolar bir burçuň dürli trigonometrik funksiýalarynyň arasyndaky özara gatnaşyklary ornaşdyrmaga mümkinçilik berýär. Indi gönüburçly üçburçlugyň iki ýiti burçunyň arasyndaky gatnaşyklara garap geçýäris.

Teorema.

Islendik gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçy α üçin

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha; \ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

deňlikler ýerlikli.



Subudy. Gipotenuzasy AB bolan gönüburçly ABC üçburçluga garaýarys (1-nji surat). Eger $\angle A = \alpha$ bolsa, onda $\angle B = 90° - \alpha$ deň bolýar. Üçburçlugyň ýiti burçlaryny sinuslar we kosinuslar arkaly aňladýarys. Kesgitlemä görä:

$$\sin B = \frac{AC}{AB} \quad \text{we} \quad \cos A = \frac{AC}{AB},$$

ýagny $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$;

$$\sin A = \frac{BC}{AB} \ \text{we} \ \cos B = \frac{BC}{AB}, \ \text{ýagny}$$

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Teorema subut edildi.

Subut edilen teoremadan şu netije gelip çykýar.

Netije. Islendik ýiti α burç üçin

$$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha; \quad \mathrm{ctg}(90° - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$$

deňlikler ýerlikli.

Bu deňlikleriň dogrudygyny ýokarda getirip çykarylan formulalardan peýdalanyp subut etmegi özüňize hödürleýäris.

A we *B* ýiti burçlar – bir-birini 90° dolduryjy burçlardyr. Şony hasaba alyp, ýokarda getirip çykarylan formulalar aşakdaky ýaly okalýar:

– **berlen burçuň sinusy dolduryjy burçuň kosinusyna deň;**
– **berlen burçuň kosinusy dolduryjy burçuň sinusyna deň;**
– **berlen burçuň tangensi dolduryjy burçuň kotangensine deň;**
– **berlen burçuň kotangensi dolduryjy burçuň tangensine deň.**

1-nji mesele. A we B burçlar – gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlary bolsun. Eger $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ bolsa, tg$A$-ny tapyň.

Çözülişi. sin$B$=cos$A$, diýmek, $\cos A = \sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Indi A burçuň sinusyny esasy trigonometrik toždestwonyň netijesinden peýdalanyp tapýarys:

$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ Burçuň tangensini sinus we kosinus arkaly tapýarys:

$$\text{tg}A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = 2$$

Jogaby: 2.

2-nji mesele. Eger ctg$x$ = tg20° bolsa, ýiti x burçy tapyň.

Çözülişi. tg20° = ctg(90° − 20°) = ctg70°, diýmek, ctg$x$ = ctg70°.

Mundan x = 70°. *Jogaby:* x = 70°.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Dolduryjy burçlar diýip nämä aýdylýar?
2) Gönüburçly üçburçlugyň iki ýiti burçunyň arasyndaky nähili gatnaşyklary bilýärsiňiz? Degişli formulalary ýazyň.

2. Eger: 1) sin$x$ = cos40°; 2) cos$x$ = sin76°; 3) tg$x$ = ctg56°; 4) ctg$x$ = tg16° bolsa, ýiti x burçy tapyň.

3. A we B burçlar – gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlary. Eger cos$A$ = 0,6 bolsa, sin$B$ we cos$B$-ni tapyň.

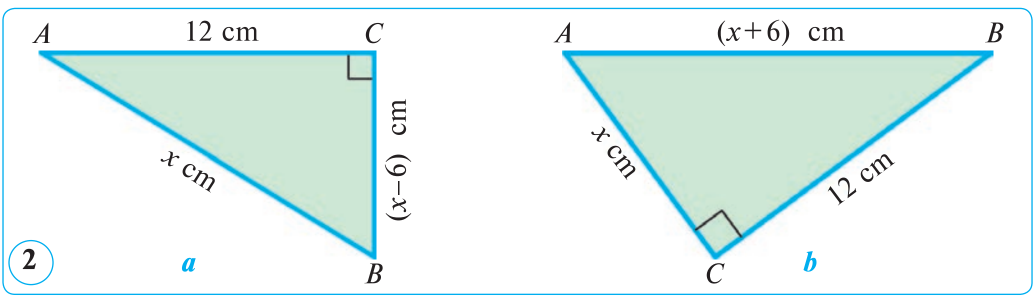
4. Bir burçuň sinusy we kosinusy degişlilikde aşakdaky sanlara deň bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny anyklaň: 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ we $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) 0,3 we 0,4.

5. A we B burçlar – gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlary. Eger sin$B$=0,5 bolsa, cos$A$ we tg$A$-ny tapyň.

6. Näbelli uzynlyklary tapyň (2-nji surat) hem-de ýiti burçlaryň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini hasaplaň.

7. Eger sin(90° − α) = 0,8 bolsa, cosα we sinα-ny tapyň.

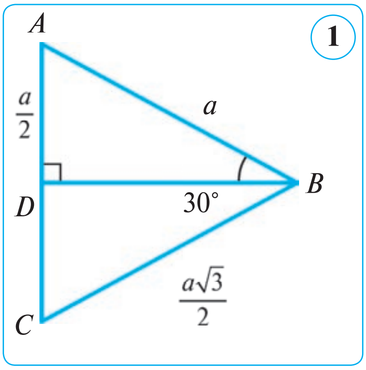
8. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1) $\frac{\cos\alpha}{\text{ctg}\alpha}$; 2) $\text{ctg}^2\alpha(2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1)$.



23. 30°, 45°, 60°-LY BURÇLARYŇ SINUSYNY, KOSINUSYNY, TANGENSINI WE KOTANGENSINI HASAPLAMAK

1. 30°-ly burçuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini hasaplamak.

Deň taraply ABC üçburçlugy alýarys (1-nji surat). Oňa BD beýiklik geçirsek, ol bissektrisa we mediana wezipesini ýerine ýetirýär. Şu sebäpli ABD üçburçluk B depesindäki ýiti burçy 30°-a deň bolan gönüburçly ($\angle D=90°$) üçburçlukdyr. Deň taraply üçburçlugyň tarapy a-ga deň bolsun. Onda $AD = \frac{a}{2}$. Pifagoryň teoremasyna görä:



$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Kesgitlemelere görä:

$$\sin 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2};$$

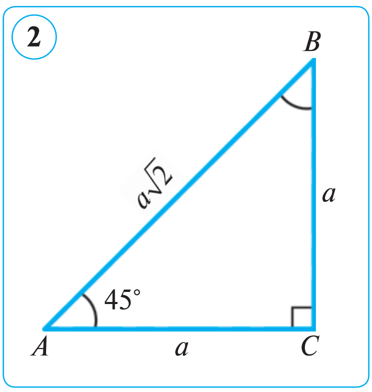
$$\cos 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg}30° = \frac{AD}{BD} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad \text{ctg}30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}.$$

Dolduryjy burçuň trigonometrik funksiýalary üçin çykarylan formulalaryň kömeginde **60°-ly burçuň trigonometrik funksiýalarynyň bahalaryny** tapýarys:

$$\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{tg}60° = \text{tg}(90° - 30°) = \text{ctg}30° = \sqrt{3};$$

$$\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \text{ctg}60° = \text{ctg}(90° - 30°) = \text{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



2. 45°-ly burçuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini hasaplamak.

45°-ly burçuň trigonometrik funksiýalaryny hasaplamak üçin deňýanly gönüburçly ABC üçburçluga garaýarys (2-nji surat). Bu üçburçlukda $AC=BC=a$, $\angle A=\angle B=45°$ bolsun. Pifagoryň teoremasyna görä, gipotenuza $AB = a\sqrt{2}$ -ä deň bolýar. Ýiti burçuň trigonometrik funksiýalarynyň kesgitlemesine görä:

$$\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

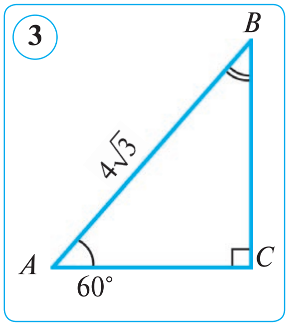
$$\mathrm{tg}45^\circ = \mathrm{tg}A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1; \ \mathrm{ctg}45^\circ = \mathrm{ctg}A = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

30°, 45° we 60°-ly burçlaryň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi bahalarynyň jedwelini düzýäris.

Ýiti burçly trigonometrik funksiýalaryň bahalary, sanlaryň kwadratlary we olardan çykarylan arifmetik kwadrat köki ýörite jedwellerden bilmek ýa-da kalkulýatordan peýdalanyp hasaplamak mümkin.

Mesele. Gönüburçly üçburçlugyň AB gipotenuzasy $4\sqrt{3}$ cm we $\angle A = 60^\circ$ (3-nji surat). Şu üçburçlugyň katetlerini tapyň.



Çözülişi. Bize mälim bolşy ýaly, α burçuň garşysyndaky katet gipotenuza bilen α burçuň sinusynyň köpeltmek hasylyna deň. Şuňa görä:

$$BC = AB\sin A = 4\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\,(\text{cm}).$$

Bize mälim bolşy ýaly, α burça sepleşýän katet gipotenuza bilen α burçuň kosinusynyň köpeltmek hasylyna deň. Şuňa görä: $AC = AB\cos A = 4\sqrt{3}\cdot\cos 60^\circ = 4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 2\sqrt{3}\,(\text{cm})$.

Jogaby: $BC = 6$ cm, $AC = 2\sqrt{3}$ cm.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. Hasaplaň: 1) $\sin 30^\circ + \mathrm{tg}45^\circ$; 2) $\cos 30^\circ \cdot \mathrm{tg}60^\circ$; 3) $\sqrt{2}\sin 45^\circ - \cos 60^\circ$.
2. Deň taraply üçburçluk çyzyň we onuň beýikligini geçiriň. Gerekli ölçemeleri ýerine ýetirip, 30° we 60°-ly burçlaryň trigonometrik funksiýalaryny hasaplaň, netijeleri jedweldäkileri bilen deňeşdiriň.
3. $ABCD$ parallelogramyň BD diagonaly AB tarapa perpendikulýar we 16 cm-e deň. Eger BDA burç 30°-a deň bolsa, parallelogramyň taraplaryny tapyň.
4. Gönüburçly üçburçlugyň bir kateti $6\sqrt{3}$ -e, bu katetiň garşysyndaky burç 60°-a deň. Gipotenuzany we ikinji kateti tapyň.
5. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1) $\mathrm{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$; 2) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$.
6. Gönüburçly üçburçlugyň bir kateti 2-ä, bu katetiň garşysyndaky burç 60°-a deň. Gipotenuzany we ikinji kateti tapyň.
7. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.
8. Hasaplaň: 1) $\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$; 2) $\sin 60^\circ \cdot \mathrm{tg}30^\circ$; 3) $\sqrt{3}\cos 30^\circ - \cos 60^\circ$.

6-§. GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUKLARY ÇÖZMEK

24. TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALARYŇ BAHALARYNYŇ JEDWELI

Dersligiň ahyrynda bitin sanly graduslar bilen 1°-dan 89°-a çenli ähli burçlar üçin laýyk gelýän trigonometrik funksiýalar (on müňden bire çenli takyklykda) görkezilen jedwel getirilen. Bu jedwel aşakdaky ýaly düzülen: çep tarapdan birinji sütüne (ýokarsynda «graduslar» diýlip ýazylanyna) graduslaryň sanlary 1°, 2°, 3°, ..., 45°-a çenli ýerleşdirilen; ikinji sütüne (ýokarsynda «sinuslar» ýazylanyna) sinuslaryň birinji sütünde görkezilen burçlara laýyk gelýän bahalary goýlan; 3-nji sütüne tangensler, soňra kotangensler we ondan soň kosinuslaryň bahalary ýerleşdirilen. Soňky 6-njy sütüne ýene graduslar sanlary: ýagny 45°, 46°, 47°, ... we başgalar, 89°-a çenli ýerleşdirilen. Bu (ýeri tygşytlamak üçin) aşakdaka esasan edilen: dolduryjy burçuň trigonometrik funksiýalary üçin formulalara görä $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ we başgalar, diýmek, $\sin 1° = \cos 89°$, $\sin 2° = \cos 88°$ we başgalar. Şonuň üçin ýokardaky «sinuslar» ýazylan sütüniň astyna «kosinuslar»; ýokardaky «tangensler» ýazylan (çepden 3-nji) sütüniň astyna «kotangensler» ýazylan we şuňa meňzeş. Şeýlelikde, 1° dan 45°-a çenli burçlar üçin graduslar sanlaryny çep tarapdaky birinji sütünden we trigonometrik funksiýalaryň atlaryny ýokardan okamaly, 45°-dan 89°-a çenli bolan burçlar üçin bolsa graduslaryň sanlaryny sag tarapdaky soňky sütünden we funksiýalaryň atlaryny sütünleriň aşagyndan okamaly. Meselem, jedwelden tangensiň bahasyny tapýarys: $\mathrm{tg}35° = 0{,}7002$.

1. Berlen burça görä trigonometrik funksiýalaryny tapmak.

1-nji mesele. $\sin 20°$-y tapyň.

Çözülişi. $1° \leq 20° \leq 45°$ bolany üçin *çepdäki* «graduslar» sözi ýazylan sütünden 20-ni alýarys we oňa laýyk setiriň ikinji («sinα») sütüninden 0,3420 bahany tapýarys. Ynha şu san $\sin 20°$-yň bahasydyr.

Diýmek, $\sin 20° \approx 0{,}3420$.

2-nji mesele. $\sin 75°$ ni tapyň.

Çözülişi. $45° \leq 75° \leq 89°$ bolany üçin *sagdaky* «graduslar» sözi ýazylan sütünden 75-i alýarys we oňa laýyk setiriň dördünji (*pesdäki* «sinα») sütüninden 0,9659 bahany tapýarys. Ynha şu san $\sin 75°$ -yň bahasydyr.

Diýmek, $\sin 75° \approx 0{,}9659$.

3-nji mesele. $\cos 33°$ ni tapyň.

Çözülişi. $1° \leq 33° \leq 45°$ bolany üçin *çapdagi* «graduslar» sözi ýazylan sütünden 33-i alýarys we oňa laýyk setiriň dördünji («cosα») sütüninden 0,8387 bahany tapýarys. Ynha şu san $\cos 33°$-yň bahasydyr.

Diýmek, $\cos 33° \approx 0{,}8387$.

Tangensleriň we kotangensleriň bahalary degişlilikde sinuslaryň we kosinuslaryň bahalary jedwelden nähili tapylan bolsa, şeýle tapylýar.

2. Burçy trigonometrik funksiýasyna görä tapmak.

4-nji mesele. Eger $\sin x = 0{,}9848$ bolsa, x ýiti burçy tapyň.

Çözülişi. Sinusy 0,9848-e deň bolan burçy tapmak üçin trigonometrik funksiýalaryň bahalary ýerleşen birinji ýa-da dördünji sütünden bu bahany gözleýäris. Bu baha dördünji ($\sin\alpha$) sütünde bar, ýagny gözlenýän burç 45°-dan uly we 89°-dan kiçi. Bu setire laýyk sagdaky «graduslar» sütüninden 80 sanyny tapýarys. Diýmek, gözlenýän burç takmynan 80°-a deň. *Jogaby:* $x \approx 80°$.

5-nji mesele. Eger $\operatorname{tg} x = 0{,}7002$ bolsa, x ýiti burçy tapyň.

Çözülişi. Tangensi 0,7002-ä deň bolan burçy tapmak üçin trigonometrik funksiýalaryň bahalary ýerleşen ikinji ýa-da üçünji sütünden bu bahany gözleýäris. Şu baha ikinji ($\operatorname{tg}\alpha$) sütünde bar, ýagny gözlenýän burç 45°-dan kiçi. Bu setire laýyk çepdäki «graduslar» sütüninden 35 sanyny tapýarys. Diýmek, gözlenýän burç takmynan 35°-a deň. *Jogaby:* $x \approx 35°$.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. Jedwelden peýdalanyp tapyň:

a) 1) $\sin 3°$; 2) $\sin 21°$; 3) $\sin 50°$; 4) $\sin 82°$; 5) $\sin 40°$;
b) 1) $\cos 9°$; 2) $\cos 12°$; 3) $\cos 41°$; 4) $\cos 67°$; 5) $\cos 4°$;
d) 1) $\operatorname{tg} 5°$; 2) $\operatorname{tg} 89°$; 3) $\operatorname{tg} 15°$; 4) $\operatorname{tg} 60°$; 5) $\operatorname{tg} 50°$;
e) 1) $\operatorname{ctg} 10°$; 2) $\operatorname{ctg} 30°$; 3) $\operatorname{ctg} 75°$; 4) $\operatorname{ctg} 52°$; 5) $\operatorname{ctg} 5°$.

2. Jedwelden peýdalanyp, x ýiti burçy tapyň:

a) 1) $\sin x \approx 0{,}1392$; 2) $\sin x \approx 0{,}8590$; 3) $\sin x \approx 0{,}5150$;
b) 1) $\cos x \approx 0{,}7431$; 2) $\cos x \approx 0{,}6428$; 3) $\cos x \approx 0{,}0523$;
d) 1) $\operatorname{tg} x \approx 0{,}4663$; 2) $\operatorname{tg} x \approx 11{,}430$; 3) $\operatorname{tg} x \approx 0{,}1763$;
e) 1) $\operatorname{ctg} x \approx 0{,}9004$; 2) $\operatorname{ctg} x \approx 1{,}192$; 3) $\operatorname{ctg} x \approx 0{,}3640$.

3. (*Amaly iş.*) Transportiriň kömeginde ýiti burçy 40° bolan gönüburçly üçburçluk çyzyň. Onuň taraplaryny ölçäň hem-de şu burçuň sinusyny, kosinusyny, tangensini we kotangensini hasaplaň.

4. Aňlatmanyň bahasyny tapyň: $\operatorname{tg}15° \cdot \operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{tg}60° \cdot \operatorname{tg}75°$.

Çözülişi. $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ we $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ formulalardan peýdalanyp aňlatmanyň bahasyny hasaplaýarys (boş ýerlere degişli jogaby ýazyň):

$$\operatorname{tg}15° \cdot \operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{tg}60° \cdot \operatorname{tg}75° = \operatorname{tg}15° \cdot \operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{tg}(90° - 30°) \cdot \operatorname{tg}(90° - 15°) =$$
$$= (\operatorname{tg}15° \cdot \operatorname{ctg}...°) \cdot (\operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{ctg}...°) = ... \cdot ... = ...$$

5. Subut ediň: $\operatorname{tg}1° \cdot \operatorname{tg}2° \cdot ... \cdot \operatorname{tg}88° \cdot \operatorname{tg}89° = 1$.

6. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: 1) $\cos^2\alpha + \cos^2(90° - \alpha)$; 2) $\sin^2\alpha - \cos^2(90° - \alpha)$.

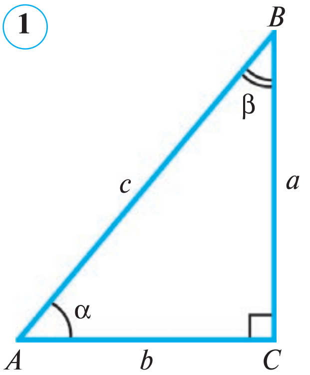
7. Jedwelden peýdalanyp tapyň: 1) $\sin 70°$; 2) $\cos 55°$; 3) $\operatorname{tg} 10°$; 4) $\operatorname{ctg} 18°$.

8. Jedwelden peýdalanyp, x ýiti burçy tapyň: $\sin x \approx 0{,}1392$.

25. GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUKLARY ÇÖZMEK

Üçburçluklary çözmek üçburçlugyň mälim burçlary we taraplary boýunça onuň nämälim taraplaryny we burçlaryny tapmakdan ybarat. Gönüburçly üçburçlugy tarapy we ýiti burçy ýa-da iki tarapy boýunça çözmek mümkin. Gönüburçly üçburçluklary çözmekde 1-nji suratdaky belgilemelerden peýdalanýarys. Munuň üçin meselniň manysyndan gelip çykmak bilen, trigonometrik funksiýalaryň bahalaryny on müňden birler öýjügine çenli (dersligiň ahyryndaky goşmaça g.) ýa-da zerur bolsa, müňden birler öýjügine çenli, taraplaryň uzynlyklaryny ýüzden bire çenli, burçuň gradus ölçegini bire çenli tegelekläp almaga ylalaşýarys.

1



Gönüburçly üçburçlugyň elementlerini onuň iki mälim elementine görä hasaplamagyň 4 ýagdaýyna garap geçýäris.

1-nji ýagdaý. Üçburçlugy gipotenuzasy we ýiti burçy boýunça çözmek.

1-nji mesele. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy $c=10$ cm we ýiti burçy $\alpha=50°$ berlen. a, b katetler we β ýiti burçy tapyň.

Çözülişi. 1) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi 90°-a deň. Onda $\beta=90°-\alpha=90°-50°=40°$.

1-nji usul. 2) α burçuň garşysyndaky katet gipotenuza bilen α burçuň sinusynyň köpeltmek hasylyna deň, ýagny $a=c\sin\alpha$.

Diýmek, $a = 10\sin 50° = 10 \cdot 0,7660 \approx 7,66\,(\text{cm})$.

3) α burça sepleşýän katet gipotenuza bilen α burçuň kosinusynyň köpeltmek hasylyna deň, ýagny $b=c\cos\alpha$.

Diýmek, $b = 10\cos 50° = 10 \cdot 0,6428 \approx 6,43\,(\text{cm})$.

2-nji usul. 2) $a=c\cos\beta$; $a = 10\cos 40° = 10 \cdot 0,7660 \approx 7,66$ (cm).

3) $b=c\sin\beta$; $b = 10\sin 40° = 10 \cdot 0,6428 \approx 6,43\,(\text{cm})$.

Jogaby: $a \approx 7,66$ cm; $b \approx 6,43$ cm; $\beta=40°$.

2-nji ýagdaý. Üçburçlugy kateti we ýiti burçy boýunça çözmek.

2-nji mesele. Gönüburçly üçburçlugyň kateti $a=6$ cm we ýiti burçy $\beta=22°$ berlen. b katet, c gipotenuzany we α ýiti burçy tapyň.

Çözülişi. 1) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi 90°-a deň. Onda $\alpha=90°-\beta=90°-22°=68°$. *1-nji usul.* 2) Gipotenuza β ýiti burça sepleşýän katetiň β burçunyň kosinusyna gatnaşygyna deň, ýagny $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$.

Diýmek, $c = \dfrac{a}{\cos\beta} = \dfrac{6}{\cos 22°} = \dfrac{6}{0,9272} \approx 6,47\,(\text{cm})$.

3) Kesgitlemä görä: $\text{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Mundan $b = a\,\text{tg}\beta$, ýagny

$$b = 6\text{tg}22° = 6 \cdot 0{,}4040 \approx 2{,}42 \ \ (\text{cm}).$$

2-nji usul. 2) Gipotenuza α ýiti burçuň garşysyndaky katetiň α burçuň sinusyna gatnaşygyna deň, ýagny $c = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Diýmek, $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin 68°} = \frac{6}{0{,}9272} \approx 6{,}47$ (cm).

3) Kesgitlemä görä: $\text{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Mundan $b = a\,\text{tg}\beta$, ýagny

$$b = 6\,\text{tg}22° = 6 \cdot 0{,}4040 \approx 2{,}42 \ \ (\text{cm}).$$

Jogaby: $c \approx 6{,}47$ cm, $b \approx 2{,}42$ cm, $\alpha = 68°$.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. Gönüburçly üçburçlukda uzynlygy 7 cm-e deň bolan katet 60°-ly burça sepleşýär. Şu üçburçlugyň gipotenuzasyny tapyň.

2. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 12 cm-e, katetlerinden biri bolsa $6\sqrt{2}$ cm-e deň. Üçburçlugyň ýiti burçlaryny tapyň.

3. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy $c = 10$ cm we ýiti burçy $\alpha = 42°$ berlen. a, b katetler we β ýiti burçy tapyň. Meseläni iki usul (tekstdäki 1-nji meselä g.) bilen çözüň.

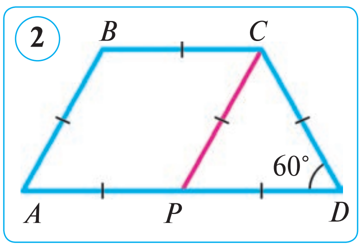
4. Gönüburçly üçburçlugyň kateti $b = 4$ cm we ýiti burçy $\beta = 18°$ berlen. a katet, c gipotenuza we α ýiti burçy tapyň. Meseläni iki usul (tekstdäki 2-nji meselä g.) bilen çözüň.

5. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: $\frac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)} - \sin\alpha\cos(90° - \alpha)$.

6. Deňýanly trapesiýanyň esasyndaky burç 60°-a, gapdal tarapy bolsa kiçi esasyna deň bolup, $2\sqrt{2}$ cm-e deň. Şu trapesiýanyň uly esasyny tapyň. Boş ýerlere degişli jogaby ýazyň.

Çözülişi. $ABCD$ trapesiýa – deňýanly, $\angle A = \angle D = 60°$, $AB = DC = BC = 2\sqrt{2}$ cm.

$CP \parallel BA$ geçirýäris (2-nji surat). Onda $\angle A = \angle CPD = 60°$ ($CP \parallel BA$ hemde AD kesiji kesişmeginden emele gelen ... burçlar). CPD üçburçlugyň burçlary ...° -dan, diýmek, ol ... taraply. Şonuň üçin, $CP = PD = ... = 2\sqrt{2}$ cm. Onda $AD = 2 \cdot 2\sqrt{2} = ...$ (cm). *Jogaby:* $4\sqrt{2}$ cm.

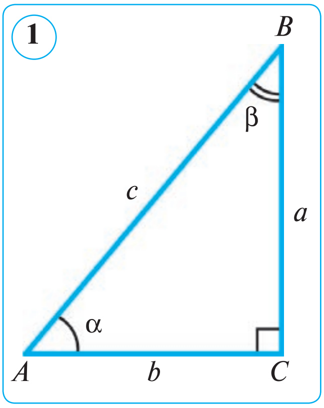


7. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy $c = 8$ cm we ýiti burçy $\alpha = 30°$ berlen. Onuň a, b katetlerini we β ýiti burçuny tapyň. Meseläni iki usul (tekstdäki 1-nji meselä g.) bilen çözüň.

26. GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUKLARY ÇÖZMEK (DOWAMY)

3-nji ýagdaý. Üçburçlugy gipotenuzasy we kateti boýunça çözmek.

1-nji mesele. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy $c=13$ cm we kateti $a=5$ cm berlen. Onuň b kateti, α we β ýiti burçlaryny tapyň.



Çözülişi. 1) Pifagoryň teoremasyna görä:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}.$$

1-nji usul. 2) α ýiti burçuň sinusynyň kesgitlemesine görä:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \approx 0{,}3846.$$

Mundan $\alpha \approx 23°$.

3) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi 90°-a deň. Onda

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 23° = 67°.$$

Jogaby: $b=12$ cm, $\alpha \approx 23°$, $\beta \approx 67°$.

2-nji usul. 2) β ýiti burçuň sinusynyň kesgitlemesine görä:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \approx 0{,}9231.$$

Mundan $\beta \approx 67°$.

3) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi 90°-a deň. Onda

$$\alpha = 90° - \beta \approx 90° - 67° = 23°.$$

Jogaby: $b=12$ cm, $\alpha \approx 23°$, $\beta \approx 67°$.

4-nji ýagdaý. Üçburçlugy iki kateti boýunça çözmek.

2-nji mesele. Gönüburçly üçburçlugyň katetleri $a=8$ cm we $b=15$ cm berlen. Onuň c gipotenuzasyny, α we β ýiti burçlaryny tapyň.

Çözülişi. 1) Pifagoryň teoremasyna görä:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (cm)}.$$

1-nji usul. 2) α ýiti burçuň tangensiniň kesgitlemesine görä:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{8}{15} \approx 0{,}5333.$$

Mundan $\alpha \approx 28°$.

3) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi 90°-a deň. Onda

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 28° = 62°.$$

Jogaby: $c=17$ cm, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

2-nji usul. 2) β ýiti burçuň tangensiniň kesgitlemesine görä:

$$\text{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1{,}875.$$

Mundan $\beta \approx 62°$.

3) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi 90°-a deň. Onda

$$\alpha = 90° - \beta \approx 90° - 62° = 28°.$$

Jogaby: $c = 17$ cm, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

3-nji usul. 1) α ýiti burçuň kotangensiniň kesgitlemesine görä:

$$\text{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1{,}875.$$

Mundan $\alpha \approx 28°$.

2) Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçlarynyň jemi 90°-a deň. Onda

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 28° = 62°.$$

3) Pifagoryň teoremasyna görä:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (cm)}.$$

Jogaby: $c = 17$ cm, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C = 90°$, gipotenuza $c = 9\sqrt{2}$ cm, katet $a = 9$ cm. Şu üçburçlugyň b katetini, α we β ýiti burçlaryny tapyň. Iki usul bilen çözüň.

2. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C = 90°$, katetleri $a = 6\sqrt{3}$ cm we $b = 6$ cm. Şu üçburçlugyň c gipotenuzasyny, α we β ýiti burçlaryny tapyň. Iki usul bilen çözüň.

3. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C = 90°$, katetleri $a = \sqrt{11}$ cm we $b = 5$ cm. Şu üçburçlugyň c gipotenuzasyny, α we β ýiti burçlaryny tapyň. Iki usul bilen çözüň.

4. CD kesim – gönüburçly ABC ($\angle C = 90°$) üçburçlugyň gipotenuzasyna geçirilen beýikligi. Subut ediň:

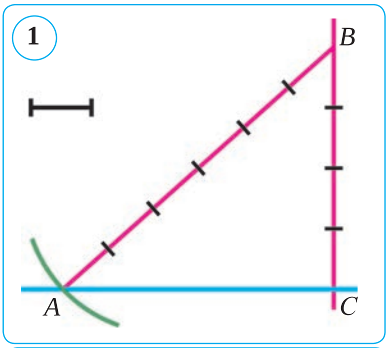
1) $\dfrac{CD}{\sin A} = AB\cos A$; 2) $AD\,\text{tg}A = BD\,\text{tg}B$.

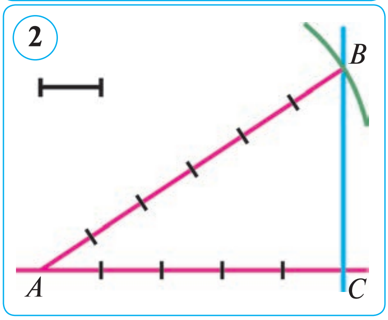
5. Hasaplaň: $2\sin 60° + 4\cos 60° - \text{ctg}30° - 2\text{tg}45°$.

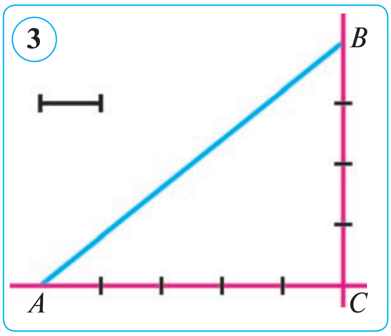
6. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C = 90°$, gipotenuza $c = 25$ cm, katet $b = 24$ cm. Şu üçburçlugyň a katetini, α we β ýiti burçlaryny tapyň. Iki usul bilen çözüň.

7. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C = 90°$, katetleri $a = 10$ cm we $b = 24$ cm. Şu üçburçlugyň c gipotenuzasyny, α we β ýiti burçlaryny tapyň. Iki usul bilen çözüň.

27. GÖNÜBURÇLY ÜÇBURÇLUKLARY GURMAK







1-nji mesele. Sinusy $\frac{4}{5}$-e deň bolan burçy gurmak.

Munuň üçin C göni burç gurýarys we onuň taraplaryndan birinde burçuň depesinden başlap 4 sany islendik masştab birligine deň CB kesimi goýýarys (1-nji surat). Merkezi B nokatda we radiusy 5 sany masştab birligine deň radiusly dugany burçuň ikinji tarapy bilen kesişýänçe çyzýarys. Olaryň kesişme nokadyny A bilen belgileýäris. A we B nokatlary birleşdirip, gönüburçly ABC üçburçlugy alarys. A– gözlenýän burç, onuň sinusy $\frac{4}{5}$ -e deň bolýar, ýagny $\sin A = \frac{4}{5}$.

2-nji mesele. Kosinusy $\frac{5}{6}$ -e deň bolan burçy gurmak.

Munuň üçin C göni burç gurýarys we onuň taraplaryndan birinde burç depesinden başlap 5 sany islendik masştab birligine deň AC kesimi goýýarys (2-nji surat). Merkezi A nokatda we radiusy 6 sany masştab birligine deň radiusly dugany burçuň ikinji tarapy bilen kesişýänçe çyzýarys. Olaryň kesişme nokadyny B bilen belgileýäris. A we B nokatlary birleşdirip, gönüburçly ABC üçburçlugy alarys. A – gözlenýän burç, onuň kosinusy $\frac{5}{6}$ -e deň bolýar, ýagny $\cos A = \frac{5}{6}$.

3-nji mesele. Tangensi $\frac{4}{5}$-e deň bolan burçy gurmak.

Munuň üçin C göni burç gurýarys we onuň taraplaryndan birinde burçuň depesinden başlap 5 sany islendik masştab birligine deň CA kesimi, ikinjide bolsa 4 masştab birligine deň CB kesimi goýýarys (3-nji surat). A we B nokatlary birleşdirip, gönüburçly ABC üçburçlugy alarys. A – gözlenýän burç, onuň tangensi $\frac{4}{5}$ -e deň bolýar, ýagny $\mathrm{tg}A = \frac{4}{5}$.

Berlen kotangense görä burç gurmak talap edilende-de edil şeýle gurmaga dogry gelýär, diňe munda gözlenýän burç üçin AC-ge sepleşýän kateti almaly bolýar.

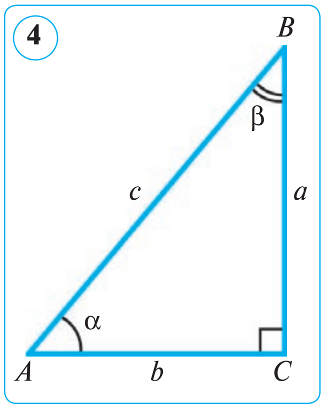
Gönüburçly üçburçlugyň kateti hemişe gipotenuzadan kiçi. Şonuň üçin ýiti burçuň sinusy we kosinusy hemişe 1-den kiçidir.

Katetleriň uzynlyklaryny deňeşdirmekden görnüşi ýaly, olar özara deň, biri ikinjiden uly ýa-da kiçi bolmagy mümkin. Şonuň üçin ýiti burçuň tangensleri we kotangensleri islendik položitel san bolmagy mümkin. Diýmek, olaryň her biri katetlere baglylykda 1-den kiçi, 1-den uly we 1-e deň bolýar.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) $\operatorname{tg} A = \frac{3}{5}$; 2) $\sin A = \frac{2}{3}$ -ä deň bolan, gönüburçly ABC ($\angle C=90°$) üçburçlugy çyzyň.

2. 1) $\sin A = \frac{5}{8}$; 2) $\cos A = \frac{3}{4}$ -e deň bolan, gönüburçly ABC ($\angle C=90°$) üçburçlugy çyzyň.



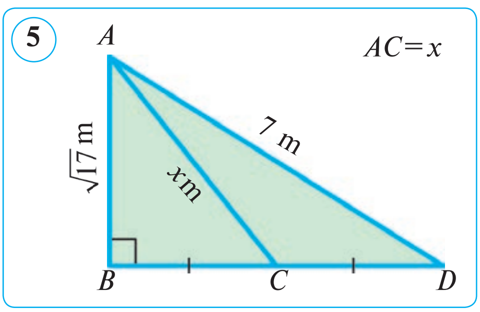
3. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C=90°$, gipotenuza $c = 7\sqrt{2}$ cm, katet $b=7$ cm. Üçburçlugyň a katetini, α we β ýiti burçlaryny (4-nji surat) tapyň.

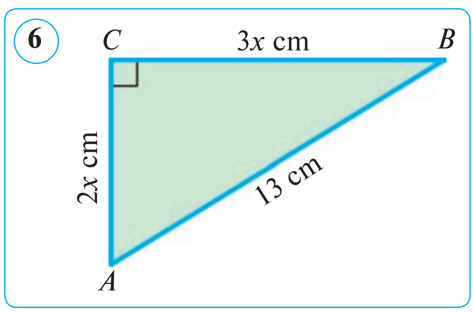
4. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C=90°$, gipotenuza $c=12$ cm, $\alpha=60°$. Üçburçlugyň a, b katetlerini, β ýiti burçuny (4-nji surat) tapyň. Meseläni iki usul bilen çözüň.

5. Nämälim uzynlyklary tapyň (5–6-njy suratlar).

6. Gönüburçly ABC üçburçlukda $\angle C=90°$, gipotenuza $c=74$ cm, $\sin\alpha = \frac{12}{37}$. Şu üçburçlugyň perimetrini (4-nji surat) tapyň.

7. 1) $\sin A = \frac{4}{7}$; 2) $\cos A = \frac{3}{5}$; 3) $\operatorname{tg} A = \frac{2}{5}$ -ä deň bolan gönüburçly ABC ($\angle C=90°$) üçburçlugy çyzyň.



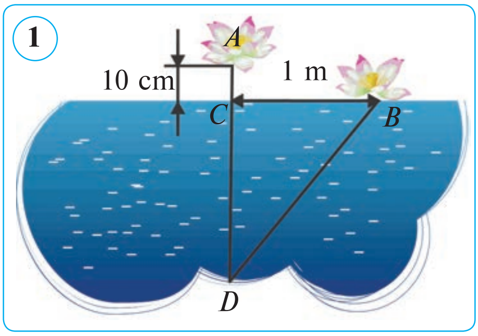


28. AMALY GÖNÜKME WE ULANYLYŞY

1. Pifagoryň teoremasynyň amaly ulanylyşyna degişli meseleler.

1-nji mesele. Suw liliýasy gülüniň kölüň üstünden görünýän bölegi 10 cm. Eger güli başlangyç ýagdaýyndan bir tarapa 1 m çekilse, suw üstüne degýär. Kölüň şu ýerdäki çuňlugyny tapyň.

Çözülişi. Kölüň gözlenýän CD çuňlugyny x bilen belgileýäris (1-nji surat). Onda $BD = AD = AC + CD = 0{,}1 + CD = 0{,}1 + x$ (m)-e deň bolýar. Onda gönüburçly BCD üçburçlukdan Pifagoryň teoremasyna görä aşakdakylara eýe bolarys:



$BD^2 - CD^2 = BC^2$, $(0{,}1 + x)^2 - x^2 = 1$,

mundan:

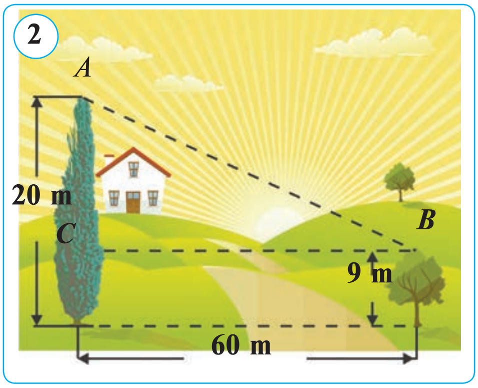
$$0{,}01 + 0{,}2x + x^2 - x^2 = 1;$$

$$0{,}2x = 0{,}99; \quad x = 0{,}99 : 0{,}2;$$

$$x = 9{,}9 : 2; \quad x = 4{,}95 \text{ (m)}.$$

Jogaby: kölüň çuňlugy 4,95 m.

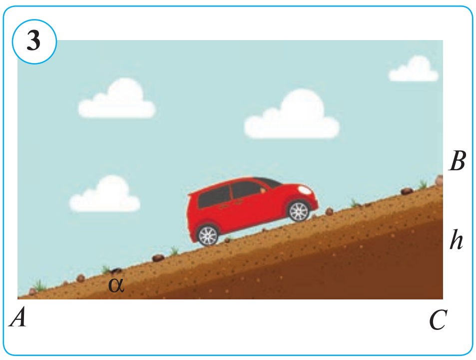
2-nji mesele. Bir daragtyň beýikligi 20 m, ikinjiniňki bolsa 9 m. Bu daragtlaryň arasyndaky aralyk 60 m. Şu iki daragtyň uçlarynyň arasyndaky aralygy tapyň (2-nji surat). Özbaşdak çözüň.

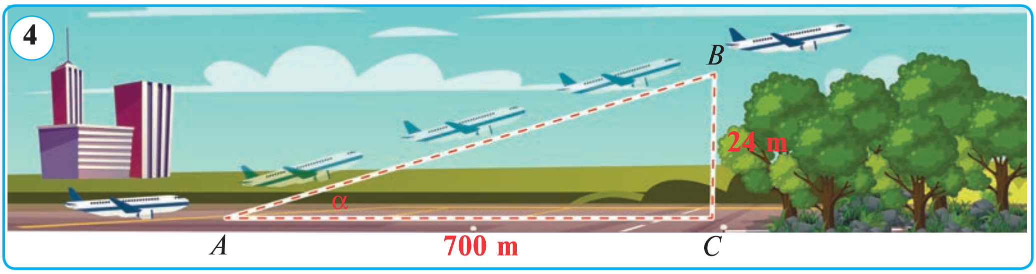


3-nji mesele. Iki sosna agajynyň beýiklikleri degişlilikde 21 m we 28 m, bu daragtlaryň arasyndaky aralyk bolsa 24 m. Iki daragtyň uçlarynyň arasyndaky aralygy tapyň (2-nji surata garaň). Özbaşdak çözüň.

2. Ýiti burçuň sinusynyň amaly ulanylyşyna degişli mesele.

Ýapgyt tekiz ýoluň ýokary galýan ýeriniň dikligini gorizonta görä ýokary galma burçy arkaly bermek mümkin (3-nji surat). Köplenç ýokary galýan ýeriň dikligini ýokary galyş burçundan görä geçilen ýoluň uzynlygynyň ýokary galyş beýikligi arkaly bermek amatly. Meselem, maşyn 100 m aralygy geçende 2 m beýiklige galan bolsun. Munda ýokary galyş ýeriniň dikligi beýikligiň geçilen ýola gatnaşygy bilen berilýär.





Ýokary galyş beýikligi $\frac{2\ \text{m}}{100\ \text{m}} = 0{,}02$-ä deň. Bu gatnaşyk geçilen ýola bagly däl. Ýapgyt tekiz ýoldan düşende-de edil şuňa meňzeş pikir ýöretmek mümkin.

4-nji mesele. Ýeňil maşyn eňňitligi 15° bolan ýapgyt ýol boýunça ýokary galýar (3-nji surata g.). Ol ýapgytlyga galýan ýerinden 300 m ýol geçensoň gorizonta görä näçe metr beýiklikde bolar?

Görkezme. Ýiti burç sinusynyň kesgitlemesini ulanyp, ýokary galyş beýikligini tapyň.

2. Ýiti burçuň tangensiniň amaly ulanylyşyna degişli meseleler.

5-nji mesele. Samolýot uçuş ýodasyndan howa galýan nokatdan 700 m aralykda tokaýlyk ýerleşen bolup, daragtlaryň maksimal beýikligi 24 m-e deň. Samolýot bu daragtlara degmez ýaly nähili burç astynda ýokary galmaly?

Çözülişi. Gönüburçly ABC ($\angle C=90°$) üçburçlukda $AC=700$ m, $BC=24$ m (4-nji surat). Ýiti burçuň tangensiniň kesgitlemesinden tapýarys:

$$\text{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{700} \approx 0{,}0343 \Rightarrow \alpha \approx 2°$$

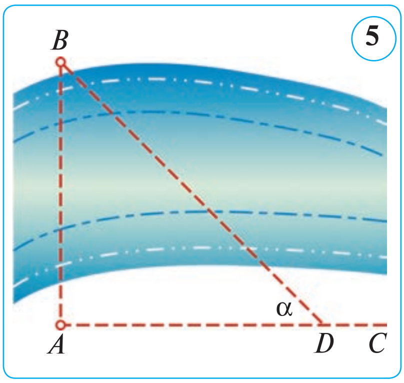
Jogaby: samolýot daragtlara degmezden uçmagy üçin uçuş nokadyndan 2° -dan kem bolmadyk burç astynda ýokary galmaly.

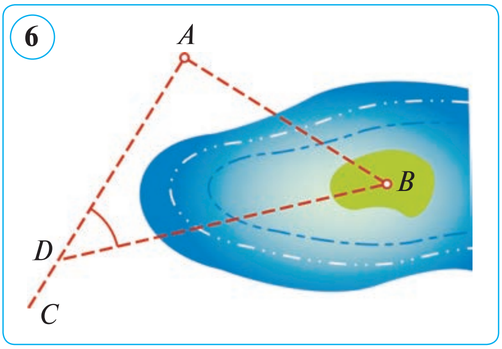
6-njy mesele. A punktdan derýanyň aňyrsyndaky baryp bolmaýan B punkta çenli bolan aralygy tapyň (5-nji surat).

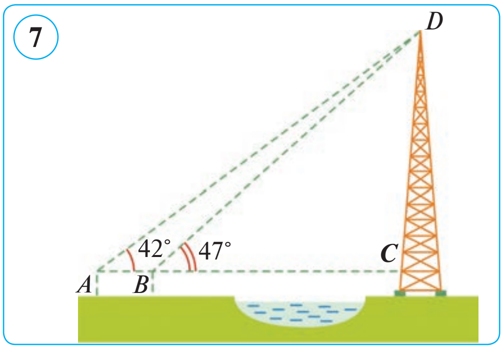
Çözülişi. Usturlob (astrolýabiýa, gorizontal tekizlikde ýerleşen burçlary ölçemek üçin ulanylýan abzal, ýagny burç ölçeýji) ýa-da ekkeriň kömeginde A nokatda göni BAC burçy guryarys. AC göni çyzykda islendik D nokady alyp, usturlobyň kömeginde ADB burçy ölçeýäris. Aýdaly, ol 44°-a deň bolsun. Soňra AD aralygy ölçeýäris, ol 120 m bolsun. AB aralygy ýiti burçuň tangensinden peýdalanyp tapýarys:

$$\frac{AB}{120} = \text{tg}44° \Rightarrow AB = 120 \cdot \text{tg}44° \approx$$
$$\approx 120 \cdot 0{,}9657 \approx 116\ (\text{m}).$$

Jogaby: ≈ 116 m.







7-nji mesele. *A* punktdan baryp bolmaýan adajykdaky *B* punkta çenli bolan aralygy tapyň (6-njy surat).

Görkezme. 5-nji meselä meňzeş pikir ýöredilýär. $\angle ADB = 48°$ we $AD = 200$ m diýip, meseläni çözüň.

8-nji mesele. Esasyna baryp bolmaýan obýekt, meselem, elektrik geçirijiniň beýikligini ölçemek talap edilýän bolsun (7-nji surat).

Çözülişi. Gönüburçly *ACD* üçburçluga garaýarys. Bu üçburçlugyň *A* burçuny usturlobyň kömeginde ölçäp bileris, goý, ol 42°-a deň bolsun.

Gönüburçly *BCD* üçburçlukda *DBC* burçy ölçeýäris, ol 47°-a deň bolsun.

Ýiti burçuň tangensiniň kesgitlemesine esasan *ACD*-dan tapýarys:

$$\frac{CD}{AC} = \text{tg}42° \Rightarrow AC = \frac{CD}{\text{tg}42°}. \qquad (1)$$

Ýiti burçuň tangensiniň kesgitlemesine esasan *BCD*-dan tapýarys:

$$\frac{CD}{BC} = \text{tg}47° \Rightarrow BC = \frac{CD}{\text{tg}47°}. \qquad (2)$$

A, *B* we *C* nokatlar bir göni çyzykda ýatýar. (1)-dan (2)-ny aýyrýarys:

$$AC - BC = \frac{CD}{\text{tg}42°} - \frac{CD}{\text{tg}47°} \Rightarrow AC - BC = CD\left(\frac{1}{\text{tg}42°} - \frac{1}{\text{tg}47°}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - BC = CD\left(\frac{1}{0{,}9004} - \frac{1}{1{,}0724}\right) \Rightarrow AC - BC = CD(1{,}1106 - 0{,}9325) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - BC = CD \cdot 0{,}1781 \Rightarrow CD = \frac{AC - BC}{0{,}1781}.$$

$AC - BC$, ýagny *AB* aralygy gönüden-göni ölçäp bileris, goý, ol 12 m-e deň bolsun. Onda

$$CD = \frac{AC - BC}{0{,}1781} = \frac{AB}{0{,}1781} = \frac{12}{0{,}1781} \approx 67{,}4 \text{ (m)}.$$

Jogaby: $\approx 67{,}4$ m.

Daş-töweregiňizden garalan meselelere meňzeş meseleler ýeterli tapylýar. Özbaşdak meseleler düzüň we çözüň.

29–30. 2-NJI BARLAG IŞI. ÝALŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK

1. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 20 cm-e, ýiti burçlaryndan biriniň sinusy 0,5-e deň. Üçburçlugyň katetlerini tapyň.

2. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 13 cm-e, ýiti burçlaryndan biriniň kosinusy $\frac{5}{13}$ -e deň. Üçburçlugyň katetlerini tapyň.

3. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň: $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha$.

4. Taraplary: 1) $a=c=17$ cm, $b=16$ cm; 2) $a=30$ cm, $b=34$ cm, $c=16$ cm bolan üçburçlugyň beýikligini tapyň.

2-nji test

Özüňizi synap görüň!

1. Gönüburçly üçburçlugyň katetlerinden biri 12 cm, gipotenuzasy bolsa ikinji katetden 6 cm uzyn. Gipotenuzanyň uzynlygyny tapyň.
A) 15 cm; B) 25 cm; D) 26 cm; E) 18 cm.

2. Gönüburçly üçburçlugyň katetlerinden biri 12 cm, ikinji bolsa gipotenuzadan 8 cm gysga. Şu üçburçlugyň gipotenuzasyny tapyň.
A) 15 cm; B) 16 cm; D) 13 cm; E) 25 cm.

3. Gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy 25 cm, katetleri özara 3:4 gatnaşykda. Şu üçburçlugyň kiçi katetini tapyň.
A) 10 cm; B) 15 cm; D) 9 cm; E) 20 cm.

4. Taraplary 13 cm, 14 cm we 15 cm bolan üçburçlugyň iň kiçi beýikligi näçe santimetr?
A) 11,5 cm; B) 11,1 cm; D) 11 cm; E) 11,2 cm.

5. Rombuň diagonallary 14 cm we 48 cm-e deň. Şu rombuň perimetrini tapyň.
A) 60 cm; B) 100 cm; D) 80 cm; E) 120 cm.

6. Rombuň perimetri 68 cm, diagonallarydan biri 30 cm-e deň. Onuň ikinji diagonalyny tapyň.
A) 12 cm; B) 8 cm; D) 16 cm; E) 20 cm.

7. Gönüburçly üçburçlugyň katetlerinden biri $5\sqrt{3}$ cm-e, onuň garşysyndaky burç bolsa 60°-a deň. Üçburçlugyň gipotenuzasyny tapyň.
A) $5\sqrt{3}$ cm; B) $2\sqrt{15}$ cm; D) 5 cm; E) 10 cm.

8. Gönüburçly üçburçlugyň katetlerinden biri $5\sqrt{3}$ cm, oňa sepleşýän burç bolsa 30°-a deň. Şu üçburçlugyň ikinji katetini tapyň.
A) $5\sqrt{3}$ cm; B) $2\sqrt{15}$ cm; D) 5 cm; E) 10 cm.

9. Gönüburçly ABC ($\angle C=90°$) üçburçlugyň gipotenuzasy 17 cm-e, katetleri bolsa 15 cm we 8 cm-e deň. A burçuň sinusyny tapyň.
A) $\frac{8}{15}$; B) $\frac{8}{17}$; D) $\frac{17}{15}$; E) $\frac{15}{17}$.

10. Gönüburçly ABC ($\angle C=90°$) üçburçlugyň gipotenuzasy 37 cm-e, katetleri bolsa 12 cm we 35 cm-e deň. B burçuň kosinusyny tapyň.

A) $\frac{12}{37}$; B) $\frac{35}{37}$; D) $\frac{12}{35}$; E) $\frac{35}{12}$.

Iňlis dilini öwrenýäris!

Pifagoryň teoremasy – Pythagorean theorem
Ters teorema – inwerse function theorem
Trigonometriýa – trigonometry
Gipotenuza – hypotenuse

Sinus – sine
Kosinus – cosine
Tangens – tangent
Kotangens – cotangent

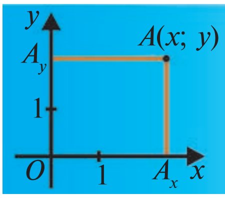
Taryhy maglumatlar


Pifagor
(miladydan öňki 570–500-nji ý.)

Gadymky grek filosofy we matematigi **Pifagor** miladydan öňki VI asyryň ikinji ýarymynda (miladydan öňki 570–500-nji ýyllar) Egeý deňziniň Samos adasynda doglan we Tarentde aradan çykan diýip takmyn edilýär. Pifagor Günorta Italiýanyň grekleriň koloniýasy bolan Kroton şäherine (takmynan miladydan öňki 530-njy ý.) göçüp gelip, şu ýerde öz mekdebini esaslandyrypdyr. Biz bu mekdebiň alyp baran geometrik barlag işleriniň netijeleri barada soňrak ýaşap geçen grek matematikleriniň eserlerinden bilýäris. Pifagor alyp baran geometrik işleriniň özi bize çenli ýetip gelmändir.

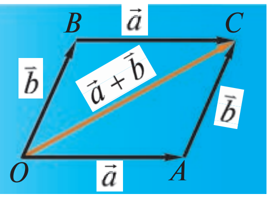
Pifagor birinji bolup sanlary jübüt we täk, düýp we çylşyrymly sanlara bölüpdir. Onuň mekdebinde «Pifagoryň sanlary» diýilýän natural sanlaryň üçlükleri doly garalypdyr. Pifagoryň teoremasy gaty köp geometrik hasaplamalaryň esasyny düzýär. Häzirki günde Pifagoryň teoremasynyň ýüzden artyk subutlary bar. Olardan käbirleri kwadratlary böleklere bölmäge esaslanan, munda katetlere gurlan kwadratlaryň böleklerinden gipotenuza gurlan kwadrat düzülen; başgalary deň şekillere doldurmaga, üçünjileri bolsa göni burçuň depesinden gipotenuza geçirilen beýiklik gönüburçly üçburçlugy iki meňzeş üçburçluga bölüşine esaslanan.

Gadymky Mesopotamiýada deňýanly üçburçlugyň gapdal tarapy we esasy uzynlygyna görä onuň beýikligini tapypdyrlar. Käbir çeşmelere görä, Pifagoryň mekdebinde göni çyzykly şekilleri deňdeş şekillere bölmegiň geometrik usullaryndan teoremalary subut etmekde we meseleler çözende peýdalanylypdyr. Çünki göni çyzykly şekilleri geometrik çalyşma meselesi amaly işlerden gelip çykypdyr.



III BAP

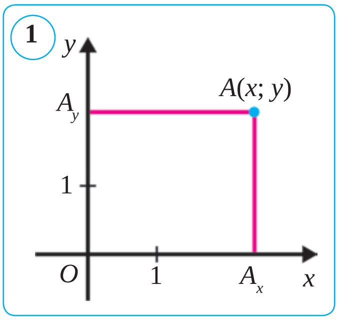
KOORDINATALAR USULY. WEKTORLAR



7-§. TEKIZLIKDE KOORDINATALAR SISTEMASY

31. TEKIZLIKDE NOKADYŇ KOORDINATALARY. KESIMIŇ ORTASYNYŇ KOORDINATALARY

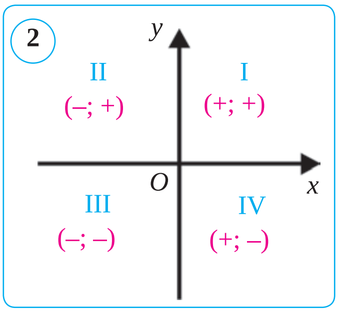
1. Tekizlikde nokadyň koordinatalary. Tekizlikde özara perpendikulýar *x* we *y* oklary geçirýäris. Olaryň kesişme nokadyny *O* harpy bilen belgiläliň. Bu nokady her bir ok üçin *hasap başy* diýip, her bir okda özara deň *birlik* kesimi alýarys. *Ox* okdaky ugur «*çepden saga*», *Oy* okundaky ugur bolsa «*pesden ýokary*» bolýar (1-nji surat). Munda tekizlikde *xOy* gönüburçly koordinatalar sistemasy anyklanan, diýilýär. Bu sistemany ylma fransuz alymy **Rene Dekart** girizendigi üçin **Dekartyň koordinatalar sistemasy** hem diýilýär. *Ox* oka **abssissalar oky** (ýa-da *x* oky), *Oy* oka bolsa **ordinatalar oky** (ýa-da *y* oky) diýilýär. Abssissalar oky gorizontal, ordinatalar oky wertikal ýerleşen.



Dekartyň koordinatalar sistemasy ýatýan tekizlige **koordinatalar tekizligi** diýilýär.

A – koordinata tekizliginde alnan islendik nokat bolsun. *A* nokatdan *Ox* we *Oy* oklaryna parallel göni çyzyklar geçirýäris. Olar *Ox* we *Oy* oklary bilen, degişlilikde, A_x we A_y nokatlarda kesişýär, diýeliň (1-nji surata g.).

AA_x kesimiň uzynlygy *x*, AA_y kesimiň uzynlygy *y* bolsun. *x* sana *A* nokadyň **abssissasy**, *y* sana bolsa *A* nokadyň **ordinatasy** diýilýär.



x we *y* sanlar jübütine *A* nokadyň **koordinatalary** diýilýär we ***A*(*x*; *y*)** ýaly belgilenýär. Koordinatalary aňlatmakda birinji abssissa, soň ordinata ýazylýär.

Şeýlelikde: 1) koordinata tekizliginde her bir *A* nokada sanlar jübüti (*x*; *y*) laýyk gelýär; 2) islendik sanlar jübütini (*x*; *y*)koordinata tekizligindäki käbir *A* nokadyň koordinatalary diýmek mümkin; 3) eger $x \neq y$ bolsa, onda (*x*; *y*) we (*y*; *x*) jübütlikler koordinata tekizliginde dürli nokatlary aňladýar.

Koordinata başlangyjy – *O* nokadyň koordinatalary *O*(0; 0)-dan ybarat. *Ox* okundaky islendik *B* nokadyň koordinatasy *B*(*x*; 0), *Oy* okundaky islendik *C* nokadyň koordinatasy *C*(0; *y*) görnüşinde bolýar.

Ox we *Oy* oklar tekizligi dört göni burça bölýär, olara *koordinata çärýekleri* ýa-da *koordinata burçlary* diýilýär. Koordinata çärýekleri rim sifrleri bilen belgilenýär hem-de olar sagat millerine garşy ugur boýunça nomerlenýär. Nokadyň koordinatalarynyň çärýeklerdäki alamatlarynyň belgilenişi 2-nji suratda görkezilen.

Geometrik şekilleri we olaryň häsiýetlerini koordinatalarda ulanyp öwrenmäge garap geçýäris.

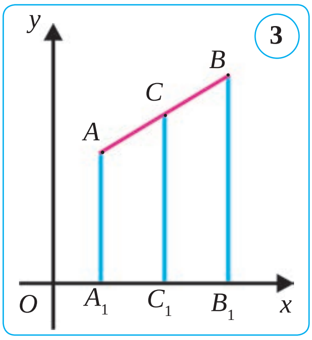
2. Kesimiň ortasynyň koordinatalary.

Teorema.

Kesimiň ortasynyň koordinatalary aşakdaky formulalar boýunça hasaplanýar:

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},}$$

munda $A(x_1; y_1)$ we $B(x_2; y_2)$ – kesimiň uçlary, $C(x; y)$ – kesimiň ortasy.



Subudy. C nokadyň x we y kordinatalaryny tapýarys. AB kesim Ox okuny kesmedik bolsun, ýagny $x_1 < x_2$ ýagdaýa garap geçýäris (3-nji surat). Ox okuna AA_1, BB_1 we CC_1 perpendikulýar göni çyzyklary geçirýäris. $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$ hem-de perpendikulýaryň esaslary $A_1(x_1;\ 0)$, $B_1(x_2;\ 0)$ we $C_1(x;\ 0)$ koordinatalara eýedigi aýdyň. C nokat AB kesimiň ortasy bolany üçin, Falesiň teoremasyna görä, C_1 nokat A_1B_1 kesimiň ortasy bolýar we diýmek, $A_1C_1 = C_1B_1$, ýagny $x_2 - x = x - x_1$. Mundan şu formulany tapýarys:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$x_1 = x_2$, ýagny AB kesim Oy okuna parallel bolsa, üç nokat – A_1, B_1 we C_1 bir meňzeş abssissa eýe bolýar. Diýmek, formula munda-da ýerlikli boluberýär.

$x_1 > x_2$ bolan ýagdaýda-da ýokardaky netijä gelýäris (muny özbaşdak barlamagy özüňize hödürleýäris).

C nokadyň ordinatasy hem şuňa meňzeş tapylýar. A, B we C nokatlar arkaly Oy okuna perpendikulýar göni çyzyklar geçirilýär. Şu formula emele gelýär:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Mesele. Depeleri $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(4;\ 1)$ we $D(2;\ -2)$ nokatlarda bolan $ABCD$ dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň.

Çözülişi. Parallelogramyň nyşanyna görä, dörtburçlugyň diagonallary kesişme nokadynda deň ikä bölünse, bu dörtburçlugyň parallelogramdygy mälim.

Berlen $ABCD$ dörtburçlugyň AC we BD diagonallary ortasynyň koordinatalaryny tapýarys. AC kesimiň ortasy aşakdaky koordinata eýe:

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad y = \frac{1+1}{2} = 1.$$

BD kesimiň ortasy aşakdaky koordinata eýe:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1, \quad y = \frac{4+(-2)}{2} = 1.$$

Şeýdip, AC we BD diagonallaryň kesişme nokady umumy $(1; 1)$ koordinata eýe eken. Diýmek, parallelogram nyşanyna görä, $ABCD$ dörtburçluk parallelogramdyr. Şony subut etmek talap edilipdi.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Koordinata oklary we olaryň kesişen nokady nähili atlandyrylýar?
? 2) Koordinatalar tekizligi diýip nämä aýdylýar? Tekizlikdäki nokadyň koordinatalary diýende nämäni düşünýärsiňiz?

2. $A(4; -5)$ nokatdan koordinatalar oklaryna perpendikulýarlar geçirilen. Şu perpendikulýarlaryň esasynyň koordinatalaryny ýazyň.

3. Eger: 1) $x = -4$, $y = -6$; 2) $x = -3$, $y = 5$; 3) $x > 0$, $y < 0$; 4) $x > 0$, $y > 0$ bolsa, $A(x; y)$ nokadyň haýsy çärýekde ýatýandygyny anyklaň.

4. Eger: 1) $A(-12; -3)$, $B(-8; 1)$; 2) $A(4; -11)$, $B(-4; 0)$ bolsa, AB kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapyň.

5. C nokat – AB kesimiň ortasy. Eger $A(2; -3)$, $C(0{,}5; 1)$ bolsa, B nokadyň koordinatalaryny tapyň.

6. $A(-4; 0)$, $B(-2; -2)$, $C(0; -6)$ we $D(-2; -4)$ nokatlar berlen. $ABCD$ dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň.

7. Eger: 1) $A(-6; 2)$, $B(4; 4)$; 2) $A(-8; -4)$, $B(-1; 3)$ bolsa, AB kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapyň.

8. C nokat – AB kesimiň ortasy, D nokat bolsa BC kesimiň ortasy. Eger: 1) 1) $A(-3; 3)$, $B(5; -1)$; 2) $A(-2; -1)$, $C(2; 3)$ bolsa, D nokadyň koordinatalaryny tapyň.

Şuny bilmek peýdaly!

Ýeriň üstündäki nokadyň geografik uzynlygyna we giňligine şu nokadyň ***geografik koordinatalary*** diýilýär. Ýeriň üstündäki her bir nokada iki mukdar – onuň geografik uzynlygy we giňligi laýyk goýulýar we tersine, iki mukdar – geografik uzynlyk we giňlik boýunça ýeriň üstündäki belli bir nokat tapylýar. Munda paralleller we meridianlar gönüburçly koordinatalar sistemasyndaky abssissa we ordinata oklary wezipesini ýerine ýetirýär.

Meselem, Daşkent şäheri 069,20 gündogar uzynlykda (≈69°) we 041,26 demirgazyk giňlikde (≈41°), Samarkant şäheri bolsa 066,93 gündogar uzynlykda (≈67°) we 039,65 demirgazyk giňlikde (≈40°) ýerleşen.

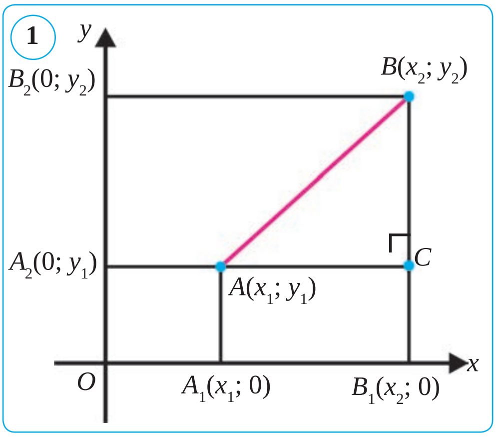
32–33. IKI NOKADYŇ ARASYNDAKY ARALYK. TÖWEREGIŇ DEŇLEMESI

1. Iki nokadyň arasyndaky aralyk.

Teorema.

$A(x_1; y_1)$ we $B(x_2; y_2)$ nokatlaryň arasyndaky aralyk aşakdaky formulalar boýunça hasaplanýar:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$



Subudy. ilki $x_1 \neq x_2$ we $y_1 \neq y_2$ ýagdaýa garap geçýäris. Berlen A we B nokatlar arkaly koordinatalar oklaryna perpendikulýar geçirýäris we olaryň kesişme nokadyny C bilen belgileýäris (1-nji surat). A we C nokatlaryň arasyndaky aralyk $|x_2 - x_1|$-e, B we C nokatlaryň arasyndaky aralyk bolsa $|y_2 - y_1|$-e deň. Gönüburçly ABC üçburçluga Pifagoryň teoremasyny ulanyp tapýarys:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ ýa-da}$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \quad (1)$$

Nokatlaryň arasyndaky aralygyň formulasy $x_1 \neq x_2$ we $y_1 \neq y_2$ ýagdaý üçin garalan bolsa-da, ol başga ýagdaýlar üçin hem öz güýjüni saklaýar. Hakykatdan hem, $x_1 = x_2$ we $y_1 \neq y_2$ bolsa, $AB = |y_2 - y_1|$ (1) formula hem şu netijäni berýär. $x_1 \neq x_2$ we $y_1 = y_2$ ýagdaý hem şuňa meňzeş garalýar. $x_1 = x_2$ we $y_1 = y_2$ ýagdaýda A we B nokatlar üstme-üst düşýär we (1) formula $AB = 0$ nokady berýär.

1-nji mesele. Depeleri $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$, $C(4; 1)$ we $D(2; -2)$ nokatlarda bolan $ABCD$ dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň.

Çözülişi. Parallelogramyň 2-nji nyşanyna görä, dörtburçlugyň garşylykly taraplary özara deň bolsa, bu dörtburçlugyň parallelogramdygy mälim. Berlen $ABCD$ dörtburçlugyň taraplarynyň uzynlyklaryny tapýarys:

$$AB = \sqrt{(0-(-2))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}\,; \quad BC = \sqrt{(4-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25} = 5\,;$$

$$CD = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13}\,; \quad AD = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{25} = 5\,.$$

Şeýdip, $AB = CD$ we $BC = AD$, ýagny parallelogram nyşanyna görä $ABCD$ dörtburçluk – parallelogram.

2. Tekizlikde şekiliň deňlemesi. Tekizlikde *şekiliň.* Dekartyň koordinatalar sistemasyndaky *deňlemesi* diýip, şekile degişli islendik nokadyň koordinatalary kanagatlandyrýan iki x, y nämälimli deňlemä aýdylýar. Tersine, bu deňlemäni kanagatlandyrýan islendik iki san şekiliň käbir nokadynyň koordinatalary bolýar.

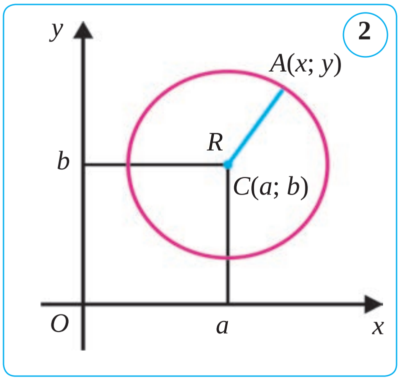
3. Töweregiň deňlemesi.

Teorema.

Gönüburçly koordinatalar sistemasynda merkezi $C(a;\ b)$ nokatda, radiusy bolsa R-e deň töweregiň *deňlemesi* aşakdaky görnüşe eýe:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Subudy. Gönüburçly koordinatalar sistemasynda merkezi $C(a;\ b)$ nokatda bolan $R\ (R>0)$ radiusly töwerek berlen bolsun (2-nji surat). Töwerekde islendik $A(x;\ y)$ nokady alýarys. Töweregiň kesgitlemesine görä, töweregiň merkezinden töweregiň islendik nokadyna çenli bolan aralyk R-e deň, ýagny $CA=R$ we diýmek, $CA^2=R^2$. Bu deňlemäni koordinatalar görnüşinde ýazyp, aşakdakyny tapýarys: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. (2)



A – töweregiň islendik nokady. Şonuň üçin (2) deňlemäni töwerekdäki islendik nokadyň koordinatalary kanagatlandyrýar.

Tersine, koordinatalary (2) deňlemäni kanagatlandyrýan islendik A nokat töwerege degişlidir, çünki ondan C nokada çenli aralyk R-e deň. Mundan (2) deňleme hakykatdan hem merkezi C nokatda we radiusy R-den ybarat töweregiň deňlemesidigi gelip çykýar. Şeýlelikde, şekiliň deňlemesiniň kesgitlemesindäki iki talap hem ýerine ýetirilýär. Teorema subut edildi.

Netije. Merkezi koordinatalar başlangyjynda, radiusy R bolan töweregiň deňlemesi şu görnüşe eýe:

$$x^2+y^2=R^2.$$

2-nji mesele. $x^2-4x+y^2+2y-11=0$ deňleme bilen berlen töweregiň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny anyklaň.

Çözülişi. Berlen deňlemäni $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ görnüşe getirýäris. x^2-4x-i $(x-2)^2-4$ görnüşde, y^2+2y-i bolsa $(y+1)^2-1$ görnüşde ýazyp alýarys. Bu aňlatmalary berlen deňlemä goýup, alarys:

$$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-11=0 \text{ ýa-da } (x-2)^2+(y+1)^2=4^2.$$

Bu deňleme merkezi $C(2;\ -1)$ nokatda we radiusy 4 bolan töweregiň deňlemesini berýär. *Jogaby:* $(2;-1)$, $R=4$.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Nokatlaryň arasyndaky aralyk olaryň koordinatalary arkaly nähili aňladylýar?
2) Şekiliň Dekartyň koordinatalar sistemasyndaky deňlemesi näme? Koordinatalar tekizliginde töweregiň deňlemesi nähili görnüşde berilýär?

2. Eger: 1) $A(-3; 8)$, $B(5; 2)$; 2) $A(8; -1)$, $B(-7; 7)$; 3) $A(5; 0)$, $B(0; -12)$ bolsa, AB kesim uzynlygyny tapyň.

3. Eger: 1) $A(2; 1)$ we $B(x; -2)$ nokatlaryň arasyndaky aralyk 5-e; 2) $A(x; 0)$ we $B(2; -1)$ nokatlaryň arasyndaky aralyk 1-e deň bolsa, x-i tapyň.

4. Eger $A(-1; 2)$, $B(2; 6)$ we $C(5; 2)$ bolsa, ABC üçburçlugyň perimetrini tapyň.

5. Eger: 1) $C(7; 11)$, $R=5$; 2) $C(-2; 3)$, $R=1$ bolsa, merkezi C nokatda, radiusy R bolan töweregiň deňlemesini düzüň.

6. Aşakdaky deňleme bilen berlen töweregiň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny anyklaň: 1) $(x-2)^2+(y-5)^2=7^2$; 2) $(x+1)^2+(y-5)^2=4$.

7. 1) $x^2-6x+y^2+2y-6=0$; 2) $x^2+y^2+10y+24=0$ deňleme bilen berlen töweregiň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny anyklaň.

8. Eger üçburçlugyň depeleri: 1) $A(0; 0)$, $B(0; 2)$ we $C(2; 0)$; 2) $(1; 0)$, $B(2; \sqrt{3})$ we $C(8; 0)$ bolsa, ABC üçburçlugyň görnüşini anyklaň.

9. Eger: 1) $C(9; 4)$, $R=7$; 2) $C(-3; -4)$, $R=2$ bolsa, merkezi C nokatda, radiusy R bolan töweregiň deňlemesini düzüň.

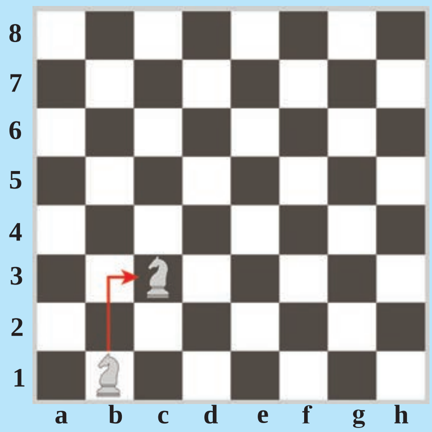
10. Aşakdaky deňleme bilen berlen töweregiň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny anyklaň: 1) $(x-7)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-4)^2+y^2=1$.

11. $x^2+y^2=100$ deňleme bilen berlen töwerekde: 1) abssissasy 8-e; 2) ordinatasy -6-a deň nokatlary tapyň.

Şuny bilmek peýdaly!

Küşt (parsça *şahmat* – şa ýeňildi) sport görnüşi bolup, oýnuň maksady bäsdeşiň şasyny mat etmekden ybarat. Ak we gara reňkdäki 64 gözenekli tagtada her bir tarap iki hili reňkdäki16 sanydan çöp (bir sanydan şa we ferzin; 2 sanydan ruh, pil we at; 8 sanydan pyýada) bilen oýnaýar.

Küşt partiýasynyň belliginde Siz küştçileriň oýnuň dowamynda çöpler bilen eden ähli ýörişlerini okamagyňyz mümkin bolýar. Meselem, at b1-c3 diýen ýazgy atyň b1 gözenekden c3 gözenege eden hereketini aňladýar. Bularyň ählisi küşt tagtasyndaky koordinatalar sistemasydyr.



b1-c3

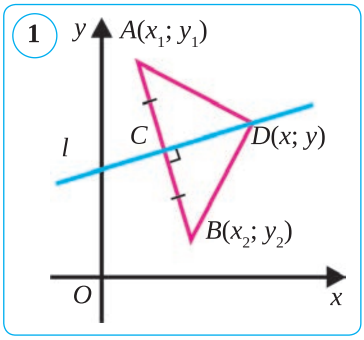
34. GÖNI ÇYZYGYŇ DEŇLEMESI. GEOMETRIK MESELELER ÇÖZMEGIŇ KOORDINATALAR USULY

1. Göni çyzygyň deňlemesi.

Teorema.

Göni çyzygyň gönüburçly koordinatalar sistemasyndaky deňlemesi aşakdaky görnüşe eýe: $ax+by+c=0$, (1)
munda a, b, c – islendik sanlar, a we b sanlardan biri nola deň däl.

Subudy. l göni çyzyk gönüburçly koordinatalar sistemasyndaky islendik göni çyzyk bolsun. l-e perpendikulýar käbir göni çyzygy geçirýäris we oňa l göni çyzyk bilen kesişen nokady C-den başlap deň CA we CB kesimleri goýýarys (1-nji surat). x_1, y_1 – A nokadyň koordinatalary, x_2, y_2 – B nokadyň koordinatalary bolsun. Orta perpendikulýar l göni çyzykda ýatýan islendik $D(x; y)$ nokat A we B nokatlardan deň uzaklaşan bolýar, ýagny $DA=DB$, mundan $DA^2=DB^2$. Bu deňligi koordinatalarda ýazyp, aşakdakyny alarys:



$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2. \qquad (2)$$

Ýaýyň içindäki aňlatmalary kwadrata göterip we deňlemedäki meňzeş agzalary toparlandan soň, (2) deňleme aşakdaky görnüşe gelýär:

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2+y_2^2)=0. \qquad (3)$$

x_1, y_1, x_2, y_2 – islendik sanlar, şu sebäpli $2(x_2-x_1)=a$, $2(y_2-y_1)=b$ we $x_1^2+y_1^2-x_2^2+y_2^2=c$ diýip belgiläp, olary (3) deňlemä goýup:

$$ax+by+c=0$$

deňlemäni alarys, munda a, b we c – käbir sanlar.

D – l göni çyzykdaky islendik nokat, şonuň üçin (1) deňlemäni berlen göni çyzykdaky islendik nokadyň koordinatasy kanagatlandyrýar.

Käbir D_0 nokadyň x_0 we y_0 koordinatalary (1) deňlemäni kanagatlandyrsyn. Onda $D_0A=D_0B$, ýagny D_0 nokat A we B nokatlardan deň uzaklaşan bolýar, diýmek, AB kesimiň orta perpendikulýary l göni çyzyga degişli bolýar. A we B – dürli iki nokat bolany üçin (x_2-x_1) ýa-da (y_2-y_1) tapawutlardan biri, ýagny a we b sanlardan biri nola deň däldigini aýdyp geçýäris.

1-nji mesele. $A(1; -1)$ we $B(-3; 2)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzüň.

Çözülişi. AB göni çyzygyň deňlemesi $ax+by+c=0$ görnüşde aňladylýandygyny bilýäris. A we B nokatlar AB göni çyzykda ýatýar, diýmek, olaryň koordinatalaryny göni çyzygyň deňlemesine goýup, şu deňlemeleri alarys:

$$a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c = 0, \quad a \cdot (-3) + b \cdot 2 + c = 0 \text{ ýa-da}$$

$$a - b + c = 0, \ -3a + 2b + c = 0.$$

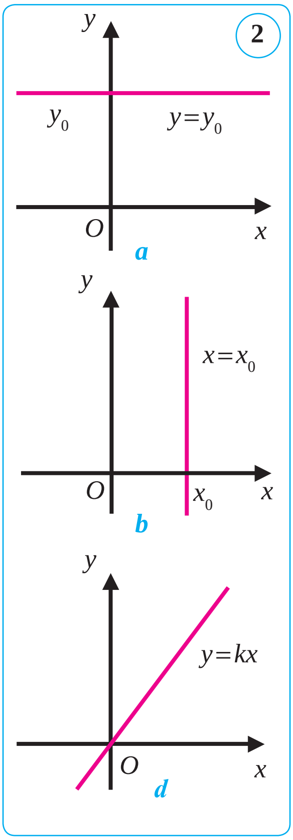
Bu deňlemelerden a we b koeffisiýentleri c arkaly aňladýarys: $a = 3c$, $b = 4c$. a we b-niň bu bahalaryny göni çyzygyň deňlemesine goýup, tapýarys: $3cx + 4cy + c = 0$, munda $c \neq 0$.

Bu deňleme AB göni çyzygyň deňlemesi bolýar. Ýokardaky deňlemäni c-ge gysgaldyp, aşakdaky görnüşe getirýäris: $3x + 4y + 1 = 0$.

Bu deňleme gözlenýän göni çyzyk deňlemesidir.

2. Göni çyzygyň koordinatalar sistemasyna görä ýerleşişi.

Indi $ax + by + c = 0$ göni çyzygyň deňlemesiniň üç hususy ýagdaýyna garap geçýäris. Her bir ýagdaý üçin göni çyzygyň koordinatalar oklaryna görä nähili ýerleşendigini anyklaýarys.



1-nji ýagdaý. $a = 0$, $b \neq 0$. Munda göni çyzygyň deňlemesini $by + c = 0$ ýa-da $y = y_0$ görnüşde ýazmak mümkin, munda $y_0 = -\frac{c}{b}$ – käbir san. $y = y_0$ Göni çyzygyň hemme nokatlary birmeňzeş ordinata eýe, diýmek, ol abssissalar okuna parallel (2-nji *a* surat). Eger $c = 0$ bolsa, onuň bilen üstme-üst düşýär. $y = 0$ – abssissalar okunyň deňlemesi.

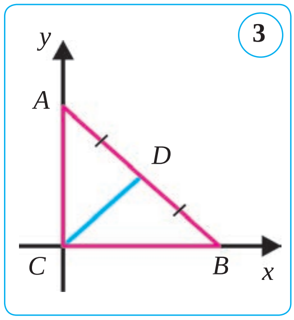
2-nji ýagdaý. $a \neq 0$, $b = 0$. Munda göni çyzygyň deňlemesini $ax + c = 0$ ýa-da $x = x_0$ görnüşde ýazmak mümkin, munda $x_0 = -\frac{c}{a}$ – käbir san. $x = x_0$ göni çyzygyň hemme nokatlary birmeňzeş abssissa eýe, diýmek, ol ordinatalar okuna parallel (2-nji *b* surat). Eger $c = 0$ bolsa, onuň bilen üstme-üst düşýär. $x = 0$ – ordinatalar okunyň deňlemesi.

3-nji ýagdaý. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. Munda göni çyzygyň deňlemesini $ax + by = 0$ ýa-da $y = kx$ görnüşde ýazmak mümkin, bu ýerde $k = -\frac{a}{b}$ – käbir san.

$y = kx$ göni çyzyk koordinatalar başlangyjyndan geçýär (2-nji *d* surat).

3. Geometrik meseleleri çözmegiň koordinatalar usuly. Ençeme geometrik meseleleri kesimiň ortasynyň koordinatalary we iki nokadyň arasyndaky aralygy hasaplamak formulalaryndan peýdalanyp çözmek mümkin. Şu maksatda gönüburçly koordinatalar sistemasyny girizmek we meseläniň şertini koordinatalarda ýazyp almaly. Şundan soň mesele algebraik hasaplamalaryň kömeginde çözülýär.

2-nji mesele. Gönüburçly üçburçlukda gipotenuzanyň ortasy hemme depelerinden deň uzaklaşan. Şony subut ediň.



Çözülişi. Gönüburçly ABC ($\angle C=90°$) üçburçluga garap geçýäris. AB kesimiň ortasyny D harpy bilen belgileýäris. 3-nji suratda görkeziliş ýaly, gönüburçly koordinatalar sistemasyny girizýäris. Eger $BC=a$, $AC=b$ bolsa, onda üçburçlugyň depeleri $C(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$ we $A(0;\ b)$ koordinatalara eýe bolýar. Kesimiň ortasynyň koordinatalarynyň formulasyna görä D nokadyň koordinatalaryny tapýarys: $D(0{,}5a;\ 0{,}5b)$.

Nokatlaryň arasyndaky aralygy tapmagyň formulasyndan peýdalanyp, DC we DA kesimleriň uzynlyklaryny tapýarys:

$$DC=\sqrt{(0{,}5a)^2+(0{,}5b)^2}=\sqrt{0{,}25\left(a^2+b^2\right)}=0{,}5\sqrt{a^2+b^2}\ ;$$

$$DA=\sqrt{(0{,}5a)^2+(0{,}5b-b)^2}=\sqrt{0{,}25a^2+0{,}25b^2}=\sqrt{0{,}25\left(a^2+b^2\right)}=0{,}5\sqrt{a^2+b^2}.$$

Şeýlelikde, $DA = DB = DC$ eken. Şony subut etmek talap edilipdi.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Göni çyzygyň gönüburçly koordinatalar sistemasynda $ax+by+c=0$ görnüşdäki deňlemä eýedigini subut ediň.

? 2) Göni çyzygyň $ax+by+c=0$ deňlemesinde $a=0$ ($b=0$; $c=0$) bolsa, göni çyzyk nähili ýerleşýär?

2. $A(3;\ -1)$, $B(-3;\ 0)$, $C(12;\ 5)$, $D(3;\ 0)$ we $E(-9;\ -2)$ nokatlaryň haýsylary $x-3y+3=0$ deňleme bilen berlen göni çyzyga degişli, haýsylary degişli däl?

3. 1) $A(1;\ 7)$ we $B(-3;\ -1)$; 2) $A(2;\ 5)$ we $B(5;\ 2)$; 3) $A(0;\ 1)$ we $B(-4;\ -5)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzüň.

4. $x+y+c=0$ göni çyzyk $(1;\ 2)$ nokatdan geçse, onuň deňlemesindäki c koeffisiýent nämä deň?

5. Eger $ax+by-1=0$ göni çyzygyň $(1;\ 2)$ we $(2;\ 1)$ nokatlardan geçýändigi mälim bolsa, onuň deňlemesindäki a we b koeffisiýentler nämä deň?

6. 1) $x+2y+3=0$; 2) $3x+4y=12$; 3) $4x-2y-10=0$ deňleme bilen berlen göni çyzygyň koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlaryny tapyň.

7. Eger: 1) $A(3;\ -1)$, $B(5;\ 5)$; 2) $A(3;\ 6)$, $B(-5;\ -2)$ bolsa, $C(4;\ 2)$ nokat AB kesimiň ortasy bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny barlaň.

8. $A(0;-2)$, $B(4;2)$, $C(-4;\ -5)$ nokatlaryň haýsylary $8x-4y-8=0$ deňleme bilen berlen göni çyzyga degişli, haýsylary degişli däl?

9. Eger $A(-1;\ -1)$, $B(-1;\ 3)$ we $C(2;\ 2)$ bolsa, ABC üçburçlugyň taraplaryny öz içine alan göni çyzyklaryň deňlemesini düzüň.

35. WEKTOR DÜŞÜNJESI. WEKTORYŇ UZYNLYGY WE UGRY

1. Wektor ululyklar. Wektor. Size mälim bolan ululyklar iki görnüşde bolmagy mümkin. Şeýle ululyklar bar bolup, olar özleriniň san bahalary bilen (berlen ölçeg birliginde) doly anyklanýar. Meselem, uzynlyk, meýdan we agyrlyk şolara degişlidir.

1-nji kesgitleme. *Diňe san bahasy bilen anyklanýan ululyklara* ***skalýar ululyklar*** *diýilýär.*

Ýene şeýle ululyklar bar bolup, olary doly bilmek üçin bu ululyklary aňladýan san bahalaryndan daşary, olaryň ugurlaryny hem bilmek zerur bolýar. Meselem, tizlik, güýç we basyş şolara degişlidir.

Wektor geometriýanyň esasy düşünjelerinden biri bolup, ol sany (uzynlyk) we ugry bilen doly anyklanýar. Görkezmeli bolmagy üçin ony ugrukdyrylan kesim görnüşinde göz öňüne getirmek mümkin. Aslynda wektorlar barada aýdylanda, hemmesi özara parallel birmeňzeş uzynlyga we birmeňzeş ugra eýe bolan ugrukdyrylan kesimleriň bütin bir synpyny nazarda tutmak dogrurak bolýar.

2-nji kesgitleme. *San bahasy we ugry bilen anyklanýan (häsiýetlenýän) ululyklar* ***wektor ululyklar*** *ýa-da* ***wektorlar*** *diýlip atlandyrylýar.*

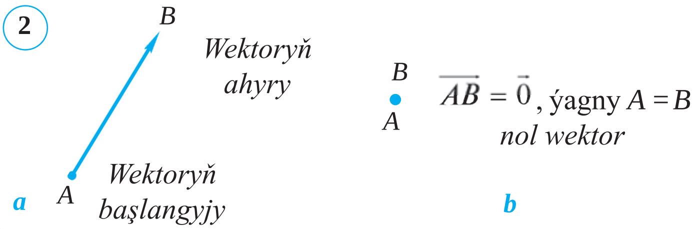
Fizikanyň, mehanikanyň we matematikanyň diňe bir san bilen däl, eýsem ugry bilen häsiýetlenýän mukdarlary barlaýan dürli meseleleri wektor düşünjesine getirýär. Meselem, güýç, tizlik – bular wektorlardyr.

Wektor ululyklary biz örän köp ýagdaýlarda duşýarys. Meselem, transportda barýarkamyz hereket tizligi, öwrüm ýa-da säginmek bilen bagly wektor ululyklary görüp bilersiňiz. Tebigaty öwrenýän ylymlarda olar tizlenme, inersiýa güýji, merkezden gaçma güýji we şuňa meňzeş atlar bilen atlandyrylýar. Biz wektor ululyklaryň tebigy manysyny hasaba almanda onuň matematiki tebigatyny öwrenýäris. Elbetde, wektor ululygyň matematiki häsiýetleri özüniň tebigy manysyna eýe bolýar.

1

Wektor A nokatdan goýlan

2



Wektor ululygyň san mukdaryny kesim arkaly aňladýarys. Mälim bolşy ýaly, islendik kesimiň iki ujy bar. Olardan birini wektoryň ***başlangyjy*** diýip, ikinji ujuny wektor ululygyň ugruna laýyk ugrukdyrýarys we strelka (ugur) bilen belgileýäris. Muny wektoryň ***ujy*** diýýäris.

3-nji kesgitleme. ***Wektor*** *(wektor ululyk) diýip, ugra eýe bolan kesime aýdylýar.*

Wektor ululyk ugry görkezilen kesim hökmünde şekillendirilýär. Wektory aňladýan kesimiň uçlary A we B nokatda bolsa, A nokatdan B nokada ýönelen wektor $\overrightarrow{AB}$ ýaly belgilenýär. Şonuň ýaly-da, wektorlar $\vec{a}$, $\vec{b}$ (latyn elipbiýiniň kiçi harplary) şekilinde-de belgilenmegi mümkin (1-nji surat).

Okalyşy: $\overrightarrow{AB}$ wektor ýa-da $\vec{a}$ wektor.

1) Wektoryň ugry onuň başlangyjyny we ahyryny görkezmek bilen anyklanýar. Munda wektoryň başlangyjy birinji oruna goýulýar (2-nji *a* surat).

AB şöhle bilen kesgitlenýän ugra $\overrightarrow{AB}$ *wektoryň ugry* diýilýär. Başlangyjy we ahyry gabat gelýän wektor *nol wektor* diýlip atlandyrylýar. $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ deňlik A we B nokatlaryň gabat gelendigini aňladýar (2-nji *b* surat).

2) Wektory aňladýan kesimiň uzynlygy wektoryň *moduly* ýa-da *absolýut bahasy* diýlip atlandyrylýar.

Wektoryň moduly $|\overrightarrow{AB}|$ ýa-da $|\vec{a}|$ ýaly belgilenýär (3-nji surat).

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ wektoryň moduly AB kesimiň uzynlygy hasaplanýar: $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$ Şonuň üçin geometriýada wektoryň moduly ýa-da absolýut bahasyna onuň *uzynlygy* diýlip hem atlandyrylýar.

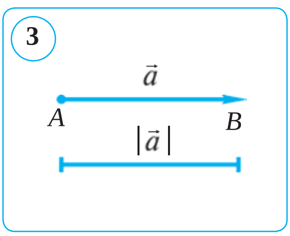
Nol wektoryň uzynlygy (moduly) nola deň diýlip hasaplanýar: $|\vec{0}| = 0$.

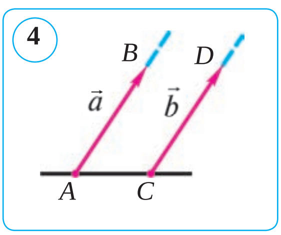
2. Wektorlaryň deňligi.

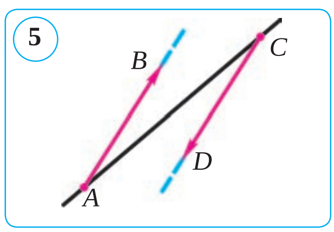
4-nji kesgitleme. *Bir göni çyzykda ýa-da parallel göni çyzyklarda ýatýan wektorlara* ***kollinear wektorlar*** *diýilýär.*

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň kollinearlygy $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ýaly belgilenýär.

Eger parallel göni çyzyklarda ýatýan iki wektor olaryň başlangyjy arkaly geçen göni çyzykdan bir tarapda ýatsa, *ugurdaş wektorlar* (4-nji surat); göni çyzyga görä dürli tarapda ýatsa, *garşylykly ugrukdyrylan wektorlar* diýilýär (5-nji surat).







$\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{CD}$ wektorlar: 1) *ugurdaş* bolsa, olar $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$ ýaly; 2) *garşylykly ugrukdyrylan* bolsa, $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$ ýaly belgilenýär.

Nol wektor islendik wektora kollinear diýlip hasaplanýar.

5-nji kesgitleme. *Eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň uzynlyklary deň we ugurlary birmeňzeş bolsa, bu wektorlar **deň wektorlar** diýlip atlandyrylýar.*

Şeýlelikde, eger $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ we $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ bolsa, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar deň bolýar. Wektorlaryň deňligi $\vec{a}=\vec{b}$ görnüşinde ýazylýar.

Wektorlaryň deňligi onuň başlangyjy tekizligiň islendik nokadynda bolup bilýändigini görkezýär (6-njy surat), ýagny wektoryň modulyny üýtgetmän, ugruny saklamak bilen onuň başlangyjyny tekizligiň islendik nokadyna orun üýtgetmek mümkin. Bu *wektory parallel orun üýtgetme häsiýeti* diýlip atlandyrylýar.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Wektor näme? Wektorlar nähili belgilenýär?

? 2) Nähili iki wektor deň wektorlar diýlip atlandyrylýar? Nähili wektorlar birmeňzeş (garşylykly) ugrukdyrylan wektorlar diýilýär? Wektoryň moduly näme?

2. *ABCD* parallelogramda (7-nji surat): 1) $\overrightarrow{DC}$ wektor bilen ugurdaş; 2) $\overrightarrow{AO}$ wektor bilen ugurdaş; 3) $\overrightarrow{AD}$ wektora garşylykly ugrukdyrylan; 4) $\overrightarrow{BD}$ wektora garşylykly ugrukdyrylan; 5) $\overrightarrow{AB}$ wektora deň; 6) $\overrightarrow{OC}$ wektora deň; 7) $\overrightarrow{OB}$ wektora deň wektorlary ýazyň.

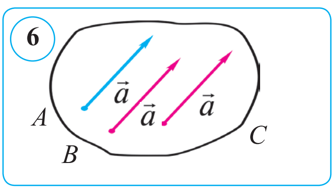
3. *ABCD* parallelogramyň diagonallary *O* nokatda kesişýär. Onuň depeleri we diagonallary kesişme nokady bilen belgilenen wektorlary ýazyň. Olardan haýsylary: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ we $\overrightarrow{BO}$ wektorlara kollinear?

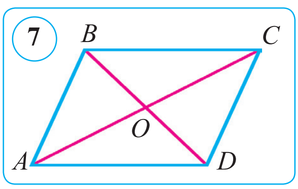
4. Eger: 1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ we $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{DC}\right|$; 2) $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{DC}$ wektorlar nokollinear bolsa, *ABCD* dörtburçlugyň görnüşini anyklaň.

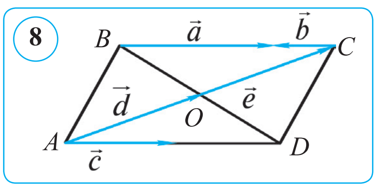
5. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ekenligi mälim. Şu tassyklamalar dogrumy:
1) $AB\parallel CD$; 2) $|AB|=|CD|$?

6. *ABCD* – parallelogram. 8-nji suratda şekillendirilen wektorlardan: 1) kollinear; 2) ugurdaş; 3) garşylykly ugrukdyrylan; 4) deň uzynlyklara eýe bolan wektorlar jübütlerini görkeziň.

7. $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{BA}$ wektorlaryň ugry barada näme diýmek mümkin?







36–37. WEKTORLARY GOŞMAK WE AÝYRMAK

1. Wektorlary goşmak. Bize $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berlen bolsun (1-nji *a* surat). Islendik *A* nokady belgileýäris we bu nokatdan $\vec{a}$ wektora deň $\overrightarrow{AB}$ wektory goýýarys. Soňra *B* nokatdan $\vec{b}$ wektora deň $\overrightarrow{BC}$ wektory goýýarys. Indi $\vec{a}$ wektoryň başlangyjy *A* nokatdan $\vec{b}$ wektor ujy *C*-ge ugrukdyrylan wektor geçirýäris (1-nji *b* surat). $\overrightarrow{AC}$ *wektor* $\vec{a}$ we $\vec{b}$ *wektorlaryň jemi* diýilýär. Wektorlary goşmagyň bu düzgünine «*üçburçlugyň* (*üç nokat*) *düzgüni*» diýilýär.

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň jemi $\vec{a} + \vec{b}$ ýaly belgilenýär.

Üçburçlugyň düzgünini aşakdaky ýaly aňlatsak hem bolýar:

eger A, B we C islendik nokatlar bolsa, onda aşakdaky deňlik ýerlikli:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Üçburçlugyň düzgüni islendik *A*, *B* we *C* nokatlar üçin, şunuň bilen bir hatarda olardan ikisi ýa-da üçüsi gabat gelende-de ýerlikli bolmagy mümkin (1-nji *d* surat).

2. Wektorlary goşmak kanunlary. Mälim bolşy ýaly, parallelogramyň garşylykly taraplary özara deň we parallel. Eger ugurlary birmeňzeş bolsa, parallelogramyň garşylykly taraplary deň wektorlary aňladýar.

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ – nokollinear wektorlar bolsun. Islendik *A* nokatdan $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ we $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ wektorlary goýýarys hem-de taraplary şu wektordan düzülen *ABCD* parallelogramy gurýarys (2-nji surat). Üçburçlugyň düzgünine görä:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{we} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Bulardan $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ gelip çykýar.

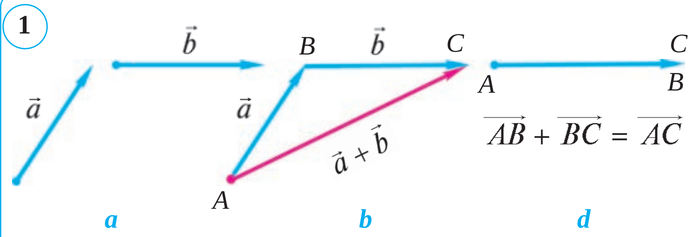
Diýmek, wektorlaryň jemi olaryň nähili tertipde yzygider ýerleşişine bagly däl, ýagny *islendik* $\vec{a}$ we $\vec{b}$ *wektorlar üçin aşakdaky deňlik ýerlikli:*

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

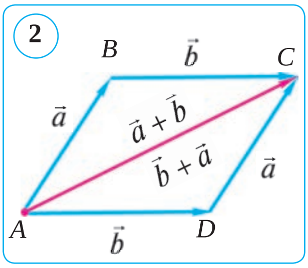
Muňa wektorlary goşmagyň *orun çalşyrma kanuny* diýilýär.

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlardan düzülen *ABCD* parallelogramda jem $\overrightarrow{AC}$ wektor goşulyjy wektorlaryň umumy başlangyjyndan çykýan diagonaldan ybarat.

1



2



Adatda, wektorlary şeýle goşmak wektorlary goşmagyň «*parallelogram düzgüni* (*usuly*)» diýilýär (2-nji surat).

Indi üç $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlaryň jemine garalyň. Islendik *A* nokatdan $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ wektory, *B* nokatdan $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ wektory, *C* nokatdan bolsa $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ wektory goýýarys (3-nji surat). Üçburçlugyň düzgünini ulanyp, aşakdaka eýe bolarys:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD};$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Mundan, *islendik* $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ *wektorlar üçin*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

deňligiň ýerliklidigi gelip çykýar. Bu wektorlary goşmagyň *utgaşdyrma kanunydyr* (*häsiýetidir*).

Wektorlaryň her biri noldan tapawutly bolanda olaryň jemi nol wektor bolmagy mümkin.

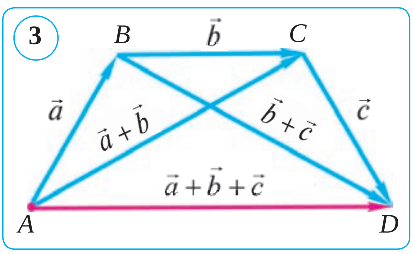
Meselem, *ABC* üçburçluga garalyň (4-nji surat). Munda $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ we $\overrightarrow{CA}$ wektorlaryň jemi nol wektor bolýar, ýagny: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, çünki birinji wektoryň başlangyjy bilen üçünji wektoryň ujy gabat geldi. Diýmek, jem wektor nol wektor – nokat boldy.

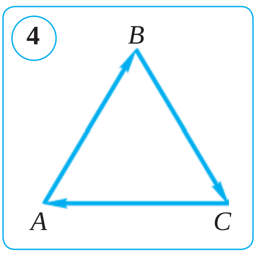
1-nji kesgitleme. *Iki wektoryň jemi nol wektor bolsa, olar* ***garşylykly wektorlar*** *diýlip atlandyrylýar.*

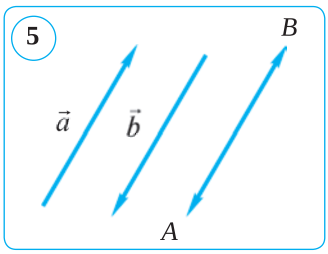
Diýmek, eger $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ bolsa, onda $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$ wektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ wektora (we tersine) *garşylykly wektor* diýilýär we $\vec{b} = -\vec{a}$, $\vec{a} = -\vec{b}$ ýaly ýazylýar (5-nji surat). Eger garşylykly wektorlary (üçburçlugyň düzgüni boýunça) goşsak, onda nol wektor gelip çykýar. Munda $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar parallel bolup, dürli tarapa ugrukdyrylan bolýar. Diýmek, *her bir* $\vec{a}$ *wektor üçin oňa garşylykly* $\vec{a}$ *wektor bar* (*ýagny* $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$) *bolýar*. Ýokardaky pikir ýöretmelerden aşakdaky netijä gelýäris.

Eger nol bolmadyk iki wektoryň uzynlyklary deň we olar garşylykly ugrukdyrylan bolsa, olara ***garşylykly wektorlar*** *diýilýär.*

Nol wektor öz-özüne garşylykly wektor hasaplanýar.







3. Wektorlary aýyrmak. Wektorlary aýyrmak edil sanlary aýyrmak ýaly goşmaga ters amaldyr.

2-nji kesgitleme. $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ ***wektorlaryň tapawudy*** *diýip, şeýle* $\vec{c}$ *wektora aýdylýar, ýagny onuň* $\vec{b}$ *wektor bilen jemi* $\vec{a}$ *wektory berýär:* $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň tapawudy edil sanlaryň tapawudy ýaly belgilenýär: $\vec{a}-\vec{b}$. Iki wektoryň tapawudy birinji wektora ikinji wektora garşylykly wektory goşmak hökmünde anyklanýar we ol $\vec{a}+(-\vec{b})$ wektora deň (6-njy *b* surat).

Bize $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berlen bolsun (6-njy *a* surat). $\vec{a}$ wektor bilen $\vec{b}$ wektora garşylykly bolan $-\vec{b}$ wektoryň jemine garalyň.

Islendik $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ *wektorlar üçin* $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ *deňlik ýerlikli.*

Hakykatdan hem, $(\vec{a}+(-\vec{b}))+\vec{b}=\vec{a}+((-\vec{b})+\vec{b})=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar bir *O* nokatdan goýlan bolsa, onda $\vec{a}-\vec{b}$ tapawudy tapmak üçin aşakdaky düzgünden peýdalanmak amatly (6-njy *d* surat):

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

Ýokardan görnüşi ýaly, *kemeldiji* wektoryň *ahyry tapawut* wektoryň *başlangyjy*, *kemeliji* wektoryň *ahyry* bolsa *tapawut* wektoryň *ahyry* wezipesini ýerine ýetirýän eken. Düzgüni ýatda saklamak oňaýly bolmagyny üpjün etmek maksadynda ol shematik ýagdaýda görkezilýär.

Wektory goşmakda parallelogram usulyndan peýdalansak (7-nji surat), tapawut wektor parallelogramyň ikinji diagonalyndan ybarat bolýar.

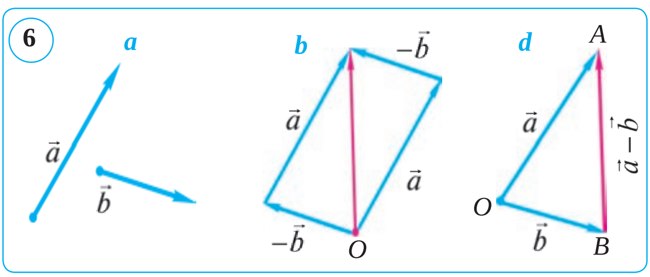
Mesele. *ABC* üçburçluk berlen. 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ wektorlary $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ we $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ wektorlar arkaly aňladyň.

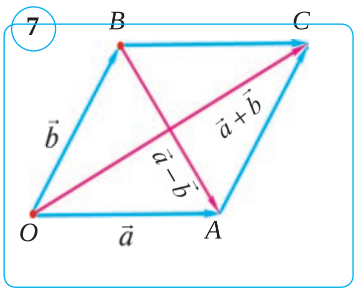
Çözülişi. 1) $\overrightarrow{BA}$ we $\overrightarrow{AB}$ – garşylykly wektorlar, şonuň üçin

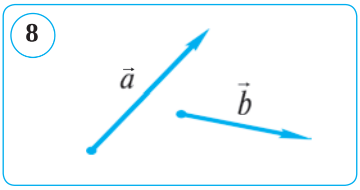
$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB} \text{ ýa-da } \overrightarrow{BA}=-\vec{a}.$$

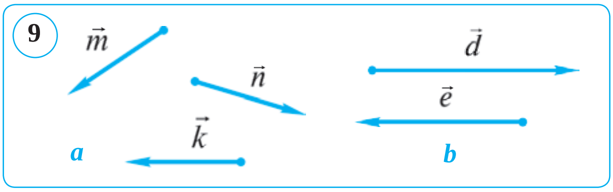
2) Üçburçlugyň düzgünine görä: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Ýöne $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, şonuň üçin

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}.$$









Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Üçburçlugyň we parallelogramyň düzgünine görä wektorlaryň jemi nähili tapylýar? Iki wektoryň tapawudy diýip nämä aýdylýar?
2) Berlen wektora garşylykly wektor diýip nämä aýdylýar?

2. 8-nji suratda $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar şekillendirilen. $\vec{a}+\vec{b}$ wektory iki usul bilen çyzyň.

3. 9-njy suratda $\vec{m}$, $\vec{n}$ we $\vec{k}$ hem-de $\vec{d}$ we $\vec{e}$ wektorlar şekillendirilen. Wektorlary çyzyň: 1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{k}$; 2) $\vec{d}+\vec{e}$.

4. 10-njy suratda $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ hem-de $\vec{d}$ we $\vec{e}$ wektorlar şekillendirilen. Wektorlary çyzyň: 1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{e}-\vec{d}$.

5. *ABCD* parallelogram berlen. $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ deňlik ýerine ýetirilýärmi? Barlap görüň.

6. *ABCD* rombda: *AD*=20 cm, *BD* = 24 cm, *O* – diagonallaryň kesişme nokady. $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OB}|$ -ni tapyň.

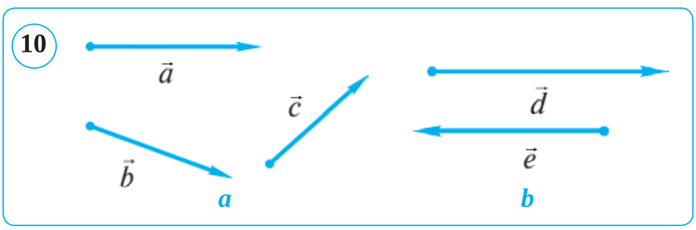
7. *ABCD* – islendik dörtburçluk. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ bolýandygyny subut ediň.

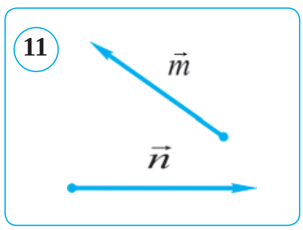
8. *ABCD*–parallelogram. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ wektor deňligi subut ediň (wektorlary goşmagyň «*parallelogram düzgüni*»).

9. *ABCD* parallelogramda: $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ wektorlary $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar arkaly aňladyň.

10. *E* we *F* –*ABC* üçburçluk *AB* we *AC* taraplarynyň ortalary. $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EF}$ we $\overrightarrow{BC}$ wektorlary $\vec{a}=\overrightarrow{AE}$ we $\vec{b}=\overrightarrow{AF}$ wektorlar arkaly aňladyň.

11. 11-nji suratda $\vec{m}$ we $\vec{n}$ wektorlar şekillendirilen. $\vec{m}+\vec{n}$ wektory iki usul bilen çyzyň.





38–39. WEKTORY SANA KÖPELTMEK. WEKTORYŇ KOORDINATALARY

1. Wektory sana köpeltmek. Käbir $\vec{a}$ wektory alýarys we $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ jemini tapýarys (1-nji surat). Şeýle jemi $3\cdot\vec{a}$ diýip belgileýäris we bu aňlatmany $\vec{a}$ wektoryň 3 sanyna köpeltmek hasyly diýip atlandyrmagymyz tebigydyr.

Kesgitleme. *Nol bolmadyk $\vec{a}$ wektoryň k sana köpeltmek hasyly diýip, şeýle $\vec{b}=k\cdot\vec{a}$ wektora aýdylýar, ýagny munda onuň uzynlygy $|k|\cdot|\vec{a}|$ sana deň bolup, ugry $k>0$ bolanda $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň ugry birmeňzeş, $k<0$ bolanda bolsa garşylykly bolýar.*

Nol wektoryň islendik sana köpeltmek hasyly nol wektor hasaplanýar.

$\vec{a}$ wektoryň k sana köpeltmek hasyly $k\vec{a}$ ýaly belgilenýär (san köpeldiji çep tarapa ýazylýar). Kesgitlemä görä: $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$.

Wektoryň sana köpeltmek hasyly kesgitlemesinden gönüden-göni aşakdakylar gelip çykýar: 1) *islendik wektoryň nola köpeltmek hasyly nol wektor bolýar;* 2) *islendik san we islendik $\vec{a}$ wektor üçin $\vec{a}$ we $k\vec{a}$ wektorlar kollineardyr.*

Indi wektory sana köpeltmegiň esasy häsiýetlerini sanap geçýäris. Islendik $\vec{a}$, $\vec{b}$ wektorlar we islendik k, l sanlar üçin aşakdaky deňlikler ýerlikli:

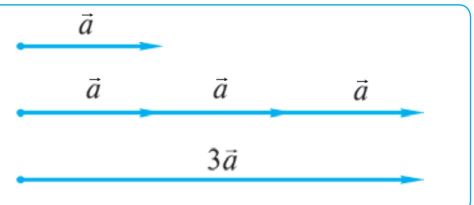
1°. $(k\cdot l)\vec{a}=k\cdot(l\vec{a})$ – *utgaşdyrma kanuny.* 2°. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ – *birinji paýlaşdyrma kanuny.* 3°. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ – *ikinji paýlaşdyrma kanuny.* 4°. $k\cdot\vec{0}=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

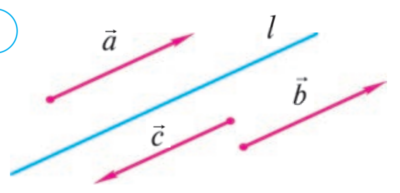
Parallel göni çyzyklara ýa-da bir göni çyzykda ýatýan iki wektoryň ***kollinear wektorlar*** *diýilýändigini ýene bir gezek ýatladyp geçýäris.*

l göni çyzyk we oňa parallel bolan $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar berlen bolsun (2-nji surat). Kesgitlemä görä, $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar kollinear wektorlar bolýar. Bu ýerde $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar birmeňzeş ugrukdyrylan, $\vec{c}$ wektor bolsa $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlara görä garşylykly ugrukdyrylan.

Mälim bolşy ýaly, wektory sana köpeldende köpeltmek hasyly wektoryň ugry berlen wektora parallel bolýar. Mundan aşakdaky möhüm netijäni alarys:

wektoryň sana köpeltmek hasyly şu wektora kollinear wektordyr.

1


2


Teorema.

Wektor özüniň modulyna deň sana bölünse, şu wektora kollinear birlik wektor emele gelýär.

Subudy. $\vec{a}$ wektoryň moduly $|\vec{a}|$ bolsun. $\vec{a}$ wektoryň $k = \frac{1}{|\vec{a}|}$ sana köpeltmek hasylyna garalyň:

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Diýmek, köpeltmek hasyly wektor moduly bir birlige deň.

Moduly bire deň wektory *birlik wektor* diýip atlandyrýarys. Eger $\vec{a}$ wektor boýunça ugrukdyrylan birlik wektory $\vec{e}$ diýip belgilesek, teorema görä: $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ýa-da bu deňligi $|\vec{a}|$ sana köpeltsek: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

Netijede biz wektorlary öwrenmekde uly ähmiýete eýe bolan deňligi aldyk, ýagny *islendik wektor şu wektoryň moduly bilen özüne kollinear birlik wektoryň köpeltmek hasylyna deň eken.*

1-nji mesele. k-nyň nähili bahalarynda aşakdaky pikir ýöretmeler dogry:

1) $|k\vec{a}| < |\vec{a}|$; 2) $|k\vec{a}| > \vec{a}$; 3) $|k\vec{a}| = |\vec{a}|$, bu yerda $\vec{a} \neq \vec{0}$?

Çözülişi. 1) $\vec{a} \neq \vec{0}$ -da $|k\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| < 1 \Leftrightarrow -1 < k < 1$;

2) $\vec{a} \neq \vec{0}$ -da $|k\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| > 1 \Leftrightarrow k < -1$ ýa-da $k > 1$;

3) $\vec{a} \neq \vec{0}$ -da $|k\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| = 1 \Leftrightarrow k = -1$ ýa-da $k = 1$.

$\vec{a} \neq \vec{0}$ -da $|\vec{a}| > 0$. Bize mälim bolşy ýaly, deňsizligiň ýa-da deňlemäniň iki bölegini hem položitel sana bölsek, gatnaşyk üýtgemeýär.

Jogaby: 1) $-1 < k < 1$; 2) $k < -1$ ýa-da $k < 1$; 3) $k = -1$ ýa-da $k = 1$ da pikir ýöretmeler dogry bolýar.

2. Wektoryň koordinatalary. Tekizlikde xOy Dekartyň koordinatalar sistemasy, ýagny koordinatalar başlangyjy O nokat, koordinata oklarynyň ugry we masştab birligi – birlik kesim berlen bolsun. Munda tekizlikdäki islendik A nokat özüniň x abssissasyna we y ordinatasyna eýe bolýar: $A(x;\ y)$. Moduly bir birlige eýe bolan hem-de ugry Ox oky boýunça ugrukdyrylan birlik wektory $\vec{i}$ bilen, edil şonuň ýaly, Oy oky boýunça ugrukdyrylan birlik wektory $\vec{j}$ bilen belgileýäris (3-nji a surat).

Tekizlikde koordinatalary $(x;\ y)$ bolan A nokat berlen bolsun. OA_xA üçburçluga garalyň. Bu üçburçlukda $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{A_xA}$. Emma $OA_x = x$, $A_xA = OA_y = y$ bolany üçin $\overrightarrow{OA_x} = x \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{A_xA} = y \cdot \vec{j}$ bolýar. Mundan

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \tag{1}$$

deňligi alarys. Bu (1) deňlige wektoryň *koordinata aňlatmasy* diýilýär.

Diýmek, başlangyjy koordinatalar başlangyjynda, ujy $A(x;\ y)$ nokatda bolan wektory koordinata oklary boýunça ugrukdyrylan $\vec{i}$ we $\vec{j}$ wektorlar arkaly (1) görnüşde ýazmak mümkin eken.

Munda $(\vec{i};\ \vec{j})$ wektorlaryň jübütligi *bazis wektorlar*, x we y sanlar bolsa $\vec{a}$ wektoryň *koordinatalary* diýlip atlandyrylýar.

Eger wektoryň (1) koordinata aňlatmasy mälim bolsa, wektor koordinatalary bilen berlen diýilýär we gysgaça $\vec{a}(x;\ y)$ şekilde ýazylýar:

$$\vec{a}(x; y) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}\,. \tag{2}$$

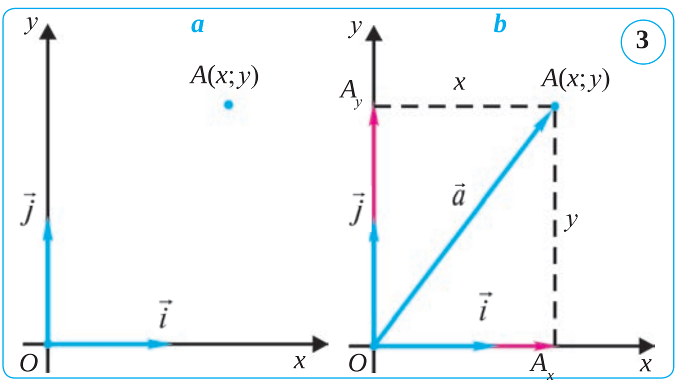
Kesgitleme. *Eger $A_1(x_1;\ y_1)$ we $A_2(x_2;\ y_2)$ bolsa, $x_2 - x_1$ we $y_2 - y_1$ sanlara $\overrightarrow{A_1A_2}$ wektoryň koordinatalary diýilýär* (4-nji surat).

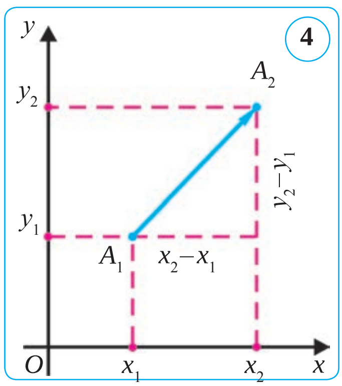
Wektoryň koordinatalary harply belgilenişinden soň ýaýyň içinde ýazylýar: $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$. Käbir ýagdaýlarda koordinatalary berlen wektorlary belgilände $\overline{(x_2 - x_1; y_2 - y_1)}$ ýazuwdan hem peýdalanylýar. Nol wektoryň koordinatalarynyň nola deňdigi aýdyň: $\vec{0}(0;0)$.

Nokatlaryň arasyndaky aralygy tapmagyň formulasyna görä, $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ wektoryň uzynlygy $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ formula boýunça hasaplanýar.

Düzgün. *Wektoryň koordinatalaryny tapmak üçin onuň ahyrynyň (ujunyň) koordinatalaryndan başlangyjynyň degişli koordinatalaryny aýyrmak ýeterli.*

Meselem, $\overrightarrow{OA}$ wektoryň koordinatalary wektor ahyry (ujy) A-nyň koordinatalary bilen doly anyklanýar, ýagny wektoryň ahyrynyň koordinatalaryna deň bolýar.





Eger $A(x; y)$ bolsa, $\overrightarrow{OA}(x; y) = \overline{(x; y)}$ bolýar.

Koordinatalary deň bolan wektorlaryň *häsiýetini* we *nyşanyny* subutsyz getirýäris.

Teorema.

Deň wektorlar degişlilikde deň koordinatalara eýe. We tersine, eger wektorlaryň degişli koordinatalary deň bolsa, wektorlar deň bolýar.

1-nji netije. Eger wektoryň ahyrynyň koordinatalary wektoryň koordinatalary bilen deň bolsa, onda berlen wektoryň başlangyjy koordinatalar başlangyjynda bolýar (3-nji *b* surat).

2-nji netije. Eger $\vec{a}(a_1; a_2)$ wektor bilen onuň ahyry bolan $B(x_2; y_2)$ nokadynyň koordinatalary berlen bolsa, onda wektoryň başlangyjy $A(x_1; y_1)$ nokadyň koordinatalaryny tapmak üçin B nokadyň koordinatalaryndan $\vec{a}(a_1; a_2)$ wektoryň degişli koordinatalaryny aýyrmak ýeterli:

$$x_1 = x_2 - a_1; \quad y_1 = y_2 - a_2. \qquad (1)$$

3-nji netije. Eger $\vec{a}(a_1; a_2)$ wektor bilen onuň başlangyjy bolan $A(x_1; y_1)$ nokadynyň koordinatalary berlen bolsa, onda wektoryň ahyry $B(x_2; y_2)$ nokadyň koordinatalaryny tapmak üçin A nokadyň koordinatalaryna $\vec{a}(a_1; a_2)$ wektoryň degişli koordinatalaryny goşmak ýeterli:

$$x_2 = x_1 + a_1; \quad y_2 = y_1 + a_2. \qquad (2)$$

2-nji mesele. Eger $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$ we $C(4; 1)$ bolsa, $ABCD$ parallelogramyň dördünji depesiniň koordinatasyny tapyň.

Çözülişi. Eger $ABCD$ dörtburçluk parallelogram bolsa, onda $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ bolýar. $(x; y)$– gözlenýän D depesiniň koordinatasy bolsun. $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{DC}$ wektorlaryň koordinatalaryny tapýarys:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{(0-(-2); 4-1)} = \overline{(2; 3)}, \quad \overrightarrow{DC} = \overline{(4-x; 1-y)}.$$

Şeýlelikde, $4 - x = 2$ we $1 - y = 3$, mundan $x = 2$ we $y = -2$.

Jogaby: $D(2; -2)$.

3-nji mesele. $A(-1; 5)$ nokat $\vec{a}(2; -3)$ wektoryň başlangyjy bolsa, bu wektoryň ahyry (ujy) B-niň koordinatalaryny tapyň.

Çözülişi. Berlen maglumatlary soňky (2) gatnaşyklara goýup, gözlenýän koordinatalary tapýarys:

$$x_2 = -1 + 2 = 1, \quad y_2 = 5 + (-3) = 2.$$

Jogaby: $B(1; 2)$.

4-nji mesele. $A(-3; 0)$ we $B(5; -4)$ nokatlar berlen. $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{BA}$ wektorlaryň koordinatalaryny tapyň.

Çözülişi. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(5-(-3); -4-0) = \overrightarrow{AB}(8; -4) = \overline{(8; -4)}$;

2) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\overline{(8; -4)} = \overline{(-8; -(-4))} = \overline{(-8;\ 4)}$. *Jogaby:* (8; −4); (−8; 4).

Ýatlatma! *Käbir wektoryň koordinatalary mälim bolsa, onda oňa garşylykly wektoryň koordinatalaryny ýene gaýtadan hasaplamazdan, berlen wektoryň koordinatalarynyň alamatyny garşylyklysyna üýtgetmek ýeterli.*

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Berlen wektoryň sana köpeltmek hasyly diýip nämä aýdylýar?
2) Wektory sana köpeltmegiň häsiýetlerini aýdyň.
3) Koordinatalar okundaky birlik wektorlar nähili belgilenýär?

2. Uzynlygy 2 cm-e deň bolan $\vec{a}$ wektory çyzyň. $4\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $1{,}5\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$ wektorlary çyzyň.

3. k-nyň nähili bahalarynda $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ we $k\vec{a}$ wektorlar:
1) ugurdaş; 2) garşylykly ugrukdyrylan; 3) deň bolýar?

4. $ABCD$ parallelogramda O – diagonallaryň kesişme nokady, K nokat – CD tarapyň ortasy. $\overrightarrow{OA}$ we $\overrightarrow{AK}$ wektorlary $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ we $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ wektorlar arkaly aňladyň.

5. C nokat AB tarapyň ortasy. 1) $\overrightarrow{AC}$ wektory $\overrightarrow{CB}$ wektor arkaly; 2) $\overrightarrow{AB}$ wektory $\overrightarrow{CB}$ wektor arkaly; 3) $\overrightarrow{AC}$ wektory $\overrightarrow{BA}$ wektor arkaly aňladyň.

6. Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň:

1) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

7. 1) $A(-1;\ 4)$ we $B(3;\ 9)$; 2) $A(2;\ -5)$ we $B(1; -1)$; 3) $A(3;\ 2)$ we $B(3; 2)$ nokatlar berlen. $\overrightarrow{AB}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

8. Eger: 1) $\overrightarrow{AB}(7;\ 24)$; 2) $A(0; -1)$ we $B(3; -5)$; 3) $A(2; -4)$ we $B(2; -1)$ bolsa, $\overrightarrow{AB}$ wektoryň uzynlygyny tapyň.

9. Eger: 1) $A(-2;\ -3)$, $B(-3;\ -1)$; 2) $A(m;\ n)$, $B(-m;\ -n)$ bolsa, $\overrightarrow{BA}$ wektoryň koordinatalary nämä deň bolýar?

10. $A(-1;\ -3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ -1)$ we $D(5;\ 2)$ nokatlar berlen. $\overrightarrow{AC}$ we $\overrightarrow{DB}$ wektorlar deňmi?

11. $\vec{a}(m; 24)$ wektoryň uzynlygy 25-e deň. m-i tapyň.

12. $A(5;\ -3)$ nokat $\vec{a}(-7;\ -8)$ wektoryň başlangyjy bolsa, bu wektoryň ahyry (B)-niň koordinatalaryny tapyň.

13. Eger: 1) $A(-3; 1)$ we $B(5; -5)$; 2) $A(12; 0)$ we $B(0; -5)$ bolsa, $\overrightarrow{AB}$ wektoryň uzynlygyny tapyň.

40. KOORDINATALARY BILEN BERLEN WEKTORLARYŇ ÜSTÜNDE AMALLAR

Koordinatalary bilen berlen wektorlary goşmak, aýyrmak we sana köpeltmek amallary bilen tanyşýarys.

1. Koordinatalary bilen berlen wektorlary goşmak.

Kesgitleme. $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ we $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$ *wektorlaryň jemi* diýip, koordinatalary $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$ bolan $\vec{c}\,(c_1;c_2)$ wektora aýdylýar.

Şeýlelikde,

$$\vec{a}(a_1;\ a_2) + \vec{b}(b_1;\ b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2) \text{ ýa-da } \overline{(a_1;\ a_2)} + \overline{(b_1;\ b_2)} = \overline{(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)}.$$

Islendik $\vec{a}\,(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}\,(x_2;\ y_2)$ *we* $\vec{c}\,(c_1;c_2)$ *wektorlar üçin aşakdaky deňlikler ýerlikli:*

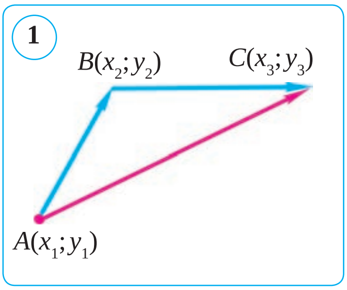
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$; 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Subut etmek üçin deňligiň sag we çep böleklerinde duran wektorlaryň koordinatalarynyň degişli koordinatalaryny deňeşdirmek ýeterli.

Teorema.

***A*, *B*, *C* nokatlar nähili bolsa-da, aşakdaky wektor deňlik ýerliklidir:**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Subudy. $A(x_1;x_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ – berlen nokatlar (1-nji surat). Goşulyjy wektorlary koordinatalar arkaly aňladyp, tapýarys:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1),\ \ \overrightarrow{BC}(x_3 - x_2;\ y_3 - y_2).$$

Kesgitlemä görä, jem wektoryň koordinatalaryny anyklamak üçin $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{BC}$ wektorlaryň degişli koordinatalaryny goşýarys:

$$x_2 - x_1 + x_3 - x_2 = x_3 - x_1,\ \ y_2 - y_1 + y_3 - y_2 = y_3 - y_1.$$

Bu bolsa $\overrightarrow{AC}$ wektoryň koordinatalarydyr: $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1)$.

Deň wektorlar baradaky teorema görä: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Teorema subut edildi.

2-nji suratdan peýdalanyp, ýokardaky deňligiň dogrudygyny subut etmegi özüňize hödürleýäris.

Şeýdip, *wektorlary goşmak üçin olaryň degişli koordinatalaryny goşmak ýeterli eken.*

2. Koordinatalary bilen berlen wektorlary aýyrmak.

Kesgitleme. $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ we $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ *wektorlaryň tapawudy* diýip, şeýle $\vec{c}$ $(c_1; c_2)$ wektora aýdylýar, ýagny onuň $\vec{b}$ wektor bilen jemi $\vec{a}$ wektory berýär: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Mundan $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ wektoryň koordinatalaryny tapýarys:

$$c_1 = a_1 - b_1,\ c_2 = a_2 - b_2.$$

Koordinatalary bilen berlen wektorlary aýyrmak üçin olaryň degişli koordinatalaryny aýyrmak ýeterli, ýagny:

$$\vec{a}\,(a_1;\ a_2) - \vec{b}\,(b_1;\ b_2) = \vec{c}\,(a_1 - b_1;\ \ a_2 - b_2) \text{ ýa-da}$$

$$\overline{(a_1; a_2)} - \overline{(b_1; b_2)} = \overline{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}\,.$$

3. Koordinatalary bilen berlen wektorlary sana köpeltmek.

Kesgitleme. $\vec{a}\,(a_1,\ \ a_2)$ wektoryň k sana köpeltmek hasyly diýip, $\overline{(ka_1;\ ka_2)}$ wektora aýdylýar, ýagny:

$$k\vec{a} = \overline{(ka_1;\ ka_2)}\,.$$

Kesgitlemä görä, $\overline{(a_1;\ a_2)} \cdot k = k\overline{(a_1;\ a_2)}\,.$

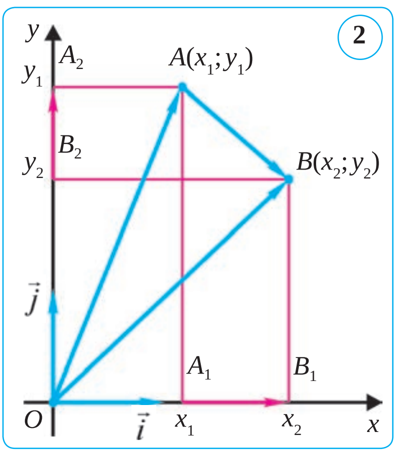
Diýmek, *wektory sana (ýa-da k sany $\vec{a}$ wektora köpeltmek üçin) onuň koordinatalaryny şu sana köpeltmek ýeterli eken.*

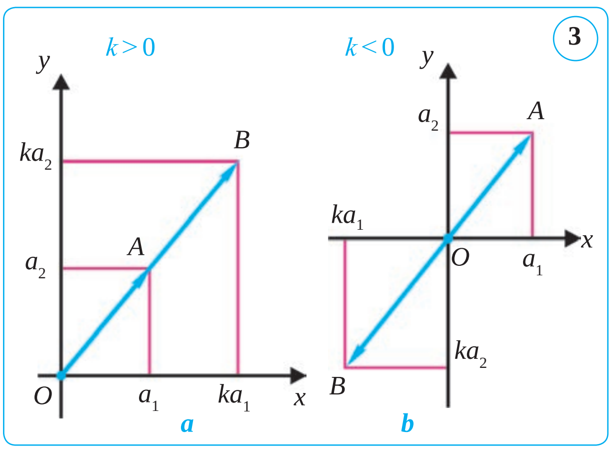
Wektory sana köpeltmegiň öň getirilen kesgitlemesini 3-nji suratdan peýdalanyp barlap görüň. Onuň häsiýetleri koordinatalarda hem ýerlikli bolýar. Şu sebäpli olary getirip geçmedik.

1-nji mesele. $\vec{a}(3;\ 5)$ we $\vec{b}(2;\ 7)$ wektorlaryň jemini tapyň.

Çözülişi. $\vec{a}(3;\,5) + \vec{b}(2;\ 7) = \overline{(3;\ 5)} + \overline{(2;\ 7)} = \overline{(3+2;\ 5+7)} = \overline{(5;\ 12)}\,.$

Diýmek, $\vec{a} + \vec{b}$ wektoryň koordinatalary (5; 12)-ä deň.





2-nji mesele. $\vec{a}(-3;\ 5)$ we $\vec{b}(3;\ -3)$ wektorlar tapawudyny tapyň.

Çözmek: $\vec{a}\,(-3;\ 5) - \vec{b}\,(3;\ -3) = \overline{(-3;\ 5)} - \overline{(3;-3)} = \overline{(-3-3;\ 5-(-3))} = \overline{(-6;\ 8)}$.

Jogaby: $\overline{(-6;\ 8)}$.

3-nji mesele. $\vec{a}(3;\ 5)$ wektora garşylykly $\vec{b}$ wektory tapyň.

Çözülişi. $\vec{a}$ wektora garşylykly $\vec{b}$ wektor aşakdaka deň:

$$\vec{b} = -\vec{a} = -1 \cdot \vec{a} = -1 \cdot \overline{(3;\ 5)} = \overline{(-3;\ -5)}.$$

Jogaby: $\vec{b}(-3;\ -5)$ ýa-da $\vec{b} = 4\vec{a}$.

4-nji mesele. Eger $\vec{a}(-3;\ 4)$ bolsa, $\vec{b} = 4\vec{a}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

Çözülişi. $\vec{b} = 4\vec{a} = 4 \cdot \overline{(-3;\ 4)} = \overline{(4\cdot(-3);\ 4\cdot 4)} = \overline{(-12;\ 16)}$.

Jogaby: $\vec{b}\,(-12; 16)$ ýa-da $(-12; 16)$.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Koordinatalary berlen iki wektor nähili goşulýar?
2) Koordinatalary berlen iki wektor nähili aýrylýar?
3) Koordinatalary berlen wektor sana nähili köpeldilýär?

2. Eger $\vec{a}\,(-4;\ 8)$ we $\vec{b}\,(1;\ -4)$ bolsa, şu wektorlaryň: 1) jeminiň; 2) tapawudynyň koordinatalaryny tapyň.

3. $\vec{a}\,(-2; 6)$ we $\vec{b}\,(-2; 4)$ wektorlar berlen. 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

4. $\vec{a}\,(2;\ 3)$ we $\vec{b}\,(-1;\ 0)$ wektorlar berlen. Wektoryň koordinatalaryny tapyň: 1) $2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - 3\vec{b}$; 3) $2\vec{b} - \vec{a}$.

5. $\vec{a}\,(2; -3)$ we $\vec{b}\,(-2; -3)$ wektorlar berlen. Şu wektoryň koordinatalaryny tapyň: 1) $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$; 2) $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$; 3) $\vec{c} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$.

6. $\vec{a} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$ we $\vec{b} = -2\vec{j}$ wektorlar berlen. Şu wektoryň koordinatalaryny tapyň: 1) $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$; 2) $\vec{c} = -4\vec{a} + 3\vec{b}$; 3) $\vec{c} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$.

7. $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ we $\vec{b} = 3\vec{i}$ wektorlar berlen. 1) $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$; 2) $\vec{c} = 4\vec{a} - \vec{b}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

8. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ we $\vec{b} = 2\vec{j}$ wektorlar berlen. 1) $\vec{c} = -\vec{a} - 2\vec{b}$; 2) $\vec{c} = \vec{a} - 5\vec{b}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

9. $\vec{a} = -3\vec{i}$ we $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ wektorlar berlen. 1) $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

41. WEKTORYŇ FIZIKI WE GEOMETRIK DÜŞÜNDIRIŞLERI. GEOMETRIK MESELELER ÇÖZMEGIŇ WEKTOR USULY

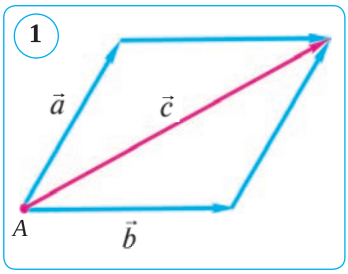
1. Wektoryň fiziki we geometrik düşündirişleri.

1. Jisime täsir edýän güýjüň (goýlan güýjüň) ugry täsir ediş ugry bilen birmeňzeş, absolýut bahasy bolsa güýjüň mukdaryna proporsional wektor bilen şekillendirmek amatly. Amalyýetden görnüşi ýaly, güýçleri şeýle şekillendirmek usulynda jisime bir nokatda täsir edýän iki ýa-da birnäçe güýjüň deň täsir edijisi şu güýçlere laýyk wektorlaryň jemi bilen şekillendirilýär. 1-nji suratda jisime A nokatda $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar bilen şekillendirilen iki güýç täsir edýär. Bu güýçleriň deň täsir edijisi $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ wektor bilen şekillendirilýär.

Güýji berlen iki ugurda täsir ediji güýçleriň jemi şekilinde şekillendirmäge *güýji ugurlar boýunça ýaýmak (bölmek)* diýilýär.

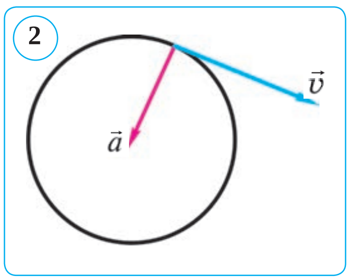
2. Fizikada jisimiň *öňe gitme hereketi* diýip şeýle herekete aýdylýar, ýagny munda jisimiň ähli nokatlary birmeňzeş wagt aralygynda, birmeňzeş ugurda birmeňzeş aralyga süýşýär. Şeýlelikde, fizikadaky *süýşme wektory* dersligimizde kabul edilen wektor eken. Tapawudy, geometriýa dersliginde diňe tekizlikdäki wektorlar barada gürrüň edilýänliginde, fizikada bolsa başdan başlap giňişlikdäki wektorlar, olaryň häsiýetleri barada hem pikir ýöredilýär.

3. Fizikada «wektor» sözi esli giň manyda ulanylýar. Meselem, tizlik wektor diýlip aýdylýar. Emma geometrik wektoryň uzynlygy metrlerde, tizligiň absolýut bahasy bolsa sekundyna metrlerde (m/s) ölçenişiniň özünde tizligiň geometriýada kabul edilen manydaky wektor dälligi görnüp dur. Biz geometriýada tizligi wektor däl, eýsem *wektor ululyk* diýýäris. Umuman, wektor ululyklar, özleriniň modulyndan daşary, ugry bilen anyklanýar. Mälim masştab saýlap alnanda wektor ululyklar geometrik wektorlar bilen şekillendirilýär.



Munda wektor ululyklary goşmakda olary şekillendirýän geometrik wektorlary goşmak, wektor ululyklary sanlara köpeltmekde bolsa olary şekillendirýän geometrik wektorlary şol sanlara köpeltmek laýyk gelýär.

Bir mysala garalyň. 2-nji suratda $\vec{v}$ wektor aýlanma hereketniň tizligini, $\vec{a}$ wektor bolsa tizlenmäni aňlatmagy mümkin. Ýöne bu wektorlary fizika nukdaý nazaryndan goşmak mana eýe däl.



Şeýle bolsa-da, fizikada tizlik ýa-da tizlenmeler gönüden-göni wektorlar diýlip aýdylýar.

Gürrüň näme barada edilýändigi anyk göz öňüne getirilse, şeýle söz azatlygy umumylyga hiç bir zyýan ýetirmeýär. Edil şuňa meňzeş biz öz wagtynda üçburçlugyň tarapynyň uzynlygyny, gysgalyk üçin, ýönekeýje edip onuň tarapy diýip aýtmaga ylalaşypdyk we başgalar.

2. Geometrik meseleleri çözmegiň wektor usuly.

Geometrik meseleleri çözende we teoremalary subut edende wektorlardan giň peýdalanylýar.

1-nji mesele. C nokat AB kesimiň ortasy, O nokat bolsa tekizligiň islendik nokady. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ bolýandygyny subut ediň (3-nji *a* surat).

Çözülişi. 1-nji usul. Üçburçlugyň düzgünine görä:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \quad \text{we} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}.$$

Bu iki deňligi goşup, aşakdaka eýe bolarys:

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}).$$

C nokat AB kesimiň ortasy bolanlygyndan, onda $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, çünki garşylykly wektorlaryň jemi nol wektora deň.

Şeýlelikde, aşakdaka eýe bolarys:

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \text{ýa-da} \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

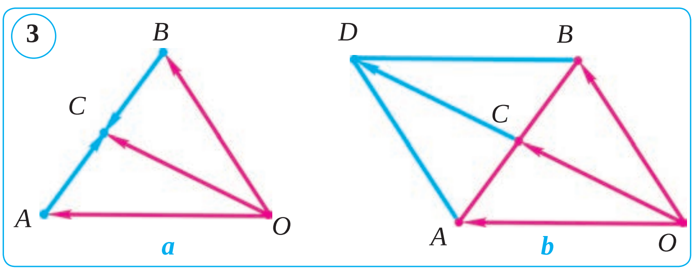
2-nji usul. OAB üçburçlugy parallelograma doldurýarys (3-nji *b* surat).

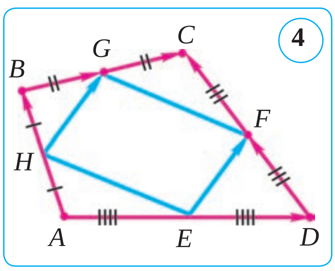
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ (parallelogramyň düzgünine görä). Parallelogramyň diagonallary kesişme nokadynda deň ikä bölünýär, şonuň üçin $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$ we $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC}$.

Diýmek, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$. Mundan: $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

2-nji mesele. Islendik $ABCD$ dörtburçlugyň taraplarynyň ortalary parallelogramyň depeleri bolýandygyny subut ediň.

Çözülişi. E, F, G, H – degişlilikde AB, BC, CD we DA taraplaryň ortalary bolsun (4-nji surat). Parallelogramyň 3-nji nyşanyna görä, meselem, EF we HG kesimleriň uzynlygynyň deňligini we parallelligini subut etmek ýeterli. Wektoryň dilinde, bu $\overrightarrow{EF}$ we $\overrightarrow{HG}$ wektorlaryň deňligini subut etmekden ybaratdyr.





Hakykatdan hem,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \quad \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}).$$

Mundan daşary, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ bolýandygy aýdyň. Şonuň üçin, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ Mundan, EF we HG kesimleriň uzynlyk boýunça deňligi we paralleldigi gelip çykýar. Diýmek, islendik $ABCD$ dörtburçlugyň taraplarynyň ortalary parallelogramyň depeleri bolýar. Şony subut etmek talap edilipdi.

Getirilen subutlardan görnüşi ýaly, meseleleri we teoremalary wektor usuly bilen çözmek algebraik meseleleri çözmäge meňzeýär. Bu meseläni çözmegiň bir tarapydyr we ol üç basgançakdan ybarat.

Birinji basgançak. Mesele (teorema) şertini wektor görnüşinde ýazmak we amatly wektorlary girizmek (meňzeşlik – nämälimleri girizmek we algebraik deňlemäni düzmek).

Ikinji basgançak. Wektor algebrasynyň serişdeleri arkaly meseläniň şerti şeýle çalşyrylýar, ýagny meseläni wektor görnüşinde çözmek mümkinçiligi bolsun (meňzeşlik – algebraik deňlemäni çözmek).

Üçünji basgançak. Alnan wektor gatnaşyk deslapky adalgalarda düşündirilýär (meňzeşlik – deňlemäni algebraik çözenden soň jogaby ýazmak).

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. Depeleri $A(3;\ 1)$, $B(1;\ 3)$ we $C(0;\ 2)$ bolan üçburçluk CC_1 medianasynyň uzynlygyny tapyň.

2. K nokat $ABCD$ parallelogramyň AD tarapynyň ortasy. $\overrightarrow{KC}$ wektory $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AD}$ wektorlar arkaly aňladyň.

3. $A(2;\ 4)$, $B(3;\ 6)$ we $C(6;\ 14)$ nokatlar berlen. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

4. $ABCD$ kwadratyň iki garşylykly depesiniň koordinatalary berlen: $A(0;4)$ we $C(6;0)$. Galan iki depesiniň koordinatalaryny tapyň.

5. $A(-2;3)$ nokat $\vec{a}(-3;8)$ wektoryň başlangyjy bolsa, bu wektoryň ahyry ($B(x;y)$)-iň koordinatalaryny tapyň.

6. Trapesiýanyň orta çyzygy esaslaryna parallel we olaryň uzynlygynyň ýarysyna deň bolýandygyny wektoryň kömeginde subut ediň.

7. $\vec{a}(1;\ 3)$, $\vec{b}(-2;4)$, $\vec{c}(-1;\ -3)$, $\vec{d}(-4;\ 4)$, $\vec{p}(3;\ 9)$, $\vec{q}(-1;\ 2)$ wektorlar berlen. Şolardan: 1) ugurdaş wektorlary; 2) bir jübüt garşylykly ugrukdyrylan wektorlary tapyň.

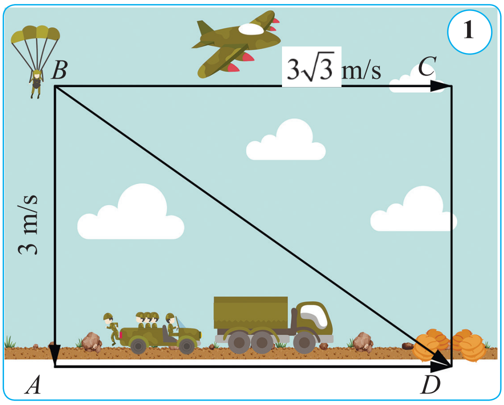
8. $ABCD$ rombda N nokat CD tarapyň ortasy. $\overrightarrow{AN}$ wektory $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AD}$ wektorlar arkaly aňladyň.

9. $ABCD$ – parallelogram we şu parallelogramdan daşarda ýatýan islendik O nokat berlen. $\overrightarrow{OD}$ wektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ we $\overrightarrow{OC}$ wektorlar arkaly aňladyň.

42. AMALY GÖNÜKME WE ULANYLYŞY

AMALY KOMPETENSIÝANY ÖSDÜRIJI GOŞMAÇA MATERIALLAR

1. Wektorlaryň amaly ulanylyşyna degişli meseleler.



1-nji mesele. Paraşýutçy ýere 3 m/s tizlik bilen düşýär, şemal bolsa ony $3\sqrt{3}$ m/s tezlik bilen sürüp äkidýär. Bu şertde paraşýutçy ýere nähili burç astynda düşer (1-nji surat)?

Çözülişi. Paraşýutçy B nokatda bolsun. Agyrlyk güýji $\overrightarrow{BA}$ we şemalyň güýji $\overrightarrow{BC}$ -niň deň täsir edijisi $\overrightarrow{BD}$ bolýar we $ABCD$ – gönüburçluk, AB – wertikal. Diýmek, $\angle ADB$ burçuň bahasyny tapmaly. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ we $BC=AD$ ($ABCD$ – gönüburçluk, $\angle A=90°$). Pifagoryň teoremasyna görä: $BD^2=AD^2+AB^2$, diýmek:

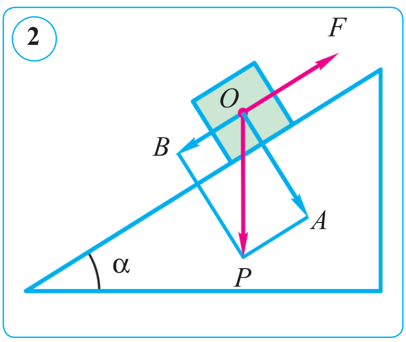
$$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6 \text{ (cm)}.$$

Şeýdip, ABD üçburçlukda 3 cm-lik AB katet 6 cm-lik BD gipotenuza garanda iki esse kiçi eken. Diýmek, $AB=0{,}5BD$ bolany üçin gönüburçly üçburçlukda 30°-ly burçuň garşysyndaky katetiň häsiýetine görä, $\angle ADB=30°$ ýa-da $\sin\angle ADB=\frac{AB}{BD}=0{,}5$, mundan $\angle ADB=30°$ gelip çykýar.

Jogaby: $\angle ADB=30°$.

2-nji mesele. Paraşýutçy ýere 4 m/s tizlik bilen düşýär, şemal bolsa ony $4\sqrt{3}$ m/s tezlik bilen sürüp äkidýär. Şeýle şertde paraşýutçy ýere nähili burç astynda düşer (1-nji surat g.)? Meseläni özbaşdak çözüň.

3-nji mesele. Agyrlygy P bolan ýük ýapgyt tekizlikde typyp pese gaçmaz ýaly ony nähili F güýç bilen saklap durmaly (2-nji surat)?



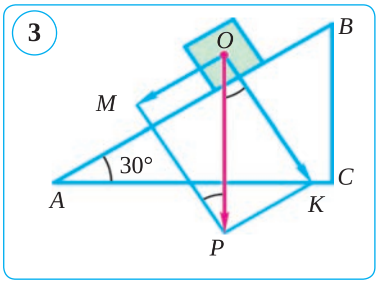
Çözülişi. Ýüküň O agyrlyk merkezine $\vec{P}$ güýç goýlan bolsun. $\vec{P}$ wektory özara perpendikulýar iki ugur boýunça 2-nji suratda görkezilişi ýaly goýýarys. Ýapgyt tekizlige perpendikulýar bolan $\overrightarrow{OA}$ güýç ýüküň süýşmegine ýol bermeýär. Ýüki saklap durýan $\vec{F}$ güýç oňa garşylykly ugrukdyrylan $\overrightarrow{OB}$ güýje mukdar taýdan deň bolmaly. Mundan aşakdaky netijä gelýäris: $F=P\sin\alpha$.

4-nji mesele. $P = 50$ N ýük ýapgyt tekizlikde ýatyr. Eger tekizligiň gorizonta görä gyşarma burçy 30°-a deň bolsa, typma güýji we basyş güýjüni tapyň.

Berlen: $P = 50$ N, $\angle A = 30°$. *Tapmaly:* $F_{\text{gyşar}}$, $F_{\text{basyş}}$.

Çözülişi. 1) $\vec{P}$ güýji iki: typma güýjüniň ugruna parallel hem-de basyş güýji ýapgyt tekizlige perpendikulýar güýçler boýunça ýaýýarys.

2) Parallelogramy gurýarys; $\overrightarrow{OP}$ wektor onuň diagonaly; $OM \parallel AB$, $OK \perp AB$, $PK \parallel AB$, $PM \perp AB$, $\overrightarrow{OM} = \vec{F}_{\text{gyşar}}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{F}_{\text{basyş}}$ -y geçirýäris (3-nji surat).



3) $\angle OPM = \angle A = 30°$ ($OP \perp AC$, $PM \perp AB$).

4) Gönüburçly OPM üçburçlukdan:

$OM = 0{,}5OP = 0{,}5 \cdot 50 = 25$; $F_{\text{gyşar.}} = 25$ N.

5) Gönüburçly OPK üçburçlukdan Pifagoryň teoremasyna görä:

$$OK = \sqrt{OP^2 - PK^2} = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{50^2 - 25^2} = \sqrt{25^2 \cdot (4-1)} = 25\sqrt{3} \approx 43,$$

ýagny $F_{\text{basyş.}} \approx 43$ N. *Jogaby:* $F_{\text{gyşar}} = 25$ N, $F_{\text{basyş}} \approx 43$ N.

5-nji mesele. Tejribeden görnüşi ýaly, eger A jisime iki a we b güýç täsir edýän bolsa, onda olaryň täsiri bir c güýjüň täsirine deň bolup, bu c güýç a we b kesimlerden gurlan parallelogramyň diagonaly bilen şekillendirilýär. Deň täsir ediji güýç *«parallelogramyň düzgüni»* boýunça tapylýar.

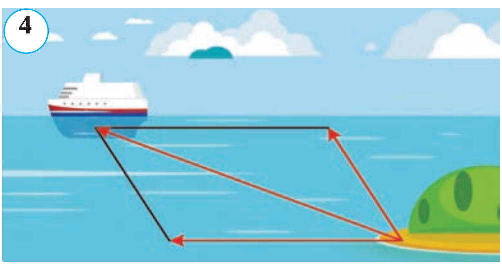
Meselem, ýüzüp barýan gämide (4-nji surat) bolan ýa-da derýany gaýykda kesip geçýän (5-nji surat) adama kese kesik we akym boýunça ugrukdyrylan iki güýç täsir edýär. Şu güýçleri suratda bellik ediň.

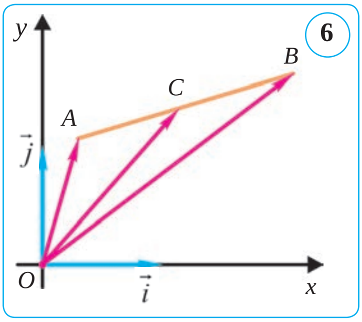
Şu meselä meňzeş mesele düzüň we degişli suratlarda açyp görkeziň.

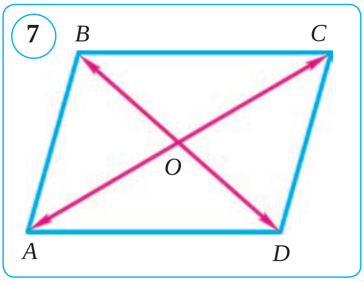
2. Sistemanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapmak.

6-njy mesele. Kesimi berlen gatnaşykda bölmek (koordinata görnüşinde).

Eger $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ bolsa, C nokat AB kesimi λ gatnaşykda bölýär (6-njy surat). Eger kesimiň ahyrlarynyň koordinatalary $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ mälim bolsa, C nokadyň x, y koordinatalaryny tapyň.







Çözülişi. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ we $\overrightarrow{OB}$ wektorlary guryarys. $\overrightarrow{OA}\,(x_1;\ y_1)$, $\overrightarrow{OC}\ (x;\ y)$, $\overrightarrow{OB}\,(x_2;\ y_2)$, $\overrightarrow{AC}$ $(x-x_1;\ y-y_1)$, $\overrightarrow{CB}\,(x_2-x;\ y_2-y)$ we wektory λ sana köpeldende onuň koordinatalary λ sana köpeldilýändigini hasaba alyp, aşakdaka eýe bolarys:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\,(x - x_1;\ y - y_1) =$$

$$= \lambda\overrightarrow{CB}\,(x_2 - x;\ y_2 - y) \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \end{cases}$$

Diýmek, $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

7-nji mesele. $M_1(x_1;\ y_1)$ we $M_2(x_2;\ y_2)$ nokatlara degişlilikde m_1 we m_2 -ä deň ýükler goýlan. Bu massalar sistemasynyň agyrlyk merkeziniň (C nokat) koordinatalaryny tapyň.

Çözülişi. Agyrlyk merkezi $C - M_1M_2$ kesimde hem-de M_1 we M_2 nokatlara goýlan m_1 we m_2 massalardan ters proporsional aralykda ýatýar, ýagny iki maddy nokatlar sistemasynyň agyrlyk merkezi bolan C nokat M_1M_2 kesimi $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1}$ gatnaşykda bölýär. λ -nyň bahasyny 5-nji meseledäki formulalara goýup, şekil çalşyrmalardan soň C nokadyň koordinatalaryny tapýarys: $x_C = \dfrac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$, $y_C = \dfrac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}$.

3. Wektor gatnaşygy subut etmäge degişli mesele.

8-nji mesele. $ABCD$ – parallelogram we onuň diagonallary kesişen O nokat berlen. Subut ediň: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Berlen: $ABCD$ – parallelogram, O – AC we BD diagonallaryň kesişme nokady, $AO = OC$, $BO = OD$ (7-nji surat).

Subut etmeli: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Subudy. Bu wektor deňligi subut etmegiň bir näçe usulyny getirýäris.

Tapawudyň nol wektora deňligini görkezýäris: 1)

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

Şekil çalşyrma prosesinde jemden jemi aýyrmak düzgüninden, toparlamak kanunyndan, üçburçlugyň düzgüninden, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (parallelogramyň garşylykly taraplary we ugurdaş wektorlar), nol wektoryň kesgitlemelerinden peýdalanyldy.

2) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}.$

Şekil almashtirishda jemdan jemni aýyrmak we uçburckak qoidalari, guruhlash kanuny, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ekani we nol wektor ta’riflaridan peýdalanyldy.

43–44. 3-NJI BARLAG IŞI. ÝALŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK

1. $A(-2;3)$ we $B(4;0)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzüň.
2. Eger $C(4;9)$ we $R=5$ bolsa, merkezi C nokatda, radiusy R bolan töweregiň deňlemesini düzüň.
3. $\vec{a}(1;\ 0)$, $\vec{b}(1;\ 2)$ we $\vec{c}(1;\ 3)$ wektorlar berlen. $\vec{a}-\vec{b}$ we $\vec{b}+\vec{c}$ wektorlaryň koordinatalaryny tapyň.
4. $\vec{c}(-1;\ 0)$ we $\vec{d}(1;\ 2)$ wektorlar berlen. $2\vec{c}+3\vec{d}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

3-nji test

Özüňizi synap görüň!

1. $A(0;\ -1)$, $B(1;\ 0)$ nokatlardan geçýän göni çyzyk haýsy çärýeklerde ýerleşen?

A) III, IV, I; B) I, II, III; D) II, III, IV; E) II, IV.

2. $A(-2;\ 0)$, $B(-2;\ 2)$ nokatlardan geçýän göni çyzyk haýsy çärýeklerde ýatýar?

A) I, II, III; B) II, III; D) II, IV; E) III, IV, I.

3. Depeleri $A(-4;\ 0)$, $B(-4;\ 4)$ nokatlarda bolan AB kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapyň.

A) $(-2;\ 0)$; B) $(0;\ 2)$; D) $(2;\ -4)$; E) $(-4;\ 2)$.

4. Depeleri $A(-2;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(2;\ 0)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň AC tarapynyň ortasynyň koordinatalaryny tapyň.

A) $(-1;\ 1)$; B) $(1;\ 0)$; D) $(0;\ 0)$; E) $(0;\ 1)$.

5. $\vec{a}(-3;\ 1)$ we $\vec{b}(5;-6)$ wektorlar berlen. $\vec{c}=\vec{b}-3\vec{a}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

A) $(14;\ -9)$; B) $(4;\ -3)$; D) $(14;\ -3)$; E) $(9;\ 3)$.

6. $A(-3;\ 0)$ we $B(-5;\ 4)$ nokatlar berlen. $\overrightarrow{BA}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

A) $(-8;\ -4)$; B) $(-8;\ 4)$; D) $(2;\ -4)$; E) $(8;\ -4)$.

Iňlis dilini öwrenýäris!

Töweregiň deňlemesi – circle equation
Göni çyzyk deňlemesi – straight-line equation
Kollinear wektorlar – collinear wectors
Wektor uzynlygy – wector length
Deň wektorlar – equal wectors
Skalýar – scalar
Garşylykly wektorlar – opposite wectors
Birlik wektor – onyt wector
Ugurdaş – equiwelent

Taryhy maglumatlar

Rene Dekart
(1596–1650)

1. Göni burçly koordinatalar sistemasyny fransuz alymy Rene Dekart ylma girizipdir. Gönüburçly koordinatalar sistemasy käte Dekartyň koordinatalar sistemasy hem diýilýär.

Rene Dekart (1596–1650) – fransuz filosofy, matematigi, fizigi, fiziology. La-Fleş iezuit kolležinde tälim alypdyr, grek we latyn dillerini, matematikany we filosofiýani öwrenipdir. Dekartyň filosofiýasy onuň matematikasy, kosmogoniýasy, fizikasy bilen bagly. Matematikada analitik geometriýany esaslandyryjylaryndan biri (gönüburçly koordinatalar sistemasy onuň ady bilen atlandyrylýar). Dekart XVII–XVIII asyrlaryň filosofiýasynyň we ylmynyň ösüşine saldamly goşant goşupdyr.

XVII asyrda Dekartyň işleri sebäpli bütin matematika, hususan-da geometriýany öwrülişikli gaýtadan guran koordinatalar metody emele geldi. Algebraik deňlemeleri geometrik grafik arkaly düşündirmek we geometrik meseleleriň çözüwini analitik formulalar, deňlemeler sistemalarynyň kömeginde gözlemek mümkinçiligi peýda boldy.

Biziň günlerimize çenli saklanyp gelen amatly belgileriň girizilmeginde, ýagny nämälimleri belgilemek üçin x, y, z; koeffisiýentleri belgilemek üçin a, b, c latyn harplaryny girizmekde, derejeleri x^2, y^2, z^2 görnüşde belgilemekde-de Dekartyň hyzmatlari uly.

2. Wektor düşünjesi XIX asyryň ortalarynda bir wagtda birnäçe matematigiň işlerinde duşýar. Tekizlikde wektorlar bilen iş salyşmagy ilkinji gezek 1835-nji ýylda italiýan alymy **Belliwitis** (1803–1880) başlap berdi. Mundan daşary, **K. Gaussyň** (1777–1855) 1831-nji ýylda «Bikwadratik deňeşdirme nazaryýeti» atly eserinde hem-de **Ý. Argan** (1768–1822) we **K. Wesseliň** (1745–1818) kompleks sanlary geometrik şekillendirmge degişli işlerinde wektor düşünjesi nygtalypdyr. Ahyrynda, **W. Gamiltonyň** (1805–1865) we **R. Grassmanyň** (1854–1901) wektorlaryň üstünde amallary ýerine ýetirmäge degişli işleri emele geldi. Gamilton 1845-nji ýylda birinji bolup wektor we skalýar ululyklaryň tapawudyny düşündirdi. Gamiltonyň şol işinde «skalýar», «wektor» adalgalary ýüze çykdy.

Gamilton «wektor» adalgasyny latynça *wehere* – «daşamak», «süýremek» sözünden emele getiripdir, *wektor* – «daşaýjy», «eltiji» diýmekdir. 1806-njy ýylda Argan ugrukdyrylan kesimleri harpyň üstüne çyzyk goýmak bilen belgiläpdir. Wektorlaryň başlangyjyny we ahyryny görkezmek üçin **A. Mýobius** (1790–1868) ony AB görnüşde belgiläpdir. Grassman wektorlary «kesimler» diýip atlandyrypdyr, ol koordinata oklary boýunça ugrukdyrylan e_1, e_2 birlik wektorlary we wektorlary $x_1e_1+x_2e_2$ görnüşinde şekillendirmegi hödürläpdir. Gamilton we **J. Gibss** (1839–1903) wektorlary grekçe harplar bilen belgiläpdir. Wektorlary gara harplar bilen belgilemegi 1891-nji ýylda **A. Hewisaýd** (1850–1925) teklip edipdir. Wektoryň uzynlygyny $|AB|$ görnüşde belgilemegi bolsa 1905-nji ýylda **R. Gans** (1880–1954) girizipdir.

IV BAP
MEÝDAN

9- §. KÖPBURÇLUGYŇ MEÝDANY

45. MEÝDAN BARADA DÜŞÜNJE

1. Meýdan barada düşünje.

Şekilleriň meýdanlaryny anyklamak meselesi örän gadym zamanlara baryp direlýär. Bu meseläniň emele gelmegini adamlaryň amaly işi talap edipdir. Her birimiz gündelik durmuşymyzda meýdan barada birneme düşünjä eýediris. Meselem, Siz gönüburçluk (aýdaly, özüňiz ýaşaýan otag) we kwadratyň meýdanyny tapmagy bilýärsiňiz. Biz indi şekilleriň meýdany baradaky düşünjeleri anyklamagy we olary ölçemek usullaryny tapmak bilen meşgullanarys.

Eger geometrik şekili çäkli sandaky üçburçluklara bölmek mümkin bolsa, bu şekile *ýönekeý şekil* diýilýär.

Biz üçburçluk diýip, tekizligiň üçburçluk bilen araçäklenen çäkli bölegine aýdýarys. Güberçek köpburçluk özüniň käbir depesinden çykan diagonallary bilen üçburçluklara bölünýär (1-nji *a* surat).

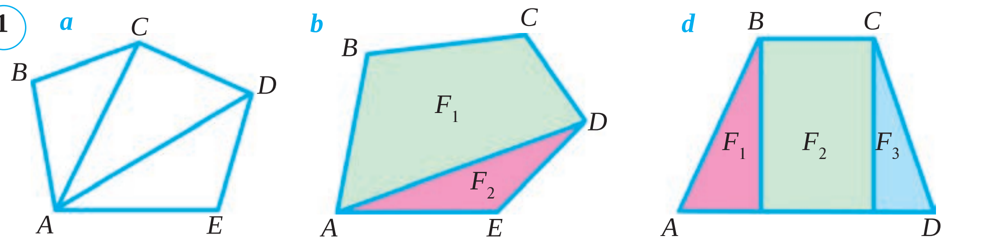
Meýdan položitel mukdar (ululyk) bolup, onuň san bahasy aşakdaky esasy häsiýetlere (aksiomalara) eýe.

1-nji häsiýet. *Deň şekiller deň meýdanlara eýe.*

2-nji häsiýet. *Eger köpburçluk bir-birini örtmeýän köpburçluklardan düzülen bolsa, onda onuň meýdany bu köpburçluklaryň meýdanlarynyň jemine deň bolýar.*

F köpburçluk bir-birini örtmeýän köpburçluklardan düzülen diýeni: 1) F bu köpburçluklaryň jeminden ybaratlygy we 2) köpburçluklardan hiç bir ikisi umumy içki nokatlara eýe dälligini aňladýar. Meselem, 1-nji *b* we 1-nji *d* surat-

1



$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2}$ $\qquad$ $S_{ABCD} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

larda bir-birini örtmeýän köpburçluklardan düzülen köpburçluklar şekillendirilen.

1-nji we 2-nji häsiýetlere meýdanlaryň *esasy häsiýetleri* diýilýär.

2. Meýdany ölçemek. Meýdany ölçemek kesimleri ölçemek ýaly ölçeg birligi üçin kabul edilen şekiliň meýdany bilen berlen şekili deňeşdirmäge esaslanan. Netijede berlen şekiliň *meýdanynyň sanly bahasyny* alýarys.

Meýdan – tekiz şekilleri häsiýetlendirýän esasy matematiki mukdarlardan biri. Ýönekeý ýagdaýlarda meýdan tekiz şekili dolduryjy birlik kwadratlar – tarapy uzynlyk birligine deň bolan kwadratlaryň sany bilen ölçenýär.

3-nji häsiýet. *Tarapy bir uzynlyk ölçeg birligine deň bolan kwadratyň meýdany bire deň.*

Şeýlelikde, aşakdaky teorema ýerlikli bolýar.

Teorema.

Tarapynyň uzynlygy a-ga deň bolan kwadratyň meýdany a^2 -a deň.

Adatda, meýdan latynça baş harp S bilen belgilenýär. Diýmek, kwadrat üçin

$$S = a^2$$

formula ýerlikli bolup, uzynlyk ölçeg birligi kwadraty bilen bile aýdylýar.

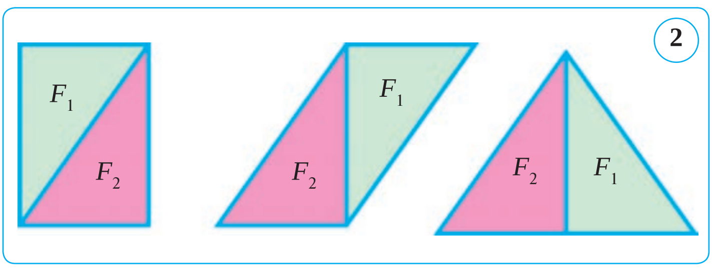
3. Deňdeş şekiller.

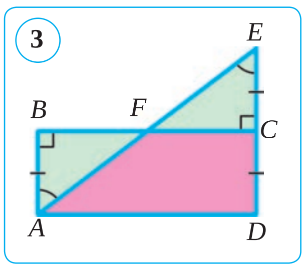
Kesgitleme. *Eger iki köpburçlukdan birini birnäçe bölege bölüp, bu bölekleri başgaça ýerleşdirende ikinji köpburçluk emele gelse, bu köpburçluklara **deň düzülenler** diýilýär.*

Eger iki köpburçlugyň meýdanlary deň bolsa, olar ***deňdeş köpburçluklar*** diýlip atlandyrylýar. 2-nji suratdaky köpburçluklar deňdeşdir. Deň köpburçluklar deňdeşdir (1-nji häsiýet), emma ters tassyklama, umuman aýdanda, dogry bolmaýar: eger iki şekil deňdeş bolsa, mundan olaryň deňligi gelip çykmaýar.

Mesele. $ABCD$ gönüburçlugyň DC tarapynyň dowamynda C depesine görä D nokada simmetrik E nokat belgilenen (3-nji surat). ADE üçburçlugyň meýdanynyň $ABCD$ gönüburçlugyň meýdanyna deňdigini subut ediň.

Subudy. AE we BC taraplar F nokatda kesişsin. ABF we ECF üçburçluklar deň (katetine we ýiti burçuna görä: $AB = EC$, $\angle BAF = \angle E$). Netijede ADE üçburçluk $AFCD$ trapesiýa bilen ECF üçburçlukdan, $ABCD$ gönüburçluk bol-





sa şol *AFCD* trapesiýa bilen *ECF* -e deň bolan *ABF* üçburçlukdan düzülen, diýmek, *ADE* üçburçluk bilen *ABCD* gönüburçluk deň düzülendir (ýagny deňdeşdir). Şony subut etmek talap edilipdi.

Meýdan ululyk bolany üçin ululyklaryň ähli häsiýetlerine eýe bolýar. Olary bir görnüşdäki ululyklardaky ýaly goşmak we položitel sana köpeltmek mümkin. Iki meýdany goşmakda we sana köpeltmekde meýdan emele gelýär.

Amalyýetde meýdany bar bolan islendik şekiliň meýdanyny ölçemek ýa-da hasaplamak mümkin. Köplenç dürli meýdanlary anyklamakda formulalardan peýdalanylýar. Käbir şekilleriň meýdanlaryny hasaplamagyň formulalaryny çykarmak bilen indiki temalarda meşgullanarys.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Ýönekeý şekil diýip nämä aýdylýar?
2) Şekiliň meýdany diýende nämäni düşünýärsiňiz?
3) Meýdanyň esasy häsiýetlerini beýan ediň.
4) Nähili iki köpburçluk deň düzülen diýilýär?
5) Deňdeş şekiller näme? Deňdeş şekiller deňmi?

2. Kwadratyň tarapy: 1) 1,3 cm; 2) 0,15 dm; 3) 2,5 cm; 4) 18 dm; 5) 2,5 m. Kwadratyň meýdanyny tapyň.

3. Kwadratyň meýdany: 1) 16 dm^2; 2) 144 cm^2; 3) 121 cm^2; 4) 49 mm^2; 5) 196 cm^2; 6) 0,64 dm^2; 7) 6,25 m^2. Kwadratyň tarapyny tapyň.

4. Perimetri taraplary 54 cm we 42 cm-e deň bolan gönüburçlugyň perimetrine deň bolan kwadratyň meýdanyny tapyň.

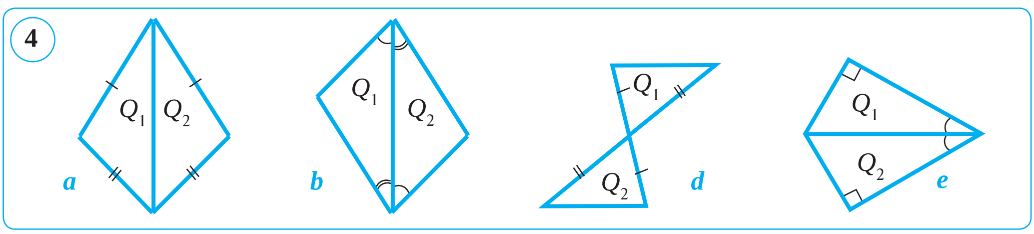
5. 4-nji suratdaky Q_1 we Q_2 üçburçluklar deňdeş. Şony subut ediň.

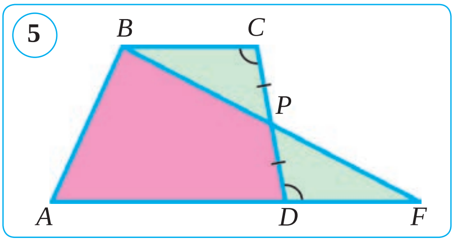
6. Kwadratyň meýdany 36 cm^2. Eger onuň hemme tarapyny:
1) iki esse uzaldylsa; 2) üç esse kemeldilse;
3) 2 cm-e uzaldylsa, onuň meýdany nähili üýtgär?

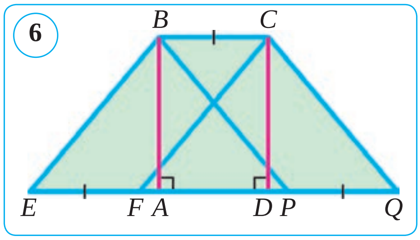
Nusga. Meýdany 81 cm^2 -a deň bolan kwadratyň hemme taraplary 1 cm-e gysgaldylsa, onuň meýdany nähili üýtgär?

Çözülişi. Berlen kwadratyň tarapy $a=9$ cm. Täze kwadratyň tarapy $a_1=a-1=9-1=8$ (cm). Onda $S_y=8^2=64$ (cm^2). Berlen kwadrat taraplary 1 cm-e kemeldilse, onuň meýdany

$S-S_{\text{ýa.}}=81-64=17$ (cm^2), -a kemelýär. *Jogaby:* 17 cm^2 -a kemelýär.







7. Deň düzülen iki gönüburçlukdan: 1) bu gönüburçluklaryň deňligi; 2) olaryň deňdeşligi gelip çykarmy?

8. Eger kwadratyň hemme tarapy: 1) n esse uzaldylsa; 2) k esse kemeldilse, onuň meýdany nähili üýtgär?

9. (*Amaly iş.*) Käbir kwadrat çyzyň. Tarapy şu kwadratyň tarapyndan 2 esse uly bolan ikinji kwadraty çyzyň. Ikinji kwadratyň meýdany birinji kwadratyň meýdanyndan näçe esse uly?

10. AD – $ABCD$ trapesiýanyň uly esasy bolsun. CD tarapyň ortasy P nokat we B depesi arkaly AD şöhläni F nokatda kesiji göni çyzyk geçirilen (5-nji surat). $S_{ABCD}=S_{ABF}$ bolýandygyny subut ediň.

Subudy. 1) $\triangle BCP=\triangle FDP$ – tarapy we oňa sepleşýän iki burçuna görä ($CP=$... – ..., $\angle BCP=\angle$...–... we ... parallel göni çyzyklary ... kesiji kesende emele gelen ... burçlar, $\angle BPC=\angle$...– ... bolany üçin) deň, ýagny $S_{BCP}=$... .

2) $S_{ABCD}=S_{ABPD}+$..., $S_{ADP}=S_{ABPD}+$..., şonuň üçin $S_{ABCD}=$... .

Nokatlaryň ýerine degişli jogaplary ýazyň.

11. Meýdany: 1) 2,25 cm^2; 2) 0,81 dm^2; 3) 289 mm^2; 4) 5,76 m^2; 5) 400 dm^2 -a deň bolan kwadratyň perimetrini tapyň.

12. 6-njy suratda şekillendirilen köpburçluklardan deňdeşlerini tapyň.

13. Özbegistanyň meýdany 448,9 müň km^2. Bu meýdanyň takmynan 80%-ini düzlük tutýar. Meýdanyň düzlük bölegi näçe müň kwadrat kilometr?

Şuny bilmek peýdaly!

- **S** – latynça «***superfacies***» sözünden alnan bolup, bu söz «***üst***» manysyny aňladýar.
- Kontinentleriň, döwletleriň çäkleri kwadrat kilometrlerde, uly ekin meýdanlarynyň meýdanlary gektarlarda, onçakly uly bolmadyk ýer meýdanlary ar (sotka)-larda ölçenýär.

46–47. GÖNÜBURÇLUGYŇ WE PARALLELOGRAMYŇ MEÝDANY

1. Gönüburçlugyň meýdany.

Siz gönüburçlugyň meýdany goňşy taraplarynyň uzynlyklarynyň köpeltmek hasylyna deňligini bilýärsiňiz we muňa degişli meseleler çözüpdiňiz.

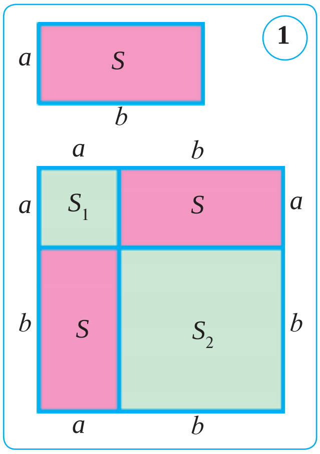
Häzir bu ýerine ýetirilen amalyň nazary taýdan dogrudygyny görkezýäris.

Teorema.

Taraplary *a* we *b* bolan gönüburçlugyň meýdany $S=a\cdot b$ formula boýunça hasaplanýar.

Subudy. Taraplary a we b bolan gönüburçlugy alalyň, munda a we b – islendik položitel sanlar. $S=a\cdot b$ bolýandygyny subut edýäris.

Teoremany subut etmek üçin tarapy $(a+b)$ bolan kwadrat gurýarys. Bu kwadraty 1-nji suratda görkezilen şekildäki ýaly böleklere bölýäris. Munda kwadratyň meýdany tarapy a we b-ge deň iki kwadrat hem-de taraplary a we b bolan iki gönüburçlukdan ybaratdygyny görmek mümkin. Şeýlelikde, tarapy $(a+b)$ bolan kwadratyň meýdany S_1+2S+S_2 -ä deň. Ikinji tarapdan meýdanyň häsiýetine görä, bu meýdan $(a+b)^2$ -a deň, ýagny



$$S_1+2S+S_2=(a+b)^2, \text{ ýa-da}$$

$$S_1+2S+S_2=a^2+2ab+b^2.$$

Bu deňlikden $S_1=a^2$, $S_2=b^2$ bolýandygyny hasaba alsak, $S=a\cdot b$

bolýandygy gelip çykýar. Teorema subut edildi.

1-nji mesele. Gönüburçlugyň meýdany 150 cm^2-a deň, taraplarynyň gatnaşygy bolsa $3:2$ ýaly. Şu gönüburçlugyň perimetrini tapyň.

Çözülişi. Gönüburçlugyň kiçi tarapy $b=2x$ cm bolsun. Onda uly tarapyň uzynlygynyň $a=3x$ cm-liginden peýdalanyp deňleme düzýäris we ony çözýäris:

$$S=3x\cdot 2x, \text{ ýagny } S=6x^2.$$

Mundan $x^2=S:6$, $x^2=150:6$, $x^2=25$, $x=5$ (cm).

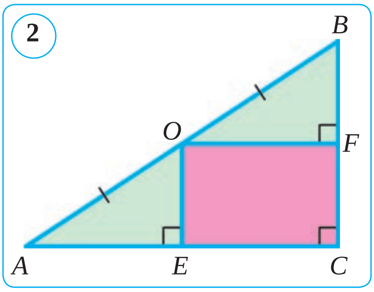
Diýmek, gönüburçlugyň kiçi tarapy: $b=2\cdot 5=10$ (cm) -e, uly tarapy bolsa $a=3\cdot 5=15$ (cm) -e deň. Indi onuň perimetrini hasaplaýarys:

$$P=2\cdot(a+b)=2\cdot(15+10)=2\cdot 25=50\,(\text{cm}).$$

Jogaby: $P=50$ cm.

2- nji mesele. Gönüburçly üçburçlugyň katetleri 12 cm we 24 cm-e deň. Gipotenuzanyň ortasyndan üçburçlugyň katetlerine perpendikulýarlar geçirilen. Emele gelen gönüburçlugyň meýdanyny tapyň.

Berlen: gönüburçly $\triangle ABC$-da: $AO=OB$, $OE\perp AC$, $OF\perp CB$, $AC=24$ cm, $BC=12$ cm (2-nji surat). *Tapmaly:* S_{CEOF}.



Çözülişi. Bize mälim bolşy ýaly, bir göni çyzyga geçirilen iki perpendikulýar özara parallel bolýar. Falesiň teoremasyna görä:

$$AE=EC=0{,}5AC=0{,}5\cdot 24=12\ \text{(cm)},$$

$$CF=FB=0{,}5BC=0{,}5\cdot 12=6\ \text{(cm)}.$$

Diýmek, $S_{CEOF}=CE\cdot CF=12\cdot 6=72$ (cm^2).

Jogaby: 72 cm^2.

2. Parallelogramyň meýdany.

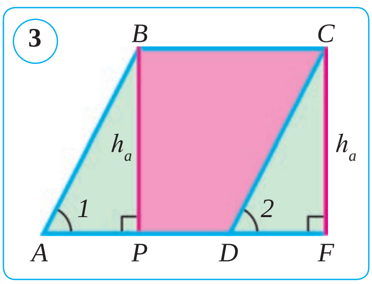
Parallelogramyň islendik tarapyny onuň *esasy* diýip almak mümkin, onda garşylykly tarapyň islendik nokadyndan esasy öz içine alan göni çyzyga geçirilen perpendikulýara parallelogramyň *beýikligi* diýilýär. Beýiklik tarapa ýa-da tarapyň dowamyna düşmegi mümkin. 3-nji suratda BP we CF – $ABCD$ parallelogramyň beýiklikleridir.

Teorema.

Parallelogramyň meýdany esasy bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň: $S=a\cdot h_a$.

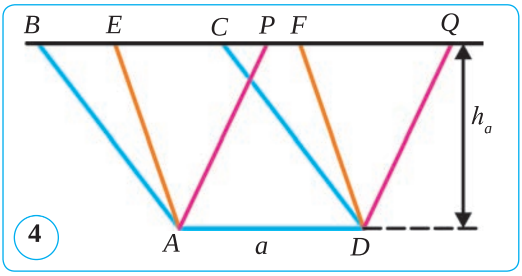
$ABCD$ parallelogramyň esasy üçin $AD=a$ tarap alnan, beýikligi bolsa h_e -a deň bolsun (3-nji surat). $S=a\cdot h_e$ bolýandygyny subut etmek talap edilýär.

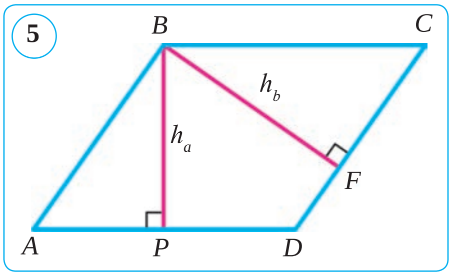
Subudy. Esasy parallelogramyň BC tarapyna deň, beýikligi bolsa h_e -den ybarat bolan $PBCF$ gönüburçluk guryarys. ABP we DCF üçburçluklar deň (gipotenuzasy we ýiti burçuna görä: $AB=DC$ – gipotenuzalar, $\angle 1=\angle 2$ – degişli burçlar). $ABCD$ parallelogram $PBCD$ trapesiýa bilen ABP üçburçlukdan, $PBCF$ gönüburçluk bolsa şol $PBCD$ trapesiýa bilen ABP-ge deň bolan DCF üçburçlukdan düzülen. Diýmek, $ABCD$ parallelogram bilen gurlan $PBCF$ gönüburçluk deň düzülendir (ýagny, deňdeş). Mundan, $ABCD$ parallelogramyň meýdany $PBCF$ gönüburçlugyň meýdanyna, ýagny ah_e deň, diýen netije çykýar.



Şeýlelikde, esasy a we oňa geçirilen beýikligi h_e bolan parallelogramyň S meýdany aşakdaky formula boýunça hasaplanýar: $S=a\cdot h_e$.

Şu formulany subut etmek talap edilipdi.





1- nji netije. Eger iki parallelogram bir esasa eýe we beýiklikleri deň bolsa, olar deň düzülendir.

Berlen: $ABCD$, $AEFD$ we $APQD$ parallelogrammlar bir $AD=a$ esasa eýe hem-de beýiklikleri deň (h_e) (4-nji surat).

Subut etmeli: $ABCD$, $AEFD$ we $APQD$ parallelogramlar deň düzülen.

Subudy. Meselem, $ABCD$ we $AEFD$ parallelogramlaryň deň düzülendigini subut edýäris. BAE we CDF üçburçluklar deň (üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşanyna görä), çünki $BA=CD$ we $AE=DF$ hem-de $\angle BAE=\angle CDF$ (degişli taraplary parallel burçlar bolany üçin). Diýmek, $ABCD$ parallelogram $AECD$ trapesiýa bilen BAE üçburçlukdan, $AEFD$ parallelogram bolsa $AECD$ trapesiýa bilen BAE üçburçluga deň bolan CDF üçburçlukdan düzülen. Diýmek, $ABCD$ we $AEFD$ parallelogramlar deň düzülen.

Şuňa meňzeş, galan parallelogramlaryň deň düzülendigi subut edilýär.

3- nji mesele. Parallelogramyň taraplary 25 cm we 20 cm, birinji tarapyna geçirilen beýiklik 8 cm. Şu parallelogramyň ikinji tarapyna geçirilen beýikligini tapyň.

Berlen: $ABCD$ parallelogramda:

$$AD=a=25\ \text{cm},\ DC=b=20\ \text{cm},\ h_e=8\ \text{cm (5-nji surat)}.$$

Tapmaly: h_b.

Çözülişi. 1) $S=ah_e=25\cdot 8=200$ (cm^2).

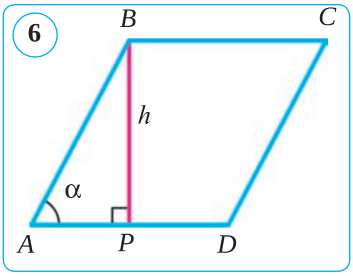
2) $S=bh_b$, ýagny $200=20\cdot h_b$. Mundan $h_b=200:20=10$ (cm). *Jogaby:* 10 cm.

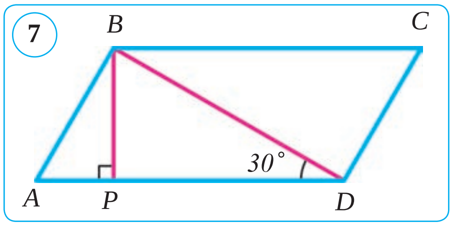
2- nji netije. Parallelogramyň meýdany onuň iki tarapy bilen olaryň arasyndaky burçuň sinusynyň köpeltmek hasylyna deň. Şony subut ediň.

Çözülişi. $ABCD$ parallelogramda $AD=a$, $AB=b$ we $\angle BAD=\alpha$ bolsun. Onda parallelogaramyň meýdany $\boldsymbol{S=ab\sin\alpha}$ formula boýunça hasaplanýar. Şony subut edýäris.

$ABCD$ parallelloramyň BP beýikligini geçirýäris we ony $BP=h_e=h$ bilen belgileýäris (6-njy surat). Onda h beýiklik gönüburçly ABP üçburçlugyň α ýiti burçunyň garşysynda ýatýan katet bolýar. h-y b tarapyň we α burçuň sinusynyň köpeltmek hasyly bilen aňladýarys: $h=b\sin\alpha$.

Parallelogramyň meýdanyny hasaplamak $S=ah$ formulasyna h-yň bu aňlatmasyny goýup, şu formulany alarys: $S=ab\sin\alpha$.





4-nji mesele. *Berlen:* $ABCD$ – parallelogram, $AD = 20$ cm, $BD = 16$ cm, $\angle BDA = 30°$.

Tapmaly: S_{ABCD}.

Çözülişi. 1-nji usul. 1) Berlen parallelogramyň BP beýikligini geçirýäris we BDP üçburçluga garap geçýäris (7-nji surat). Ol gönüburçly, çünki $BP \perp AD$. BP beýikligi tapýarys. 30°-ly burçuň garşysyndaky katet gipotenuzanyň ýarysyna deň, şonuň üçin

$$BP = 0{,}5BD = 0{,}5 \cdot 16 = 8 \text{ (cm)}.$$

2) Şeýlelikde, $ABCD$ parallelogramyň meýdany aşakdaka deň bolýar:

$$S = AD \cdot BP = 20 \cdot 8 = 160 \ \ (\text{cm}^2)$$

2-nji usul. Gönüburçly BDP üçburçlukdan BP-ni BD tarap (gipotenuza) we $\angle BDP = 30°$ burçuň sinusy bilen aňladýarys we parallelogramyň meýdanynyň formulasyna goýup, gözlenýän meýdany tapýarys:

$$S = AD \cdot BP = AD \cdot BD \cdot \sin\angle BDP = 20 \cdot 16 \cdot \sin 30° = 20 \cdot 16 \cdot 0{,}5 = 160 \ \ (\text{cm}^2).$$

Jogaby: $S = 160$ cm^2.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Gönüburçlugyň meýdany nämä deň?

2) Parallelogramyň esasy we beýikligi diýende nämäni düşünýärsiňiz?

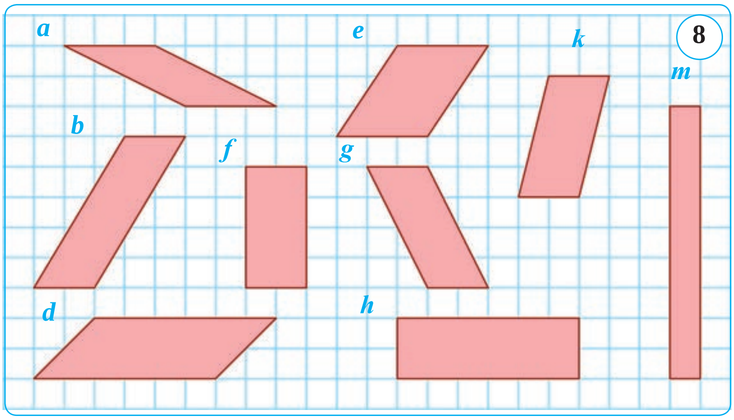
3) Parallelogramyň meýdany onuň iki goňşy tarapy we olaryň arasyndaky burç boýunça nähili tapylýar?

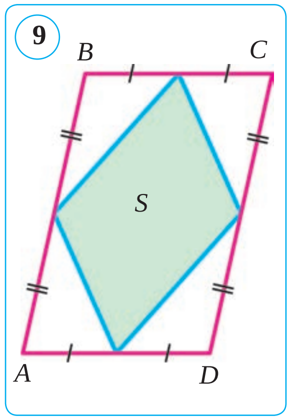
2. Gönüburçlugyň iki tarapy: 1) 30 cm we 2,9 cm; 2) 34 dm we 0,6 dm; 3) 2,5 dm we 12 cm. Şu gönüburçlugyň perimetrini we meýdanyny tapyň.

3. Gönüburçlugyň bir tarapy 15 dm, ikinji tarapy bolsa ondan 5 esse artyk. Şu gönüburçlugyň perimetrini we meýdanyny tapyň.

4. Meýdany 240 m^2 bolan basketbol meýdany sport meýdanynyň 15%-ini tutýar. Sport meýdanynyň meýdany tutuş mekdebiň meýdanynyň 32%-ini düzýär. Mekdebiň meýdanynyň meýdanyny tapyň.

5. Gönüburçlugyň bir tarapy 23 cm, ikinji tarapy bolsa ondan 17 cm uzyn. Gönüburçlugyň perimetrini we meýdanyny tapyň.





6. Eger gönüburçlugyň meýdany 20 cm^2 we 1) uzynlygy 5 cm-e; 2) uzynlygy eniniň 125%-ine; 3) taraplaryndan biri x -a deň bolsa, perimetri nämä deň bolar?

7. Eger $ABCD$ gönüburçlukda: 1) $AB=9$ cm, $BC=4$ cm; 2) $AB:BC=5:7$, $P_{ABCD}=48$ cm bolsa, onuň meýdanyny tapyň.

8. Parallelogramyň tarapy 16 cm-e, oňa geçirilen beýiklik bolsa 9 cm-e deň. Şu parallelograma deňdeş kwadratyň tarapyny tapyň.

9. a – parallelogramyň esasy, h – beýikligi, S – meýdany. Eger:

1) $a=10$ cm, $h_e=0{,}5$ m bolsa, S-i; 2) $h_e=4$ cm, $S=48$ cm^2 bolsa, a-ny; 3) $a=24$ cm, $S=120$ cm^2 bolsa, h_e-y tapyň.

10. 8-nji suratdaky deňdeş parallelogramlary tapyň.

11. Eger gönüburçlugyň: 1) esasy 5 esse kemeldilip, beýikligi 8 esse uzaldylsa; 2) esasy hem, beýikligi hem 2,5 esse kemeldilse, onuň meýdany nähili üýtgär?

12. 9-njy suratdaky S şekiliň meýdany parallelogramyň meýdanynyň nähili bölegini tutýar?

13. Gönüburçlugyň iki tarapy: 1) 24 cm we 20 cm; 2) 3,5 dm we 8 cm; 3) 8 m we 4,5 m; 4) 3,2 dm we 1,5 dm. Onuň meýdanyny tapyň.

14. Parallelogramyň meýdany 36 cm^2, beýiklikleri 3 cm we 4 cm. Şu parallelogramyň perimetrini tapyň.

15. Parallelogramyň taraplary 20 cm we 28 cm, olaryň arasyndaky burç 30°-a deň. Şu parallelogramyň meýdanyny iki usul bilen tapyň.

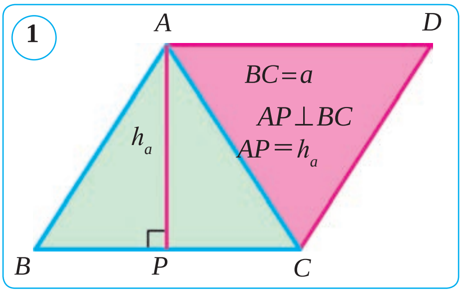
Üçburçlugyň meýdanyny hasaplamagyň formulasyny tapmak üçin parallelogram şekiline getirmek usulyndan peýdalanýarys.

48. ÜÇBURÇLUGYŇ MEÝDANY

Teorema.

Üçburçlugyň meýdany onuň esasy bilen beýikliginiň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň: , $S = -a \cdot h$
munda *a* – üçburçlugyň esasy, h_a – esasa geçirilen beýiklik.

Subudy. ABC – berlen üçburçluk bolsun (1-nji surat). $\triangle ABC$-ni suratda görkezilişi ýaly $ABCD$ (esasy BC) parallelograma dolduryarys. $\triangle BAC$ we $\triangle DCA$-lar deň, çünki parallelogramyň diagonaly ony iki deň üçburçluga bölýär. Şonuň üçin bu üçburçluklaryň meýdanlary deň. Diýmek, $ABCD$ parallelogramyň meýdany $\triangle ABC$ meýdanynyň ikeldilenine deň: $2S = a \cdot h_e$.



Mundan, $S = \frac{ah_a}{2}$. Teorema subut edildi.

Üçburçlugyň meýdanyny hasaplamagyň formulasyny başgaça hem okamak mümkin:

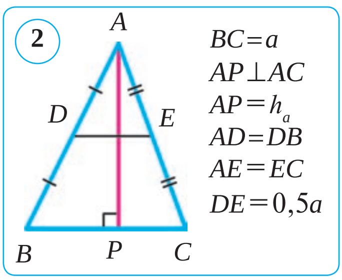
üçburçlugyň meýdany onuň orta çyzygy bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň (2-nji surat): $S = \frac{a}{2} \cdot h_a$.

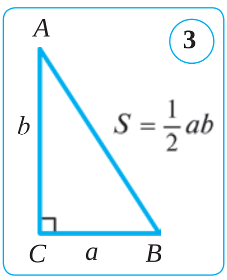
1-nji netije. *Gönüburçly üçburçlugyň meýdany katetleriniň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň,* çünki bir kateti esas we ikinjini beýiklik edip almak mümkin (3-nji surat).

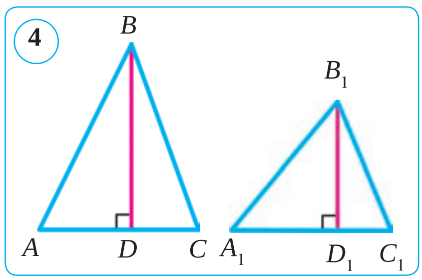
2-nji netije. *Iki üçburçlugyň meýdanlarynyň gatnaşygy esaslary bilen beýiklikleriniň köpeltmek hasylynyň gatnaşygy ýalydyr* (4-nji surat).

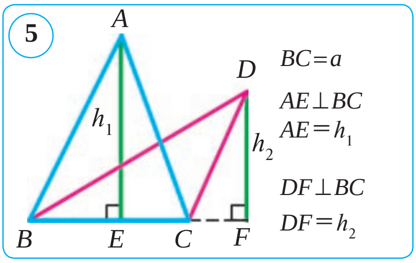
Subudy. $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{0{,}5AC \cdot BD}{0{,}5A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1}$.

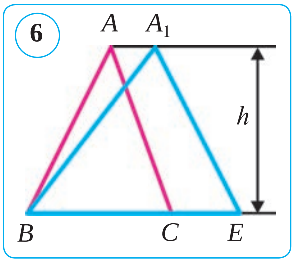
3-nji netije. *Esaslary deň bolan iki üçburçluk meýdanlarynyň gatnaşygy beýiklikleriniň gatnaşygy ýalydyr* (5-nji surat). *Subudy.* $\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \frac{0{,}5a \cdot h_1}{0{,}5a \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}$.

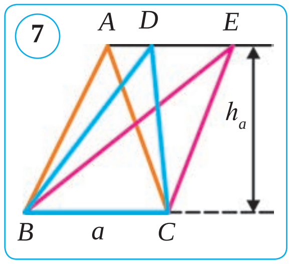












4-nji netije. *Beýiklikleri deň bolan iki üçburçlugyň meýdanlarynyň gatnaşygy esaslarynyň gatnaşygy ýalydyr* (6-njy surat).

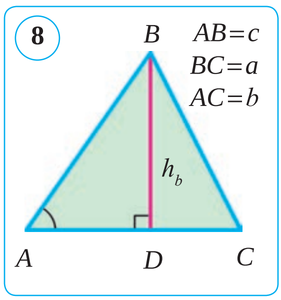
Subudy. $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1BE}} = \frac{0{,}5 \cdot BC \cdot h}{0{,}5 \cdot BE \cdot h} = \frac{BC}{BE} = \frac{a}{a_1}$, munda $BC=a$, $BE=a_1$.

5-nji netije. *Esaslary we beýiklikleri deň bolan üçburçluklar deňdeşdir* (7-nji surat). *Subudy.* $S_{BAC}=S_{BDC}=S_{BEC}=0{,}5ah_e$.

6-njy netije. *Üçburçlugyň meýdany onuň iki tarapy we olaryň arasyndaky burçuň sinusynyň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň* (8-nji surat).

Subudy. ABC üçburçlugyň taraplary $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ bolsun. Onda $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ bolýandygyny subut edýäris. Munuň üçin ABC üçburçlugyň $BD=h_b$ beýikligini geçirýäris (8-nji surat). h_b-ni c tarap we A burçuň sinusy bilen aňladýarys: $h_b=c\sin A$. Üçburçlugyň meýdanyny hasaplamagyň formulasy $S = \frac{1}{2}bh_b$ -a h_b -yň şu aňlatmasyny goýup, şu formulany alarys: $S = \frac{1}{2}bc\sin A$.

Üçburçlugyň meýdanyny a, b taraplary we C burçuň sinusy, a, c taraplary we B burçuň sinusy arkaly hasaplamagyň formulalary şuňa meňzeş getirip çykarylýar.



Şeýdip, üçburçlugyň meýdany iki tarapyna we olaryň arasyndaky burçuň sinusyna görä şu formulalar boýunça hasaplanýar:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

Üçburçlugyň meýdanyny taraplary arkaly hasaplamagyň formulasy I asyrda ýaşan gadymky grek alymy **Geron** tarapyndan tapylan bolup, ol *Geronyň formulasy* diýlip atlandyrylýar. Geronyň formulasy üçburçlugyň üç tarapynyňuzynlygy mälim bolanda onuň meýdanyny hasaplamak üçin ulanylýar.

Geronyň formulasynyň subudyny getirip çykarýarys.

Mälim bolşy ýaly, üçburçlugyň meýdany onuň esasy bilen beýikliginiň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň: $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

Beýikligiň ýerine onuň üçburçlugyň taraplary arkaly aňlatmasy

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad \beta=90°,\quad h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \text{we}$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

-lary goýup, ony ýönekeýleşdirip şu Geronyň formulasyny alarys:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{, munda } p=\frac{a+b+c}{2}.$$

1- nji mesele. Üçburçlugyň medianasy ony iki deňdeş üçburçluga bölýändigini subut ediň.

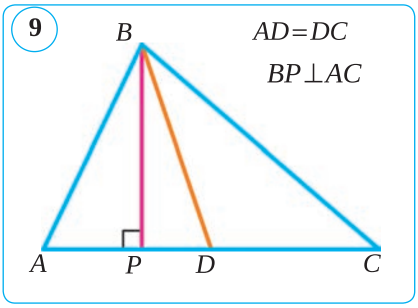
Subudy. BD – ABC üçburçlugyň medianasy bolsun (9-njy surat). ABD we CBD üçburçluklar deň AD we DC taraplara hem-de umumy BP beýiklige eýe, ýagny üçburçluklar 5-nji netijä görä deňdeşdir: $S_{ABD}=S_{CBD}$.

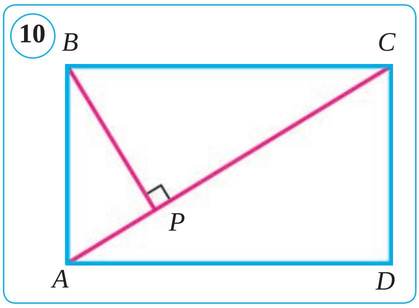
2- nji mesele. Berlen: $ABCD$ – gönüburçluk, $AC=20$ cm, $BP=12$ cm, $BP\perp AC$ (10-njy surat).

Tapmaly: S_{ABCD}.

Çözülişi. 1) $S_{ABC}=0{,}5AC\cdot BP=0{,}5\cdot 20\cdot 12=120$ (cm²).

2) $S_{ABCD}=2\cdot S_{ABC}=2\cdot 120=240$ (cm²). *Jogaby:* $S_{ABCD}=240$ cm².





Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Üçburçlugyň meýdany nämä deň?

2) Gönüburçly üçburçlugyň meýdany nähili hasaplanýar?

3) Taraplaryna görä üçburçlugyň meýdany nähili hasaplanýar?

2. Gönüburçly üçburçlugyň katetleri: 1) 4 cm we 7 cm; 2) 1,2 dm we 25 cm. Şu gönüburçly üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

3. Bir üçburçlugyň esasy 20 cm, beýikligi 8 cm. Ikinji üçburçlugyň esasy 40 cm. Üçburçluklar deňdeş bolmagy üçin ikinji üçburçlugyň beýikligi nähili bolmaly?

4. ABC üçburçlukda $AB=5AC$. Üçburçlugyň B we C depelerinden geçirilen beýiklikleriniň gatnaşygy nämä deň?

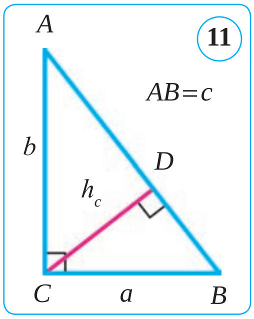
5. Nämälim mukdarlary tapyň. a – üçburçlugyň esasy, h – esasyna geçirilen beýiklik, S – üçburçlugyň meýdany.

	1	2	3	4	5	6
	69 cm	0,8 dm	?	0,25 m	?	0,9 m
	0,5 m	?	20 dm	100 cm	4,8 cm	?
	?	4 cm^2	2000 cm^2	?	9,6 mm^2	36 dm^2

6. Katetleriň (a we b) köpeltmek hasyly gipotenuza (c) bilen göni burçuň depesinden gipotenuza geçirilen beýikligiň (h_c) köpeltmek hasylyna deň (11-nji surat).

Çözülişi. Eger katetlerden birini esas üçin kabul etsek, onda ikinji beýiklik bolýar. Şonuň üçin, göni burçly üçburçlugyň meýdany katetleriň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň bolýar:

$S=\frac{1}{2}ab$, mundan $ab=2S$; $S=\frac{1}{2}ch_c$, mundan $ç_c=2S$. Diýmek, $ab=ç_c$ eken. Şony subut etmek talap edilipdi.



Üçburçlugyň katetleri: 1) 12 cm we 16 cm; 2) 5 cm we 12 cm-e deň. c (Pifagoryň teoremasyna görä) we h_c ($ab=ç_c$ görä)-ni tapyň.

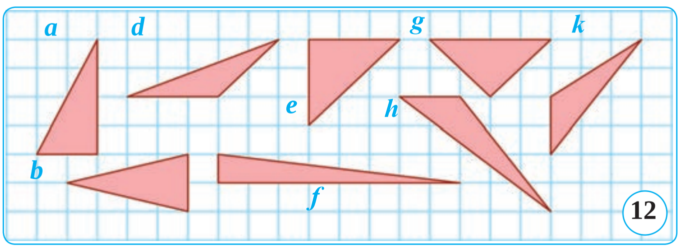
7. 12-nji suratdaky deňdeş üçburçluklary görkeziň. Jogabyňyzy esaslandyryň.

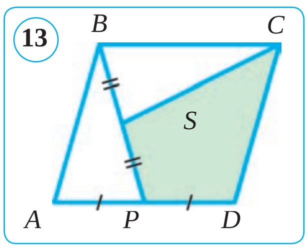
8. Taraplary: 1) 39 cm, 42 cm, 45 cm; 2) 35 cm, 29 cm, 8 cm; 3) 20 cm, 20 cm, 32 cm-e deň bolan üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

9. 13-nji suratdaky S şekiliň meýdany parallelogramyň meýdanynyň nähili bölegini düzýär?

10. Üçburçlugyň meýdany 150 cm^2-a deň. Üçburçlugyň beýiklikleri 15 cm, 12 cm we 20 cm-e deň bolsa, onuň perimetrini tapyň.

11. Üçburçlugyň iki tarapy 5 dm we 6 dm, olaryň arasyndaky burç 30°. Üçburçlugyň meýdanyny tapyň. Meseläni iki usul bilen çözüň.





$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\beta=90°$, $h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ we

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

-lary goýup, ony ýönekeýleşdirip şu Geronyň formulasyny alarys:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\text{, munda } p=\frac{a+b+c}{2}.$$

1- nji mesele. Üçburçlugyň medianasy ony iki deňdeş üçburçluga bölýändigini subut ediň.

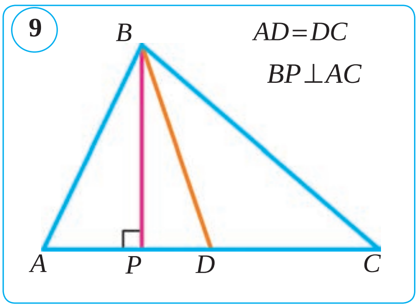
Subudy. BD – ABC üçburçlugyň medianasy bolsun (9-njy surat). ABD we CBD üçburçluklar deň AD we DC taraplara hem-de umumy BP beýiklige eýe, ýagny üçburçluklar 5-nji netijä görä deňdeşdir: $S_{ABD}=S_{CBD}$.

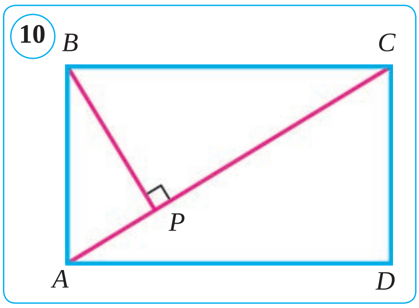
2- nji mesele. Berlen: $ABCD$ – gönüburçluk, $AC=20$ cm, $BP=12$ cm, $BP\perp AC$ (10-njy surat).

Tapmaly: S_{ABCD}.

Çözülişi. 1) $S_{ABC}=0{,}5AC\cdot BP=0{,}5\cdot 20\cdot 12=120$ (cm²).

2) $S_{ABCD}=2\cdot S_{ABC}=2\cdot 120=240$ (cm²). *Jogaby:* $S_{ABCD}=240$ cm².





Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Üçburçlugyň meýdany nämä deň?
2) Gönüburçly üçburçlugyň meýdany nähili hasaplanýar?
3) Taraplaryna görä üçburçlugyň meýdany nähili hasaplanýar?

2. Gönüburçly üçburçlugyň katetleri: 1) 4 cm we 7 cm; 2) 1,2 dm we 25 cm. Şu gönüburçly üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

3. Bir üçburçlugyň esasy 20 cm, beýikligi 8 cm. Ikinji üçburçlugyň esasy 40 cm. Üçburçluklar deňdeş bolmagy üçin ikinji üçburçlugyň beýikligi nähili bolmaly?

4. ABC üçburçlukda $AB=5AC$. Üçburçlugyň B we C depelerinden geçirilen beýiklikleriniň gatnaşygy nämä deň?

5. Nämälim mukdarlary tapyň. a – üçburçlugyň esasy, h – esasyna geçirilen beýiklik, S – üçburçlugyň meýdany.

49–50. ROMBUŇ WE TRAPESIÝANYŇ MEÝDANY

1. Rombuň meýdany. Romb – taraplary deň bolan parallelogramdyr. Tarapy a we beýikligi h_e bolan rombuň meýdany $\boldsymbol{S=ah_e}$ formula boýunça hasaplanýar. Bize mälim bolşy ýaly, rombuň hemme beýiklikleri özara deň. Mundan daşary, rombuň meýdanyny diagonallary arkaly hem hasaplamak mümkin.

Teorema.

Rombuň meýdany onuň diagonallarynyň köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň: $\boldsymbol{S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2}$,

bu ýerde d_1 we d_2 – rombuň diagonallary.

Subudy. Mälim bolşy ýaly, rombuň AC diagonaly ony iki özara deňýanly üçburçluga bölýär (1-nji surat). Ikinji diagonal bolsa birinjisine perpendikulýar bolup, emele gelen üçburçluklar beýiklikleriniň jemine deň bolýar. Şonuň üçin rombuň meýdany:

$$S=S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot BO+\frac{1}{2}AC\cdot DO=\frac{1}{2}AC\cdot(BO+DO)=$$

$$=\frac{1}{2}\underline{AC}\cdot\underline{\underline{BD}}=\frac{1}{2}\underline{d_1}\cdot\underline{\underline{d_2}}.$$

Diýmek, $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$. Teorema subut edildi.

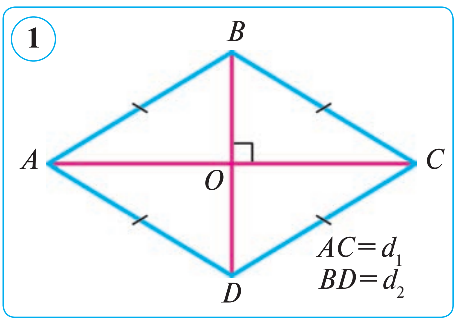
1-nji mesele. *ABCD* rombuň tarapy a-ga, ýiti burçy bolsa α deň. Şu rombuň meýdanyny tapyň. α = 30°-da onuň meýdanyny tapyň.

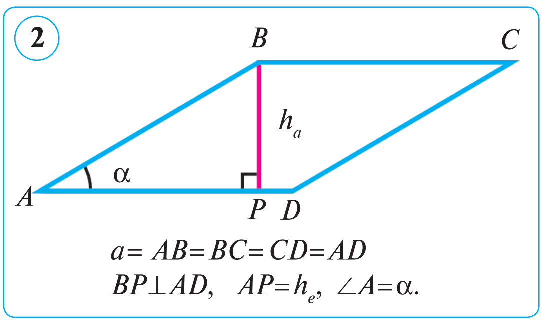
Çözülişi. 1) *ABCD* rombda $AB=BC=CD=AD=a$, $\angle A=\alpha$ bolsun. $BP\perp AD$-ni geçirýäris (2-nji surat). Onda h_e beýiklik gönüburçly *ABP* üçburçlugyň α ýiti burçunyň garşysynda ýatýan katet bolýar. h_e-y α burçuň sinusy bilen aňladýarys: $h_e=a\sin\alpha$. Rombuň meýdanyny hasaplamagyň formulasy $S=ah_e$-a h_e-yň bu aňlatmasyny goýup, şu formulany alarys: $S=a^2\sin\alpha$.

2) Rombuň meýdanyny $S=a^2\sin\alpha$ formuladan peýdalanyp tapýarys:

$$S=a^2\sin30°=a^2\cdot0{,}5=0{,}5a^2 \text{ (kw. birl.)}.$$

Jogaby: $S=0{,}5a^2$ kw. birl.





2-nji mesele. Rombuň diagonallaryndan biri ikinjiden 1,5 esse uly, meýdany bolsa 27 cm^2-a deň. Şu rombuň diagonallaryny tapyň.

Berlen: $ABCD$ – romb; $S_{ABCD}=27$ cm^2; $AC=1,5BD$ (1-nji surata g.)

Tapmaly: AC, BD.

Çözülişi. $BD=x$ cm bolsun, onda $AC=1,5x$ cm bolýar.

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$, muňa belgilemeleri goýýarys: $27=\frac{1}{2}\cdot 1,5x\cdot x$. Onda $x^2=36$ bolýar, mundan $x=6$ (cm). Şeýlelikde,

$$BD=6 \text{ cm}, \quad AC=1,5\cdot 6=9 \text{ (cm)}.$$

Jogaby: 9 cm, 6 cm.

2. Trapesiýanyň meýdany. Islendik köpburçlugy diagonallar geçirmek ýoly bilen üçburçluklara bölmek mümkin. Islendik köpburçlugyň meýdanyny hasaplamak üçin ol ilki üçburçluklara bölünýär, soňra üçburçluklaryň meýdany hasaplanýar. Köpburçlugyň meýdany bolsa ony düzýän bir-birini örtmeýän üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemine deň bolýar. Trapesiýanyň meýdanlaryny hasaplanda şu usuldan peýdalanýarys.

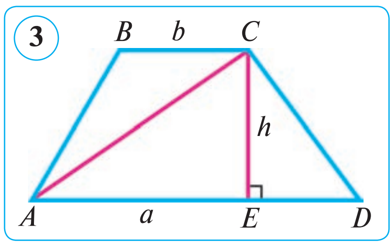
Teorema.

Trapesiýanyň meýdany onuň esaslarynyň jeminiň ýarysy bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň:

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

bu ýerde a we b – trapesiýanyň esaslary, h – trapesiýanyň beýikligi.

Subudy. Esaslary $AD=a$, $BC=b$ we beýikligi $CE=h$ ($CE\perp AD$) bolan $ABCD$ trapesiýa garalyň (3-nji surat).



Trapesiýada AC diagonaly geçirýäris. Munda $ABCD$ trapesiýa ABC we ACD üçburçluklara bölünýär. Trapesiýanyň meýdany bolsa bu üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemine deň bolýar.

Parallel göni çyzyklaryň arasyndaky aralyk hemişelik bolany üçin ABC we ACD üçburçluklaryň beýiklikleri özara deň.

Mundan, $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot CE=\frac{1}{2}b\cdot h$ we $S_{ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CE=\frac{1}{2}a\cdot h$.

Trapesiýanyň meýdany $S=S_{ABC}+S_{ACD}$, ýagny:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h+\frac{1}{2}b\cdot h \quad \text{ýa-da} \quad S=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

Teorema subut edildi.

Netije. *Trapesiýanyň meýdany orta çyzygy bilen beýikliginiň köpeltmek hasylyna deň.*

Şu netije trapesiýanyň orta çyzygy esaslarynyň jeminiň ýarysyna deňliginden gelip çykýar.

3-nji mesele. Trapesiýanyň esaslary 15 cm we 30 cm-e, meýdany 225 cm^2-a deň. Şu trapesiýanyň beýikligini tapyň.

Çözülişi. Trapesiýanyň orta çyzygy: $\frac{a+b}{2}=\frac{15+30}{2}=\frac{45}{2}=22,5$ (cm).

Diýmek, trapesiýanyň beýikligi: $h=S_{\text{tr.}}:\frac{a+b}{2}=225:22,5=10$ (cm).

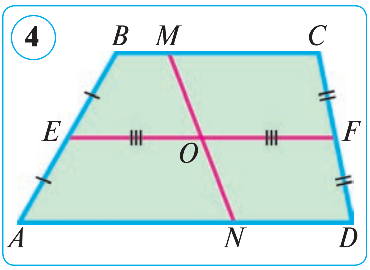
Jogaby: $h=10$ cm.

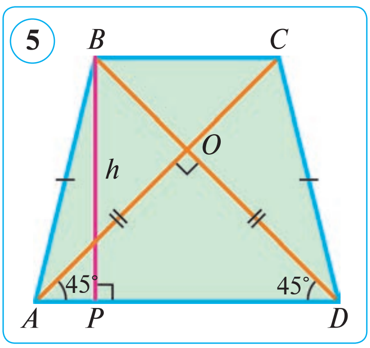
4-nji mesele. Trapesiýanyň orta çyzygy ortasyndan geçip, esaslaryny kesiji göni çyzyk bu trapesiýany iki deňdeş bölege bölýändigini subut ediň.

Çözülişi. $ABCD$ – berlen trapesiýa ($AD \| BC$), EF – onuň orta çyzygy, MN bolsa orta çyzygyň ortasy O arkaly geçýän hem-de esaslaryny M we N nokatlarda kesiji göni çyzyk bolsun (4-nji surat). $ABMN$ we $MNDC$ trapesiýalar degişlilikde deň EO we OF orta çyzyk hem-de berlen trapesiýanyň beýikligine deň beýiklige eýe. Diýmek, bu trapesiýalaryň meýdanlary deň, ýagny olar deňdeşdir: $S_{ABMN}=S_{MNDC}$.

Şony subut etmek talap edilipdi.

5-nji mesele. Deňýanly trapesiýanyň diagonallary özara perpendikulýar bolsa, onda trapesiýanyň beýikligi onuň orta çyzygyna, meýdany bolsa beýikliginiň kwadratyna deň bolýar. Şony subut ediň.





Berlen: $ABCD$ trapesiýa – deňýanly ($AB=DC$), $AC \perp BD$, $AD=a$, $BC=b$ bolsun (5-nji surat).

Subut etmeli:

1) $h=\frac{a+b}{2}$;   2) $S_{\text{tr.}}=h^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Çözülişi. 1) $\triangle AOD$ – deňýanly we gönüburçly, şonuň üçin $\angle ADO=45°$.

2) B depesinden $BP \perp AD$-ni geçirýäris. Emele gelen BPD üçburçluk hem deňýanly we gönüburçly, çünki $\angle ADO=45°$ we diýmek, $\angle PBD=45°$. Mundan: $DP=BP$. Bize mälim bolşy ýaly, deňýanly trapesiýanyň kiçi esasy depesinden geçirilen beýikligiň häsiýetine görä:

$$BP=DP=\frac{a+b}{2}.$$

3) $S_{\text{tr.}} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = h \cdot h = h^2$ ýa-da $S_{\text{tr.}} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a+b}{2} = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

Şeýlelikde, deňýanly trapesiýanyň diagonallary özara perpendikulýar bolanda onuň beýikligi orta çyzygyna, meýdany bolsa beýikliginiň kwadratyna deňligi doly subut edildi.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Rombuň meýdany tarapy we beýikligi boýunça nähili tapylýar?
2) Rombuň meýdany diagonallary arkaly nähili tapylýar? Ony aňladyň.
3) Trapesiýanyň meýdany nämä deň?

2. Rombuň meýdany 40 cm², beýikligi bolsa 5 cm-e deň. Şu rombuň perimetrini tapyň.

3. Eger rombuň: 1) beýikligi 16 cm, ýiti burçy 30°-a; 2) tarapy 1,8 dm, ýiti burçy 30°-a deň bolsa, onuň meýdanyny tapyň.

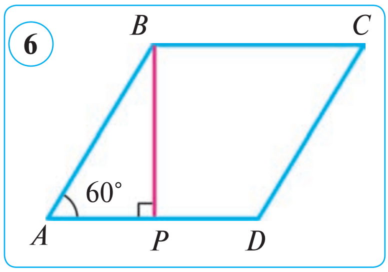
4. Rombuň meýdany 60 cm², diagonallaryndan biri 10 cm-e deň. Şu rombuň ikinji diagonalyny tapyň.

5. Rombuň meýdany 30 cm², perimetri bolsa 24 cm-e deň. Şu rombuň beýikligini tapyň.

6. *Berlen: ABCD* – romb. $\angle BAD = 60°$, $BP \perp AD$, $BP = 12$ cm (6-njy surat).

Tapmaly: S.

Çözülişi. Gönüburçly BPA üçburçluga garap geçýäris. Ýiti burçuň sinusynyň kesgitlemesine görä: $\sin A = \dfrac{BP}{AB}$. Muňa berlenleri goýup, AB-ni tapýarys:



$$\sin A = \frac{BP}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BP}{\sin A} = \frac{12}{\sin 60°} = 12 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} \text{ (cm)}$$

Tarapyna we ýiti burçuna görä rombuň meýdanyny tapmagyň formulasyna

$$AB = a = \frac{24}{\sqrt{3}}, \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

bahalary goýup, aşakdakyny tapýarys:

$$S = a^2 \cdot \sin 60° = \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{576}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

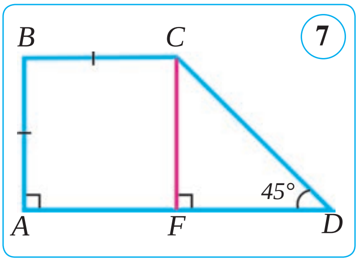
Jogaby: $96\sqrt{3}$ cm².

7. Diagonallary: 1) 1,5 dm we 1,8 dm; 2) 24 cm we 15 cm; 3) 3,2 cm we 0,5 dm bolan rombuň meýdanyny tapyň.

8. 1) Trapesiýanyň esaslary 11 cm we 18 cm-e, beýikligi bolsa 6 cm-e deň. Şu trapesiýanyň meýdanyny tapyň.

2) Trapesiýanyň esasy 26 cm, beýikligi 10 cm, meýdany bolsa 200 cm^2. Şu trapesiýanyň ikinji esasyny tapyň.

9. $ABCD$ gönüburçly trapesiýada $AB=BC=18$ cm, $\angle D=45°$ (7-nji surat). Trapesiýanyň meýdanyny tapyň. Boş ýerlere degişli jogaplary ýazyň.



Çözülişi. $CF \perp AD$-ni geçirýäris.
1) $ABCF$ –kwadrat, çünki $ABCF$ dörtburçlugyň goňşy taraplary AB we ..., şonuň üçin $AF=CF=$... (cm).

2) $\triangle CFD$ – gönüburçly, gurmaga görä $\angle F=90°$ we şerte görä $\angle D=45°$, şonuň üçin $\angle DCF=$...° we diýmek, $\triangle CFD$ – ... we $DF=$... = ... (cm).

3) $AD=AF+$... = ... + ... = ... (cm) we $S_{ABCD}=$... · ... = ... · ... = ... (cm^2).

Jogaby: ... cm^2.

10. Rombuň burçlarynyň gatnaşygy 1 : 5-e, tarapy bolsa a-ga deň. Şu rombuň meýdanyny tapyň.

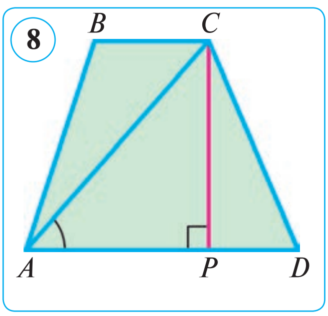
11. $ABCD$ trapesiýada: $AD=20\sqrt{2}$ cm, $BC=10\sqrt{2}$ cm, $AC=24$ cm, $\angle CAD=45°$ (8-nji surat). Trapesiýanyň meýdanyny tapyň.

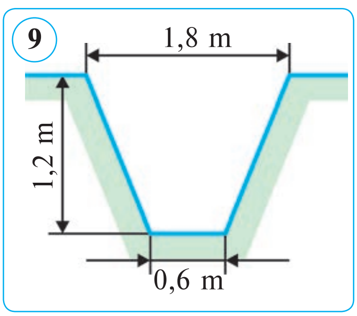
12. Diagonallary: 1) 3,5 dm we 1,4 dm; 2) 28 cm we 17 cm; 3) 4,2 cm we 1,5 dm bolan rombuň meýdanyny tapyň.

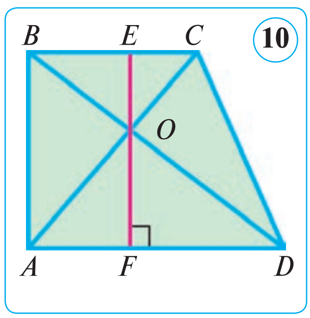
13. Deňýanly trapesiýanyň diagonallary özara perpendikulýar we beýikligi 5 cm-e deň. Şu trapesiýanyň meýdanyny tapyň.

14. Deňýanly trapesiýa şeklindäki çukuryň kese kesiginiň meýdanyny tapyň (9-njy surat).

15. Trapesiýanyň esaslary 16 cm we 12 cm. Diagonallarynyň kesişme nokadyndan esaslaryna çenli bolan aralyklar 6 cm we 4 cm-e deň (10-njy surat). Şu trapesiýanyň meýdanyny tapyň.

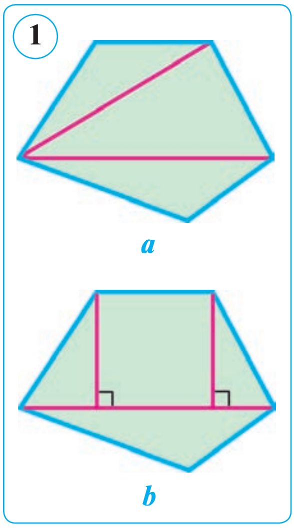






51. KÖPBURÇLUGYŇ MEÝDANY

Köpburçlugyň meýdanyny hasaplamak üçin ony özara kesişmeýän, ýagny umumy içki nokatlary bolmadyk üçburçluklara bölmek we olaryň meýdanlarynyň jemini tapmak mümkin. Güberçek köpburçlugy üçburçluklara bölmek üçin, meselem, onuň bir depesinden diagonallar geçirmek ýeterli (1-nji *a* surat). Käte başgaça bölmeklerden peýdalanmak amatly (1-nji *b* surat).



1- nji mesele. *ABCDE* köpburçlukda $BD \parallel AE$, $CP \perp AE$ bolýandygy mälim (2-nji surat)

$S_{ABCDE} = 0,5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$ bolýandygyny subut ediň.

Subudy. Berlen şekiliň trapesiýadan we üçburçlukdan ybaratdygyny görmek kyn däl. Şu sebäpli meýdanyň häsiýetine görä:

$S_{ABCDE} = S_{BCD} + S_{ABDE} = 0,5BD \cdot CO + 0,5(AE + BD) \cdot OP = 0,5(\underline{BD} \cdot \underline{CO} + AE \cdot OP +$
$+\underline{BD} \cdot \underline{OP}) = 0,5(BD \cdot (CO + OP) + AE \cdot OP) = 0,5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$.

Diýmek, $S_{ABCDE} = 0,5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$.

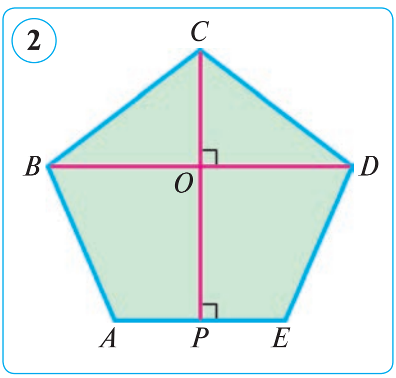
2- nji mesele. *AC* we *BD* – *ABCD* dörtburçlugyň diagonallary, *O* – diagonallarynyň kesişme nokady (3-nji surat). Eger $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$ we $S_{AOD} = S_4$ bolsa, $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ bolýandygyny subut ediň.

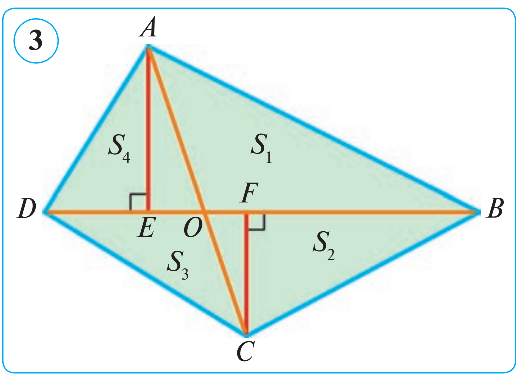
Subudy. 1) $AE \perp BD$ we $CF \perp BD$-leri geçirýäris.

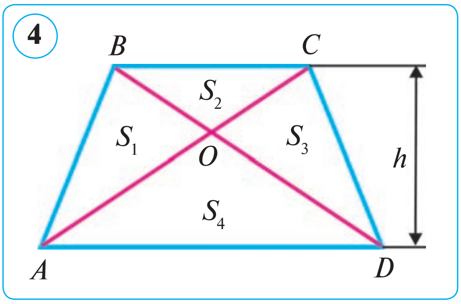
2) $\frac{S_1}{S_4} = \frac{0,5OB \cdot AE}{0,5OD \cdot AE} = \frac{OB}{OD}$ (1) we $\frac{S_2}{S_3} = \frac{0,5OB \cdot CF}{0,5OD \cdot CF} = \frac{OB}{OD}$ (2).

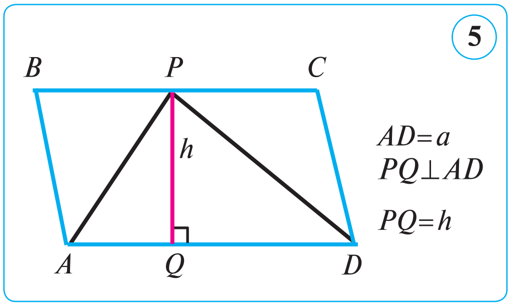
3) (1) we (2) dan tapýarys:

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_3} \Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4 .$$









3- nji mesele. BC we AD – $ABCD$ trapesiýanyň esaslary, O – AC we BD diagonallarynyň kesişme nokady (4-nji surat). $AD = a$, $BC = b$.

$S_{AOB}=S_1$, $S_{BOC}=S_2$, $S_{COD}=S_3$ we $S_{AOD}=S_4$ bolsa, aşakdakyny subut ediň:

1) $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$; 2) $S_{tr.} = \left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_4}\right)^2$.

Subudy. 1) $S_{tr.} = \underline{S_1} + S_2 + \underline{S_3} + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 =$.

2) Bize $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ bolýandygy mälim. $S_1 = S_3$-i nazara alsak, $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$ gelip çykýar. Meseläniň birinji bölegi subut edildi.

3) Trapesiýanyň meýdany dört üçburçlugyň meýdanlarynyň jemine deňdigi we ýokardaky netijeleri hasaba alyp, aşakdaka eýe bolarys:

$$S_{tr.} = \underline{S_1} + S_2 + \underline{S_3} + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 =$$
$$= \left(\sqrt{S_2}\right)^2 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4} + \left(\sqrt{S_4}\right)^2 = \left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_4}\right)^2.$$

Diýmek, $S_{tr.} = \left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_4}\right)^2$. Meseläniň ikinji bölegi subut edildi.

4- nji mesele. Parallelogram bilen umumy esasa we umumy beýiklige eýe bolan üçburçlugyň meýdany parallelogramyň meýdanynyň ýarysyna deň.

Subudy. AD esas we h beýiklik $ABCD$ parallelogram we APD üçburçluk üçin umumy (5-nji surat). $S_{APD}=0{,}5S_{ABCD}$ bolýandygyny subut edýäris.

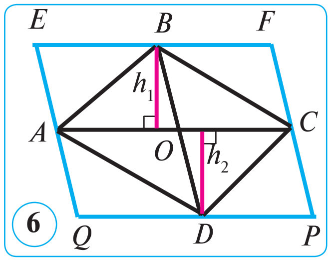
$S_{ABCD}=ah$ (1) we $S_{APD}=0{,}5ah$ (2) bolýandygy mälim. (2) deňlikdäki ah ýerine S_{ABCD} -ni goýup, tapýarys: $S_{APD}=0{,}5ah=0{,}5S_{ABCD}$.

Ýatlatma! Ýokarda getirilen meseläni aşakdaky ýaly hem okamak mümkin: *üçburçluk bilen umumy esasa we umumy beýiklige eýe bolan parallelogramyň meýdany üçburçlugyň meýdanyndan iki esse uly.*

5- nji mesele. Güberçek dörtburçlugyň depeleri arkaly onuň diagonallaryna parallel göni çyzyklar geçirilse, onda emele gelen parallelogramyň meýdany berlen dörtburçlugyň meýdanyndan iki esse uly bolýandygyny subut ediň.

Subudy. $ABCD$ – berlen güberçek dörtburçluk, O – AC we BD diagonallaryň kesişme nokady, h_1 we h_2 – dörtburçlugyň B we D depelerinden AC diagonala geçirilen beýiklikler; $EFPQ$ – dörtburçlugyň depeleri arkaly onuň diagonallaryna parallel geçirilen göni çyzyklarň kesişmeginden emele gelen parallelogram (6-njy surat).

$S_{EFPQ}=2S_{ABCD}$ bolýandygyny subut edýäris.



Gurmaga görä, parallelogramyň EF we QP taraplary AC diagonala parallel hem-de deň. Şonuň üçin, AC diagonal emele gelen $EFPQ$ parallelogramy iki – $AEFC$ we $ACPQ$ parallelogramlara bölýär.

Ýokarda getirilen ýatlatmadaky netijäni ulanyp, $S_{EFPQ}=2S_{ABCD}$ deňligi subut edýäris: $S_{EFPQ}=S_{AEFC}+S_{ACPQ}=2S_{ABC}+2S_{ADC}=2(S_{ABC}+S_{ADC})=2S_{ABCD}$.

Diýmek, $S_{EFPQ}=2S_{ABCD}$.

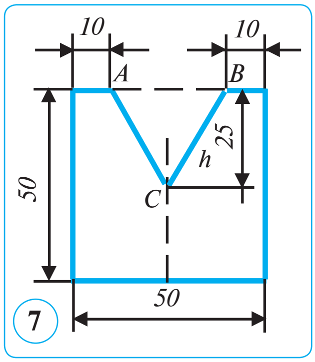
Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 7-nji suratdaky şekiliň meýdanyny tapyň.

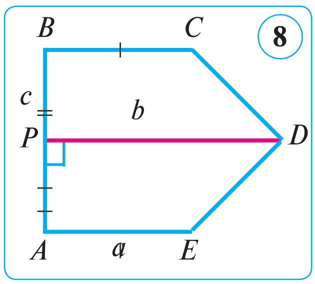
Çözülişi. Suratda şekillendirilen şekiliň meýdanyny A we B nokatlary utgaşdyryp, ony kwadrata doldurmak arkaly tapmak amatlydyr. Berlen şekiliň meýdany emele gelen kwadratyň meýdany bilen ABC üçburçlugyň meýdanynyň tapawudyna deň: $S=S_{\text{kw.}}-S_{ABC}=...^2-0{,}5\cdot(50-2\cdot10)\cdot...=...-375=...$ (kw. birl.).

Nokatlaryň ýerine degişli sanlary goýuň.

Jogaby: ... kw. birl.



2. 8-nji suratdaky şekiliň meýdanyny hasaplamak üçin formula getirip çykaryň. Munda $AE \parallel BC \parallel PD$, $AE=BC$, $AP=PB$, $PD \perp AB$.

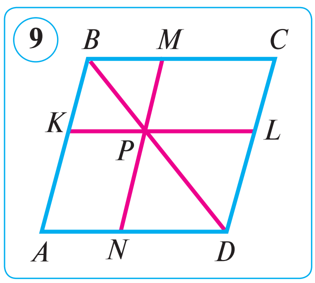


3. *Berlen:* $ABCD$ – gönüburçluk, $AB=$ 12 cm, $AD=16$ cm; E, F, P we Q nokatlar – degişli taraplaryň ortalary.

Tapmaly: S_{EFCPQA}.

4. *Berlen:* $ABCD$ – parallelogram, $P \in BD$, $KL \parallel BC$, $MN \parallel AB$ (9-njy surat).

Subut etmeli: $S_{AKPN}=S_{PMCL}$.



5. AC we BD – $ABCD$ dörtburçlugyň diagonallary, O–olaryň kesişme nokady. $S_{AOD}=12$, $S_{BOC}=8$, $S_{AOB}=6$. S_{COD}-ni tapyň.

6. Gönüburçluk şeklindäki ýer uçastogunyň meýdany 400 ha. Eger: 1) uçastoguň uzynlygy 10 km bolsa; 2) uçastok kwadrat şeklinde bolsa, onuň perimetri nähili bolar?

52. AMALY GÖNÜKME WE ULANYLYŞY

I. Barlag üçin meseleler.

1-nji mesele. Gönüburçlugyň taraplary natural san we perimetri 4-e kratny bolan meselä garap geçýäris.

Perimetri 72 cm-e deň we taraplary natural san bolan ähli gönüburçluklardan iň uly meýdana eýe bolanyny tapyň. Ol nähili şekil bolýar? Netije çykaryň.

Çözülişi. Gönüburçlukda: $P=2\cdot(a+b)=72$ cm – perimetr, $p=a+b=36$ cm – ýarym perimetr, ýagny goňşy taraplaryň jemi. Diňe a we b-niň bahalary mälim bolanda $S=a\cdot b$-ni hasaplap bileris. Meselede goýlan soraga jogap bermek üçin gönüburçlugyň goňşy taraplaryny tapmaga synanyşýarys.

Munuň üçin 36-ny iki natural sanyň jemi görnüşinde aňladýarys:

$$a+b=36=1+35=2+34=3+33=...=33+3=34+2=35+1.$$

Mundan görnüşi ýaly, goňşy taraplarynyň jemi 36 sm-e deň bolan 35 sany dürli gönüburçluk bar. Maglumatlary jedwele girizip, olary derňeýäris we netije çykarýarys:

a cm	**1**	2	...	**17**	**18**	**19**	20	...	**34**	**35**
b cm	**35**	34	...	**19**	**18**	**17**	16	...	**2**	**1**
$(a+b)$ cm	**36**	**36**		**36**	**36**	**36**	**36**	...	**36**	**36**
$S=a\cdot b$ cm^2	**35**	68	...	**323**	**324**	**323**	320	...	**68**	**35**

Jedwelden görnüşi ýaly, iň kiçi meýdan diňe $a=1$ cm we $b=35$ cm ýa-da $a=35$ cm we $b=1$ cm bolanda, iň uly meýdan bolsa diňe $a=b=18$ cm – tarapy 18 cm-e deň kwadrat bolanda alynýar. Galan gönüburçluklaryň perimetrleri 72 cm bolsa-da, emma meýdanlary

$$18\cdot 18=324\ (\text{cm}^2)$$

-dan kiçi bolýar.

Jedweli derňemek netijesinde aşakdaky netijelere geleris.

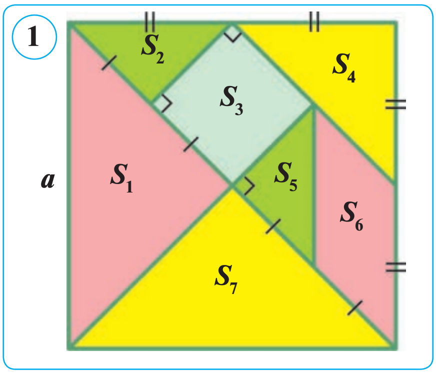
1- nji netije. Eger gönüburçlugyň taraplary natural san we perimetri 4-e kratny bolsa, iň uly meýdan aşakdaky formula boýunça tapylýar:

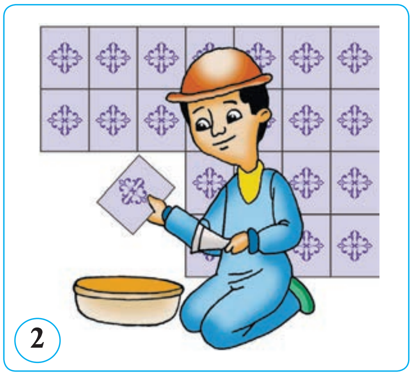
$$S_{\max}=\left(\frac{P}{4}\right)^2 \text{ kw. birl.}$$

2- nji netije. Eger gönüburçlugyň taraplary natural san we perimetri 2-ä kratny bolsa, onda diňe perimetrleri deň bolan ähli gönüburçluklardan taraplaryndan biri 1-e we ikinji tarapy bolsa 1-i ýarym perimetre dolduryjy san bolanda iň kiçi meýdana eýe bolýar.

3-nji netije. Gönüburçlugyň goňşy taraplarynyň uzynlyklary bir-birine ýakynlaşdygy saýyn meýdan barha artýar.

2- nji mesele. Hytaýça «tangram» oýnunda kwadrat 1-nji suratda görkezilişi ýaly





üçburçluklara we dörtburçluklara bölünen. Bulardan dürlüçe şekilleri gurmak mümkin. Eger kwadratyň tarapy 8 cm-e deň bolsa, bölünen şekilleriň meýdanlaryny tapyň.

Çözülişi. $a=8$ cm – kwadratyň tarapy. $S=a^2=8^2=64$ (cm^2) – berlen kwadratyň meýdany. Indi şekildäki bölejikleriň meýdanlaryny tapýarys.

1) S_1 we S_7 – kwadratyň meýdanynyň dörtden birine deň. Diýmek,

$$S_1=S_7=S:4=64:4=16 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2) Deňýanly gönüburçly üçburçlugyň meýdany gipotenuzanyň kwadratynyň dörtden birine deň. Diýmek,

$$S_2=S_5=0{,}25\cdot(a:2)^2=0{,}25\cdot 4^2=0{,}25\cdot 16=4 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

3) S_3 kwadratyň meýdany iki S_2 üçburçlugyň meýdanlarynyň jemine deň. Diýmek, $S_3=2S_2=2\cdot 4=8$ (cm^2).

4) S_4 üçburçlugyň katetleri berlen kwadratyň tarapynyň ýarysyna deň, ýagny $a:2=8:2=4$ (cm). Deňýanly üçburçlugyň meýdany katetiniň kwadratynyň ýarysyna deň, ýagny $S_4=0{,}5\cdot 4^2=0{,}5\cdot 16=8$ (cm^2).

5) Esaslary we beýiklikleri deň bolan kwadrat bilen parallelogram deňdeş, şonuň üçin $S_6=S_3=2\cdot 4=8$ (cm^2).

Jogaby: $S_1=S_7=16$ cm^2; $S_2=S_5=4$ cm^2; $S_3=S_4=S_6=8$ cm^2.

3-nji mesele. Ussa uzynlygy 2,25 m we ini 1,8 m bolan gönüburçluk şeklindäki diwaryň bölegini kafel bilen örtmekçi. Munuň üçin oňa tarapy 15 cm-lik kwadrat şeklindäki kafelden näçe gerek bolar (2-nji surat)?

Çözülişi. 1) Örtülmeli bolan diwaryň meýdanyny tapýarys we ony kwadrat santimetrde aňladýarys:

$$2{,}25\cdot 1{,}8=4{,}05 \text{ (m}^2\text{)}=4{,}05\cdot 10\,000 \text{ cm}^2=40500 \text{ cm}^2.$$

2) Bir sany kafeliň meýdanyny tapýarys: $a^2=15^2=225$ (cm^2).

3) Gönüburçluk şeklindäki diwary örtmek üçin näçe kafel gerek bolýandygyny tapýarys:

$$40500:225=180 \text{ (ta)}.$$

Jogaby: 180 sany kafel.

Aşakdaky meseläni çözmegi özüňize hödürleýäris.

4-nji mesele. Tarapy 4 m-e deň bolan kwadrat şeklindäki ýodany örtmek üçin tarapy 20 cm-lik kafelden näçe gerek bolar?

AMALY KOMPETENSIÝANY ÖSDÜRIJI GOŞMAÇA MATERIALLAR

GÖZENEKLI KAGYZDA MEÝDANLARY HASAPLAMAK

Gözenekli kagyzda berlen güberçek we güberçek bolmadyk köpburçluklaryň meýdanyny hasaplamak üçin «**Pikiň formulasy**» diýlip atlandyrylýan formulany getirýäris. Her bir gözenegiň tarapynyň uzynlygy 1 cm bolsun. Gözenekli kagyzdaky göni çyzyklaryň kesişme nokatlaryny – birlik kwadratyň depelerini **düwün nokatlar** diýip atlandyrýarys. Onda köpburçlugyň meýdany aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$S = \frac{M}{2} + N - 1 .$$

Bu formulada M – köpburçlugyň araçäginde ýatýan düwün nokatlaryň sany, N – köpburçlugyň içinde ýatýan düwün nokatlaryň sany.

Bu formulany köpburçlugyň depeleri düwün nokatlarda bolan islendik köpburçluk üçin ulanmak bolýar.

1-nji mesele. 1-nji suratdaky şekiliň meýdanyny hasaplaň.

Çözülişi. 1-nji usul. 1) Ähli doly kwadratlar 59 sany bolup, olaryň meýdany 59 cm^2; kwadratyň ýarysyna deň bolan üçburçluklar 16 sany bolup, olaryň meýdany $16:2=8$ (cm^2); bir esasy 2 cm, beýikligi 3 cm-e deň üçburçluk bar, onuň meýdany 3 cm^2-a deň.

Şeýlelikde, berlen köpburçlugyň meýdany: $S=59+8+3=71$ (cm^2).

2-nji usul. Şu jogabyň Pikiň formulasynyň kömeginde nähili tapylýandygyna garap geçýäris. Düwün nokatlary bellik edýäris.

1) Şekiliň içinde ýatýan düwün nokatlary (gara reňkde belgilenen) sanaýarys: olar 50 sany, ýagny $N=50$.

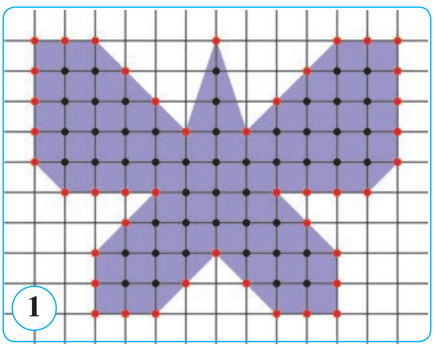
2) Şekiliň taraplarynda ýatýan düwün nokatlary (gyzyl reňkde belgilenen) sanaýarys: olar 44 sany, ýagny $M=44$. Pikiň formulasyny ulanýarys:

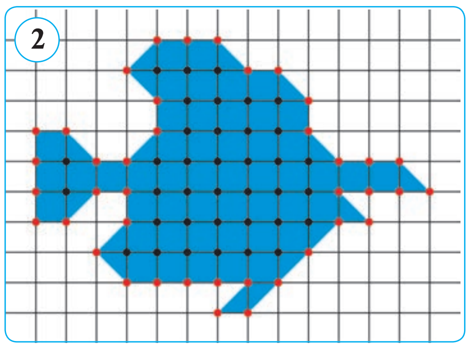
$$S = \frac{44}{2} + 50 - 1 = 22 + 49 = 71 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diýmek, iki usulda-da birmeňzeş netije gelip çykdy. *Jogaby:* 71 cm^2.

2-nji mesele. 2-nji suratdaky köpburçlugyň meýdanyny hasaplaň.

Çözülişi. 1) Köpburçlugyň taraplarynda ýatýan düwün nokatlary (gyzyl reňkde belgilenen) sanaýarys: olar 40 sany, ýagny $M=40$.


1

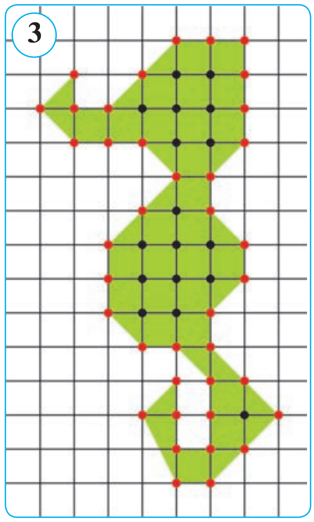

2

2) Köpburçluk içinde ýatýan düwün nokatlary (gara reňkde belgilenen) sanaýarys: olar 37 sany, ýagny $N=37$.

Pikiň formulasyna görä:

$$S = \frac{40}{2} + 37 - 1 = 20 + 36 = 56 \ (\text{cm}^2).$$

Jogaby: 56 cm^2.



3- nji mesele. 3-nji suratdaky köpburçlugyň meýdanyny hasaplaň.

Çözülişi. 1-nji usul. 1) Köpburçlugyň taraplarynda ýatýan düwün nokatlary (gyzyl reňkde belgilenen) sanaýarys: olar 39 sany, ýagny $M=39$.

2) Köpburçlugyň içinde ýatýan düwün nokatlary (gara reňkde belgilenen) sanaýarys: olar 17 sany, ýagny $N=17$.

Pikiň formulasyna görä:

$$S = \frac{39}{2} + 17 - 1 = 19{,}5 + 16 = 35{,}5 \ (\text{cm}^2).$$

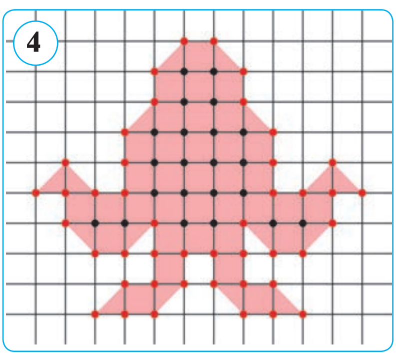
2- *nji usul*. Alnan jogabyň dogrudygyna ýene bir gezek göz ýetirmekçi bolsaňyz, ilki berlen köpburçlugy dürli usullar bilen öwrenilen güberçek köpburçluklara bölüň. Soňra emele gelen şekilleriň meýdanlaryny degişli formulalaryň kömeginde hasaplaň. Alnan netijeleri goşup, 1-nji usulda çykan netije bilen deňeşdiriň. Eger hasaplamalary dogry ýerine ýetirseňiz, elbetde iki netije-de birmeňzeş bolar. Berlen köpburçluk çyzgyda dürli şekillere bölünip görkezilmese-de bolýar. Hasaplama usulyny saýlamak özüňize bagly. Hasaplamalary ýatdan ýetirse-de bolýar.

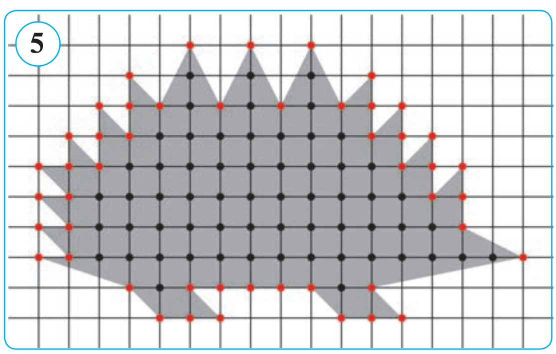
Ähli doly kwadratlar 26 sany, olaryň meýdany 26 cm^2; kwadratyň ýarysyna deň bolan üçburçluklar 17 sany, olaryň meýdany $17:2=8{,}5$ (cm^2); bir esasy 2 cm, beýikligi 1 cm-e deň üçburçluk bar, onuň meýdany 1 cm^2-a deň. Şeýlelikde, berlen köpburçlugyň meýdany: $26+8{,}5+1=35{,}5$ (cm^2).

Diýmek, iki netije hem birmeňzeş.

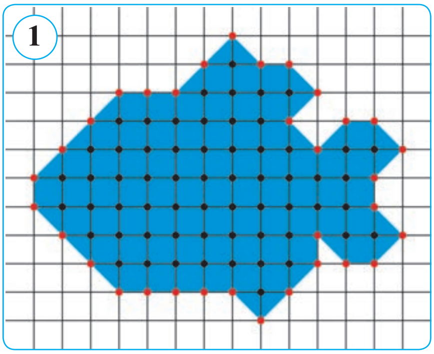
Jogaby: 35,5 cm^2.

4- nji mesele. 4-nji we 5-nji suratdaky köpburçluklaryň meýdanyny Pikiň formulasyny ulanyp hasaplaň.





53–54. 4-NJI BARLAG IŞI. ÝALŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK



1. Taraplary 27 cm we 21 cm-e deň gönüburçlugyň perimetrine deň bolan kwadratyň meýdanyny tapyň.

2. Gönüburçlugyň meýdany 540 cm^2, iki tarapynyň gatnaşygy 3 : 5 ýaly. Şu gönüburçlugyň perimetrini tapyň.

3. Parallelogramyň meýdany 24 cm^2. Eger onuň beýiklikleri 3 cm we 4 cm-e deň bolsa, onuň perimetrini tapyň.

4. 1-nji suratda şekillendirilen şekiliň meýdanyny böleklere bölüp hem-de Pikiň formulasyny ulanyp tapyň.

4-nji test Özüňizi synap görüň!

1. Eger gönüburçlugyň taraplary 4 esse artdyrylsa, onuň meýdany näçe esse artar?
A) 4; B) 8; D) 16; E) 32.

2. Gönüburçlugyň meýdany 400 ha, taraplarynyň gatnaşygy 4 : 1-e deň. Şu gönüburçlugyň perimetrini tapyň.
A) 10 km; B) 5 km; D) 2 km; E) 8 km.

3. Gönüburçlugyň uzynlygy 25 %-e artdyryldy. Onuň meýdany üýtgemez ýaly inini näçe göterim kemeltmeli?
A) 20 %; B) 16 %; D) 25 %; E) 18 %.

4. Kwadratyň tarapyny näçe esse kemeldende meýdany 4 esse kiçeler?
A) 1,5 esse; B) 2 esse; D) 3 esse; E) 3,5 esse.

5. Meýdany 144 cm^2, beýiklikleri 8 cm we 12 cm bolan parallelogramyň perimetrini tapyň.
A) 40 cm; B) 30 cm; D) 80 cm; E) 60 cm.

6. *ABCD* parallelogramyň *AC* diagonalyna *BO* perpendikulýar geçirilen. $AO=8$ cm, $OC=6$ cm we $BO=4$ cm bolsa, parallelogramyň meýdanyny tapyň.
A) 50 cm^2; B) 28 cm^2; D) 52 cm^2; E) 56 cm^2.

7. Rombuň meýdany 40 cm^2-a, onuň perimetri 20 cm-e deň. Şu rombuň beýikligini tapyň.
A) 2 cm; B) 8 cm; D) 4 cm; E) 16 cm.

8. Esaslary 5 cm we 9 cm-e deň bolan trapesiýanyň meýdany 35 cm^2-a deň. Şu trapesiýanyň beýikligini tapyň.
A) 9 cm; B) 8 cm; D) 5 cm; E) 10 cm.

9. Esaslary 8 we 12-ä deň bolan deňýanly trapesiýanyň diagonallary özara perpendikulýar. Trapesiýanyň meýdanyny tapyň.

A) 100; B) 64; D) 144; E) 76.

10. Trapesiýanyň meýdany 30 cm^2-a, beýikligi 6 cm-e deň bolsa, onuň orta çyzygy näçä deň bolar?

A) 2,5 cm; B) 5 cm; D) 7,5 cm; E) 4,5 cm.

Iňlis dilini öwrenýäris!

Kwadrat kök – square root
Üçburçluk – triangle
Orta çyzyk – midline

Geronyň formulasy – formula of Heron
Meýdan – area

Taryhy maglumatlar

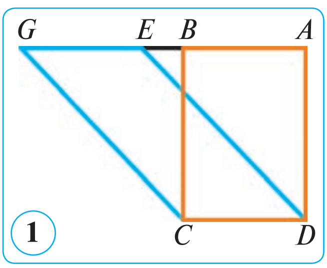
Abu Ali ibn Sina
(980–1037)

Ibn Sinanyň «Danişnama» eseriniň bäşinji baby «Dörtburçluklara, olarda ýerleşen üçburçluklara we olaryň gatnaşyklaryna degişli esasy geometrik meseleler» temasyna bagyşlanan. Eserde parallel çyzyklar barada aşakdaky ýaly pikirlar aýdylyp geçilen.

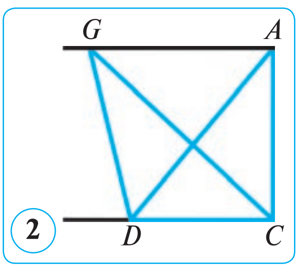
1-nji teorema. Özara parallel iki çyzygyň arasyna ýerleşen, umumy esasa eýe we garşylykly taraplary parallel şekiller deňdeş bolýar (ýagny olaryň meýdanlary deň). Meselem, esaslary *CD* bolan *ABCD* we *EGCD* tekiz şekiller özara deňdeş bolýar (1-nji surat).

2-nji teorema. Özara parallel çyzyklaryň arasyna ýerleşen we umumy esasa eýe bolan üçburçluklar deňdeş bolýar. Meselem, *CD* esasa eýe bolan *ACD* we *GCD* üçburçluklar deňdeş bolýar (2-nji surat).

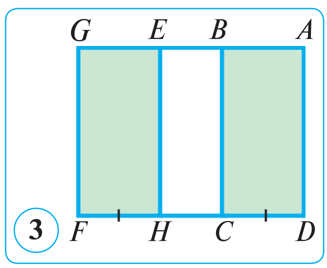
3-nji teorema. Özara parallel çyzyklaryň arasyna ýerleşen we esaslary deň bolan dörtburçluklar deňdeş bolýar. Meselem, *ABCD* we *GEHF* dörtburçluklar deňdeşdir (3-nji surat).



1



2



3

V BAP
TÖWEREK

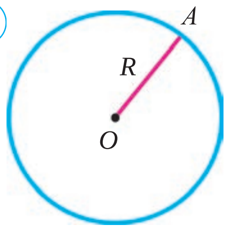
10-§. TÖWEREKDÄKI BURÇLAR

55. GÖNI ÇYZYGYŇ WE TÖWEREGIŇ ÖZARA ÝERLEŞIŞI. TÖWEREGE GALTAŞMA WE ONUŇ HÄSIÝETLERI

1. Töwerek barada başlangyç maglumatlar.

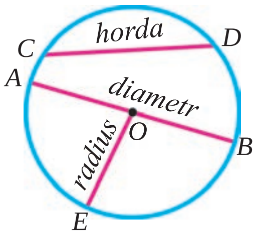
Kesgitleme. *Tekizligiň berlen nokadyndan birmeňzeş uzaklykda ýatýan ähli nokatlaryndan ybarat şekile* ***töwerek*** *diýilýär.*

1



O merkezli, R radiusly töwerek, ýagny (O, R)

a



CD – horda, OE – radius, AB – diametr

b

Berlen O nokada ***töweregiň merkezi*** diýilýär. Töweregiň islendik nokatlaryndan onuň merkezine çenli bolan aralyga ***töweregiň radiusy*** diýilýär. Şonuň ýaly-da, töweregiň nokadyny onuň merkezi bilen utgaşdyrýan islendik kesime-de *radius* diýilýär. Şeýlelikde, merkezi O nokat we radiusy R bolan töwerek – berlen O nokatdan R-e deň aralykda ýerleşen tekizligiň hemme nokatlaryndan düzülen geometrik şekildir.

Adatda, O merkezli we R radiusly töwerek aşakdaky ýaly belgilenýär: (O, R) (1-nji *a* surat).

Töweregiň islendik iki nokadyny utgaşdyrýan kesime ***horda*** diýilýär. Töweregiň merkezinden geçýän horda onuň ***diametri*** diýilýär.

1-nji *b* suratda töweregiň radiusy we iki hordasy şekillendirilen bolup, hordadan biri töweregiň diametridir: OE – radius, CD – horda, AB – diametr.

Adatda, diametr d harpy bilen belgilenýär. Bize mälim bolşy ýaly, diametr radiusdan iki esse uly, ýagny $d = 2R$-e deň.

2. Göni çyzygyň we töweregiň özara ýerleşişi.

Bu temada tekizlikde göni çyzyk bilen töweregiň özara ýerleşişine garap geçýäris. Eger göni çyzyk töweregiň merkezinden geçse, onda ol töweregi iki nokatda, ýagny bu göni çyzykda ýatýan diametriň depelerinde kesip geçýändigi görnüp dur.

Berlen l göni çyzyk bilen (O, R) töwerek näçe umumy nokada eýe, diýen soraga jogap bermek üçin töweregiň merkezi O-dan l göni çyzyga çenli bolan d aralygy şu töweregiň R radiusy bilen deňeşdirmeli.

Töweregiň merkezinden göni çyzyga geçirilen perpendikulýar *töweregiň merkezinden göni çyzyga çenli aralyk* diýlip atlandyrylýar.

Üç ýagdaýyň bolmagy mümkin: 1) $d>R$; 2) $d=R$; 3) $d<R$. Indi şu ýagdaýlara garap geçýäris.

1-nji ýagdaý. *Eger töweregiň merkezinden göni çyzyga çenli bolan aralyk töweregiň radiusyndan uly bolsa, göni çyzyk bilen töwerek umumy nokada eýe bolmaýar, ýagny kesişmeýär.*

Hakykatdan hem, eger $d>R$ bolsa (2-nji *a* surat), l göni çyzygyň O merkeze iň ýakyn nokady (bu göni çyzygyň islendik nokady hem) (O, R) töwerege degişli bolmaýar, çünki ol merkezden töweregiň radiusyndan uly aralykda bolýar.

2-nji ýagdaý. *Eger töweregiň merkezinden göni çyzyga çenli aralyk töweregiň radiusyna deň bolsa, onda göni çyzyk bilen töwerek bir we diňe bir umumy nokada eýe bolýar.*

Hakykatdan hem, eger $d=R$ bolsa (2-nji *b* surat), l göni çyzygyň O merkeze iň ýakyn nokady töweregiň radiusyna deň aralykda bolýar we diýmek, ol nokat töwerege hem degişli bolýar. l göni çyzygyň galan hemme nokatlary O merkezden töweregiň radiusyndan uly aralykda bolýar, diýmek, töwerege degişli bolmaýar.

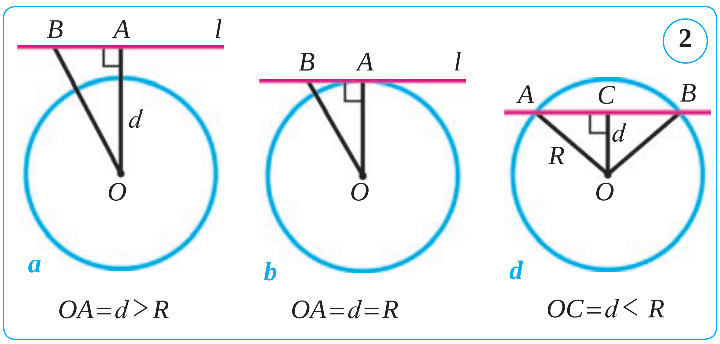
3-nji ýagdaý. *Töweregiň merkezinden göni çyzyga çenli bolan aralyk töweregiň radiusyndan kiçi bolsa ($d<R$), onda göni çyzyk bilen töwerek iki umumy nokada eýe bolýar.*

Göni çyzygyň töweregiň içindäki bölegi horda bolýar (2-nji *d* surat). Munda göni çyzyk töwerege görä *kesiji* diýilýär.

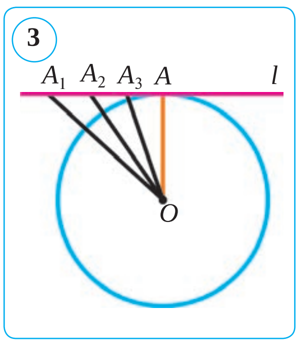
Hordanyň uzynlygy AB-ni töweregiň radiusyndan we merkezinden göni çyzyga çenli aralyk d arkaly aňlatmak mümkin: $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$.

Bu deňligi özüňiz subut ediň.

Netije. *Göni çyzyk bilen töwerek umumy nokatlara eýe bolmazlygy, bir ýa-da iki umumy nokada eýe bolmagy mümkin.*



$OA=d>R$ $OA=d=R$ $OC=d<R$



2. Töwerege galtaşma.

Kesgitleme. *Töwerek bilen diňe bir sany umumy nokada eýe bolan göni çyzyk şu töwerege* ***galtaşma****, olaryň umumy nokadyna bolsa* ***galtaşma nokady*** *diýilýär.*

2-nji b suratda l göni çyzyk O merkezli töwerege galtaşma, A – galtaşma nokady. Töwerek l göni çyzyga galtaşýar, diýmek hem mümkin.

Galtaşmanyň häsiýeti baradaky teoremany subut edýäris.

1-nji teorema.

Töwerege galtaşma şu töweregiň galtaşma nokadyna geçirilen radiusa perpendikulýardyr.

Subudy. l göni çyzyk töwerege A nokatda geçirilen galtaşma bolsun (3-nji surata g.). $R=OA$-nyň l-e perpendikulýardygyny subut edýäris. Şerte görä, l göni çyzygyň A nokadyndan başga hemme nokatlary töwerekden daşarda ýatýar. Şonuň üçin bu göni çyzygyň A-dan başga islendik A_1 nokady üçin $OA_1>OA$. Diýmek, OA aralyk O nokatdan l göni çyzygyň nokatlaryna çenli bolan aralyklaryň iň gysgasydyr. Nokatdan göni çyzyga çenli iň gysga aralyk bolsa şu göni çyzyga geçirilen perpendikulýar bolýar. Mundan, $OA\perp l$ bolýandygy gelip çykýar.

Teorema subut edildi. Endi galtaşmanyň häsiýetine ters teoremany subut edýäris.

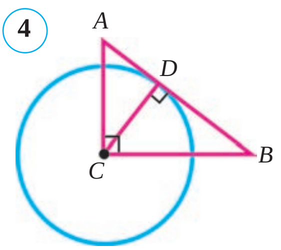
2-nji teorema.

Radiusa perpendikulýar we onuň töwerekde ýatýan depesinden geçýän göni çyzyk şu töwerege galtaşmadyr.

Subudy. Eger töweregiň merkezinden göni çyzyga çenli bolan aralyk töweregiň radiusyna deň ($d=R$) bolsa (2-nji b surata g.), l göni çyzygyň O merkeze iň ýakyn nokady töweregiň radiusyna deň bolýar, diýmek, ol nokat töwerege hem degişli bolýar. l göni çyzygyň galan hemme nokatlary O merkezden töweregiň radiusyndan uly aralykda bolýar, diýmek, töwerege degişli bolmaýar. Kesgitlemä görä, l göni çyzyk şu töwerege galtaşma bolýar. Teorema subut edildi.

Mesele. Gönüburçly ACB ($\angle C=90°$) üçburçlugyň katetleri $AC=3$ cm we $BC=4$ cm. Merkezi C nokatda bolan radiusy 2,4 cm-e deň töwerek geçirilen. Bu töwerek bilen AB göni çyzyk özara nähili ýagdaýda bolar?

4



Çözülişi. $\triangle ACB$ ($\angle C=90°$) da: $AC=3$ cm, $BC=4$ cm. Pifagoryň teoremasyna görä:

$$AB=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5 \text{ (cm)}.$$

$CD\perp AB$ ni geçirýäris (4-nji surat). Üçburçlugyň meýdanyny iki hili hasaplamak mümkin, ýagny $CA\cdot CB=AB\cdot CD$ deňlik ýerlikli. Mundan $ÑD=CA\cdot ÑB:$ $:AB=3\cdot 4:5=2{,}4$ (cm). Diýmek, C nokatdan AB göni çyzyga çenli bolan aralyk radiusyň uzynlygyna deň bolany üçin AB göni çyzyk töwerege galtaşýar.

Jogaby: AB – galtaşma.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Töwerek näme? Töweregiň: merkezi, radiusy, hordasy we diametri diýip nämä aýdylýar? Nähili göni çyzyk töwerege galtaşma diýilýär?

2) Galtaşmanyň nähili häsiýetini we nyşanyny bilýärsiňiz?

2. d – R radiusly töweregiň merkezinden l göni çyzyga çenli bolan aralyk. Eger: 1) $R=8$ cm, $d=6$ cm; 2) $R=10$ cm, $d=8{,}4$ cm; 3) $R=14{,}4$ dm, $d=7{,}4$ dm; 4) $R=1{,}6$ dm, $d=24$ cm; 5) $R=4$ cm, $d=40$ mm bolsa, l göni çyzyk bilen töwerek özara nähili ýerleşen bolýar?

3. $ABCD$ kwadratyň tarapy 8 cm-e we merkezi A nokatda bolan töweregiň radiusy 7 cm-e deň. AB, BC, CD we BD göni çyzyklardan haýsysy şu töwerege görä kesiji bolýar?

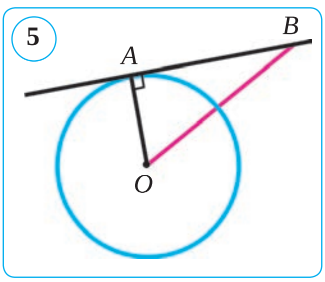
4. AB göni çyzyk O merkezli töweregiň A nokadyna geçirilen galtaşma. Eger $AB=24$ cm, töweregiň radiusy 7 cm-e deň bolsa, OB kesimiň uzynlygyny tapyň (5-nji surat).

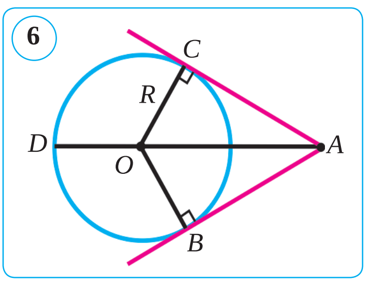
5. Gönüburçly ACB ($\angle C=90°$) üçburçlukda $AB=10$ cm, $\angle ABC=30°$. Merkezi A nokatda bolan töwerek geçirilen. Bu töweregiň radiusy nähili bolanda: 1) töwerek BC göni çyzyga galtaşýar; 2) BC göni çyzyk bilen umumy nokada eýe bolmaýar; 3) BC göni çyzyk bilen iki umumy nokada eýe bolýar?

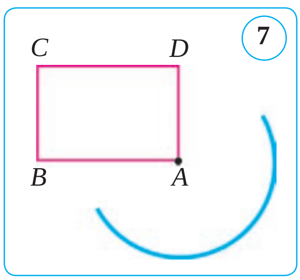
6. Töweregiň daşarsyndaky bir nokatdan oňa iki galtaşma geçirilse, şol nokatdan galtaşma nokatlaryna çenli bolan aralyklar deň. Şony subut ediň (6-njy surat).

7. Eger töweregiň radiusy 5 cm-e deň, töweregiň merkezinden göni çyzyga çenli bolan aralyk: 1) 6 cm; 2) 5 cm; 3) 4 cm bolsa, göni çyzyk bilen töwerek özara nähili ýerleşen bolýar?

8. $ABCD$ gönüburçluk berlen, onda $AB=16$ cm, $AD=12$ cm (7-nji surat). AC, BC, CD we BD göni çyzyklardan haýsy biri radiusy 12 cm-lik A merkezli töwerege galtaşma bolýar?





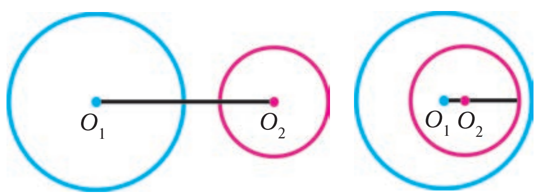


56. IKI TÖWEREGIŇ ÖZARA ÝERLEŞIŞI. MERKEZI BURÇUŇ WE DUGANYŇ GRADUS ÖLÇEGI

1. Iki töwereginň özara ýerleşişi.

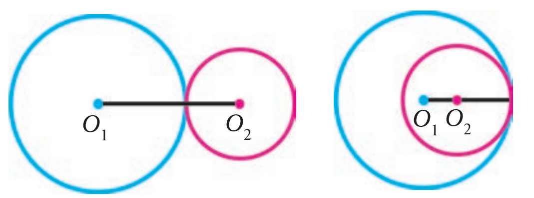
Iki töwerek özara ýerleşýän ýagdaýlara garap geçýäris.

1) Iki töwerek umumy nokada eýe bolmaýar. Munda olar töwerekden daşarda (1-nji *a* surat) ýa-da biri ikinjisiniň içinde bolýar (1-nji *b* surat).



1

$O_1O_2=d>R_1+R_2$ **a** $d+R_2=R_1$ **b**



2

$O_1O_2=d=R_1+R_2$ **a** $d=R_1-R_2$ **b**

2) Iki töwerek bir umumy nokada eýe bolýar (2-nji surat). Munda, töwerekler bir-birine *galtaşýar*, diýilýär. Emma munda töwerekler *daşky* tarapdan (2-nji *a* surat) ýa-da *içki* tarapdan galtaşmagy mümkin (2-nji *b* surat).

3) Iki töwerek iki umumy nokada eýe bolmagy mümkin (3-nji surat). Munda töwerekler bir-biri bilen *kesişýär*, diýilýär.

Umumy merkeze eýe bolan töwereklere *konsentrik töwerekler* diýilýär (4-nji surat).

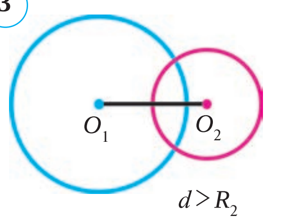
Iki töwereginň özara ýerleşişi olaryň radiusy bilen merkezleriň arasyndaky aralyga bagly bolýar.

Teorema.

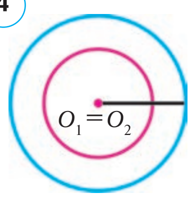
Eger iki töwereginň merkezleriniň arasyndaky aralyk olaryň radiuslarynyň jeminden uly ýa-da tapawudyndan kiçi bolsa, bu töwerekler umumy nokada eýe bolmaýar.

Subudy. O_1, O_2 merkezli we radiuslary degişlilikde R_1, R_2 ($d=R_1+R_2<O_1O_2$) bolan iki töwerek berlen bolsun (5-nji surat). Töwerekdäki A nokada garap geçýäris: $O_1A=R_1$. Onda $O_2A \geq O_1O_2-O_1A>R_1+R_2-R_1=R_2$ we diýmek, A nokat ikinji töwerege degişli däl. Diýmek, bu töwerekler umumy nokada eýe bolmaýar.

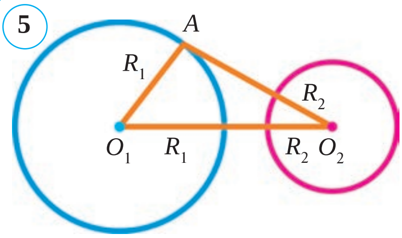
3



4



5



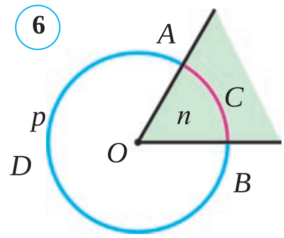
Iki töwerek bir umumy nokada eýe bolan ýagdaýa, şonuň ýaly-da, iki töwerek iki umumy nokada eýe bolan ýagdaýlara özbaşdak garaň.

2. Merkezi burç.

Kesgitleme. *Depesi töweregiň merkezinde bolan burç* ***merkezi burç*** *diýlip atlandyrylýar.*

Umumy depesi töweregiň O merkezinde bolan iki şöhle OA we OB iki merkezi burçy kesgitleýär, olardan biri güberçek zolak bilen araçäklenen bolýar. Töweregiň iki A we B nokady ony iki duga bölýär. Bu dugalar bir-birinden tapawutlanmagy üçin olaryň her birine bir sanydan aralyk nokat (duganyň depelerinden tapawutly) ýa-da latynça kiçi harp goýlup belgilenýär hem-de ACB (ýa-da AnB) we ADB (ýa-da ApB) *dugalar* diýilýär (6-njy surat). Dugalary aşakdaky ýaly belgilemek kabul edilen: $\cup ACB$ (ýa-da $\cup AnB$) we $\cup ADB$ (ýa-da $\cup ApB$). Käbir halatlarda duga aralyk nokatsyz belgilenýär: $\cup AB$ (iki dugadan haýsysy barada gürrüň edilýändigi düşnükli bolanda). Eger duganyň depelerini utgaşdyrýan kesim töweregiň diametri bolsa, duga *ýarym töwerek* diýilýär. 7-nji *b* suratda iki ýarym töwerek şekillendirilen, olardan biri aýratynlykda görkezilen.

6



FAOB– merkezi burç

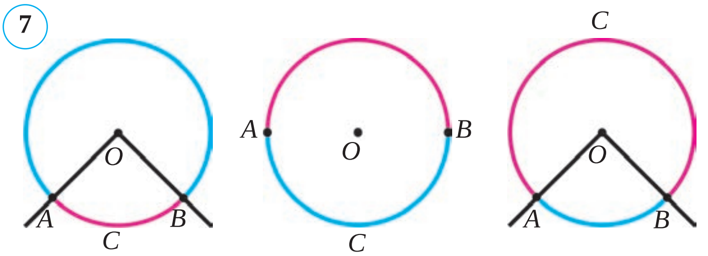
3. Duganyň gradus ölçegi.

Kesgitleme. ***Töwerek dugasynyň burç ululygy*** *diýip, töweregiň şu duga degişli merkezi burçunyň ululygyna aýdylýar.*

Töweregiň dugasyny graduslarda ölçemek mümkin. *Eger O merkezli töweregiň ACB dugasy ýarym töwerekden kiçi ýa-da ýarym töwerege deň bolsa, onda onuň gradus ölçegi AOB merkezi burçuň gradus ölçegine deň hasaplanýar* (7-nji *a, b* surat). *Eger ACB duga ýarym töwerekden uly bolsa, onda onuň gradus ölçegi* $360° - \angle AOB$*-ge deň hasaplanýar* (7-nji *d* surat).

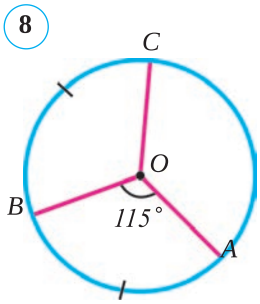
Mundan, *ahyrlary umumy bolan töweregiň iki dugasynyň gradus ölçegleriniň jemi* $360°$*-a deňligi* gelip çykýar.

7



$\cup ACB = \cup AOB$ **a**　$\cup ACB = 180°$ **b**　$\cup ACB = 360° - \angle AOB$ **d**

8



Töweregiň iki dugasynyň burç ululyklary (ýagny olara degişli merkezi burçlar) deň bolanda we diňe şonda bu dugalar deň bolýar.

Mesele. O nokat–töweregiň merkezi, $\angle AOB=115°$, $\cup BC=\cup AB$ (8-nji surat). AOC burçy tapyň.

Çözülişi. AOB burç töweregiň merkezi burçy, AB duga bolsa ýarym töwerekden kiçi, şonuň üçin $\cup AB=\angle AOB=115°$. Meseläniň şertine görä, $\cup BC=\cup AB$ we diýmek, BC duga 115°-a deň. $\cup ABC=\cup AB+\cup BC=230°>180°$, ýagny ABC duga ýarym töwerekden uly, şonuň üçin $\angle AOC=360°-ABC==360°-230°=130°$. *Jogaby:* $\angle AOC=130°$.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Töwerek berlen nokatda galtaşýar diýende, nämäni düşünýärsiňiz?
2) Konsentrik töwerekler diýip nämä aýdylýar?
3) Merkezi burç näme? Töweregiň dugasy nähili belgilenýär?
4) Töweregiň dugasynyň burç ululygy näme?

2. Eger iki töweregiň merkezleriniň arasyndaky aralyk 2 cm, radiuslary degişlilikde: 1) 3 cm we 5 cm; 2) 2 cm we 5 cm bolsa, olar bir-birine görä özara nähili ýerleşen bolýar?

3. Eger radiuslary 4 cm we 6 cm-e deň töwerekler: 1) daşky tarapdan galtaşsa; 2) içki tarapdan galtaşsa, olaryň merkezleriniň arasyndaky aralyk nämä deň?

4. Töweregiň merkezinden geçýän iki göni çyzyk bu töwerekde näçe duga we näçe merkezi burçy kesgitleýär?

5. Berlen töweregiň nokadyndan radiusyna deň iki horda geçirilen. Olaryň arasyndaky burçy tapyň.

6. Merkezi burça laýyk duga töweregiň: 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{13}{18}$; 6) $\frac{17}{20}$; 7) $\frac{23}{30}$ bölegine deň. Şu merkezi burçy tapyň.

7. Töwerek iki nokat bilen iki duga bölünýär. Eger: 1) olardan biriniň burç ululygy ikinjisiniň burç ululygyndan 40° artyk bolsa; 2) bu dugalaryň burç ululyklary $2:7$ gatnaşykda bolsa, burçlaryň hersiniň ululygyny tapyň.

8. A, B, C nokatlar merkezi O nokatda bolan töwerekde ýatýar. Eger $\cup ABC=70°$ bolsa, AOC burçy tapyň.

9. Töweregiň: 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{1}{12}$ bölegini düzýän AB duga laýyk gelýän merkezi burçlary tapyň. Bu ýagdaýlaryň her birinde AB duganyň burç ululygyny belgileriň kömeginde ýazyň.

10. Töweregiň radiusy: 1) 7,8 cm; 2) 10,5 cm; 3) 0,8 dm. Töweregiň diametrini tapyň.

57. TÖWEREGIŇ IÇINDEN ÇYZYLAN BURÇ

Kesgitleme. *Depesi töwerekde ýatýan, taraplary bolsa şu töweregi kesip geçýän burça* ***töweregiň içinden çyzylan burç*** *diýilýär.*

1-nji suratda ABC burç töweregiň içinden çyzylan, AnC duga şu burçuň içine ýerleşen. Şeýle ýagdaýda, içinden çyzylan ABC burç AnC duga direlýän diýip hem aýdylýar.

Teorema.

Töweregiň içinden çyzylan burç özi direlýän duganyň ýarysy bilen ölçenýär:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Subudy. $\angle ABC - O$ merkezli töweregiň AC dugasyna direlýän içinden çyzylan burçy bolsun (2-nji surat). Töweregiň merkeziniň şu içinden çyzylan burça görä ýerleşişiniň üç ýagdaýyna garap geçýäris.

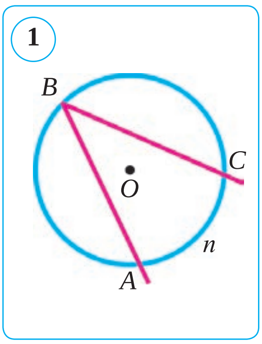
1-nji ýagdaý. Töweregiň merkezi içinden çyzylan burçuň taraplaryndan biri, meselem, BC tarapda ýatýar (2-nji *a* surat). OA radiusy geçirýäris we AOC merkezi burça garaýarys. Ol BOA üçburçlugyň daşky burçudyr. Üçburçlugyň daşky burçunyň häsiýetine görä: $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$. Emma $\angle OBA = \angle OAB$, çünki AOB üçburçluk deňýanly ($OA = OB = R$). OBA we OAB burçlar bolsa deňýanly üçburçlugyň esasyndaky burçlardyr. Diýmek, $\angle AOC = 2\angle ABC$ (1). Merkezi burçuň ululygy şu burça laýyk duganyň burç ululygyna deň bolýandygyny bilýärsiňiz (56-njy tema). Munda AC duga ýarym töwerekden kiçi, şonuň üçin merkezi burçuň häsiýetine görä:

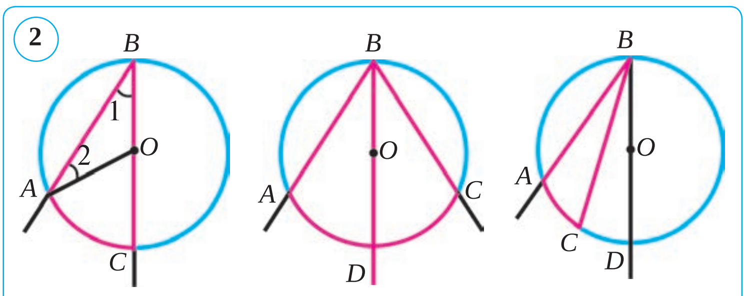
$$\angle AOC = \cup AC. \qquad (2).$$

(1) we (2) deňliklerden: $2\angle ABC = \cup AC$, ýagny $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Teorema 1-nji ýagdaý üçin subut edildi.

2-nji ýagdaý. Töweregiň merkezi O içinden çyzylan burçuň taraplarynyň arasynda ýatýar. BO şöhläni geçirýäris, ol AC dugany käbir D nokatda kesýär





a *b* *d*

(2-nji b surat). D nokat AC dugany iki $\cup AD$ we $\cup DC$ duga bölýär. Diýmek, subuda görä (1-nji ýagdaý): $\angle ABD = \frac{1}{2}\cup AD$ we $\angle DBC = \frac{1}{2}\cup DC$. Bu deňlikleri agzama-agza goşup, aşakdakylary alarys:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}\cup AD + \frac{1}{2}\cup DC = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2}\cup AC.$$

3-nji ýagdaý. Töweregiň merkezi O içinden çyzylan burçdan daşarda ýatýar. Bu ýagdaýyň subudyny 2-nji d suratdan peýdalanyp, özüňiz özbaşdak ýerine ýetiriň.

1-nji netije. *Bir duga direlýän hemme içinden çyzylan burçlar özara deňdir* (3-nji a surat):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = \frac{1}{2}\cup AC.$$

2-nji netije. *Diametre (ýarym töwerege) direlýän hemme içinden çyzylan burçlar göni burçdyr* (3-nji b surat):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = 90°.$$

Mesele. Töweregiň radiusyna deň horda geçirilen. Şu horda: 1) töweregiň merkezinden; 2) berlen hordanyň depelerinden tapawutly töweregiň islendik nokadyndan nähili burç astynda görünýär?

Çözülişi. AB – O merkezli töweregiň radiusyna deň horda bolsun (4-nji surat). Onda AOB üçburçluk deň taraply we diýmek, merkezi burç (töweregiň merkezinden AB horda görünýän burç) 60°-a deň. A we B nokatlardan tapawutly töweregiň islendik C nokadyndan içinden çyzylan ACB burç (C nokatdan AB horda görünýän burç) merkezi burçuň ýarysyna deň, ýagny 30°-a deň.

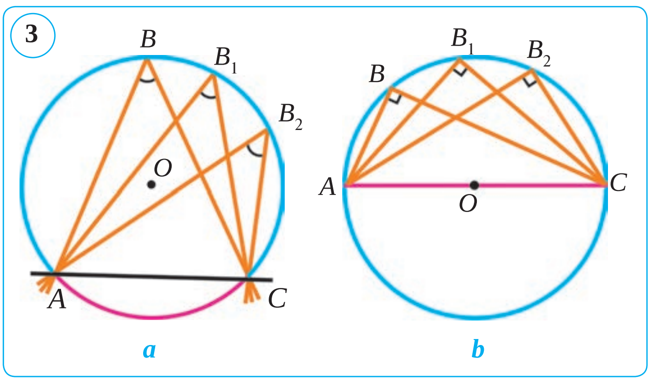
Jogaby: 1) 60°; 2) 30°.

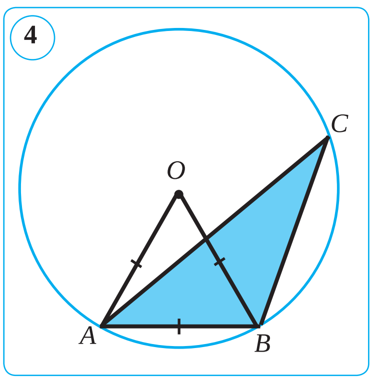
Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Nähili burça töweregiň içinden çyzylan burç diýilýär?

2) Içinden çyzylan burç nähili ölçenýär?

3) Ýarym töwerege direlýän içinden çyzylan burç nämä deň?





2. (*Ýatdan.*) Içinden çyzylan burç 25°-a deň. Şu içki burça direlýän duganyň ululygyny tapyň.

3. AB we BC – merkezi O nokatda bolan töweregiň hordalary, $\angle ABC = 30°$. Eger töwerek radiusy 10 cm-e deň bolsa, AC hordanyň uzynlygyny tapyň.

4. 1) 5-nji suratda O nokat – töweregiň merkezi, $\angle AOB = 88°$. $\angle ACB$-ni tapyň.
Çözülişi. AOB burç berlen töweregiň ... burçy bolýar we ...°-a deň. Diýmek, $\cup ADB = ...°$. ACB burç ... çyzylan burç bolýar we ... duga direlýär, şonuň üçin $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup ... = ...°$. *Jogaby:* $\angle ACB = ...°$.
2) 6-njy suratda $\cup CAB = 130°$. $\angle CAB$ni tapyň.
Çözülişi. CAB burç töweregiň içinden çyzylan burç bolýar we $\cup CDB$ duga direlýän. Mundan:

$$\cup CDB = 360° - \cup CAB = 360° - 130° = 230°,$$

$$\angle CAB = \frac{1}{2} \cup CDB = \frac{1}{2} \cdot 230° = 115°.$$

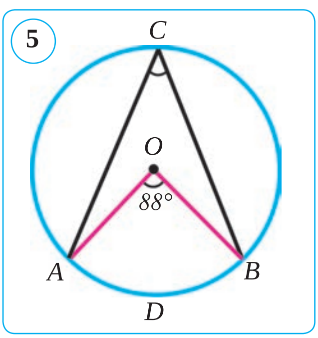
Jogaby: $\angle CAB = 115°$.
3) 7-nji suratda $\angle APE = 46°, \angle BCE = 34°$. $\angle AEP$-ni tapyň.
Çözülişi. PAB we BCP içinden çyzylan burçlar bir sany BP ..., diýmek, $\angle PAB = \angle ... = ...$. AEP üçburçlukdan aşakdaka eýe bolarys:
$\angle AEP = 180° - (\angle ... + \angle ...) = 180° - (... + ...) = ...$. *Jogaby:* $\angle AEP = ...$.

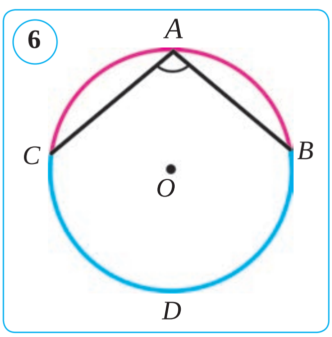
5. Töwerekde ýatýan A, B, C nokatlar bu töweregi üç duga bölýär. Bu dugalaryň gradus ölçegleriniň gatnaşygy $3:5:7$ ýaly. ABC üçburçlugyň burçlaryny tapyň.

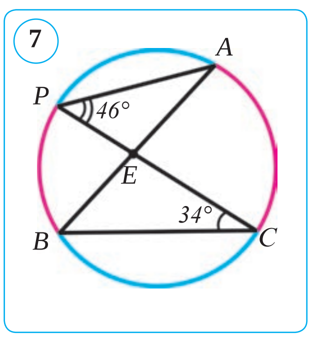
6. Horda töweregi iki duga bölýär. Eger bu dugalar burç ululyklarynyň gatnaşygy: 1) $5:4$; 2) $7:3$ ýaly bolsa, horda töweregiň nokatlaryndan nähili burç astynda görünýär?

7. Töwerege AB diametr we AC horda geçirilen. Eger AC we CB dugalaryň gradus ölçegi $7:2$ gatnaşykda bolsa, BAC burçy tapyň.

8. AB we AC – töweregiň hordalary, $\angle BAC = 70°$, $\cup AB = 120°$. AC duganyň gradus mukdaryny tapyň.







58. TÖWEREGIŇ KESIJILERI EMELE GETIREN BURÇLAR

1. Galtaşma bilen hordadan düzülen burç.

1-nji t e o r e m a .

Galtaşma bilen hordadan düzülen burç öz içine alan duganyň ýarysy bilen ölçenýär.

Subudy. AB galtaşma we BC horda bolsun. $\angle ABC=\frac{1}{2}\cup BmC$ bolýandygyny subut edýäris (1-nji surat). Munuň üçin C depesinden $CD \| AB$-ni geçirsek, F$ABC=\angle BCD$, çünki olar içki atanak burçlar.

Emma $\angle C=\frac{1}{2}\cup BnD$ we $CD \| AB$ bolany üçin $\cup BnD=\cup BmC$ we $\angle B=\angle C=\frac{1}{2}\cup BnD=\frac{1}{2}\cup BmC$. Teorema subut edildi.

1- nji mesele. AB horda 56°-ly dugany çekip durýar. Şu hordanyň depelerinden töwerege geçirilen galtaşmalar bilen hordadan emele gelen burçlary tapyň.

Berlen: $(O,\ R)$, AB – horda, $\angle AOB=56°$ – AB hordany çekip duran merkezi burç, $AC \perp OA$, $BC \perp OB$ (2-nji surat).

Tapmaly: $\angle CAB$, $\angle CAB$, $\angle BAD$, $\angle ABE$.

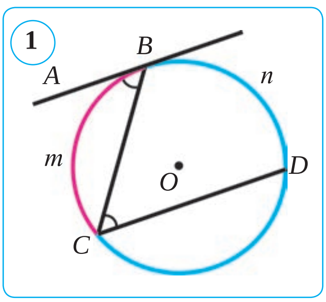
Çözülişi. Galtaşma bilen hordanyň arasyndaky duga $\cup AB=56°$ (1-nji ýagdaý) ýa-da $\cup AnB=360°-56°=304°$ (2-nji ýagdaý) bolýar.

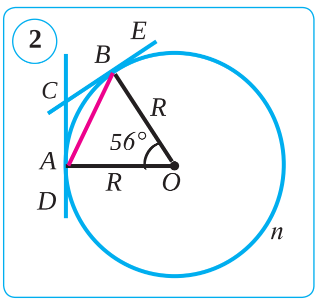
Şeýlelikde, 1-nji ýagdaýda $\angle CAD=\frac{1}{2}\cup AB=\frac{1}{2}\cdot 56°=28°$, 2-nji ýagdaýda bolsa $\angle BAD=\frac{1}{2}\cup AnB=\frac{1}{2}\cdot 304°=152°$ -ä eýe bolarys.

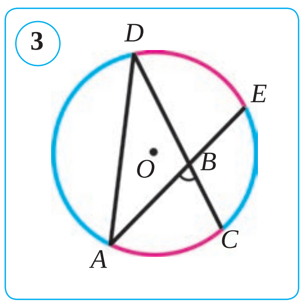
Bize mälim bolşy ýaly, töweregiň daşarsyndaky bir nokatdan töwerege geçirilen galtaşmalaryň galtaşma nokatlaryna çenli bolan kesimleri deň bolýar. Şonuň üçin $\triangle ACB$ – deňýanly.

Diýmek, $\angle CAB=\angle CBA=28°$ we $\angle BAD=\angle ABE=152°$.

Jogaby: $\angle CAB=\angle CBA=28°$, $\angle BAD=\angle ABE=152°$.







2. Iki hordanyň kesişmeginden emele gelen burçlar.

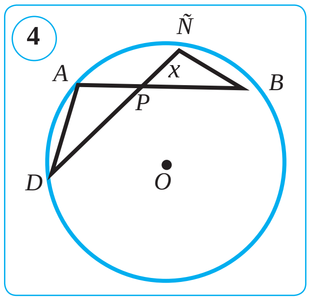
2-nji t e o r e m a. **Islendik iki hordanyň kesişmeginden emele gelen her haýsy wertikal burç öz taraplary direlýän dugalaryň jeminiň ýarysyna deň.**

Subudy. $\angle ABC-CD$ we AE hordalaryň kesişmeginden emele gelen burçlardan biri bolsun (3-nji surat).

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$ bolýandygyny subut edýäris. Munuň üçin A we D nokatlary birleşdirýäris, onda $\angle ABC \triangle ABD$-ge görä daşky burç bolýar. Diýmek, $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$. Emma $\angle ADC = \frac{1}{2} \cup AC$ we $\angle DAE = \frac{1}{2} \cup DE$. Şonuň üçin

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC + \frac{1}{2} \cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE).$$

$\angle ABD = \angle CBE = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup EC)$ ekenligi edil ýokardaky ýaly subut edilýär. Muny özbaşdak subut ediň.



2-nji mesele. AB we CD – bir töweregiň hordalary, P – olaryň kesişme nokady. Eger BPD burç BPC burçdan 4 esse uly, CDA burç bolsa BPC-dan 26°-a uly bolsa, CBP burçy tapyň.

Berlen: $\angle BPD = 4\angle BPC$, $\angle CDA = \angle BPC + 26°$ (4-nji surat). *Tapmaly:* $\angle CBP$.

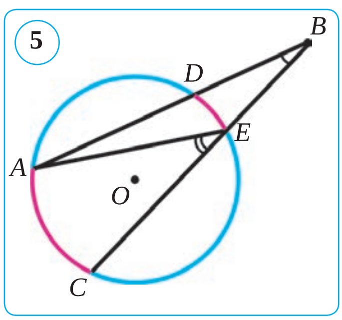
Çözülişi. $\angle BPD + \angle BPC = 180°$,

$4\angle BPC + \angle BPC = 180°$, mundan $5\angle BPC = 180°$ we ahyrynda, $\angle BPC = 36°$. $\angle CDA = \angle BPC + 26° = 36° + 26° = 62°$. $\angle CBA = \angle CDA = 62°$, çünki olar bir $\cup AC$-ge direlýän içinden çyzylan burçlar. Mundan $\angle CBP = \angle CBA = 62°$.

Jogaby: $\angle CBP = 62°$.

3. Töwerek daşarsyndaky bir nokatdan oňa geçirilen iki kesijiniň arasyndaky burç.

3-nji t e o r e m a. **Töweregiň daşarsyndaky bir nokatdan oňa geçirilen iki kesijiniň arasyndaky burç (ABC) kesijileriň arasyndaky dugalaryň (AC we DE) tapawudynyň ýarysyna deň.**



Subudy. B – töwerek daşarsyndaky nokat, BA we BC kesijiler bolsun. $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$ bolýandygyny subut edýäris. Munuň üçin A we E nokatlary birleşdirýäris (5-nji surat).

$\angle AEC$ $\triangle AEB$-ge daşky burç bolýar. Diýmek, $\angle AEC = \angle B + \angle DAE$, mundan $\angle B = \angle AEC - DAE$. Emma $\angle AEC = 0{,}5\cup AC$ we $\angle DAE = 0{,}5\cup DE$. Bulary öz ýerlerine goýsak:

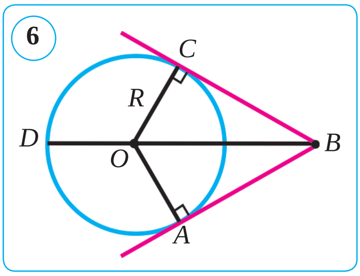
$$\angle B = \frac{1}{2}\cup AC - \frac{1}{2}\cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE).$$

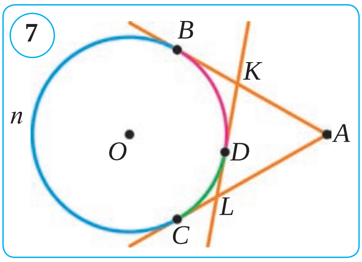
Diýmek, $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$. Teorema subut edildi.

4. Töweregiň daşarsyndaky bir nokatdan oňa geçirilen iki galtaşmanyň häsiýeti.

4-nji teorema.

Töweregiň daşarsyndaky bir nokatdan oňa iki galtaşma geçirilse, olaryň şol nokatdan galtaşma nokatlaryna çenli bolan kesimleri deň we töweregiň merkezi olaryň arasyndaky burçuň bissektrisasynda ýatýar, bu burç 180° bilen galtaşmalar direlýän duganyň tapawudyna deň.





Subudy. BC we BA göni çyzyklar töwerege C we A nokatlardan geçýän galtaşmalar, BD bolsa ABC burç bissektrisasy bolsun. $AB = CB$ we O merkeziň BD-da ýatýandygyny hem-de $\angle B = 180° - \cup AC$ bolýandygyny görkezýäris (6-njy surat).

OA we OC radiuslar geçirilse, $OA \perp BA$ we $OC \perp BC$ bolany üçin: $\triangle AOB$ we $\triangle COB$ – gönüburçly. $\triangle AOB = \triangle COB$, çünki BO gipotenuza umumy, $OA = OC = R$. Üçburçluklaryň deňliginden: $AB = BC$. Indi $OC = OA = R$ we $OA \perp BA$, $AB = BC$ we $OC \perp BC$ bolany üçin O merkez hemişe BD bissektrisada ýatýar. Töweregiň daşarsyndaky bir nokatdan geçirilen iki kesijiniň arasyndaky burçy ölçemek baradaky teorema esasan:

$$\angle B = 0{,}5(\cup ADC - \cup AC) = 0{,}5(360° - \cup AC - \cup CA) = 180° - \cup AC.$$

Diýmek, $\angle B = 180° - \cup AC$ bolýar. Teorema subut edildi.

3-nji mesele. Töweregiň A, B we C nokatlary ony $11:3:4$ gatnaşykdaky dugalara bölýär. A, B we C nokatlardan galtaşmalar geçirilip, bir-biri bilen kesişýänçe dowam etdirilen. Emele gelen üçburçlugyň burçlaryny tapyň.

Çözülişi. 1) $\cup BnC : \cup CD : \cup DB = 11:3:4$, galtaşma nokatlaryna galtaşmalar geçirmekden emele gelen üçburçluk AKL bolsun (7-nji surat). A, AKL we ALK burçlary tapýarys:

$$\cup BnC = \frac{360°}{11+3+4}\cdot 11 = 220°; \quad \cup CD = \frac{360°}{11+3+4}\cdot 3 = 60°;$$

$\cup DB = \dfrac{360°}{11+3+4} \cdot 4 = 80°$;

$\cup CDB = \cup CD + \cup DB = 60° + 80° = 140°$;

$FA = 180° - \cup CDB = 180° - 140° = 40°$,

$FBKD = 180° - \cup DB = 180° - 80° = 100°$,

$FAKL = 180° - \angle BKD = 180° - 100° = 80°$,

$FALK = 180° - (FA + \angle AKL) = 180° - (40° + 80°) = 180° - 120° = 60°$.

Jogaby: $\angle A = 40°$, $\angle AKL = 80°$, $\angle ALK = 60°$.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Galtaşma bilen hordadan düzülen; iki hordanyň kesişmeginden emele gelen; iki kesişýän hordanyň arasyndaky burç nähili ölçenýär?
2) Bir nokatdan geçirilen iki galtaşma nähili häsiýete eýe?

2. Töweregiň radiusyna deň AB horda A nokatda geçirilen galtaşma bilen nähili burçlary emele getirýär?

3. Töweregi kesiji iki hordasynyň arasyndaky burçlardan biri 70°-a deň. Şu burça goňşy bolan burçlaryň jemini tapyň.

4. 8-nji suratda şekillendirilen x nämälim mukdary tapyň.

5. Iki radiusyň arasyndaky burç 150°-a deň. Bu radiuslaryň ahyrlaryndan töwerege geçirilen galtaşmalaryň arasyndaky burçy tapyň.

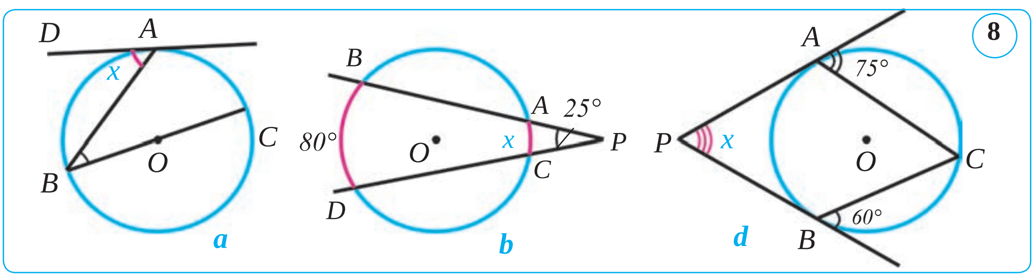
6. B nokatdan töwerege geçirilen BA we BC galtaşmalar töweregi galtaşma nokatlarynda: 1) 5 : 4; 2) 12 : 6; 3) 9 : 6; 4) 13 : 7; 5) 2 : 3 gatnaşykda iki duga bölýär. ABC burçuň mukdaryny tapyň.

7. Töweregi: 1) 2 : 7; 2) 4 : 5 gatnaşykda bölýän hordanyň depelerinden iki galtaşma geçirilen. Emele gelen üçburçlugyň burçlaryny tapyň.

8. Töwerekden daşardaky nokatdan geçirilen iki galtaşmanyň galtaşma nokatlary töweregi: 1) 1 : 9; 2) 3 : 15; 3) 7 : 11; 4) 3 : 7 gatnaşykdaky iki duga bölýär. Galtaşmalaryň arasyndaky burçy tapyň.

9. 1) 52°; 2) 74°; 3) 104°-ly merkezi burç emele getiren iki radiusyň depelerine geçirilen galtaşmalaryň arasyndaky burçy tapyň.

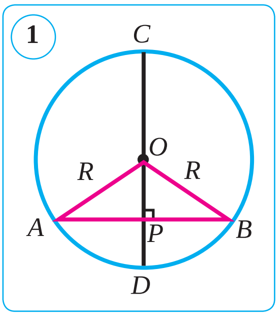
10. Töweregiň radiusy diametrinden 40 mm gysga. Töweregiň diametrini tapyň.



59. TÖWEREGIŇ HORDASYNYŇ WE DIAMETRINIŇ HÄSIÝETLERI

1-nji t e o r e m a.

Horda perpendikulýar diametr şu hordany we oňa direlýän dugany deň ikä bölýär.



Subudy. Merkezi O nokatda we radiusy R bolan töwerek, AB horda perpendikulýar CD diametr, CD we AB-leriň kesişme nokady P berlen bolsun (1-nji surat). $AP=PB$ we $\cup AD=\cup DB$ bolýandygyny subut edýäris. Eger AB horda diametr bolsa, P nokat O nokat bilen gabat gelýär we şu nokatda AB horda hem-de ony çekip durýan ýarym töweregiň ADB dugasy deň ikä bölünýär, ýagny tassyklama ýerlikli bolýar. AB horda diametr bolmasyn. OA we OB radiuslary geçirýäris. Emele gelen AOB üçburçluk – deňýanly, çünki $OA=OB=R$. OP – deňýanly üçburçlugyň AB tarapyna geçirilen beýiklik deňýanly üçburçlugyň häsiýetine görä, üçburçlugyň esasyna geçirilen mediana we O depesindäki burçunyň bissektrisasy bolýar. Hordanyň ortasy arkaly geçen diametr bolsa AB hordany deň ikä bölýär, ýagny $AP=PB$. $OP-AOB$ burçuň bissektrisasydygyndan $\angle AOP=\angle BOP$-ni alarys. Bu burçlar direlýän dugalar bolany üçin $\cup AD=\cup DB$. Teorema subut edildi.

2-nji t e o r e m a.

Töweregiň hordasy onuň diametrinden uly bolmaýar.

Subudy. OPB üçburçluk – gönüburçly (1-nji surata g.). Onda, bu üçburçlukda OB – gipotenuza, PB – katet. Mälim bolşy ýaly, katet gipotenuzadan uly däl, ýagny $PB \leq OB$. Mundan, $2PB \leq 2 \cdot OB$ hem-de $2PB=AB$ we $2OB=2R=d$. Diýmek, $AB \leq d$ eken.

1- nji netije. *Hordanyň ortasyndan geçýän diametr şu horda perpendikulýardyr.*

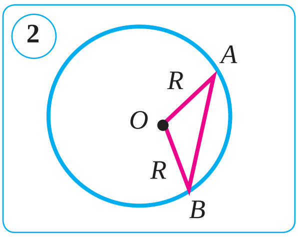
2- nji netije. *Hordanyň orta perpendikulýary töweregiň diametri bolýar.*

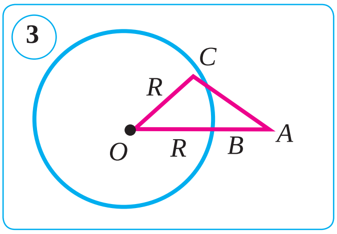
Bu netijeleri subut etmek özüňize hödürlenýär.

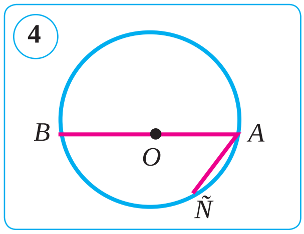
1-nji mesele. Diametr iň uly horda bolýandygyny subut ediň.

Çözülişi. O merkezli we R radiusly töwerek hem-de diametrden tapawutly islendik AB horda berlen bolsun (2-nji surat). OA we OB kesimleri geçirýäris. AOB üçburçlukda AB tarap galan iki tarapyň jeminden kiçi, ýagny $AB<OA+OB=R+R=2R$. Diýmek, AB horda diametrden kiçi bolýar.

2-nji mesele. A nokat R radiusly töwerekden daşarda we bu töweregiň O merkezinden d aralykda ýerleşen. A nokatdan şu töwerekdäki nokada çenli bolan iň gysga aralyk näçä deň?







Çözülişi. B – töweregiň OA kesim bilen kesişen nokady bolsun (3-nji surat). AB aralyk A nokatdan tölerekdäki nokatlara çenli mümkin bolan aralyklaryň içinde iň kiçisidigini görkezýäris. Hakykatdan hem, töweregiň islendik C nokady üçin $AB+BO<AC+CO$ deňsizlik ýerine ýetirilýär. $BO=CO=R$-i hasaba alyp, ahyrky deňsizlikden $AB<AC$ deňsizligi alarys. $AO=d$ we $BO=R$-i hasaba alsak, gözlenýän iň gysga aralyk AB kesimiň uzynlygyna, ýagny $d-R$-e deňdigi gelip çykýar.

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Horda perpendikulýar diametr nähili häsiýete eýe?
2) Töweregiň hordasy onuň diametrinden uly bolmagy mümkinmi?
3) Hordanyň orta perpendikulýary diametr bolmazlygy mümkinmi?

2. Töwerek çyzyň hem-de onuň bir-birine perpendikulýar iki AB we CD diametrlerini geçiriň. A, B, C we D nokatlar bölen töweregiň dugalarynyň gradus ölçegini tapyň.

3. 8 cm-lik horda töwerekden 90°-ly duga bölýär. Töweregiň merkezinden horda çenli bolan aralygy tapyň.

4. Berlen töweregiň nokadyndan radiusyna deň iki horda geçirilen. Olaryň arasyndaky burçy tapyň.

5. Töweregiň berlen nokadyndan diametre we radiusa deň horda geçirilen. Diametr bilen hordanyň arasyndaky burçy tapyň (4-nji surat).

6. Töwerekde ondan 90°-ly duga bölýän iki parallel horda geçirilen. Olardan biriniň uzynlygy 8 sm. Hordalaryň arasyndaky aralygy tapyň.

7. Töweregiň merkezinden başga nokatda kesişýän iki hordasynyň kesişme nokadynda deň ikä bölünmeýänligini subut ediň.

8. Töwerekdäki A nokatdan töweregiň radiusyna deň iki horda AB we AC geçirilen. B we C nokatlar göni çyzyk bilen utgaşdyrylan. Töweregiň radiusy 12 cm. Töweregiň merkezinden BC horda çenli bolan aralygy tapyň.

9. Töwerekde ondan 90°-ly duga bölýän iki parallel horda geçirilen. Olardan biriniň uzynlygy 10 cm. Hordalaryň arasyndaky aralygy tapyň.

10. Töweregiň radiusy 13 cm-e deň. Şu töwerekde 10 cm-e deň horda geçirilen. Töweregiň merkezinden horda çenli bolan aralygy tapyň.

11. AB kesim – merkezi O nokatda bolan töweregiň diametri, AC we CB – şu töweregiň deň hordalary. COB burçy tapyň.

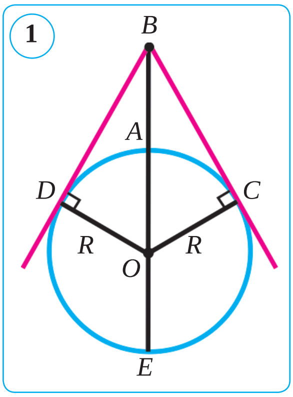
60. AMALY GÖNÜKME WE ULANYLYŞY

AMALY KOMPETENSIÝANY ÖSDÜRIJI GOŞMAÇA MATERIALLAR

GORIZONTYŇ UZAKLYGY

1-nji mesele. (*Daýanç mesele.*) Kesiji bilen onuň daşky böleginiň köpeltmek hasyly galtaşmanyň kwadratyna deň. Şony subut ediň.

Çözülişi. O merkezli töweregiň daşarsynda alnan B nokatdan BE kesiji, BC we BD galtaşmalar geçirilen bolsun (1-nji surat).



$BC^2 = BE \cdot BA$ bolýandygyny subut edýäris. Munuň üçin gönüburçly BOC ($\angle C = 90°$) üçburçluga garap geçýäris. Mundan Pifagoryň teoremasyna görä:

$$BC^2 = BO^2 - OC^2.$$

Bu deňlige $BO = BA + AO = BA + R$ we $OC = R$ belgilemeleri goýup, emele gelen deňligi şekil çalşyrýarys:

$$BC^2 = (BA + R)^2 - R^2 \Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R + R^2 - R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R \Rightarrow BC^2 = BA \cdot (BA + 2R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = BA \cdot BE$$

Şony subut etmek talap edilipdi.

1. Gorizont barada düşünje.

Uzagy görmek üçin hiç zat päsgel bermeýän açyk ýerde durup alysa garanyňyzda siz özüňizi ýeriň üsti (deňziň üsti) göýä asman bilen utgaşyp giden ýaly we ondan soň hiç zat ýok ýaly görünýän töweregiň merkezinde duran ýaly duýýarsyňyz. Bu – gorizontdyr (gözýetim). Gorizont çyzygyny tutup bolmaýar: siz oňa ýakynlaşdygy saýyn, ol sizden uzaklaşyberýär. Oňa baryp bolmaýar, emma şuňa seretmezden ol hakykatda bar. Her bir gözegçilik nokady üçin şu ýerden garanda ýeriň üstüni görmek mümkin bolan mälim araçägi bolýar we bu araçägiň uzaklygyny hasaplamak kyn däl. Gorizonta bagly bolan geometrik gatnaşyklary düşünmek üçin Ýer şarynyň mälim bölegini şekillendirýän 1-nji surata (ýa-da 2-nji surata) ýüzlenýäris. Ýerden BA beýiklikdäki B nokatda gözegçiniň gözi ýerleşýär. Şu gözegçi bu ýerde özüniň daş-töweregini nähili uzaklyga çenli görüp bilýär? Garaş şöhlesi Ýeriň üstüne galtaşýan C we D (1-nji surat) ýa-da C (2-nji surat) nokatlara çenlidigi aýdyň: mundan aňyrda Ýer garaş şöhlesinden pesde bolýar. Bu nokatlar (we DAC dugada ýatýan başga nokatlar hem) ýeriň üsti görünýn böleginiň araçägini şekillendirýär, ýagny gorizont çyzygyny emele getirýär. Gözegçä ynha şu ýerde asman ýere utgaşan ýaly bolup görünýär, çünki gözegçi bu nokatlarda bir wagtyň özünde hem asmany, hem ýerdäki zatlary görýär.

2. Gorizontyň uzaklygy.

Gorizont çyzygy gözegçiden nähili uzaklykda bolýar? Başgaça aýdanda, tekiz ýerde biz merkezinde özümizi gören tegelegiň radiusynyň ulylygy näçe? Gözegçiniň ýeriň üstünden göterilen beýikligi mälim bolsa, gorizontyň uzaklygy nähili hasaplanýar?

Mesele gözegçiniň gözünden ýeriň üstüne geçirilen galtaşma (2-nji surat) BC kesiminiň uzynlygyny hasaplamaga getirilýär. 1-nji meseleden mälim bolşy ýaly, galtaşmanyň kwadraty kesijiniň daşky kesimi $BA=h$ bilen kesijiniň hemme uzynlygy, ýagny $BE=h+2R$-iň köpeltmek hasylyna deň: $d^2 = (h+2R)\cdot h$, bu ýerde R – Ýeriň radiusy, $BC=d$ – gözegçiden görünýän iň uzak aralyk. Gözegçiniň gözüniň ýerden göterilmegi Ýer şarynyň diametrine ($2R$-e) görä örän kiçi, meselem, samolýotyň iň beýik göterilmegi Ýer şarynyň diametriniň takmynan bary-ýogy 0,001 ülşüni düzýär, onda $2R+h\approx 2R$ diýip almak mümkin, onda formula ýene-de ýönekeýleşýär:

$$d^2 \approx 2Rh.$$

Diýmek, gorizontyň uzaklygyny örän ýönekeý formula boýunça hasaplamak mümkin:

$$d \approx \sqrt{2Rh},$$

bu ýerde: R – Ýer şarynyň radiusy (takmynan 6400 km ýa-da has takygy 6371 km), h – ýeriň üstünden gözegçi göterilen beýiklik, $\sqrt{6400} = 80$, onda formula aşakdaky ýaly görnüşi almagy mümkin:

$$d \approx 80\sqrt{2h} \approx 113\sqrt{h},$$

bu ýerde h hökman kilometriň böleklerinde aňladylmalydyr.

2-nji mesele. Ýerden 10 km beýiklikde uçýan samolýotdan näçe uzaklykdaky aralygy görmek mümkin? (Ýeriň radiusy takmynan 6370 km.)

Çözülişi. $OA=R\approx 6370$ km, $AB=h=10$ km. $BC=d$-ni tapýarys (2-nji surat). Kesiji bilen onuň daşky böleginiň köpeltmek hasyly galtaşmanyň kwadratyna deň bolýandygyny bilýärsiňiz, ýagny

$$d^2 = (h+2R)\cdot h \text{ ýa-da}$$

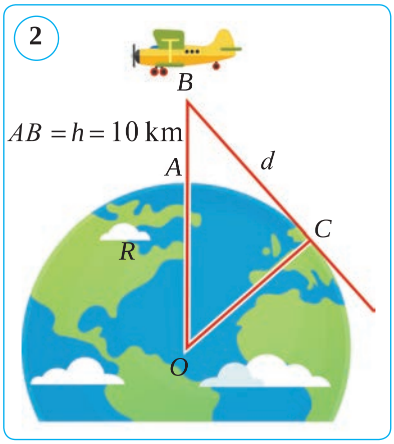
$$d^2 = (10+2\cdot 6370)\cdot 10 = 127\,500,$$

mundan:

$$d = \sqrt{127500} = \sqrt{51\cdot 2500} = 50\sqrt{51} \approx$$

$$\approx 50\cdot 7{,}141 = 357{,}05 \approx 360 \text{ (km)}.$$

Jogaby: ≈ 360 km.



3-nji mesele. Ýerden 4 km beýiklige göterilen howa şaryndan näçe uzaklykdaky aralyk görünýär? Ýeriň radiusy takmynan 6370 km. *Jogaby:* $\approx$ $\approx 225{,}8$ km.

4-nji mesele. Kawkazdaky Elburs depesi deňiz derejesinden ≈ 5600 m (has takygy 5642 m) beýiklikde ýerleşen. Şu depeden nähili uzaklygy görmek mümkin? Ýeriň radiusy takmynan 6370 km. *Jogaby:* ≈ 270 km.

Ýatlatma! *Ýokarda çözülen meselelerde gorizontyň uzaklygyna täsir edýän fiziki faktorlary hasaba almadyk. Gorizontyň uzaklygy ençeme faktorlara baglylykda birneme artmagy ýa-da kemelmegi mümkin.*

ÜÇBURÇLUGYŇ AJAÝYP NOKATLARY

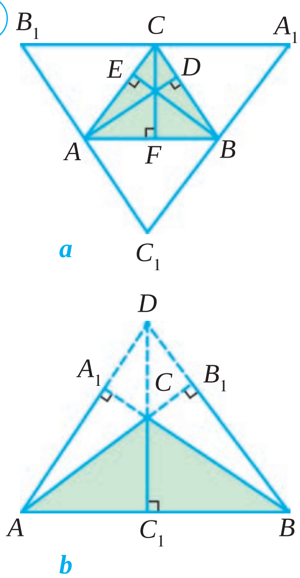
Üçburçlugyň dört ajaýyp nokadyna garap geçýäris.

1. Üçburçluk beýiklikleriniň kesişme nokady.

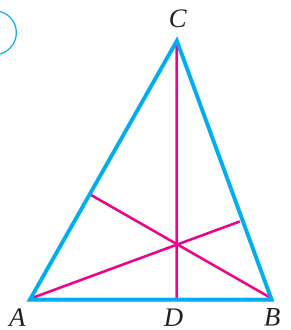
1-nji teorema.

Üçburçlugyň beýiklikleri (ýa-da olaryň dowamy) bir nokatda kesişýär.

1



2



Subudy. AD, BF we CE – ABC üçburçlugyň beýiklikleri (1-nji *a* surat). Üçburçlugyň depeleri arkaly garşylykly ýatýan taraplaryna parallel edip göni çyzyklary geçirip, netijede taraplary ABC üçburçlugyň beýikliklerine perpendikulýar bolan täze $A_1B_1C_1$ üçburçlugy alarys. Gurmaga görä, C_1BCA we B_1ABC dörtburçluklar–parallelogram, mundan $C_1A=BC$ we $BC=AB_1$ gelip çykýar. Diýmek, A nokat – B_1C_1 kesimiň ortasy. Edil şonuň ýaly, B nokat – A_1C_1 -iň ortasy, C bolsa A_1B_1-iň ortasydygy subut edilýär.

Şeýlelikde, AD, BF we CE beýiklikler $A_1B_1C_1$ üçburçlugyň orta perpendikulýarynda ýatýar. Diýmek, olar bir nokatda kesişýär. Üçburçlugyň beýiklikleri kesişmezligi-de mümkinligini belläp geçýäris. Kütek burçly üçburçlugyň beýiklikleri olaryň dowamynda bir nokatda kesişýär, emma beýiklikleriň özi kesişmeýär (1-nji *b* surat).

Üçburçlugyň beýiklikleriniň (ýa-da olaryň dowamy)kesişme nokady onuň *ortomerkezi* hem diýilýär.

Mesele. Üçburçlugyň taraplaryndan haýsysy ortomerkeze ýakyn ýerleşen?

Çözülişi. ABC üçburçlukda $AC>BC$ bolsun (2-nji surat). Üçburçlugyň CD beýikligi üçin $AD>BD$ deňsizlik we diýmek, $\angle ACD>\angle BCD$ deňsizlik ýerine ýetirilýänliginden peýdalanýarys. Bu beýiklik nokatlary şu depeden çykýan taraplardan iň kiçisine ýakyn ýerleşendigini aňladýar. Diýmek, üçburçlugyň ortomerkezi kiçi tarapa ýakyn ýerleşýär.

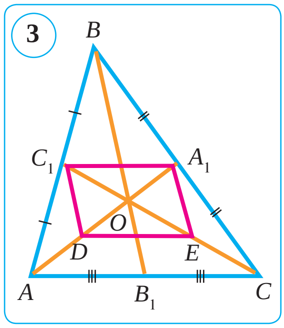
2. Üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokady.

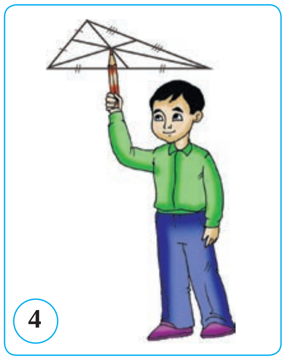
2-nji teorema.

Üçburçlugyň medianalary bir nokatda kesişýär we bu nokatda depesinden başlap hasaplanda 2 : 1 gatnaşykda bölünýär.

Subudy. ABC üçburçlukda AA_1, BB_1 we CC_1 medianalar geçirilen bolsun (3-nji surat). Olar käbir O nokatda kesişýändigini hem-de $AO:OA_1=BO:OB_1=CO:OC_1=2:1$ bolýandygyny subut edýäris.

O – AA_1 we CC_1 medianalaryň kesişme nokady, D we E degişlilikde AO we CO kesimleriň ortasy bolsun. C_1A_1 kesim ABC üçburçlugyň orta çyzygy we üçburçlugyň orta çyzygynyň häsiýetine görä: $C_1A_1 \| AC$, $C_1A_1=0{,}5AC$. Mundan daşary, $DE-AOC$ üçburçlugyň orta çyzygy we şol häsiýete görä: $DE \| AC, DE=0{,}5AC$. Diýmek, DC_1A_1E dörtburçlugyň iki tarapy parallel we deň. Şeýlelikde, DC_1A_1E – parallelogram, onuň DA_1 we C_1E diagonallary kesişme nokadynda deň ikä bölünýär. Diýmek, $AD=DO=OA_1, CE=EO=OC_1$, ýagny AA_1 we CC_1 medianalar O nokatda $2:1$ gatnaşykda bölünýär.





Edil şonuň ýaly, üçünji BB_1 mediana – AA_1 we CC_1 medianalaryň her biri bilen kesişme nokadynda $2:1$ gatnaşykda bölünýändigi subut edilýär. Her bir mediana üçin şeýle bölünme ýeke-täk we diýmek, üç mediana hem bir nokatda kesişýän eken.

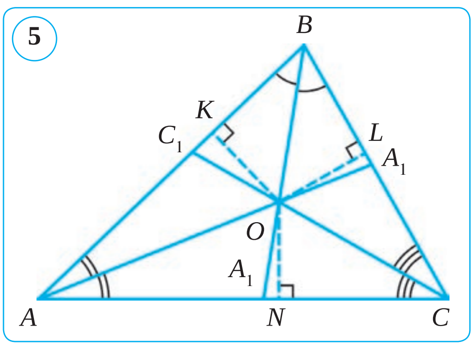
Üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokadyna *sentroid* ýa-da *agyrlyk merkezi* hem diýilýär. Şeýle atlandyrylyşyny aşakdaky tejribede barlap görüň: karton kagyzdan islendik üçburçluk gyrkyp alyň we onuň medianalaryny geçiriň, soňra iňňe ýa-da ujy ýiti ýonulan galamyň ujuny medianalaryň kesişme nokadyna goýup, deňagramlylykda saklajak boluň (4-nji surat).

3. Üçburçluk bissektrisalarynyň kesişme nokady.

3-nji teorema.

Üçburçlugyň üç bissektrisasy hem bir nokatda kesişýär.

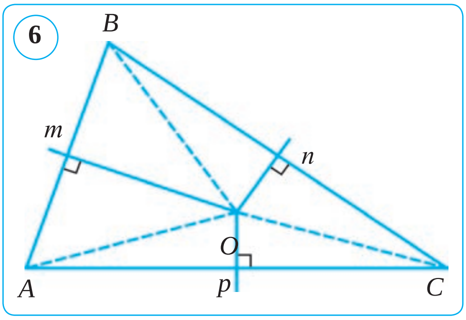
Subudy. ABC üçburçlugyň AA_1 we BB_1 bissektrisalary kesişen nokadyny O bilen belgileýäris. Ol nokatdan degişlilikde AB, BC we CA göni çyzyklara OK, OL we OM perpendikulýary geçirýäris (5-nji surat). Bize mälim bolşy ýaly, burçuň bissektrisasynyň islendik nokadyndan burçuň taraplaryna çenli bolan aralyklar deň. Şuňa esasan, $OK=OK$ we $OK=OL$. Şonuň üçin $ON=OL$, ýagny O nokat ACB burçuň taraplaryndan deň uzaklaşýan bolýar we diýmek, şu burçuň CC_1 bissektrisasynda ýatýar. Mundan, ABC uçburçlugyň üç bissektrisasynyň hem O nokatda kesişýändigi gelip çykýar. Teorema subut edildi.



4. Üçburçlugyň orta perpendikulýarlarynyň kesişme nokady.

4-nji teorema.

Üçburçlugyň taraplarynyň orta perpendikulýarlary bir nokatda kesişýär.



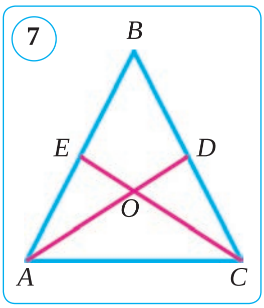
Subudy. $\triangle ABC$ berlen (6-njy surat). Onuň AB we BC taraplaryna m we n orta perpendikulýarlar geçirýäris. Olar käbir O nokatda kesişýär (kesişiji göni çyzyklara perpendikulýar göni çyzyklar kesişýär). Bize mälim bolşy ýaly, kesimiň orta perpendikulýarynyň islendik nokadyndan kesimiň uçlaryna çenli bolan aralyklar deň. Şuňa görä, $OA=OB$ (1) we $OB=OC$ (2) bolýar. (1) we (2) deňliklerden tapýarys: $OA=OC$. Diýmek, AC tarapyň orta perpendikulýary p hem O nokatdan geçýär. Şeýlelikde, O nokat $\triangle ABC$-niň üç depesinden hem deň uzaklaşan bolýar: $OA=OB=OC$. Mundan, $\triangle ABC$-niň taraplaryna geçirilen üç m, n we p orta perpendikulýary O nokatda kesişýändigi gelip çykýar. Teorema subut edildi

Soraglar, meseleler we ýumuşlar

1. 1) Üçburçlugyň beýiklikleri elmydama kesişýärmi?
? 2) Üçburçlugyň näçe ajaýyp nokadyny bilýärsiňiz? Olary aýdyň.

2. Deň taraply üçburçlugyň ajaýyp nokatlary nähili ýerleşen bolýar?

3. Eger üçburçlukda iki mediana deň bolsa, onda ol deňýanly bolýar. Şony subut ediň.



Çözülişi. ABC üçburçlukda AD we CE medianalar deň hem-de O nokatda kesişsin (7-nji surat). AOE we COD üçburçluklara garap geçýäris. O nokat deň AD we CE medianalaryň her birini $2:1$ gatnaşykda bolýar. Şonuň üçin, $AO=CO$, $EO=DO$ bolýar. Mundan daşary, wertikal burçlar bolany üçin: $\angle AOE=\angle COD$. Diýmek, üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşanyna görä: $\triangle AOE=\triangle COD$. Mundan, $AE=CD$ gelip çykýar.

Bu kesimler mediananyň kesgitlemesine görä, AB we CB taraplaryň ýarysyna deň. Diýmek, $AB=CB$, ýagny ABC üçburçluk deňýanly eken. Şony subut etmek talap edilipdi.

4. Deňýanly üçburçlugyň dört ajaýyp nokady bir göni çyzykda ýatýandygyny subut ediň. Ol haýsy göni çyzyk bolýar?

5. Üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokady ortomerkez bilen gabat gelýär. Berlen üçburçlugyň deň taraplydygyny subut ediň.

6. Üçburçlugyň depesi beýiklikleri kesişen nokady bolmagy mümkinmi?

7. Üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokady medianalardan birini tapawudy 3 cm-e deň böleklere bölýär. Şu mediananyň uzynlygyny tapyň.

61–62. 5-NJI BARLAG IŞI. ÝALŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK

1. AB – O merkezli töweregiň diametri. Eger $OA = OC = AC$ bolsa, BCO burçy tapyň.

2. 1) Töweregiň daşarsynda berlen nokatdan töweregiň nokatlaryna çenli bolan iň uly we iň kiçi aralyklar degişlilikde 50 cm we 20 cm-e deň. Berlen töweregiň radiusyny tapyň.
2) Töweregiň merkezinden B nokada çenli aralyk 3 cm-e, radius 10 cm-e deň. B nokatdan töwerege çenli bolan iň kiçi we iň uly aralygy tapyň.

3. AB we AC göni çyzyklar O merkezli töwerege B we C nokatlarda galtaşýar. Eger $\angle OAB = 30°$ we $AB = 5$ cm bolsa, BC-ni tapyň.

4. Töwerek 11 : 16 : 9 gatnaşykda üç duga bölünen we bölünme nokatlary utgaşdyrylan. Emele gelen üçburçlugyň burçlarynyň ululyklaryny tapyň.

5-nji test

Özüňizi synap görüň!

1. Töweregiň merkezinden B nokada çenli aralyk 5 cm-e, radius 12 cm-e deň. B nokatdan töwerege çenli bolan iň kiçi we iň uly aralygy tapyň.
A) 7 cm, 17 cm; B) 7 cm, 12 cm; D) 5 cm, 7 cm; E) 7 cm, 24 cm.

2. Töweregiň daşarsynda berlen nokatdan töweregiň nokatlaryna çenli bolan iň uly we iň kiçi aralyklar degişlilikde 30 cm we 10 cm-e deň. Berlen töweregiň radiusyny tapyň.
A) 20 cm; B) 10 cm; D) 15 cm; E) 5 cm.

3. AB – O merkezli töweregiň diametri. Eger $OA = OC = BC$ bolsa, CAO burçy tapyň.
A) 60°; B) 30°; D) 90°; E) 120°.

4. Radiusy R-e deň bolan töwerekdäki nokatdan uzynlyklary R-e deň bolan iki horda geçirildi. Hordalaryň arasyndaky burçy tapyň.
A) 120°; B) 110°; D) 135°; E) 40°.

5. Töweregiň kesiji iki hordasynyň arasyndaky burçlardan biri 80°-a deň. Şu burça goňşy bolan burçlaryň jemini tapyň.
A) 200°; B) 90°; D) 100°; E) 160°.

6. Töweregiň daşarsyndaky nokatdan töwerege iki galtaşma geçirilen. Eger galtaşmalaryň arasyndaky burç 72° bolsa, töweregiň galtaşma nokatlarynyň arasyndaky uly dugasyny tapyň.
A) 248°; B) 240°; D) 252°; E) 236°.

Iňlis dilini öwrenýäris!

Töwerek – circle
Horda – çord
Radius – radius
Duga – arc

Diametr – diameter
Merkezi burç – central angle
Töwerege galtaşma – tangent to the circle
Perpendikulýar – perpendicolar

Taryhy maglumatlar

Abul Wepa Buzjany
(940–998)

Abul Wepa Buzjany 940-njy ýylda Horasan welaýatynyň Hyrat we Nişapur şäherleriniň arasyndaky Buzjon şäherinde (häzirki Türkmenistanyň Serhetabat şäheriniň töwereginde) doglupdyr. Ol Bagdatda okapdyr we döredijilik edipdir.

Abul Wepa Buzjanynyň «Hünärdmentler geometrik gurmalardan nämeleri bilmelidirler» atly kitabynyň birinji we ikinji baplary çyzgyjyň we sirkulyň kömeginde gurmaga bagyşlanypdyr. Biz size Abul Wepanyň töweregiň merkezini tapmak meselesini getirýäris.

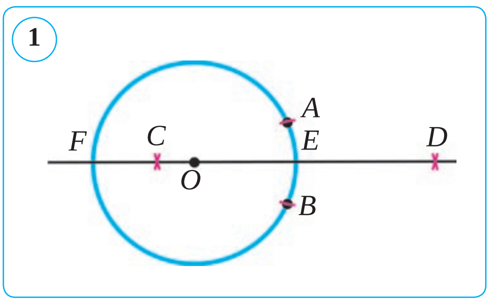
«Eger «Töweregiň merkezi nähili tapylýar?» diýip soralsa, onuň töwereginde A we B nokatlary belgiläp, AB aralyk bilen A we B nokatlary merkez edip iki deň töwerek guryarys, olar C we D nokatlarda kesişýär (1-*nji surat*). *CD çyzygy geçirýäris we ony töwerek bilen E we F nokatlarda kesişýänçe dowam etdirýäris, soňra EF çyzygy O nokatda deň ikä bölýäris. Onda O nokat töweregiň merkezi bolýar».*

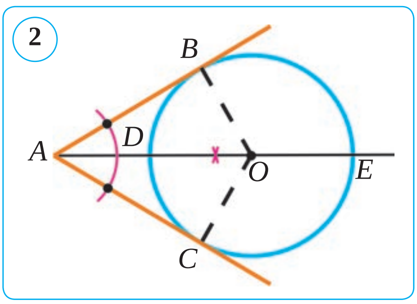
Abul Wepanyň bu usuly *A* we *B* nokatlary merkez edip duga çyzylanda olaryň kesişen nokatlaryny utgaşdyrýan *CD* göni çyzyk berlen töweregiň merkezinden geçip, onuň *AB* hordasyna perpendikulýar bolýandygyna esaslanan.

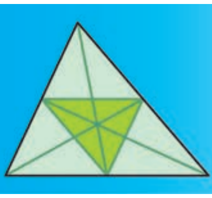
Häzir bu mesele aşakdaky ýaly çözülýär: çak edeliň, bize merkezi belgilenmedik töwerek berlen we onuň merkezini anyklamak talap edilsin (2-nji surat).

A nokatdan bu töwerege *AB* we *AC* galtaşmalary geçirýäris hem-de *BAC* burçuň bissektrisasyny guryarys. Bissektrisa töweregi *D* we *E* nokatlarda kesýär. *DE*-ni deň ikä bölsek, bölünme nokady *O* töweregiň merkezi bolýar. Näme üçin? Ýa-da *B* nokatda *AB* galtaşma perpendikulýar geçirsek, ol bissektrisany *O* nokatda kesýär. *O* nokat töweregiň merkezi bolýar. Näme üçin?

Şunuň bilen birlikde Abul Wepa öz eserinde ýazgyn dugany doly töwerege doldurmak, töwerege onuň daşarsyndaky nokatdan galtaşma geçirmek, töwerege onda ýatýan nokatdan galtaşma geçirmek ýaly gurmak usullaryny beripdir.

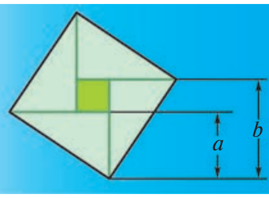






VI BAP

GAÝTALAMAK



8-NJI SYNPDA GEÇILEN TEMALARY GAÝTALAMAK ÜÇIN GÖNÜKMELER

1. Dörtburçlugyň üç daşky burçy degişlilikde 142°, 22° we 136°-a deň. Şu dörtburçlugyň burçlaryny tapyň.

2. Dörtburçlugyň iň kiçi tarapy 7 cm-e deň, galan taraplarynyň her biri oldingisidan degişlilikde 4 cm-e uly. Şu dörtburçlugyň perimetrini tapyň.

3. Gönüburçly trapesiýanyň ýiti burçy 45°-a deň. Kiçi gapdal tarapy hem-de kiçi esasy 24 cm-e deň. Şu trapesiýanyň uly esasyny tapyň.

4. Deňýanly üçburçlugyň taraplary: 1) 6 cm, 5 cm we 5 cm; 2) 24 cm, 15 cm we 15 cm; 3) 3,2 dm, 20 cm we 20 cm; 4) 22 cm, 60 cm we 60 cm. Şu üçburçlugyň meýdany we gapdal tarapyna geçirilen beýikligi tapyň.

5. *ABCD* dörtburçlukda: $AB=CD$, $AD=BC$, *A* burç *B* burçdan üç esse uly. Şu dörtburçlugyň burçlaryny tapyň.

6. *ABCD* deňýanly trapesiýada $BC=20$ cm, $AB=24$ cm we $\angle D=60°$ bolsa, onuň *AD* esasyny tapyň.

7. $\triangle ABC$-da *AE* we *BD* – beýiklikler. $AC=20$ cm, $BD=16$ cm we $BC=32$ cm. *AE* -ni tapyň.

8. Gönüburçly üçburçlugyň meýdany 168 cm^2-a deň. Eger katetlerinden biri ikinjisiniň $\frac{7}{12}$ bölegine deň bolsa, üçburçlugyň katetlerini tapyň.

9. Üçburçlugyň meýdany 24 cm^2. Üçburçlugyň 16 cm-e deň tarapyna geçirilen beýikligini tapyň.

10. *ABCD* romb berlen. *AC* we *BD* diagonallar degişlilikde 30 cm we 12 cm-e deň. Rombuň meýdanyny tapyň.

11. Üç tarapyna görä üçburçlugyň meýdanyny tapyň:
1) 15, 15, 18; 2) 39, 42, 45; 3) 4, 13, 15; 4) 29, 25, 6.

12. *ABC* üçburçlukda $BC=34$ cm. *BC* kesimiň ortasyndan *AC* göni çyzyga geçirilen *EF* perpendikulýar *AC* tarapy $AF=25$ cm we $FC=15$ cm-lik kesimlere bölýär. *ABC* üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

13. Rombuň diagonallary 18 dm we 24 dm. Şu rombuň perimetrini we parallel taraplarynyň arasyndaky aralygy tapyň.

14. Deňýanly trapesiýanyň beýikligi gapdal tarapyndan iki esse kiçi. Trapesiýanyň burçlaryny tapyň.

15. Deň taraply üçburçlugyň islendik nokadyndan taraplaryna çenli bolan aralyklaryň jemi hemişelik (birmeňzeş) we şu üçburçlugyň beýikligine deň. Şuny subut ediň.

16. Töweregiň A, B we C nokatlary ony: 1) $14:6:4$; 2) $13:12:5$; 3) $17:10:9$ gatnaşykdaky dugalara bölýär. A, B we C nokatlardan galtaşmalar geçirilip, bir-biri bilen kesişýänçe dowam etdirilen. Emele gelen üçburçlugyň burçlaryny tapyň.

17. Gönüburçlugyň uzynlygy 30 %-e artdyrylsa we ini 30 %-e kemeldilse, onuň meýdany nähili üýtgär?

18. Eger üçburçlugyň esasy 20 % uzaldylyp, beýikligi 20 %-e gysgaldylsa, onuň meýdany nähili üýtgär?

19. Gönüburçlugyň meýdany 540 cm^2, iki tarapynyň gatnaşygy $3:5$ ýaly. Şu gönüburçlugyň perimetrini tapyň.

20. Parallelogramyň meýdany 24 cm^2-a deň. Eger beýiklikleri 3 cm we 4 cm-e deň bolsa, onuň perimetrini tapyň.

21. Käbir $ABCD$ parallelogramy çyzyň. Wektorlary çyzyň:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$.

22. Eger: 1) $A(0; 1)$, $B(1; 0)$; 2) $A(-2; 1)$, $B(-4; 3)$ bolsa, $\overrightarrow{AB}$ wektoryň koordinatalary nämä deň bolýar?

23. ABC üçburçlukda AA_1 – mediana, O – AA_1-iň ortasy. $\overrightarrow{BO}$ wektory $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ we $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ wektorlar arkaly aňladyň.

24. $ABCD$ parallelogramyň diagonallary O nokatda kesişýär, P nokat OB-niň ortasy. $\overrightarrow{AP}$ wektory $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ we $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ wektorlar arkaly aňladyň.

25. 240°-ly duganyň depelerinden geçirilen galtaşmalar kesişýänçe dowam etdirilen. Olaryň arasyndaky burçy tapyň.

26. Parallelogramyň burçlaryndan biri ikinjiden 4 esse uly. Şu parallelogramyň uly burçuny tapyň.

27. Gönüburçlugyň meýdany 288 cm^2, iki tarapynyň gatnaşygy $1:2$-ä deň. Şu gönüburçlugyň perimetrini tapyň.

28. Parallelogramyň taraplaryndan birine geçirilen beýikligi şu tarapdan uç esse kiçi. Parallelogramyň meýdany 48 cm^2. Şu tarapyny we beýikligini tapyň.

29. Kwadratyň meýdany 16 cm^2. Eger: 1) onuň hemme tarapyny iki esse gysgaltsak; 2) onuň hemme tarapyny üç esse uzaltsak, kwadratyň meýdany nähili üýtgär?

30. Eger: 1) 1) $A(7; -5)$, $B(-9; -3)$; 2) $A(-8; 2)$, $B(-12; -4)$; 2) $A(8; -1)$, $B(-16; -11)$ bolsa, AB kesimiň ortasy – C nokat koordinatalaryny tapyň.

JEMLEÝJI BARLAG IŞI. ÝALŇYŞLAR ÜSTÜNDE IŞLEMEK

1. Gönüburçlugyň kiçi tarapy 10 cm-e deň, diagonallary bolsa 60°-ly burç astynda kesişýär. Şu gönüburçlugyň diagonallaryny tapyň.
2. Üçburçlugyň taraplary 11 cm, 7 cm we 10 cm-e deň. Berlen üçburçlugyň orta çyzyklaryndan emele gelen üçburçlugyň perimetrini tapyň.
3. Üçburçlugyň taraplary 21 cm, 72 cm we 75 cm-e deň. Şu üçburçlugyň meýdanyny tapyň.
4. Töweregiň daşyndaky nokatdan geçirilen iki galtaşmanyň arasyndaky burç 75° -a deň. Şu galtaşmanyň taraplaryny öz içine alan dugalary tapyň.
5. $\vec{a}(2;-3)$ we $\vec{b}(-2;-3)$ wektorlar berlen. $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.

6-njy test   Özüňizi synap görüň!

1. Dörtburçlugyň burçlary özara 3:5:4:6 gatnaşykda. Dörtburçlugyň kiçi burçuny tapyň.
   A) 80°; B) 30°; D) 60°; E) 40°.
2. Güberçek dörtburçlugyň diagonallary ony näçe üçburçluga bölýär?
   A) 4; B) 5; D) 6; E) 8.
3. Gönüburçlugyň ini 5 cm-e deň, uzynlygy ondan 7 cm artyk. Gönüburçlugyň perimetrini hasaplaň.
   A) 32 cm; B) 34 cm; D) 24 cm; E) 26 cm.
4. Her bir içki burçy 162° bolan güberçek köpburçlugyň näçe tarapy bar?
   A) 18 ; B) 20 ; D) 15 ; E) 12 .
5. Parallelogramyň iki tarapynyň gatnaşygy 3:7-ä, onuň perimetri bolsa 18 cm-e deň. Şu parallelogramyň kiçi tarapyny tapyň.
   A) 2,7 cm; b) 3,4 cm; d) 5,4 cm; E) 4,5 cm.
6. Gönüburçluk şeklindäki uçastoguň ini 32 m. Eger uçastoguň meýdany 2 gektar bolsa, onuň uzynlygy näçe metr bolýar?
   A) 610 m; B) 615 m; D) 625 m; E) 630 m.
7. Rombuň beýikligi 5 cm-e, diagonallarynyň köpeltmek hasyly 80 cm^2-a deň. Onuň perimetrini tapyň.
   A) 32 cm; B) 16 cm; D) 24 cm; E) 28 cm.
8. $\vec{a}$ (2; −3) we $\vec{b}$ (−2; −3) wektor berlen. $\vec{m}=-\vec{a}+2\vec{b}$ wektoryň koordinatalaryny tapyň.
   A) (−6; −3); B) (−3; 6); D) (−2; –9); E) (2; −3).
9. $\vec{a}$ (3; 2) we $\vec{b}$ (0; −1) wektor berlen. $2\vec{a}-4\vec{b}$ wektoryň modulyny tapyň.
   A) 10; B) 6; C) 8; D) 3.

Ilowe. Ýiti burçly trigonometrik funksiýalaryň bahalarynyň jedweli

Graduslar	sinα $1° \leq \alpha \leq 45°$	tgα $1° \leq \alpha \leq 45°$	ctgα $1° \leq \alpha \leq 45°$	cosα $1° \leq \alpha \leq 45°$	Graduslar
1	≈ 0,0175	≈ 0,0175	≈ 57,290	≈ 0,9998	89
2	≈ 0,0349	≈ 0,0349	≈ 28,636	≈ 0,9994	88
3	≈ 0,0523	≈ 0,0524	≈ 19,081	≈ 0,9986	87
4	≈ 0,0698	≈ 0,0699	≈ 14,301	≈ 0,9976	86
5	≈ 0,0872	≈ 0,0875	≈ 11,430	≈ 0,9962	85
6	≈ 0,1045	≈ 0,1051	≈ 9,514	≈ 0,9945	84
7	≈ 0,1219	≈ 0,1228	≈ 8,144	≈ 0,9925	83
8	≈ 0,1392	≈ 0,1405	≈ 7,115	≈ 0,9903	82
9	≈ 0,1564	≈ 0,1584	≈ 6,314	≈ 0,9877	81
10	≈ 0,1736	≈ 0,1763	≈ 5,671	≈ 0,9848	80
11	≈ 0,1908	≈ 0,1944	≈ 5,145	≈ 0,9816	79
12	≈ 0,2079	≈ 0,2126	≈ 4,705	≈ 0,9781	78
13	≈ 0,2250	≈ 0,2309	≈ 4,331	≈ 0,9744	77
14	≈ 0,2419	≈ 0,2493	≈ 4,011	≈ 0,9703	76
15	≈ 0,2588	≈ 0,2679	≈ 3,732	≈ 0,9659	75
16	≈ 0,2756	≈ 0,2867	≈ 3,487	≈ 0,9613	74
17	≈ 0,2924	≈ 0,3057	≈ 3,271	≈ 0,9563	73
18	≈ 0,3090	≈ 0,3249	≈ 3,078	≈ 0,9511	72
19	≈ 0,3256	≈ 0,3443	≈ 2,904	≈ 0,9455	71
20	≈ 0,3420	≈ 0,3640	≈ 2,747	≈ 0,9397	70
21	≈ 0,3584	≈ 0,3839	≈ 2,605	≈ 0,9336	69
22	≈ 0,3746	≈ 0,4040	≈ 2,475	≈ 0,9272	68
23	≈ 0,3907	≈ 0,4245	≈ 2,356	≈ 0,9205	67
24	≈ 0,4067	≈ 0,4452	≈ 2,246	≈ 0,9135	66
25	≈ 0,4226	≈ 0,4663	≈ 2,145	≈ 0,9063	65
26	≈ 0,4384	≈ 0,4877	≈ 2,050	≈ 0,8988	64
27	≈ 0,4540	≈ 0,5095	≈ 1,963	≈ 0,8910	63
28	≈ 0,4695	≈ 0,5317	≈ 1,881	≈ 0,8829	62
29	≈ 0,4848	≈ 0,5543	≈ 1,804	≈ 0,8746	61
30	0,5000	≈ 0,5774	≈ 1,732	≈ 0,8660	60
31	≈ 0,5150	≈ 0,6009	≈ 1,664	≈ 0,8572	59
32	≈ 0,5299	≈ 0,6249	≈ 1,600	≈ 0,8480	58
33	≈ 0,5446	≈ 0,6494	≈ 1,540	≈ 0,8387	57
34	≈ 0,5592	≈ 0,6745	≈ 1,483	≈ 0,8290	56
35	≈ 0,5736	≈ 0,7002	≈ 1,428	≈ 0,8192	55
36	≈ 0,5878	≈ 0,7265	≈ 1,376	≈ 0,8090	54
37	≈ 0,6018	≈ 0,7536	≈ 1,327	≈ 0,7986	53
38	≈ 0,6157	≈ 0,7813	≈ 1,280	≈ 0,7880	52
39	≈ 0,6293	≈ 0,8098	≈ 1,235	≈ 0,7771	51
40	≈ 0,6428	≈ 0,8391	≈ 1,192	≈ 0,7660	50
41	≈ 0,6561	≈ 0,8693	≈ 1,150	≈ 0,7547	49
42	≈ 0,6691	≈ 0,9004	≈ 1,111	≈ 0,7431	48
43	≈ 0,6820	≈ 0,9325	≈ 1,072	≈ 0,7314	47
44	≈ 0,6947	≈ 0,9657	≈ 1,036	≈ 0,7193	46
45	≈ 0,7071	1,0000	1,000	≈ 0,7071	45
Graduslar	cosα $45° \leq \alpha \leq 89°$	ctgα $45° \leq \alpha \leq 89°$	tgα $45° \leq \alpha \leq 89°$	sinα $45° \leq \alpha \leq 89°$	Graduslar

JOGAPLAR

7-nji synpda geçilenleri gaýtalamak. 5. 9 dm. **7.** 3 cm. **9.** Hawa, deň. **10.** 52°, 63°, 65°. **11.** 60°. **13.** 24°, 72°, 84°. **14.** Ýok, gelip çykmaýar. **18.** 58°.

I bap. 1-nji tema. 2. 1) $n=8$; 2) $n=11$; 3) $n=24$. **4.** 60°. **5.** 1) $n=12$; 2) $n=36$; 3) $n=40$. **6.** $n=8$ sany. **7.** 1) $n=20$ sany; 2) $n=15$ sany; 3) $n=6$ sany. **9.** 1) $n=24$ sany; 2) $n=8$ sany; 3) $n=5$ sany. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **2-nji tema. 2.** 25,5 cm, 50,5 cm. **3.** 1) 35°, 145°, 35°, 145°; 3) 85°, 105°, 85°, 105°. **4.** $P_{ABO}=20$ cm; $P_{BOC}=24$ cm. **5.** $AB=DC=16$ cm, $AD=BC=4$ cm. **3-nji tema. 2.** 1) Hawa, dogry. **3.** 32 cm. **7.** 26 cm. **8.** 45°, 135°, 135°, 45°. **9.** 26 cm ýoki 28 cm. **4-nji tema. 2.** 1) 9 cm; 2) 7 cm. **3.** 12 cm. **4.** $AB=DC=4$ cm, $BC=AD=8$ cm. **6.** 1) $4+7<12$ – üçburçlugyň deňsizligi ýerine ýetirilmedi; ýok, bolmagy mümkin däl. **7.** 7 cm, 14 cm, 7 cm, 14 cm. **5–6-njy temalar. 2.** 10 cm. **3.** $BP=12$ cm. **5.** 7 cm. **6.** 40°, 140°, 40°, 140°. **9.** 12 cm, 24 cm, 30 cm, 42 cm. **10.** 64 cm. **12.** 30 cm. **13.** 32 cm. **7–8-nji temalar. 3.** 150°. **4.** 23 cm. **6.** 27 cm, 11 cm. **7.** 20 cm, 14 cm. **10.** 90°, 90°, 100°, 80°. **12.** 70 ñm. **9-njy tema. 3.** $AC=5$ cm. **4.** $OB_1=3{,}2$ cm, $OB_2=4{,}8$ cm, $OB_3=6{,}4$ cm. **6.** 2) 19 cm. **8.** $x=4$. **9.** $OB_1=9$ cm, $OB_2=13{,}5$ cm, $OB_3=18$ cm. **10–11-nji temalar. 2.** 2,5 cm, 3,5 cm, 5,5 cm. **4.** 22 cm, 10 cm. **6.** 2) 15 cm. **9.** 24 cm, 12 cm. **10.** 3 cm. **11.** 30 cm, 10 cm. **12.** 12 cm.

II bap. 15-nji tema. 2. a) cosα; b) tgα; d) sinα; e) ctgα. **4.** a) Hawa, çünki $0{,}98<1$; b) ýok, çünki $\sqrt{2}>1$; d) hawa, çünki $\sqrt{5}-2<1$. **5.** $ML=24$, $MN=25$. **6.** $\sin M=\frac{5}{13}$, $\cos M=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} M=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg} M=\frac{12}{5}$. **16-njy tema. 2.** a) Dogry, çünki $a=c\sin\alpha$; d) nädogry, çünki $c=\frac{a}{\sin\alpha}$. **3.** Hawa, çünki tangensiň bahasy islendik položitel san bolýar. **4.** 1) 16 cm; 2) 50 cm. **6.** 16 cm. **7.** 5 cm. **8.** 50 cm. **17-nji tema. 2.** 1) 13; 2) 9; 3) 2,5. **3.** 1) 40 cm; 2) 100 cm. **4.** $x=\sqrt{3}$; $y=\sqrt{2}$. **5.** 1) 0,5; 2) $4\sqrt{2}$; 3) 0,8; 4) 1,5. **18-nji tema. 2.** 1) Ýok, çünki $121+49\neq 289$; 2) hawa, çünki $3^2+1{,}6^2=3{,}4^2$, $11{,}56=11{,}56$. **5.** Iki ýözüwe eýe. **6.** 1) Hawa, çünki $12^2+35^2=37^2$; 2) ýok, çünki $11^2+20^2\neq 25^2$. **7.** 2 cm. **19-njy tema. 1.** 1) 9,6 cm, 9,6 cm, 8 cm. **2.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$. **3.** 1) $h_b=\frac{12}{7}\sqrt{6}$ cm; 2) $h_c=11{,}2$ dm; 3) $h_b=6{,}72$ cm. **4.** $h=6\sqrt{3}$ cm. **5.** $h_a=\frac{15}{4}\sqrt{7}$ cm; $h_c=\frac{5}{2}\sqrt{7}$ cm. **7.** $h_a=\frac{3}{2}\sqrt{15}$ ñm. **20–21-nji temalar. 2.** 1) $\frac{5}{13}$; 2,4; $\frac{5}{12}$. **4.** 1) 2; 2) 1; 3) 1. **5.** 1) ctg²α; 2) tgα. **7.** 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{2}$. **9.** 1) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{15}{8}$. **12.** 1) sin²α; 2) cos³α. **14.** 1) sin²α; 2) sin³α. **22-nji tema. 2.** 1) $x\approx 40°$; 2) $x\approx 14°$; 3) $x\approx 34°$; 4) $x\approx 74°$. **3.** 1) $\sin B=0{,}6$; $\cos B=0{,}8$. **5.** $\cos A=0{,}5$; $\operatorname{tg} A=\sqrt{3}$. **7.** 1) $\sin\alpha=0{,}6$; $\cos\alpha=0{,}8$. **8.** 1) sinα; 2) cos³α. **23-nji tema. 1.** 1) 1,5; 3) 0,5. **3.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$; $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **4.** 12; 6. **5.** 1) sin²α; 2) sin²α. **7.** 2. **8.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 1. **24-nji tema. 1.** a) 1) $\approx 0{,}0523$; 2) $\approx 0{,}3584$; 3) $\approx 0{,}7660$; 4) $\approx 0{,}6428$; e) 1) $\approx 5{,}671$; 2) $\approx 1{,}732$; 3) $\approx 0{,}2679$; 4) $\approx 11{,}430$. **2.** b) 1) $\approx 42°$; 2) $\approx 50°$; 3) $\approx 87°$; d) 1) $\approx 25°$; 2) $\approx 85°$; 3) $\approx 10°$. **4.** 1. **6.** 1) 1; 2) 0. **7.** 1) $\approx 0{,}9397$; 4) $\approx 23{,}078$. **8.** $x\approx 8°$. **25-nji tema. 1.** 14 cm. **2.** 45°, 45°. **3.** $a\approx 6{,}691$; $b\approx 7{,}431$; $\beta\approx 48°$. **5.** cos²α. **7.** $a=4$ cm; $b=4\sqrt{3}$ cm, $\beta=60°$. **26-njy tema. 1.** $b=9$ cm, $\alpha=\beta=45°$. **2.** $c=12$ cm, $\alpha=60°$, $\beta=30°$. **5.** 0. **7.** $c=26$ cm. **27-nji tema. 3.** $a=7$ cm, $\alpha=\beta=45°$. **4.** $a=6\sqrt{3}$ cm, $b=6$ cm, $\beta=30°$. **5.** $a=5$ ñm (5-nji surat); $AC=2\sqrt{13}$ cm, $BC=3\sqrt{13}$ cm (6-njy surat). **6.** 168 cm.

III bap. 31-nji tema. 3. 1) III çärýek; 2) II çärýek; 3) IV çärýek; 4) I çärýek. **4.** 1) (–10; –1); 2) (0; –5,5); 3) (–2; 1). **5.** $B(-1; 5)$. **8.** 1) $D(3; 0)$; 2) $D(4; 5)$. **32–33-nji temalar. 2.** 1) 10; 2) 17; 3) 13. **3.** 1) $x_1=-2$; $x_2=6$. **4.** $P=16$. **5.** 1) $(x-7)^2+(y-11)^2=25$; 2) $(x+2)^2+(y-3)^2=1$. **6.**

1) (2; 5), $R=7$; 2) (–1; 5), $R=2$. **7.** 1) $C(3; -1)$, $R=4$; 2) $C(0; -5)$, $R=1$. **8.** 1) Deňýanly. **9.** 1) $(x-9)^2+(y-4)^2=49$; 2) $(x+3)^2+(y+4)^2=4$. **10.** 1) $C(7; -2)$, $R=5$; 2) $C(4; 0)$, $R=1$. **11.** 1) (5; –12) we (5; 12); 2) (–5; –12) we (5; –12). **34-nji tema.** **3.** 1) $2x-y+5=0$; 2) $x+y-7=0$; 3) $3x-2y+2=0$. **4.** $c=-3$. **5.** $a=b=\frac{1}{3}$. **6.** 1) (0; –1,5) we (–3; 0); 2) (0; 3) we (4; 0); 3) (0; –5) we (2,5; 0). **9.** $x+1=0$, $x-3y-8=0$, $x-y=0$. **35-nji tema.** **2.** 1) $\overrightarrow{DC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AO}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OC}$; 3) $\overrightarrow{CB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AD}$ we $\overrightarrow{DA}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AD}$; 5) $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$; 6) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$; 7) $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$. **36–37-nji temalar.** **5.** Hawa, ýerine ýetirilýär. **6.** $|\overrightarrow{AO}|=16$ cm. **7.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$. **9.** $\overrightarrow{AB}=-\vec{b}$; $\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{DA}=\vec{a}-\vec{b}$. **10.** $\overrightarrow{BF}=-2\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{EC}=-\vec{a}+2\vec{b}$; $\overrightarrow{EF}=-\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+2\vec{b}$. **38–39-njy temalar.** **4.** $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$. **5.** 1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. **7.** 1) (4; 5); 2) (–1; 4); 3) (0; 0). **8.** 1) 25; 2) 5; 3) 3. **9.** 1) (1; –2); 2) $(2m; 2n)$. **11.** $m=7$. **12.** $B(-2; -11)$. **40-nji tema.** **2.** 1) (–3; 4); 2) (–5; 12). **3.** 1) (–4; 10); 2) (0; 2); 4) (4: –10). **4.** 1) (3; 6); 2) (5; 3); 3) (–4; –3). **5.** 1) (6; 3); 2) (–6; 3); 3) (–2; 15). **6.** 1) $\vec{c}(-4;-4)$; 2) $\vec{c}(8;6)$. **7.** 1) $\vec{c}(-12;6)$; 2) $\vec{c}(-11;8)$. **8.** 1) $\vec{c}(-2;-1)$; 2) $\vec{c}(2;-13)$. **41-nji tema.** **1.** $CC_1=2$. **2.** $\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. **3.** (5; 12). **4.** $B(5; 5)$, $D(1; -1)$. **5.** $B(-5; 11)$. **8.** $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

IV bap. **45-nji tema.** **2.** 2) 0,0225 dm^2; 5) 6,25 m^2. **6.** 1) 4 esse artýar; 2) 9 esse kemelýär; 3) 28 cm^2-a artýar. **11.** 2) 3,6 dm; 3) 68 mm; 5) 80 dm. **13.** 359,12 ming km^2. **46–47-nji temalar.** **2.** 1) $P=65{,}8$ cm, $S=87$ cm^2; 3) $P=7{,}4$ dm, $S=3$ dm^2. **4.** $S=5000$ m^2. **5.** 1) $P=126$ cm, $S=920$ cm^2. **8.** 12 cm. **9.** 1) $S=500$ cm^2; 2) $a=12$ cm; 3) $h_a=5$ cm. **11.** 1) 1,6 esse artýar; 2) 6,25 esse kemelýär. **13.** 2) 280 cm^2; 4) 4,8 dm^2. **14.** $P=42$ cm. **15.** $S=280$ cm^2. **48-nji tema.** **2.** 1) 14 cm^2; 2) 150 cm^2. **3.** 4 cm. **4.** 5 : 1. **8.** 1) 756 cm^2; 2) 84 cm^2; 3) 192 cm^2. **10.** 60 cm. **11.** 7,5 dm^2. **49–50-nji temalar.** **2.** 1) 32 cm. **3.** 1) 512 cm^2; 2) 1,62 dm^2. **4.** 12 cm. **5.** 5 cm. **7.** 1) 1,35 dm^2; 2) 180 cm^2; 3) 8 cm^2. **8.** 1) 87 cm^2; 2) 14 cm. **10.** 1) $0{,}5a^2$ kw. birl. **11.** 360 cm^2. **12.** 1) 2,45 dm^2; 2) 238 cm^2; 3) 31,5 cm^2. **14.** 1) 1,44 m^2. **15.** 1) 140 cm^2. **51-nji tema.** **1.** 2125 kw. birl. **2.** $(a+b)\cdot c$. **3.** 144 cm^2. **5.** 16 kw. birl. **6.** 1) 20,8 km; 2) 8 km.

V bap. **55-nji tema.** **3.** AB we BD kesiji. **4.** 25 cm. **5.** 1) $R=5$ cm; 2) $R<5$ cm; 3) $R>5$ cm. **8.** CD. **56-njy tema.** **2.** 1) Töwerekler içki tarapdan bir-birine galtaşýar; 2) umumy nokada eýe däl, biri ikinjisiniň içinde ýatýar. **3.** 1) 10 cm; 2) 2 cm. **6.** 1) 144°; 2) 96°; 3) 210°; 4) 200°; 5) 260°; 6) 306°; 7) 276°. **7.** 1) 160°, 200°; 2) 80°, 280°. **8.** 70°. **9.** 1) 72°; 2) 60°; 3) 40°; 4) 36°; 5) 30°. **10.** 1) 15,6 cm; 2) 21 cm; 3) 1,6 dm. **57-nji tema.** **3.** $AC=10$ cm. **4.** 1) $\angle ACB=44°$; 3) $\angle AEP=100°$. **5.** 36°, 60°, 84°. **6.** 1) 100° ýa-da 80°; 2) 126° ýa-da 54°. **7.** $\angle BAC=20°$. **8.** 100°. **58-nji tema.** **3.** 220°. **4.** a) $x=45°$; b) $x=30°$; d) $x=90°$. **5.** 30°. **6.** 1) $\angle ABC=20°$; 2) $\angle ABC=60°$; 3) $\angle ABC=36°$; 4) $\angle ABC=54°$; 5) $\angle ABC=36°$. **7.** 1) 100°, 40°, 40°. **8.** 1) 144°; 2) 120°; 3) 40°; 4) 72°. **9.** 1) 128°; 3) 76°. **59-njy tema.** **3.** 4 cm. **6.** 8 cm. **9.** 10 cm. **11.** 90°.

VI bap. **1.** 38°, 158°, 44°, 120°. **2.** 52 cm. **3.** 48 cm. **4.** 1) 12 cm^2; 4,8 cm; 2) 108 cm^2; 14,4 cm. **6.** 44 cm. **7.** 10 cm. **9.** 3 cm. **10.** 180 cm^2. **13.** 60 dm, 14,4 dm. **14.** 30°, 150°, 150°, 30°. **17.** 9% kemelýär. **19.** 96 cm. **20.** 28 cm. **22.** 1) (1; –1); 2) (–2; 2). **23.** $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$ **25.** 60°. **26.** 144°. **27.** 72 cm. **28.** 12 cm, 4 cm. **29.** 1) 4 cm^2-a kemelýär; 2) 128 cm^2-a artýar.

MAZMUNY

UO‘K: 514(075)
KBK 22.151ya721

R 30

Rahimkariýew A.A.
Geometriýa 8: Umumy orta bilim berýän mekdepleriň 8-nji synpy üçin derslik. / A.A. Rahimkariýew, M.A. Tohtahodjaýewa. - Gaýtadan işlenen we doldurylan 4-nji neşir. — D.: O‘zbekiston, 2019. -160 s.

ISBN 978-9943-25-817-4

UO‘K: 514(075)
KBK 22.151ya721

ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA

GEOMETRIYA

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik

(Turkman tilida)

Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 4- nashr

ТОШКЕНТ — “MITTI YULDUZ” — 2019

Terjime eden — *K. Hallyýew*
Redaktor — *J. Metýakubow*
Suratçylar — *Ş. Rahimkariýew, H. Abdullaýew*
Tehniki redaktor — *T. Haritonowa*
Korrektor — *J. Metýakubow*
Sahaplaýjy — *H. Ho‘djyeva*

Neşirýat lisenziýasy AI №158, 14.08.2009
Çep etmäge 06.08 2019-njy ýylyň da rugsat edildi. Möçberi $70\times100^{1}/_{16}$.
Kegli 12. Times New Roman garniturasy. Ofset çep ediliş usuly.
Şertli çep listi 13,0. Neşir listi 10,0. 1067 nusgada çep edildi.
Buýurma № 19-136.

Dersligiň gaýtadan işlenip, neşire taýýarlanan original-maketi
«MITTI YULDUZ» JÇJ-ne degişlidir. Daşkent şäheri, Nowaýy köçesi, 30.

Özbegistan Respublikasynyň Prezidenti Administrasiýasynyň ýanyndaky
Habar we köpçülikleýin kommunikasiýalar agentliginiň «O‘zbekiston»
neşirýat-çephana döredijilik öýünde çep edildi. 100011, Daşkent, Nowaýy köçesi, 30.

Telefon: (371) 244-87-55, 544-87-20
Faks: (371) 244-87-55, 544-87-20.
e-mail: uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz
www.iptd-uzbekistan.uz

Kärendesine berlen dersligiň ýagdaýyny görkezýän jedwel

T/n	Okuwçynyň ady, familiýasy	Okuw ýyly	Dersligiň alnandaky ýagdaýy	Synp ýol-başçysynyň goly	Dersligiň tabşyrylan-daky ýagdaýy	Synp ýol-başçysynyň goly
1						
2						
3						
4						
5						

Derslik kärendesine berlip, okuw ýylynyň ahyrynda gaýtarylyp alnanda ýokardaky jedwel synp ýolbaşçysy tarapyndan aşakdaky baha bermek ölçeglerine esaslanylyp doldurylýar:

Täze	Dersligiň birinji gezek peýdalanmaga berlendäki ýagdaýy.
Ýagşy	Sahaby bütin, dersligiň esasy böleginden aýrylmandyr. Ähli sahypalary bar, ýyrtylmadyk, goparylmadyk, sahypalarynda ýazgylar we çyzyklar ýok.
Kanagatlanarly	Kitabyň daşy ýenjilen, ep-esli çyzylan, gyralary gädilen, dersligiň esasy böleginden aýrylan ýerleri bar, peýdalanyjy tarapyndan kanagatlanarly abatlanan. Goparylan sahypalary täzeden ýelmenen, käbir sahypalary çyzylan.
Kanagatlanarsyz	Kitabyň daşy çyzylan ýyrtylan, esasy böleginden aýrylan ýa-da bütinleý ýok, kanagatlanarsyz abatlanan. Sahypalary ýyrtylan, sahypalary ýetişmeýär, çyzylyp taşlanan. Dersligi dikeldip bolmaýar.

UO‘K: 514(075)
KBK 22.151ya721

Rahimkariýew A.A.

R 30 **Geometriýa 8:** Umumy orta bilim berýän mekdepleriň 8-nji synpy üçin derslik. / A.A. Rahimkariýew, M.A. Tohtahodjaýewa. - Gaýtadan işlenen we doldurylan 4-nji neşir. — D.: O‘zbekiston, 2019. -160 s.

ISBN 978-9943-25-817-4

UO‘K: 514(075)
KBK 22.151ya721

ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,
TOXTAXODJAYEVA MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA

GEOMETRIYA

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik

(Turkman tilida)

Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 4- nashr

ТОШКЕНТ — “MITTI YULDUZ” — 2019

Terjime eden — *K. Hallyýew*
Redaktor — *J. Metýakubow*
Suratçylar — *Ş. Rahimkariýew, H. Abdullaýew*
Tehniki redaktor — *T. Haritonowa*
Korrektor — *J. Metýakubow*
Sahaplaýjy — *H. Ho‘djyeva*

Neşirýat lisenziýasy AI №158, 14.08.2009
Çep etmäge 06.08 2019-njy ýylyň da rugsat edildi. Möçberi $70\times100^{1}/_{16}$.
Kegli 12. Times New Roman garniturasy. Ofset çep ediliş usuly.
Şertli çep listi 13,0. Neşir listi 10,0. 144 nusgada çep edildi.
Buýurma № 19-137.

Dersligiň gaýtadan işlenip, neşire taýýarlanan original-maketi
«MITTI YULDUZ» JÇJ-ne degişlidir. Daşkent şäheri, Nowaýy köçesi, 30.

Özbegistan Respublikasynyň Prezidenti Administrasiýasynyň ýanyndaky
Habar we köpçülikleýin kommunikasiýalar agentliginiň «O‘zbekiston»
neşirýat-çephana döredijilik öýünde çep edildi. 100011, Daşkent, Nowaýy köçesi, 30.

Telefon: (371) 244-87-55, 544-87-20
Faks: (371) 244-87-55, 544-87-20.
e-mail: uzbekistan@iptd-uzbekistan.uz
www.iptd-uzbekistan.uz